

جور دیگر باید دید

تمرین‌های متفاوت ریاضی

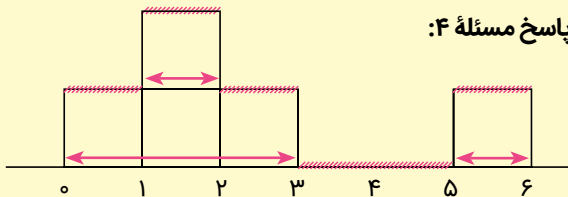
پاسخ‌ها

خسرو داودی، آرش رستگار

داده‌ها تصویری یا نماد باشند از نمودار دایره‌ای می‌توان کمک گرفت. مثلاً اینکه برنامه‌های علمی صدا و سیما در طول یک ماه هر کدام در چه شبکه‌ای پخش شده‌اند. می‌توان به هر برنامه لوگوی شبکه را نسبت داد که داده‌ای تصویری و هم داده‌ای نمادین است.

پاسخ مسئله ۳:

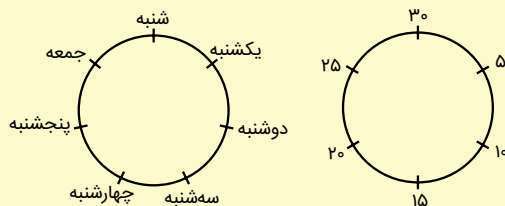
دسته‌بندی داده‌ها دقیقاً پاسخ به همین سؤال است.



پاسخ مسئله ۴:

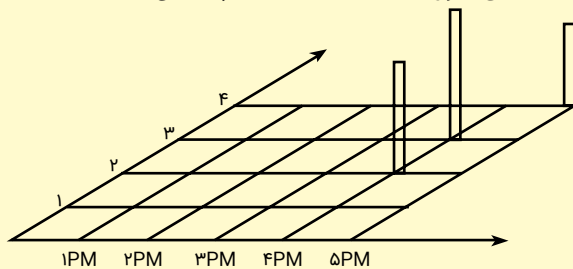
پاسخ مسئله ۵:

روی دایره اول روزهای هفته و روی دایره دوم روزهای ماه را قرار دهید.



پاسخ مسئله ۶:

نمودار تعداد ماشین‌های عبورکننده از یک اتوبان در بازه زمانی ۵ دقیقه‌ای حول ساعت A با تعداد سرنشینان B.



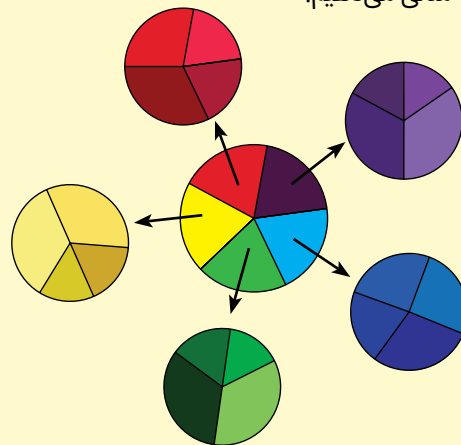
پاسخ مسئله ۷:



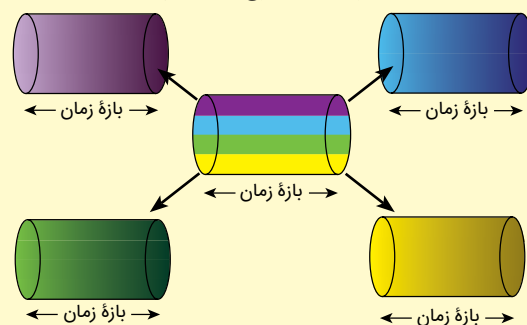
کتاب ریاضی هفتم - فصل هشتم، بردار و مختصات

پاسخ مسئله ۱:

مثالی برای نمودار دایره‌ای طراحی می‌کنیم اول برای زمان ثابت مدلی می‌دهیم.

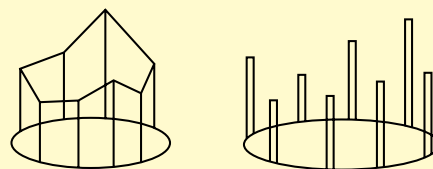


حال مدلی در بستر زمان مطرح می‌کنیم.



پاسخ مسئله ۲:

در نمودار دایره‌ای لازم نیست داده‌ها عددی باشند. بلکه برای داده‌های کیفی هم می‌توان نمودار دایره‌ای رسم کرد. اما در نمودار میله‌ای و نمودار خط شکسته تکرار مطالعه می‌شوند و به جای محور Xها باید یک دایره قرار داد. مانند شکل‌های زیر. گاهی نیاز به دسته‌بندی داده‌ها هم هست.



اگر داده‌ها پیوسته باشند، حتماً نیاز به دسته‌بندی هست. اگر

کتاب ریاضی هشتم - فصل هشتم، آمار و احتمال

پاسخ مسئله ۱:

همان طور که دقیقاً n زاویه وجود دارد که اگر آن‌ها را با خودشان n بار جمع کنیم زاویه مورد نظر روی صفر درجه قرار می‌گیرد، تقسیم هر زاویه بر n هم دقیقاً n جواب متمایز دارد.

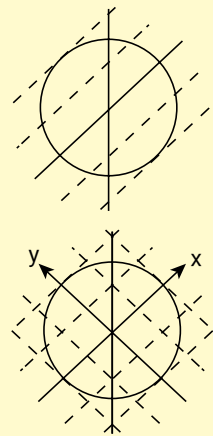
$$\frac{\alpha}{n} = K \frac{360^\circ}{n} + \text{جواب داده شده}$$

که در آن $K = 0, \dots, n-1$

مثلاً اگر $n=4$ با جمع 0° و 90° و 180° و 270° چهار بار با خودشان دوباره روی صفر درجه قرار می‌گیریم. پس تقسیم 28° بر ۴ دارای جواب‌های $7^\circ+0^\circ$ و $7^\circ+90^\circ$ و $7^\circ+180^\circ$ و $7^\circ+270^\circ$ می‌باشد.

پاسخ مسئله ۲:

موازی خط داده شده اگر خطوطی را روی شکل دوبعدی قرار دهیم روشن است که دقیقاً یکی از آن‌ها مساحت را نصف می‌کند. اگر این خطوط را در دو جهت محور x ‌ها و y ‌ها رسم کنیم تا همدیگر را در مبدأ مختصات قطع کنند، یعنی تقاطع این دو خط منصف عمود بر هم را روی مبدأ مختصات قرار دهیم، حال باید نشان دهیم هر خطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد،



مساحت را به دو نیم می‌کند. نشان دهید این چهار قسمت بریده شده توسط این دو خط مساحت برابر دارند و خط گذرنده از مرکز ثقل‌های قسمت‌های روبه‌رو از مبدأ می‌گذرند. همین روند را ادامه دهید. در مورد شکل‌های سه‌بعدی به‌طور مشابه عمل کنید.

پاسخ مسئله ۳:

میانگین وزن دار n عدد $x_1, \dots, x_n$ با وزن‌های $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ را به صورت $\frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$ تعریف می‌کنیم.

این مفهوم در حالتی می‌تواند به کار برود که داده‌های $x_1, \dots, x_n$ از اهمیت مساوی برخوردار نباشند. می‌توان به مقادیر یک تابع اهمیت نسبت داد. مثلاً اهمیت عدد x را x^2 در نظر گرفت. در این صورت میانگین $x_1, \dots, x_n$ می‌شود.

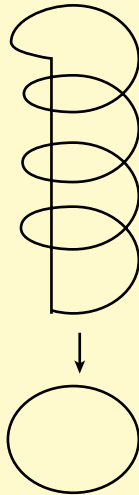
$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + \dots + x_n}$$

پاسخ مسئله ۴:

$$\frac{i_1 \left(\frac{x_1 + \dots + x_{i_1}}{i_1} \right) + i_2 \left(\frac{x_{i_1+1} + \dots + x_{i_1+i_2}}{i_2} \right) + \dots + i_k \left(\frac{x_{i_1+\dots+i_{k-1}+1} + \dots + x_{i_1+\dots+i_k}}{i_k} \right)}{i_1 + \dots + i_k} = \frac{x_1 + \dots + x_{i_1+\dots+i_k}}{i_1 + \dots + i_k}$$

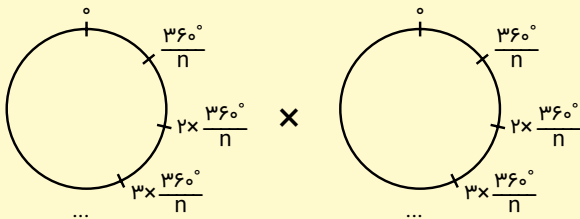
پاسخ مسئله ۵:

میانگین روی دایره مثلثاتی خوش تعریف نیست. اما اگر این دایره را n بار روی خودش بپیچانیم مفهوم میانگین نقطه‌ای یگانه را به دست خواهد داد.



پاسخ مسئله ۶:

چنبه را به صورت حاصل ضرب «دایره x دایره» بنویسید.



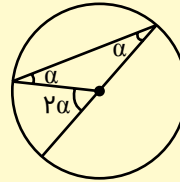
برای $\frac{360^\circ}{n}$ دقیقاً n جواب روی هر یک وجود دارد. پس روی (دایره x دایره) دقیقاً $n \times n$ نقطه برای $\left(\frac{360^\circ}{n}, \frac{360^\circ}{n} \right)$ می‌تواند جواب باشد که از زوج مرتب‌هایی تشکیل شده که هر مؤلفه یکی از جواب‌های $\frac{360^\circ}{n}$ می‌باشد.

کتاب ریاضی هشتم - فصل نهم، دایره

پاسخ مسئله ۱:

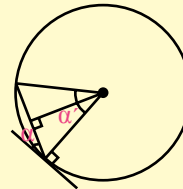
در اثبات کلاسیک از شکل الف کمک می‌گیریم.

◀ شکل الف



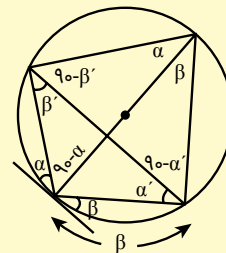
اگر به روشی دیگر ثابت کنیم هر دو زاویه محاطی روبه‌رو به یک کمان درخور با هم برابرند، می‌توان از حالت حدی کمک گرفت. شکل (ب) دو زاویه α و α' برابرند چون ضلع‌های آن‌ها دوه‌دو بر هم عمودند.

◀ شکل ب



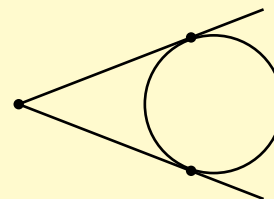
پاسخ مسئله ۲:

از شکل زیر کمک بگیرید و نشان دهید زاویه‌ای که یک ضلع آن از مرکز دایره می‌گذرد و روبه‌رو به کمان درخور زاویه β است، با همان زاویه β برابرست. این‌طور از اثبات به کمک زاویه‌های مرکزی فرار کرده‌اید.



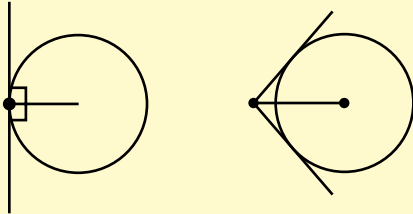
پاسخ مسئله ۳:

الف) حالت حدی که یک دایره شعاعش صفر باشد و به نقطه تبدیل شود، این‌طور فرمول‌بندی می‌شود که از نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره خارج می‌شود که با هم برابرند. پس حالت (ب) صورت حدی حالت الف است.

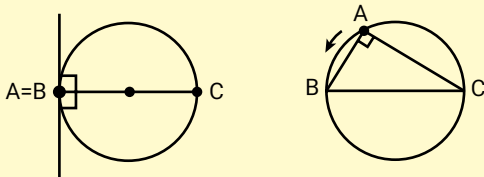


ب) حالت حدی قسمت (ب) وقتی است که نقطه به مرز

دایره میل کند و روی محیط آن قرار گیرد و دو مماس به دو نیم خط بدل می‌شوند.



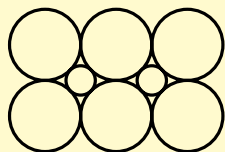
ج) در حالتی که سه رأس مثلث به یک نقطه میل می‌کنند. (د)



ه) در حالتی که $A=B$ داریم $AB=0$ و رابطه تبدیل می‌شود به $AB \times CD + AD \cdot BC = AC \cdot BC$ که با توجه به $A=B$ برقرار است.

پاسخ مسئله ۴:

الف)



می‌توان الگوی بالا را تکرار کرد و در داخل هر دایره هم چهار دایره مماس و مساوی قرار داد مانند شکل مقابل



و بعد مانند شکل روبه‌رو در تمامی نواحی دایره جدیدی کاشت

اما با این کار همه نقاط صفحه پر نمی‌شود.

ب) کافیهست همه دایره‌های به مرکز مبدأ را در نظر بگیریم. ج) نقطه‌ای مانند C روی قطر دایره به فاصله نامساوی از دو سر قطر در نظر بگیرید.

به هر نقطه P روی AC نقطه‌ای مانند Q روی CB نسبت

$$\frac{AP}{PC} = \frac{BQ}{QC}$$

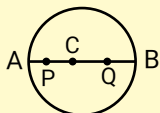
دهیم که هرچه P به C نزدیکتر شود همین اتفاق برای Q می‌افتد.

بیرون AB روی همان امتداد، با همین فرمول تناظر را ادامه

دهید. دایره‌های به قطر PQ آنچه می‌خواهید را برآورده

می‌کنند. بررسی کنید آیا این دایره‌ها شرط (د) را هم برآورده

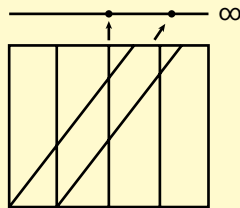
می‌کنند؟



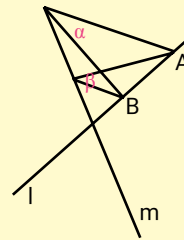
ه) در اینترنت مفهوم دسته دوایر را جست‌وجو کنید، اگر

نیافتید پاسخ مسئله ۶ را بخوانید.

در این مدل از صفحه یک خط در بی‌نهایت هست که آن هم با نقطه‌ای در بی‌نهایت آن بسته می‌شود و خود خط در بی‌نهایت از نقاط بی‌نهایت خط‌های صفحه تشکیل شده‌است. خطوط موازی روی نقطه مشترکی از خط در بی‌نهایت به هم می‌رسند.



نکته جالب در این هندسه این است که اگر روی نقاط در بی‌نهایت بایستیم، هندسه صفحه مانند این است که در وسط یک صفحه معمولی ایستاده باشید. دایره عظیمه روی یک کره بسیار شبیه فضای افکنشی رفتار می‌کنند. در واقع، اگر نقاط روبه‌رو قطری از یک کره را با هم یکی بگیریم، همان فضای افکنشی به دست می‌آید و دایره عظیمه به خطوط فضای افکنشی تبدیل می‌شوند.



پاسخ مسئله ۵:

الف) روشن است که این حکم برقرار نیست.

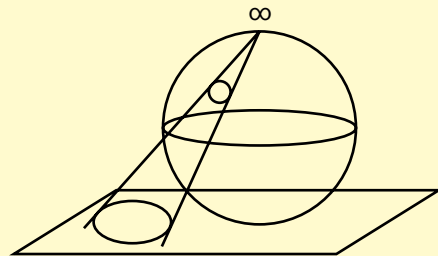
ب) حالت عدم تقاطع وجود ندارد.

ج) حالت عدم تقاطع وجود دارد و حالت تقاطع دابل وجود ندارد.

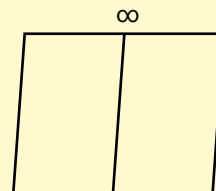
د) حالت عدم تقاطع وجود دارد و تقاطع دابل هم. اما دو تقاطع متمایز پیش نمی‌آید.

پاسخ مسئله ۶:

مثالی در تصویر گنج نگاشتی دیده می‌شود تصویر هر دایره روی کره، یک دایره خواهد بود. اما دایره عظیمه به خط تصویر می‌شود. پس خانواده‌ای از دایره تودرتو که به دایره عظیمه میل می‌کنند به خانواده‌ای از دایره تودرتو که به خط میل می‌کنند نگاشته می‌شوند.



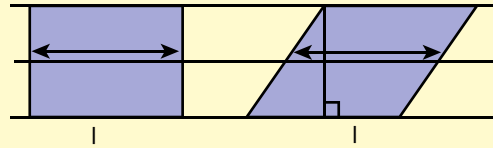
خطی که با اضافه کردن نقطه در بی‌نهایت به یک مسیر بسته تبدیل می‌شود مرکز ندارد. برای مطالعه بیشتر، در مورد مفهوم فضای افکنشی مطالعه بفرمایید.



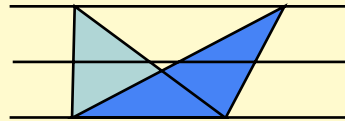
کتاب ریاضی نهم- فصل هشتم، حجم و مساحت

پاسخ مسئله ۱:

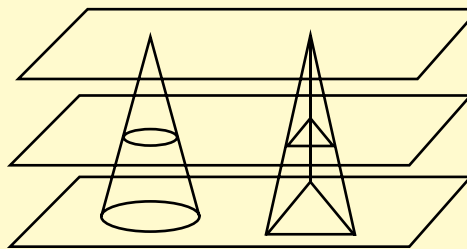
(الف)



(ب)



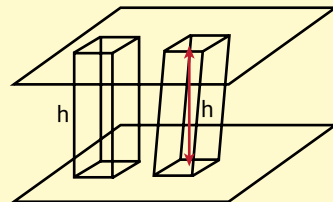
(ج)



اگر دو شکل بین صفحه‌های موازی باشند و هر مقطع آن‌ها با صفحه موازی این دو صفحه مساحت برابر داشته باشد. این دو شکل حجم برابر دارند.

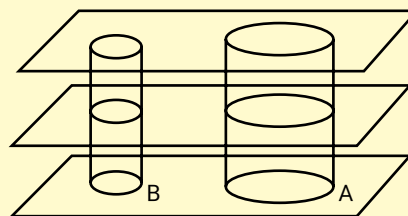
پاسخ مسئله ۲:

(الف)



(ب) پاسخ این قسمت در کتاب درسی موجود است.

پاسخ مسئله ۳:



اگر دو شکل A و B بین دو صفحه موازی محدود باشند و هر مقطع موازی با این صفحات شکل A را در مساحتی λ برابر شکل B قطع کند. حجم شکل A، λ بار بزرگتر از حجم شکل B خواهد بود.

پاسخ مسئله ۴:

محیط دایره $2\pi r$

قاعده مثلث = نصف محیط دایره πr

مساحت نیم دایره = مساحت مثلث = نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع $\frac{1}{2} \pi r^2$

مساحت دایره πr^2

اما همین استدلال در مورد بیضی به تناقض می‌رسد و دو فرمول مختلف برای مساحت بیضی می‌دهد.

پاسخ مسئله ۵:

سطح جانبی کره $4\pi r^2$

مساحت قاعده مخروط = نصف سطح جانبی کره $2\pi r^2$

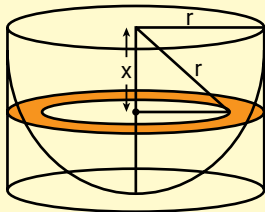
حجم نیمی از کره = حجم مخروط = ثلث مساحت قاعده در ارتفاع =

$$\frac{2}{3} \pi r^2 = \frac{1}{3} r \times 2\pi r^2$$

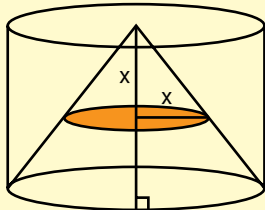
حجم کره $\frac{4}{3} \pi r^3$

اگر فرمول حجم کره را می‌دانستیم، فرمول سطح جانبی کره از روی آن به دست می‌آمد. رجوع کنید به پاسخ مسئله ۶.

پاسخ مسئله ۶:



اگر سطح مقطع با فاصله x از دایره عظیمه کره باشد، شعاع دایره درونی قسمت هاشورخورده $\sqrt{r^2 - x^2}$ و شعاع دایره بیرونی r و لذا مساحت قسمت هاشورخورده برابر $\pi r^2 - \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2 = \pi x^2$ خواهد بود.



شعاع قسمت هاشورخورده از مخروط برابر همان x خواهد بود و لذا قسمت هاشورخورده از مخروط مساحتش πx^2 و برابر قسمت هاشورخورده بالاست. بنابر اصل کاوالیری

حجم نیم کره + حجم متمم نیم کره = حجم استوانه = مساحت قاعده $\times$ ارتفاع

حجم نیم کره + حجم مخروط =

$$r \times \pi r^2 = \frac{1}{3} r \times \pi r^2 + S \Rightarrow S = \frac{2}{3} \pi r^3$$

پس فرمول حجم کره به دست می‌آید.