

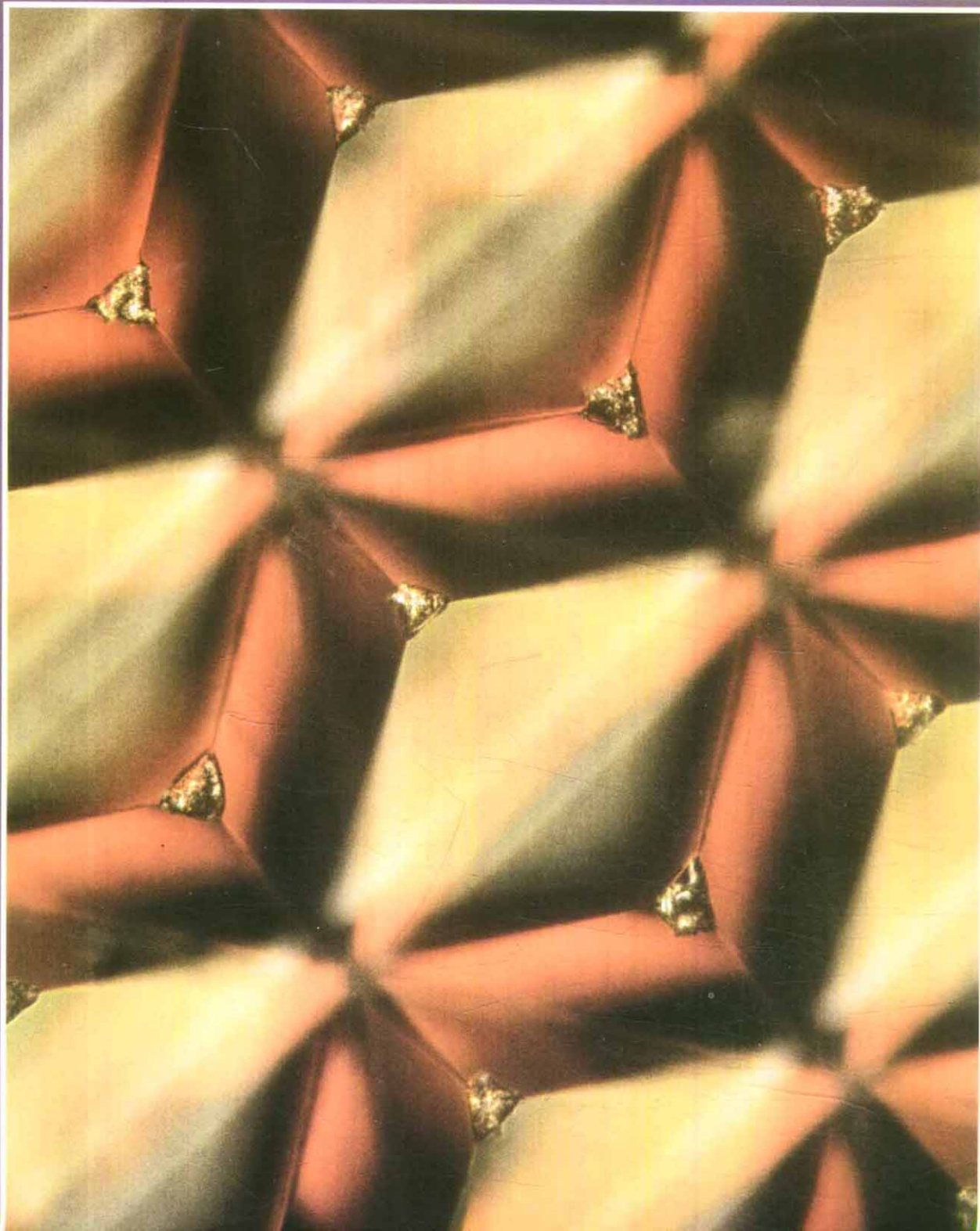


۲۸

مجله ریاضی
چراغ

برای دانش آموزان دبیرستان

سال هشتم، شماره چهارم، بهار ۱۳۷۸، بها ۲۰۰۰ ریال



انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

- صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه □ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
□ سردبیر: حمیدرضا امیری □ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
□ اعضای هیأت تحریریه: آقایان: □ حمیدرضا امیری □ محمد هاشم رستمی □ احمد قندهاری □ میرشهرام صدر
□ سید محمد رضا هاشمی موسوی □ غلامرضا یاسی پور (با تشکر از همکاری ارزنده آقای پرویز شهریاری)
□ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی □ طراح گرافیک: امیر بابایی □ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

- | | | | |
|----|--|----|---|
| ۴۴ | در باغ تجربه ها/ نشستی با استاد محمد صفایی یزدی | ۱ | حرف اول |
| ۴۹ | مکان هندسی (قسمت هفدهم)/ محمد هاشم رستمی | ۲ | از تاریخ پیاموزیم (۲)/ پرویز شهریاری |
| ۵۵ | بررسی قضیه های مشتق و کاربردهای آنها (قسمت دوم)/ محمد صادق عسگری | ۷ | نگاشتهای خطی (قسمت سوم)/ حمیدرضا امیری |
| ۵۹ | مربعهای فوق جادویی/ مهناز پاک خصال | ۱۱ | تاریخچه مجله های ریاضی ایران (۲۷)/ غلامرضا یاسی پور |
| ۶۲ | معمّاهایی با ماهیت ریاضی (قسمت دوم)/ هوشنگ شرقی | ۱۵ | تفکر الگوریتمی، هنر برنامه نویسی/ عبدالحسین مصحفی |
| ۶۶ | معرفی کتاب | ۲۱ | تحقیقی در باره نقش تاریخ ریاضیات در آموزش ریاضی |
| ۶۸ | خم پروانه/ کریم احمدی دلیر | | میر شهرام صدر |
| ۷۱ | آنچه از دوست رسد... | ۲۶ | کاربرد ریاضی در علوم و شگفتیهای زمین (قسمت دوم)/ شادی دلکش رودسری |
| ۷۲ | مسأله مسابقه ای | ۳۰ | آموزش ترجمه متون ریاضی (۲۳)/ حمیدرضا امیری |
| ۷۳ | پرسشهای چهار گزینه ای | ۳۵ | مقاله های کوتاه از مجله های ریاضی معتبر جهان (۲۵)/ غلامرضا یاسی پور |
| ۷۹ | پاسخ پرسشهای چهار گزینه ای برهان ۲۷ و ۲۸ | | نابرابریها (قسمت چهارم)/ میر شهرام صدر |
| ۸۸ | جوابهای تفریح اندیشه | ۳۸ | |

■ سال هشتم، بهار ۱۳۷۸، شماره چهارم.

تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ مقاله های مجله با رسم الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقاله های رسیده مسترد نمی شود.

■ هیأت تحریریه در حک و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
■ مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

استفاده از مطالب مجله در کتابها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۸۸۹۶۷۶۵-۶، ۸۸۹۶۸۷۱، ۸۸۰۴۵۶۸ (فکس)، ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹
تلفن امور مشترکین: ۸۸۰۰۳۲۴-۹

کر

۷۳۳/۱

حرف اوّل

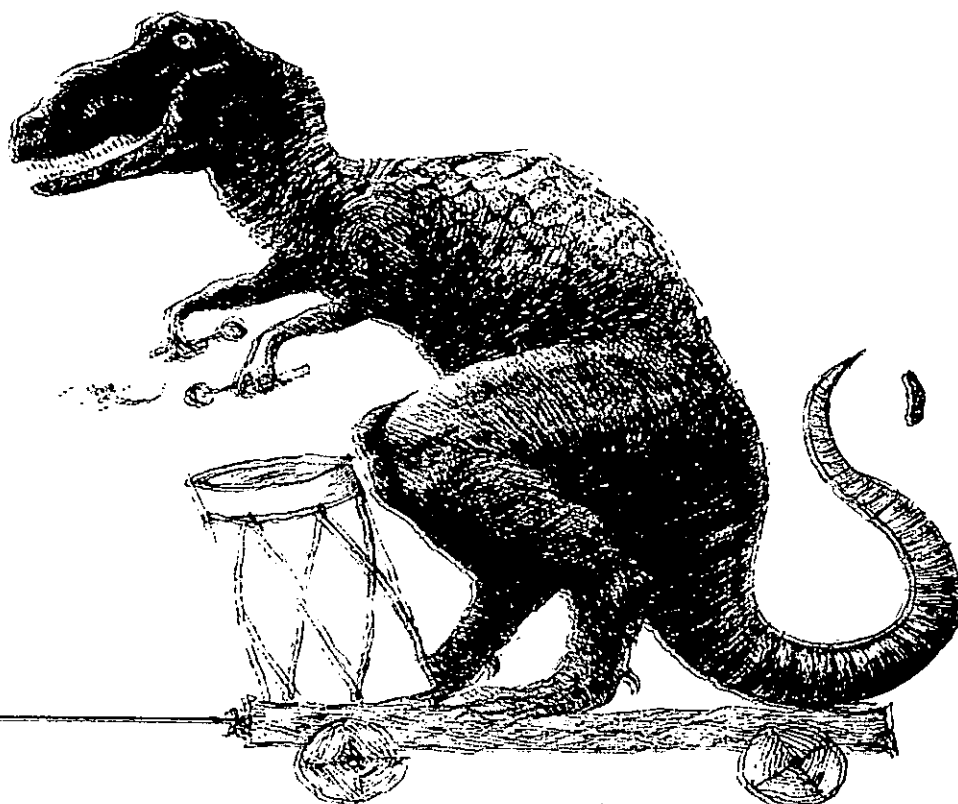
یکی از افتخارات ما شیعیان، این است که در عصر غیبت امام عصر (عج) زندگی می‌کنیم، امام همامی که غیبتش بر اثر خواست و حکمت خدا، تاکنون ادامه داشته است و پیروان و منتظران راستین ایشان، همواره امید به سپری شدن این دوران داشته و دارند.

شاید یکی از مواردی که در ظاهر، دوران ما را از زمان حیات دیگر پیشوایان معصوم (سلام...) علیهما) جدا می‌کند همین مسأله غیبت است که در آن زمان، نمونه و الگویی برای افراد جامعه در بین آنها زندگی می‌کرده و در این دوران حضور فیزیکی و قابل لمس برای همگان وجود ندارد؛ اما از زمان غیبت امام، تاکنون همواره شاگردان واقعی و شیعیان راستین مکتب سرخ علوی در هر دوره‌ای در بین امت زیسته‌اند و نشان داده‌اند که سیره ائمه (ع) همواره زنده و پابرجاست. از جمله شاگردان باکفایت که سیره وی از سرچشمه زلال ولایت آبیاری شده و بحق، آینه تمام نمای یک مسلمان واقعی بوده، وجود مقدس حضرت امام خمینی (ره) است.

زندگی، افکار و به طور کلی سیره ایشان نمایانگر این مطلب است که با وجود غیبت امام عصر (عج) و فاصله زمانی با ائمه اطهار (ع) مانع و حائلی برای الگو قرار دادن ایشان نبوده و نیست.

امسال بنا بر فرموده مقام معظم رهبری، سال امام خمینی (ره) نامگذاری شده است تا به تجزیه و تحلیل ابعاد وجودی و زندگی اجتماعی، سیاسی امام راحل پرداخته شود؛ این بدان جهت است که برای عزیزانی که بر اثر غفلت یا به خاطر آن که سن آنها اجازه نمی‌داده، امام به عنوان الگویی از یک شیعه اهل بیت (ع) معرفی شود تا همگان بدانند که حتی در زمان غیبت امام عصر (عج) نیز می‌توان امام گونه زندگی کرد.

سراسر زندگی پرافتخار و تأثیرگذار امام، مملو از خاطرات پندآموز و سازنده است که امیدوارم با بهره جویی از تمام زوایا و ابعاد زندگی این بزرگوار بتوانیم همچون ایشان پیرو واقعی مکتب اهل بیت (ع) باشیم. ان شاء...



دنباله مقاله درباره تاریخ ریاضیات

پس از این مقدمه ها، می خواهم به جنبه هایی توجه کنم که اهمیت تاریخ ریاضیات از دیدگاه دانش امروز روشن شود. در ضمن، ادعا نمی کنم، توانسته ام بهترین جنبه ها و نمونه ها را انتخاب کنم.

روشن است که دانش زمان ما بی اندازه گسترش یافته است. در وضع کنونی، نه تنها یک نفر این توانایی را ندارد که به همه جنبه های مختلف و ممکن ولو یک رشته از دانش بپردازد؛ بلکه از دنبال کردن همه پژوهشها در زمینه کار خود هم، ناتوان است. آن گونه که کسانی مثل لئوناردو داوینچی، لئونارد اولر و لومونسوف، بر دانش زمان خود مسلط بودند، برای زمان ما بکلی ناممکن است. کافی است بگویم، هر سال بیش از ۴۰۰۰۰ مقاله درباره شیمی، بیش از ۳۰۰۰۰ مقاله درباره فیزیک و نزدیک به ۱۰۰۰۰ مقاله درباره ریاضیات در سراسر جهان منتشر می شود [به یاد داشته باشیم، این آمار مربوط به سال ۱۹۶۳ که گنه دنگو این مقاله را نوشته است، می شود]؛ تازه آنچه از موضوعهای علمی باید دنبال شود، به این جا ختم نمی شود؛ زیرا فیزیک و شیمی، از بسیاری جهتها به صنعت و ریاضیات مربوطند و ریاضیات هم به صنعت، فیزیک، شیمی، زیست شناسی و دیگر

دانشها مربوط می شود. جامعه بشری راه بیرون رفتن از این وضع را در این دیده است که دانشمندان به شاخه های تخصصی (و تا اندازه ای محدود) از دانش بپردازند. وجود ویژه کاری برای دانشمندان و پژوهشگران، اثر فوق العاده ای داشته است و یکی از دلیلهای غیرمستقیم تکامل برق آسا و توفانی دانش در ۱۰۰-۱۵۰ سال اخیر بوده است. بی تردید، بدون این محدودیت متخصص، نمی توان سرعت تکامل دانش را در زمان ما حفظ کرد. ولی این متخصص، در عین حال، یک خطر جدی را در خود پنهان دارد. امکان بررسی علمی درباره همه دانشها، به عنوان یک مجموعه واحد، از بین می رود، دید دقیق علمی نقصان می پذیرد و بستگیهایی که بین قانونهای دانشهای گوناگون وجود دارد، در برده ابهام می ماند. تاریخ دانش، تا حد زیادی می تواند و باید این محدودیت را از بین ببرد و از ناهمواری تکامل دانشها، جلوگیری کند.

بی فایده نیست، مفهوم تاریخ ریاضیات را، از جهت دیگری هم روشن کنیم. تاریخ دانش، بویژه می تواند، درک محدود و کوتاه نظرانه نسبت به ریاضیات را از بین ببرد. ریاضیدان نباید ریاضیات را تنها به عنوان مجموعه ساده ای از قضیه ها و تعریفهای جداگانه، بلکه باید به صورت دستگاه به هم پیوسته ای از معرفت علمی ببیند. توجه به این امر، برای آینده دانش، مهم است که

از تاریخ پیاموزیم (۲)

● پرویز شهریاری



برای پژوهش، بلکه در ضمن به عنوان عامل اساسی پیشرفت کارهای عملی شناخته شده است، و حالا می توان دوباره پرسید: چه نیرویی در ریاضیات است که آن را برای روشن کردن روندها و پدیده های طبیعت و سیر صنعت توانا می سازد؟

به این پرسش، پاسخهای زیادی داده شده است؛ ولی بیشتر آنها قانع کننده نیست. برای مثال، به دو نمونه از این گونه پاسخها اشاره می کنیم.

در یکی از مقاله های گروه ریاضیدانان فرانسوی، که بخشی از کارهای خود را به نام مستعار «نیکل بورباکی» منتشر می کنند، این طور داوری شده است: «... روشن نشده است و شاید هرگز روشن نشود و همچون معمایی حل نشدنی باقی بماند که چرا از نتیجه گیریهای ریاضیات می توان در عمل استفاده کرد؟»

ریاضیدان مشهور دیگر فرانسوی «پی یو بوترو»، کاربردی بودن ریاضیات را، تنها یک تصادف می داند. به نظر او «... اگر ریاضیات به تقریب در همه حالات، با تجربه و آزمایش سازگار است، مربوط به ویژگیهای درونی ریاضیات نیست؛ بلکه تنها ناشی از اوضاع و احوال بیرونی آن است. معلوم است که دانش ساده ای مثل ریاضیات، می تواند نمودهای طبیعی را تفسیر کند و این تصادف خوبی است که تضاد و تعارض را پدید نمی آورد».

مفهومهای ریاضی از کجا گرفته شده است، چه کمکی می تواند به دانشهای دیگر بکند، توانایی ریاضیات در چیست، به چه مناسبت دانشی که با فیزیک، شیمی، زیست شناسی، اقتصاد و صنعت بستگی مستقیم ندارد، می تواند بخوبی و به اندازه کافی آنها را تشریح کند و حرکت تکاملی این پدیده ها را در جریان زمان، به طور قانع کننده و از قبل پیش بینی کند؟ شک نیست که طرح این مسأله ها در زمان ما، اهمیت فلسفی بی اندازه ای دارد.

اگر به دنیای ماشینی معاصر نظری بیندازیم، متوجه می شویم یک محصول تازه هم وجود ندارد که بتواند بدون محاسبه های مقدماتی در تولید وارد شود. می دانیم نظریه ریاضی پرواز که در اثر تلاشهای بسیاری از دانشمندان و پیش از همه، ژوکوسکی پدید آمد، تا چه اندازه در تکامل هواپیما تأثیر داشت. پرتاب ماهواره ها، نتیجه کوشش دانشمندان زیادی بود، ولی بدون محاسبه هایی که بر مبنای ریاضیات امروزی قرار دارد، تصور انجام آن هم، ناممکن بود. سرانجام، از خود کار کردن تولید یاد می کنیم که در زمان ما، به صورت رشته ای از صنعت درآمد است. برای این که به عنوان نمونه، صنعت تصفیه و پالایش نفت خودکار شود، باید قبل از همه، جریان کاتالیز کردن و آلکیلی کردن را به زبان ریاضی درآورد. اکنون دیگر ریاضیات، نه تنها به عنوان وسیله لازم



دورهٔ رنسانس، به صورتی گسترده از شبکه‌های مستطیلی برای شبیه‌سازی استفاده می‌کردند. از این گذشته، در سدهٔ دوم پیش از میلاد هم، در نوشته‌های خود برای تعیین مکان جغرافیایی، از طول و عرض استفاده می‌کرد. آیا لازم است گفته شود که به کار بردن طول و عرض، چیزی جز استفاده از دستگاه مختصات در روی سطح زمین نیست. به این ترتیب، نزدیک به دو هزار سال پیش از دکارت، نه تنها دستگاه مختصات داده شده بود؛ بلکه از آن در جغرافیا و اخترشناسی هم استفاده می‌کردند. از این گذشته، به نظر می‌رسد استادکاران معمار مصری، هنرمندان گمنام دوران سلطنت میانه، خیلی پیش از بطلمیوس، از اندیشهٔ مختصات قائم استفاده می‌کرده‌اند. در یکی از مقبره‌های قدیمی مصر، محلی باقی مانده است که کارهای مربوط به دیوارهای آن ناتمام است. روی دیوارها، دستگاه محورهای عمود بر هم دیده می‌شود که صفحهٔ دیوار را به مربعهایی تقسیم می‌کند. همچنین شکلی وجود دارد که به وسیلهٔ شبکهٔ مختصات، به بخشهایی تقسیم شده است. استادکار، برای این که شکل را روی دیوار رسم کند، با استفاده از اندیشهٔ دستگاه مختصات قائم، نقطه‌های آن را در شبکه نشانه گذاشته است. همین نمونه نشان می‌دهد که آگاهی از تاریخ دانش، می‌تواند به بشر یاری رساند تا نیروی خود را صرف کشف آنچه بارها کشف شده است، نکند.

در سال ۱۹۵۱، به مناسبت صد و پنجاهمین سال تولد ریاضیدان مشهور، م. اوستروگراسکی، سندهای شخصی او را بررسی کردند. بین انبوه نوشته‌ها، دو تکه کاغذ پیدا شد که به خط خود اوستروگراسکی بود. بررسی دقیق نوشته‌ها نشان داد که اوستروگراسکی چند روز پیش از مرگ خود، توانسته بود دو الگوریتم بسیار جالب برای شناخت عددهای گنگ کشف کند. در آنها از رشته‌های خاصی استفاده شده بود که با سرعت همگرا (متقارب) می‌شدند. نظریهٔ کلی این الگوریتمها در این یادداشتها نیامده بود؛ در آنها، اصل اندیشه و روش استفاده از آن برای محاسبهٔ لگاریتم عدد ۱۷ طرح ریزی شده بود. ا. یا. رمز، در یکی از مقاله‌های خود، که به بررسی الگوریتمهای اوستروگراسکی اختصاص داشت، روشن کرد که الگوریتمهای اوستروگراسکی،

خود این نتیجه‌گیری، که امکان کاربرد ریاضیات در عمل تصادفی است، نمی‌تواند تصادفی باشد. این طرز تفکر، نتیجهٔ منطقی استنباط متداولی است که دربارهٔ پدید آمدن مفهومهای ریاضی و دربارهٔ تکامل قانونها و اصلهای آن وجود دارد. بنابراین استنباط، مفهومهای ریاضی به وسیلهٔ عقل انسانی و به طور آزاد و در ذهن پدید آمده‌اند، یا بهتر است بگوییم، آفریده شده‌اند؛ از این مفهومها و ویژگیهای آنها، مفهومهای تازهٔ ریاضی طرح می‌شود و دانشمندان، بدون این که تحت تأثیر عامل یا عاملهای بیرونی باشند، با ارادهٔ آزاد خود، آنها را شرح می‌دهند.

تاریخ ریاضیات می‌تواند این نظریه‌های نادرست را درهم بشکند. تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که مفهومهای ریاضی در چه دورهٔ طولانی و پرنشیب و فرازی شکل گرفته است و چگونه نتیجه‌گیریهای مبهم و وابسته، تحت تأثیر نیازهای زندگی و عمل، در آغاز به مفهومهای محدود ناقص و سپس، به دلیل نیازهای پیچیدهٔ فعالیتهای تولیدی، جنگ و دانش و هنر، تکامل بعدی خود را به دست آورده است. این گونه سیر مفهومهای ریاضی، در زمان ما هم قطع نشده است و تحت تأثیر نیازهای جامعه، در همهٔ جنبه‌های آن، ادامه دارد. بنابراین، به این نتیجه می‌رسیم که تاریخ ریاضیات می‌تواند به قوام گرفتن نظریهٔ درست فلسفی دربارهٔ ریاضیات، به روشن شدن بستگی آن با مسأله‌های مربوط به پدیده‌های طبیعی و به موقعیت آن در مجموعهٔ دانش بشری، به طور جدی یاری کند.

در این جا می‌خواهم از نمونه‌هایی یاد کنم که چگونه در طول زمان، اندیشهٔ آدمی پخته می‌شود و سپس به صورت راهنمایی در ریاضیات درمی‌آید. امروز کشف اندیشهٔ مربوط به دستگاه مختصات را از آن رنه دکارت، ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی می‌دانند. این ادعا در همهٔ کتابهای مربوط به هندسهٔ تحلیلی تکرار شده است. دربارهٔ اهمیت این مفهوم هم، برای آنالیز ریاضی، نظریهٔ تابعها، مکانیک و همهٔ دانشهای تجربی و صنعت، هیچ تردیدی نیست.

اگر تاریخ دانش را بدرستی بررسی کنیم، متوجه می‌شویم اندیشهٔ دستگاه مختصاتی، تاریخی بمراتب غنی‌تر از این دارد و باید آن را در طول سده‌ها و در ژرفای تاریخ جست‌وجو کرد. می‌دانیم نقاشان



نوزدهم سودمند بوده است. گاه وقت و نیروی زیادی در این راه به هدر می‌رود که روشهای مصنوعی حل گروهی از مسأله‌های خاص را بیاموزند؛ به این انگیزه که تصور دانش‌آموز گسترش یابد یا ویژگیهای روانی و ذهنی او پرورش داده شود. درواقع، همه اینها به این دلیل است که اسیر سنتهای گذشته هستیم. به یاد بیاورید در سالهای نخست آموزش چه وقت زیادی برای حل مسأله‌های مختلف و انتزاعی حساب و گروه‌بندی آنها صرف می‌شود. پسران و دختران ده، یازده ساله باید راه حل نمونه‌های پیچیده و مصنوعی مسأله‌ها را به‌خاطر بسپارند؛ تنها به این دلیل که نباید از مقدمه‌های ساده جبر استفاده کنند. و بعد، وقتی پس از یکی، دو سال، دانش‌آموز با جبر آشنا می‌شود و می‌بیند که می‌توان همین مسأله‌ها را بسادگی و بدون دشواریهای معمای حل کرد، به‌طور طبیعی این پرسش برایش مطرح می‌شود که: به چه مناسبت در سالهای پیش، این همه عذاب می‌کشیدیم؟ چرا زودتر ما را با روش حل معادله یک مجهولی درجه اول آشنا نکردند؟ در آن صورت، چه قدر آموزش ریاضیات برای ما جالبتر و ساده‌تر می‌شد! موقعیتی بکلی بی‌معنا و غیرعادی است که آن را می‌توان تنها به این نمونه مقایسه کرد.

در یک مزرعه، تراکتورهای عالی و جدید موجود است. سوخت به اندازه کافی ذخیره شده است. کسانی هم که بتوانند از این تراکتورها استفاده کنند، وجود دارد. ولی شورای مزرعه، شخم زدن با تراکتور را مجاز نمی‌داند؛ زیرا دهقانان باید پیش از کار با امکانهای تازه، با شیوه کار انسانهای نخستین آشنا شوند و مدتها با روش آنها زمین را شخم کنند. زمانی بود که زمینها با گاواهن هم شخم نمی‌شد و با کلنگ و بیل زمین را می‌کندند. پس اکنون هم اجازه بدهید دهقانان یکی، دو سالی از این وسیله آزمایش شده کهن استفاده کنند و تنها بعد از این دوره، به گاواهن روی آورند. البته شما در کشتزارها به چنین دستورهای برنمی‌خورید؛ ولی در میان مریبان و برنامه‌نویسان، آدمهایی که این‌گونه دستورها را می‌دهند، فراوانند. اینها هنوز هم، برای آموزش ریاضی عقیده دارند باید اول و برای مدتی از کلنگ یا چوب نوک تیز استفاده کرد! مثل این است که در گذشته، هرگز تلاشی برای ساده‌تر کردن روش حل مسأله‌های قدیمی نشده است. تاریخ ریاضیات که درباره

از برخی جهتها، از نظر سرعت همگرایی، بر الگوریتمهای دیگر و از جمله الگوریتم کسرهای مسلسل، برتری دارد.

بی‌تردید، بررسی دقیق دانش گذشته، می‌تواند باز هم موجب کشف اندیشه‌هایی بشود که بر همعصران ما پوشیده است. به دلیل پیشرفت تند فن محاسبه تازه، دوباره بحث آنالیز ترکیبی که در سده هجدهم روی آن خیلی کار شده است، اهمیت زیادی پیدا کرده است. به نظر می‌رسد که به این مناسبت، لازم است نظری به این جنبه از پژوهشهای ریاضی بیندازیم و دوباره به بررسی نتیجه‌گیریهای آن دوره در این باره، بپردازیم. باید اطمینان داشت که بررسی میراث علمی دانشمندان گذشته، از نظر موضوعهایی که برای دانش امروز جالب است، می‌تواند منجر به کشفهای مهمی شود.

اکنون که برخی از ملاحظه‌های مربوط به اهمیت تاریخ ریاضیات را، از دید ریاضیات امروزی از نظر درک موضوعهای کلی و راه تکامل آن با دید فلسفی، بیان کردم، می‌خواهم به برخی نکته‌های مربوط به آموزش بپردازم.

معلم باید بداند که با چه تلاشهایی مفهومهای ریاضی به وجود آمده است. چگونه در مرحله‌های نخستین، نمایشهای مادی و ملموس لازم بود و چگونه استدلال منطقی و بی‌نقص انتزاعی، راه خود را باز کرد و به صورت عادت درآمد. تاریخ ریاضیات می‌تواند دشواریهایی را که جامعه انسانی ضمن تکامل خود، به آنها برخورد کرده است، تا اندازه زیادی روشن کند. تاریخ ریاضیات وسیله نیرومندی در دست معلم است که به یاری آن می‌تواند ریاضیات دبیرستانی را به درسی جالب و دوست‌داشتنی تبدیل کند؛ به نحوی که دیگر، دانش‌آموزان به درسهای ریاضی، نه به عنوان کاری سنگین، بلکه به عنوان موضوعی دلنشین و زیبا نگاه کنند، که در ضمن می‌تواند در برخورد با دشواریهای زندگی، یار و مددکار آنان باشد.

بی‌تردید، باید تاریخ ریاضیات، موجب تغییر جدی در مضمون ریاضیات دبیرستانی و هم در تنظیم برنامه آن بشود. دوره ریاضیات باید خود را با نیازهای زندگی امروزی سازگار کند؛ نه این که به اندیشه‌هایی بچسبد که برای پایان سده هجدهم یا میانه‌های سده



به نظر می‌رسد، هنوز هم کاهنان مصر قدیمند که دانش رازگونه و دست‌نیافتنی را در اختیار دارند...

باید ذهن و علاقه دانش‌آموز را جلب کرد؛ این یکی از اساسی‌ترین مسأله‌های آموزشی است. نمی‌گوییم که باید تسلیم ذوق دانش‌آموز شد؛ بلکه می‌گوییم که باید شوق او را برانگیخت.

یکی از راه‌های جدی برای حل مسأله‌ای که اوستروگراسکی طرح کرده، توجه به تاریخ دانش، گفت‌وگو درباره نمایندگان دانش و بستگی ریاضیات با عمل و زندگی است؛ بستگی که در تمامی دوران موجودیت انسان، هرگز قطع نشده است.

ادامه این مقاله در شماره بعد



به این دو عمل ریاضی توجه کنید که توجه به آنها خالی از تعجب نیست.

$$272 + 16 = (2 + 7) \times 2 \times 16$$

$$\sqrt{324} = 3 \times (2 + 4)$$

گذشته صحبت می‌کند، می‌تواند الهام‌بخش اندیشه‌های تازه‌ای درباره آموزش بهتر و درست‌تر جوانان زمان ما باشد؛ آموزشی که با نیازهای زمان ما و مجموعه دانش و صنعت امروزی، بستگی نزدیک داشته باشد.

باید این نکته را به یاد داشت که تکامل دانش و پیشرفت‌های صنعتی، همیشه با بهتر شدن آموزش بستگی داشته است. بسیاری از دانشمندان گذشته، دیدگاه‌های خود را درباره تنظیم سیر آموزش و ویژگی‌های آن در مرحله‌های مختلف، برای ما باقی گذاشته‌اند. بویژه دیدگاه‌های م. و. اوستروگراسکی، ریاضیدان و مربی مشهور نیمه نخست سده نوزدهم، اهمیت خاصی دارد. در این جا تکه‌ای از رساله «اندیشه‌هایی درباره آموزش» را که اوستروگراسکی به کمک آ. بلوم، مربی فرانسوی در سال ۱۸۶۰، به زبان فرانسوی نشر داده است، می‌آوریم:

«برای آموزش جوانان، هنوز از همان روش‌هایی استفاده می‌شود که سقراط و افلاطون، حقیقت‌های عالی اخلاقی را برای شیفتگان منطق و فلسفه، و برای علاقه‌مندان به سخنوری و علم کلام بیان می‌کردند.

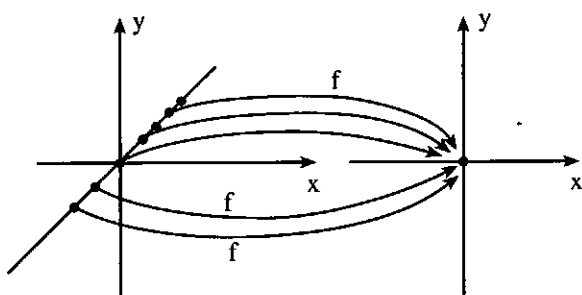
چه کسی نمی‌داند که از پنجاه دانش‌آموز، دست‌کم چهل نفر برای همیشه، از بحث‌های انتزاعی گریزان و از دنبال کردن آنها ناامید می‌شوند؛ بحث‌هایی که بدون روشن کردن مفهوم واقعی آنها به یاری نمونه‌های مربوط به زندگی عملی، در همان آغاز کار تدریس، در برابر دانش‌آموزان گذاشته می‌شود.

معلمان رشته‌های علمی، پذیرفته‌اند که به‌طور کلی، تدریس به یاری میزها و صندلیها، خیلی بهتر و سریعتر از آموزش به یاری «اندیشیدن» و «تلاش ذهنی» به نتیجه می‌رسد. درواقع، در درس‌های حساب، جبر و هندسه، هرگز سودمندی آنها برای زندگی گوشزد نمی‌شود، هرگز از تاریخ دانش سخنی به میان نمی‌آید، نظریه‌های علمی سنگین و تعریف‌های خشک و نامفهوم، پشت سر هم تکرار و تدریس می‌شود؛ ولی هیچ نتیجه‌ای جز این ندارد که دانش‌آموز را از دانش بیزار کند و تعداد علاقه‌مندان به دانش را روز به روز کمتر کند.

هسته^۱ نگاشتهای خطی

نگاشت خطی f به صورت
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $f(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$

تعریف شده است. واضح است که $f(1, 1) = (0, 0)$ ، $f(0, 0) = (0, 0)$ و... و $f(x, x) = (0, 0)$ یعنی در واقع اگر در زوج مرتب (x, y) ، $y = x$ باشد، همواره آن زوج روی $(0, 0)$ تصویر می‌شود. به عبارت دیگر، هر نقطه روی خط به معادله $y = x$ روی $(0, 0)$ تصویر می‌شود، مطابق شکل زیر:



حال دو سؤال مطرح می‌شود:

(I) اگر نگاشت $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ مفروض باشد، چه نقاطی از $\mathbb{R}^m$ را به صفر فضای $\mathbb{R}^n$ می‌برد؟

(II) آیا ممکن است نگاشت خطی f هیچ عضوی از $\mathbb{R}^m$ را به بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ تصویر نکند؟
 جواب سؤال (II) براحتی به دست آمده و منفی است؛ زیرا اگر f یک نگاشت خطی باشد، قبلاً ثابت کردیم که $f(\vec{0}) = \vec{0}$ ، لذا همواره لااقل بردار صفر $\mathbb{R}^m$ ، به بردار صفر $\mathbb{R}^n$ پُرده خواهد شد.

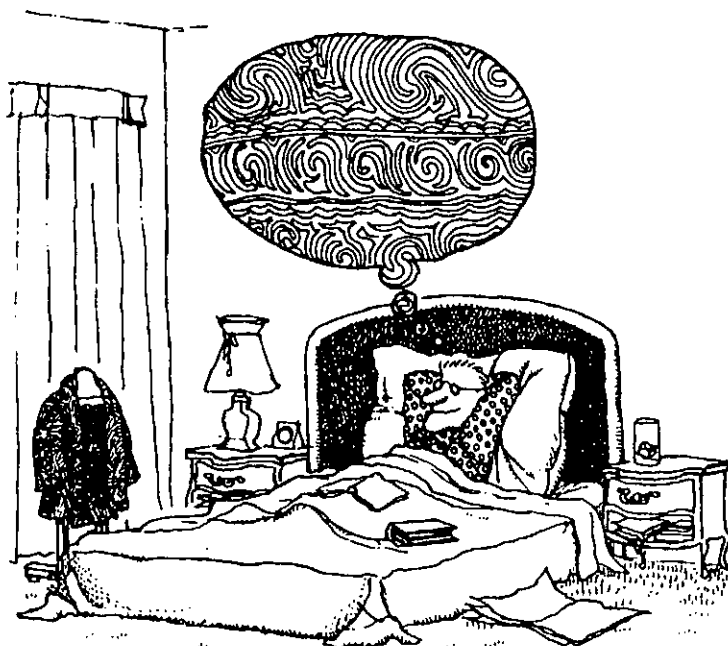
اما پیش از بررسی سؤال (I) به معرفی زیر مجموعه‌ای از دامنه f می‌پردازیم که در واقع مورد نظر سؤال (I) است:

تعریف هسته^۱ یک نگاشت خطی

اگر $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی باشد، به تمام اعضای $\mathbb{R}^m$ که توسط f روی صفر فضای $\mathbb{R}^n$ نگاشته می‌شوند، هسته^۱ نگاشت خطی f گفته می‌شود. این مجموعه از اعضای $\mathbb{R}^m$ (دامنه^۱ f) را با k_f نمایش داده و داریم:

$$k_f = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = \vec{0}\}$$

توجه دارید که همواره $k_f \subseteq \mathbb{R}^m$ ، پس هسته همیشه جزء



نگاشتهای خطی

ترکیب نگاشتهای خطی و

ماتریس ترکیب دو نگاشت خطی

(قسمت سوم)

• حمیدرضا امیری

$$k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\}$$

دامنه یک نگاشت خطی است.

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - y, 2x - 2y) = (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

بنابراین، هسته f ، نیمساز ربع اول و سوم، یعنی خط به معادله $y = x$ بوده و بعد آن یک است.

مثال ۴: نگاشت $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y) = (0, 0)$

مفروض است، هسته f و بعد هسته f را مشخص کنید.

با توجه به ضابطه نگاشت f ، واضح است که f به طور ثابت همه $\mathbb{R}^2$ را روی $(0, 0)$ می نگارد، لذا $k_f = \mathbb{R}^2$ و بعد هسته، برابر ۲ است.

مثال ۵: نگاشت $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f(x, y, z) = (x - y, 2y + z)$ مفروض است، هسته f و بعد هسته f را مشخص کنید.

$$k_f = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) \mid (x - y, 2y + z) = (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y, z) \mid x - y = 0, 2y + z = 0\}$$

دستگاه دو معادله و سه مجهولی $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ همواره دارای

بی شمار جواب غیر صفر نیز هست. در واقع، جواب دستگاه، محل تلاقی دو صفحه است که یک خط گذرنده از مبدأ می باشد.

$$\begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ 2y + z = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow 2x = -z \quad (2)$$

از طرفی طبق (۱)، $y = x$ ، پس با توجه به (۲) $y = -\frac{z}{2}$ ، پس

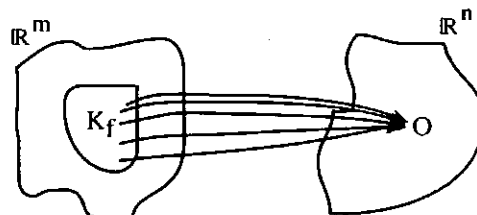
داریم:

$$k_f = \left\{ (x, y, z) \mid x = y = -\frac{z}{2} \right\}$$

یعنی k_f خطی است در $\mathbb{R}^3$ که بعد آن ۱ است.

مثال ۶: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f(x, y) = (x, y + x, 0)$ مفروض است، هسته و بعد هسته نگاشت f را مشخص کنید.



تذکر: در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ که $1 \leq n \leq 3$ ، همواره نقطه یا مجموعه ای از نقاط متناهی یا نامتناهی و ناپیوسته، دارای بعد صفر بوده و خط دارای بعد ۱ و صفحه دارای بعد ۲ و فضای $\mathbb{R}^3$ ، سه بعدی است.

حال با توجه به تعریف هسته و تذکر فوق، می خواهیم هسته نگاشتها و بعد آنها را شناسایی کنیم. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱: فرض کنیم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y) = (0, y)$ یک نگاشت خطی باشد، می خواهیم هسته و بعد آن را معین کنیم.

$$k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0, y) = (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

همان طور که مشاهده می کنید، هسته این نگاشت خط $y = 0$ یا محور x هاست و بعد این خط ۱ است.

مثال ۲: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y) = (2x, y - 3x)$ مفروض است، هسته و بعد هسته را

بیابید.

$$k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x, y - 3x) = (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y = 0\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(0, 0)\}$$

و بعد هسته، برابر صفر است.

مثال ۳: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$ مفروض است، هسته f و بعد هسته f را مشخص کنید.

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y, z) | x = 0\}$$

و مجموعه نقاطی از فضای سه بُعدی که طول آنها صفر است، صفحه yoz را تشکیل می دهند.

تست: هسته نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $f(x, y, z) = (x, z, 0)$ کدام است؟

- (۱) محور z ها
(۲) محور x ها
(۳) محور y ها
(۴) صفحه xoz
حل: گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$k_f = \{(x, y, z) | f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) | (x, z, 0) = (0, 0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y, z) | x = z = 0\}$$

و مجموعه نقاطی از فضای $\mathbb{R}^3$ که طول و ارتفاع آنها صفر است، محور عرضها یا y ها می باشد.

یک ویژگی مهم برای هسته نگاشتهای خطی

از آن جا که در نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، همواره $k_f \subseteq \mathbb{R}^m$ ، این سؤال پیش می آید که آیا هسته f که زیر مجموعه $\mathbb{R}^m$ است، زیر فضای برداری $\mathbb{R}^m$ نیز هست یا خیر؟ جواب مثبت است که به صورت قضیه زیر بیان و اثبات خواهد شد:

قضیه: اگر $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی باشد، همواره هسته f زیر فضای برداری $\mathbb{R}^m$ است.

اثبات: فرض کنیم k_f هسته نگاشت خطی f باشد، برای اثبات زیر فضای برداری بودن k_f ، باید ثابت کنیم مجموعه k_f نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

$$k_f = \{x \in \mathbb{R}^m | f(x) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n\}$$

فرض کنیم $x, y \in k_f \Rightarrow f(x) = f(y) = \vec{0}$
خطی است f

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow f(x+y) = \vec{0} \Rightarrow x+y \in k_f$$

فرض کنیم $r \in \mathbb{R}, x \in k_f \Rightarrow f(x) = \vec{0}$
خطی است f

$$f(rx) = rf(x) = r\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow f(rx) = \vec{0} \Rightarrow rx \in k_f$$

$$k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y+x, 0) = (0, 0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y = 0\} = \{(0, 0)\}$$

پس بعد هسته f صفر است.

مثال ۷: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه

$f(x, y) = (0, y, 2y)$ مفروض است، هسته و بعد هسته را مشخص کنید.

$$k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (0, y, 2y) = (0, 0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$$

بنابراین هسته f ، محور x ها بوده که بعد آن یک می باشد.

مثال ۸: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f(x, y, z) = (0, z)$ مفروض است، هسته f و بعد هسته f را

مشخص کنید.

$$k_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (0, z) = (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$$

بنابراین هسته f عبارت است از صفحه xoy ($z = 0$) که بعد آن ۲ است.

مثال ۹: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x, y, z) = 0$

مفروض است، هسته و بعد هسته f را مشخص کنید.

از آن جا که نگاشت خطی f به صورت ثابت، همه اعضای $\mathbb{R}^3$ را به صفر تبدیل می کند، پس $k_f = \mathbb{R}^3$ و بعد آن ۳ می باشد.

$$k_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 = 0\} = \mathbb{R}^3$$

تست: هسته نگاشت $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f(x, y, z) = (x, 0, 0)$ کدام است؟

- (۱) محور x ها
(۲) صفحه xoz
(۳) صفحه yo
(۴) صفحه xoy

حل: گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$k_f = \{(x, y, z) | f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) | (x, 0, 0) = (0, 0, 0)\}$$

کاربرد هسته یک نگاشت خطی در تشخیص یک به یک بودن

قضیه زیر، ملاکی بسیار مهم برای تشخیص یک به یک بودن نگاشت‌های خطی بوده و همواره در حل مسائل و پاسخ‌گویی به پرسش‌های چندگزینه‌ای، می‌توان از آن بخوبی بهره برد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن که نگاشت خطی f ، یک به یک باشد، آن است که هسته f فقط شامل بردار صفر باشد یا $k_f = \{\vec{0}\}$.

اثبات: ابتدا فرض کنیم $k_f = \{\vec{0}\}$ ، ثابت می‌کنیم f یک به یک است.

فرض کنیم $x_1, x_2 \in D_f$ ، $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = \vec{0}$$

تعریف هسته f خطی است

$$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = \vec{0} \Rightarrow x_1 - x_2 \in k_f = \{\vec{0}\}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad f \text{ یک به یک است}$$

حال فرض کنیم f یک به یک باشد، ثابت می‌کنیم $k_f = \{\vec{0}\}$. قبلاً دیدیم که $k_f \neq \emptyset$ و همواره $\vec{0} \in k_f$ ، حال اگر $k_f \neq \{\vec{0}\}$ (فرض خلف) و مثلاً $x \in k_f$ و $x \neq \vec{0}$ ، پس طبق تعریف هسته داریم $f(x) = \vec{0}$ و چون $f(\vec{0}) = \vec{0}$ ، پس f یک به یک نیست که با فرض تناقض دارد؛ بنابراین $k_f = \{\vec{0}\}$.

مثال: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y) = (x, y + x, x - 2y)$ مفروض است، آیا این نگاشت یک به یک است؟

برای تعیین یک به یکی، کافی است هسته f را بیابیم و از قضیه فوق کمک بگیریم:

$$\begin{aligned} k_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (\vec{0}, \vec{0})\} \\ &= \{(x, y) \mid (x, x + y, x - 2y) = (\vec{0}, \vec{0})\} \\ &= \{(x, y) \mid x = 0, x + y = 0, x - 2y = 0\} \\ &= \{(x, y) \mid x = y = 0\} = \{(\vec{0}, \vec{0})\} \end{aligned}$$

بنابراین، f یک به یک است.

مثال: آیا نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y, z) = (x, x + z)$ یک به یک است؟ هسته f را معین می‌کنیم:

$$k_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (\vec{0}, \vec{0})\}$$

$$= \{(x, y, z) \mid (x, x + z) = (\vec{0}, \vec{0})\}$$

$$= \{(x, y, z) \mid x = 0, x + z = 0\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y, z) \mid x = z = 0, y \in \mathbb{R}\} = \text{محور } y \text{ ها}$$

و چون $k_f \neq \{(\vec{0}, \vec{0}, \vec{0})\}$ ، پس نگاشت f یک به یک نیست. به عنوان مثال:

$$f(\vec{0}, \vec{2}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{0}) \quad \text{و} \quad (\vec{0}, \vec{2}, \vec{0}) \neq (\vec{0}, \vec{8}, \vec{0})$$

$$f(\vec{0}, \vec{8}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{0})$$

تست: اگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک نگاشت خطی یک به یک باشد و داشته باشیم: $k_f = \{(a + b, 2a - b + 1)\}$ ، در این صورت، حاصل $(a^2 + b - 1)$ کدام است؟

$$\frac{4}{9} \quad (1) \quad \frac{-5}{9} \quad (2)$$

$$\frac{5}{9} \quad (3) \quad \frac{1}{9} \quad (4)$$

حل: گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا f یک به یک است، پس طبق قضیه باید $k_f = \{(\vec{0}, \vec{0})\}$ ؛ بنابراین:

$$(a + b, 2a - b + 1) = (\vec{0}, \vec{0}) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - b + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{3} \Rightarrow a^2 + b - 1 = -\frac{5}{9}$$

تست: کدام یک از نگاشت‌های زیر یک به یک است؟

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = (x + y, y, \vec{0}) \quad f(x, y) = (\vec{0}, \vec{0})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (4) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = (x + y, z, 2z) \quad f(x, y, z) = (x, y)$$

حل: گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

در گزینه (۱)، داریم $k_f = \mathbb{R}^2$ و در گزینه (۳) داریم $k_f = \{(x, y, z) \mid x = y = 0, z \in \mathbb{R}\}$ ، که همان محور z هاست و در گزینه (۴) داریم $k_f = \{(x, y, z) \mid x + y = 0, z = 0\}$ ، که همان خط $x + y = 0$ است؛ ولی در گزینه (۲) داریم $k_f = \{(x, y) \mid x = y = 0\}$ ، یعنی $k_f = \{(\vec{0}, \vec{0})\}$ ، پس f یک به یک است.

یادداشتها:



تاریخچه مجله های ریاضی ایران (۲۷)

کلاسهای مقدماتی تشکیل داده بودند و من، سرانجام، کلاس مقدماتی ریاضی را تمام کردم. دیران ما استاد دانشگاه بودند و من بویژه، از استاد ارجمند، دکتر فاطمی (استاد مکانیک) و خانم دکتر اهم (استاد فیزیک)، چه از نظر روش تدریس و چه از نظر روحیه انسانی آنها، خاطره های بسیار زیبایی دارم.

در مهرماه ۱۳۲۴ در رشته ریاضیات دانشکده علوم ثبت نام کردم؛ ولی دوره سه ساله لیسانس را، به جای سه سال، در هشت سال گذراندم و در خرداد ۱۳۳۲ تمام کردم. علت عقب افتادن کار تحصیل من، دو چیز بود: دشواریهای مالی و خانوادگی، و اجبارهای اجتماعی که مرا از دانشگاه و کلاس دور نگه می داشت.

● از چه زمانی به معلمی پرداختید و در چه دبیرستانها یا دانشگاه هایی تدریس کرده اید؟

از سال تحصیلی ۱۳۲۱ - ۱۳۲۰، که نهمین سال تحصیل را می گذراندم، تا امروز، با دانش آموزان رابطه دارم و باید اعتراف کنم که از کلاسها و دانش آموزان خود، و از بحث و گفت و گو با آنان بسیار چیزها آموخته ام. تدریس، جریانی دوطرفه است و معلم، اگر به کار خود عشق داشته باشد، هم یاد می دهد و هم یاد می گیرد. در تهران، تدریس را در دبستان «رشدیه» و کلاسهای پنجم و ششم ابتدایی آغاز کردم و در بسیاری از کلاسهای شبانه درس

همچنان در شماره اول مجموعه مقاله ها و مسائل ریاضی در گشت و گذاریم و در این گذر، به یکی از قسمتهای جالب آن تحت عنوان مصاحبه با استاد پرویز شهریاری رسیده ایم و سرآن داریم که آن را به طور کامل، برای شما بازگو کنیم، و اینک، متن کامل این مصاحبه:

● جناب استاد شهریاری، لطفاً ضمن معرفی کامل خودتان، از خانه و خانواده تان برایمان بگویید.

در دوم آذر ۱۳۰۵ در شهر کرمان و در خانواده ای با سنتهای دهقانی و زرتشتی به دنیا آمدم. دوره دوساله دانشسرای مقدماتی را پس از پایان نه سال نخستین تحصیل، در همان کرمان گذراندم. در شهریور ۱۳۲۳، همراه با زنده یاد کاظم مدنی، برای ادامه تحصیل، به تهران آمدم.

زنده یاد کاظم مدنی شاگرد اول و من شاگرد دوم آن دوره از دانشسرای مقدماتی بودیم و بنابر تصمیم گردانندگان وقت آموزش و پرورش، به کسانی که رتبه های اول و دوم دانشسرای مقدماتی را کسب کرده بودند، امکان ادامه تحصیل، همراه کمک خرجی از طرف دولت داده شده بود. برای تکمیل درسهای دبیرستانی، سه کلاس (ریاضی، تجربی و ادبی) در محل دانشکده ادبیات و دانشسرای عالی - که در نزدیکی میدان بهارستان بود - به نام

بود. به تدریج، این دو کتاب و کتابهای بعدی من، چنان جای خود را در بین دانش آموزان باز کرد و بحثهای مربوط به آنها چنان همگانی شد که به نحوی جزو کار رسمی هر دانش آموز رشته ریاضی قرار گرفت و مسأله ها و روشهای مطرح شده در این کتابها، به بسیاری از کتابهای تقلیدی دیگر (و البته، بدون ذکر منبع) راه یافت، و هنوز هم، با وجود تغییر کیفی و کمی برنامه های درسی، کتابهای بالینی هر دانش آموز رشته ریاضی به حساب می آیند.

به خاطره ای اشاره کنم. در سالهای ۴۰، که یکی از کتابهای من در چاپخانه «بانک بازرگانی» حروفچینی و چاپ می شد، ضمن تصحیح نمونه ها، یکی از همکارانم که در یکی از دبیرستانهای معروف تهران تدریس می کرد، از من راه حل مسأله ای را پرسید که در این کتاب مطرح شده بود و گفت: «هیچ راه حلی به نظر من نمی رسد.» مسأله این بود: ثابت کنید که در مجموع:

$$S = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k \quad (n \in \mathbb{N})$$

به عبارتی از درجه $(k+1)$ نسبت به n می رسیم که، در آن، ضریب n^{k+1} برابر $\frac{1}{k+1}$ و ضریب n^k برابر $\frac{1}{k}$ است.

راه حل مسأله را برای او توضیح دادم. پس فردای آن روز، یکی از نزدیکان من، که شاگرد این همکارم بود، پیش من آمد و راه حل همین مسأله را خواست. معلوم شد که این مسأله یکی از پرسشهای امتحانی آنها بوده است. از روش کار همکارم، اندکی دلگیر شدم؛ چرا مسأله ای را که خود او نتوانسته بود حل کند، برای حل، به دانش آموزان خود پیشنهاد کرده بود؟ آن هم به عنوان یک مسأله امتحانی. امتحان زمان محدودی دارد و به هر حال، برای دانش آموز، با دلهره و هیجان همراه است. بندرت می توان دانش آموزی را یافت که بتواند روحیه آفرینندگی خود را در جلسه امتحان حفظ کند. امتحان به معنای «آزمایش آموخته ها» است، نه وسیله ای برای طرح ناشناخته ها!

● از خاطرات دوران کودکی و نوجوانیتان برایمان تعریف کنید.

دوره های کودکی، نوجوانی و جوانی هرکسی پر از خاطره است. در این دوره ها، همه چیز برای آدم تازگی دارد و هر حادثه ای

داده ام. در دبیرستانهای خوارزمی، مرجان، فیروزبهرام، اندیشه و... سالهای زیادی معلم بوده ام. چند سال در دانشکده فنی دانشگاه های تهران و تربیت معلم (دانشسرای عالی آن زمان)، روزانه و شبانه، و در مدرسه عالی علوم اراک، اغلب درسهای ریاضی و گاه فلسفه و تاریخ علم را تدریس کرده ام.

● از آثار و نوشته هایتان برایمان بگویید.

نخستین کتابی که از من چاپ شد، ترجمه کتاب «تاریخ حساب» تألیف «رنه تاتون» در مجموعه «چه می دانم؟» و به وسیله انتشارات «امیرکبیر» بود [سال ۱۳۳۰ شمسی]؛ ولی کار اصلی تألیف را، به توصیه زنده یاد رمضانی، صاحب انتشارات «خاور» و با نوشتن یک دوره هفت جلدی کتابهای ریاضی سه سال اول دبیرستان آغاز کردم (البته، پیش از آن و در سال ۱۳۲۷، رساله کوچک «جنبش مزدک و مزدکیان» را منتشر کرده بودم). زنده یاد رمضانی، از گرانی کتابهای درسی و سوء استفاده برخی سودجویان، به سختی ناراحت بود و از من خواست، بدون توقع، یک دوره کتاب ریاضی تهیه کنم و در اختیار او بگذارم، تا بتواند با ارزانه ترین قیمت، در اختیار دانش آموزان بگذارد. این دوره هفت جلدی (دو جلد حساب، دو جلد جبر و سه جلد هندسه) در فاصله سالهای ۱۳۳۵ تا ۱۳۳۷، به بهای هر جلد ده ریال، منتشر شد و در زمان خود، مورد استقبال قرار گرفت.

اجازه بدهید از سیاهه نوشته ها و ترجمه های خود صرف نظر کنم؛ چرا که برای خواننده شما، ملال آور خواهد بود و تنها به نکته ای اشاره کنم. تا پیش از سال ۱۳۴۰، برای یک دانش آموز علاقه مند به ریاضیات، بجز کتابهای درسی، منبع زیادی برای کار خارج از کلاس وجود نداشت. نخستین کتابهایی که در این باره چاپ شد، در همین سالها بود. ابتدا با همکاری زنده یاد باقر امامی، دو کتاب را آماده انتشار کردیم؛ «مسائل جبر و راهنمای حل آنها» و «مسائل مثلثات و راهنمای حل آنها» بعدها و براساس تجربه طولانی معلمی، دو کتاب «روشهای جبر» و «روشهای مثلثات» را نوشتم (که دومی با همکاری آقای احمد فیروزنیا بود) و در آنها، به جنبه هایی از ریاضیات مقدماتی پرداختم که یا در برنامه های رسمی دبیرستانی وجود نداشت و یا به صورتی گذرا مطرح شده

خود یاد کنم؛ «عارف بزرگی» که متأسفانه نام او را فراموش کرده‌ام. پیرمردی بود نابینا و بی‌سواد. از زندگی او و از سرنوشتش چیزی نمی‌دانم. سالی یک بار به دیدن ما می‌آمد و همیشه در نزدیکیهای غروب یک روز بهاری، با نوای دلنشین نی، خبر از آمدن خود می‌داد. من و بچه‌های دیگر محله، به استقبال او می‌دویدیم و همه آرام و ساکت او را همراهی می‌کردیم. حتی از شیطانت‌ترین بچه‌ها هم صدایی در نمی‌آمد. گویی با آهنگ نی خود، با ما حرف می‌زد. زن‌ها و مردهایی که در خانه‌ها بودند، جلو در می‌ایستادند. برخی به پشت بام می‌رفتند؛ ولی همه تنها گوش می‌دادند. قدی بلند و شانه‌هایی پهن داشت. موهای سر برهنه و سبیلش کاملاً سفید بود؛ ولی موهای صورتش را پاک کرده بود، کفش و لباسش کهنه، ولی به غایت پاکیزه و مرتب بود... بدون راهنما و عصا، آرام ولی محکم راه می‌رفت. سر پیچ هر کوچه، بموقع می‌پیچید و راست به طرف خانه ما می‌آمد و روی سکوی در خانه می‌نشست. با همه اصراری که می‌شد، هرگز به درون خانه پا نمی‌گذاشت. مدتی به نی‌زدن خود ادامه می‌داد و بعد برای ما «قصه» می‌گفت. حرفهای عجیب بود؛ از رنجهای زمانه و ستم ظالمان، از عرق ریختن دهقانان بی‌زمین و از شلاق ارباب و مباشر... و از امید به آینده و زندگی انسانی. هنوز حرفهای او در گوشم زنگ می‌زند و هنوز، این نخستین درسهای زندگی، به من نیرو و امید می‌دهد، و باید اعتراف کنم که تأثیری عمیق بر زندگی و شیوه زندگی آینده من باقی گذاشت. ما، در خانه چیزی نداشتیم و در محله ما، هیچ کس چیزی در خانه نداشت؛ ولی به هر حال، شام نی‌زن، محبوب محله، فراهم می‌شد. همان‌جا، روی سکوی در خانه و... بعد، دوباره نی را به لبان خود نزدیک می‌کرد و با صدای نی خدا حافظی می‌کرد و می‌رفت... تا یک سال دیگر... و سالی رسید که دیگر نیامد؛ نه آن سال و نه سالهای بعد... من معلمان بسیاری داشته‌ام و از همه آنها، چیزها آموخته‌ام؛ ولی هنوز هم این نی‌زن عارف را معلم خود می‌دانم.

● و از دوران جوانی تان

از سال سوم دبستان تا پایان دوره اول دبیرستان، در دبیرستان ایرانشهر کرمان بودم و در همه این سالها، بجز سال پنجم دبستان،

و هر مطلبی کنجکاوی را برمی‌انگیزد. علاوه بر آن، همه چیز پاک و سالم جلوه می‌کند. دنیای کودکی و نوجوانی، دنیای زلال و بی‌آلایش پاکیزه و راستیهاست، با آلودگی، دروغ و ریا میانه‌ای ندارد و... چه قدر زیباست!... و همه تلاش آدمی، در سراسر طول تاریخ خود، در این سمت است تا خود را به جایی برساند که، همیشه، همه‌جا و در همه صحنه‌ها، سلامت نفس دوران کودکی را، به تمامی طول زندگی گسترش دهد و ناپاکیزه و تقلبها را از چهره انسان و انسانیت بزدايد... و همه ما، با همان خاطره‌های بی‌آلایش دوره‌های نخستین زندگی زنده‌ایم.

سال دوم دبستان را می‌گذراندم. فاصله خانه تا مدرسه، نزدیک به سه کیلومتر و شاید بیشتر بود. مسیر ما از کنار خندقیهای می‌گذشت که از زمان حمله «آغامحمدخان قاجار» باقی مانده بود؛ کوره‌راهی که سمت دیگر آن، با بیابانی بی‌انتهای به کویر می‌پیوست. ناهار را با خود به مدرسه می‌بردیم؛ دستمالی که حاوی دو تکه نان بیات بود. یک روز، کنار «جاده» یک کولی نشسته بود و با دستگاه کوچک خراطی، تفنگ چوبی (که خیلی ساده و ابتدایی بود) درست می‌کرد. همشاگردی‌ام، یکی از آنها را خرید یک ریال. من هم دلم می‌خواست یکی از تفنگها را داشته باشم؛ ولی پول نداشتم. مرد کولی گفت: «اگر ده روز ناهار را به من بدهی، روز دهم یک تفنگ به تو می‌دهم و...» من گره دستمال را باز کردم و تکه‌های نان را به او دادم.

«این که فقط نان است. اگر این جوری است، باید بیست روز بدهی.»

قبول کردم. هر روز ناهار خود را به او می‌دادم. درست نوزده روز و... روز بیستم، با امید و آرزو، و احتمالاً با سرعتی بیشتر، حرکت کردم. با خود گفتم: «امروز صاحب یک تفنگ می‌شوم. به بیست روز گرسنگی می‌ارزد.» ولی کولی آن‌جا نبود، نه آن روز و نه روزهای بعد. هنوز هر وقت به کرمان می‌روم و از آن نقطه (که دیگر مملو از ساختمان و آپارتمان است) می‌گذرم، چشمانم به دنبال کولی آشنا می‌گردد. هنوز باور نمی‌کنم که او، دروغ گفته باشد... حتماً پیشامدی نامنتظره او را از وفای به عهد بازداشته بود...

به مناسبت خاطره‌های دوران کودکی، باید از نخستین معلم



تقریب اندیشه ۱

سرگرمی هندسی

مستطیلی داریم با ابعاد ۱۳×۵

مساحت مستطیل ۶۵ مترمربع است. $۱۳ \times ۵ = \boxed{۶۵}$

حال مستطیل را به دو مثلث مساوی و دو دوزنقه مساوی تقسیم می کنیم.

مساحت هر مثلث $۳ \times \frac{۵}{۲} = ۱۲$

مساحت دو مثلث $۱۲ \times ۲ = \boxed{۲۴}$

مساحت هر دوزنقه $(۳+۵) \times \frac{۵}{۲} = ۲۰$

$۲۰ \times ۲ = \boxed{۴۰}$

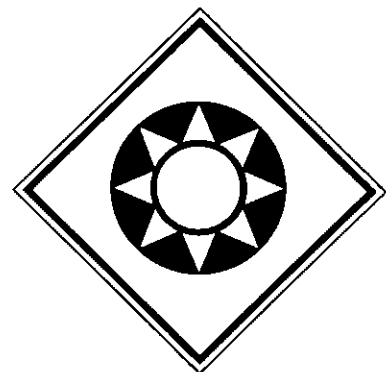
متر مربع $۲۴ + ۴۰ = ۶۴$

یک متر مربع کم آوردیم، چرا؟

جواب در صفحه ۸۸

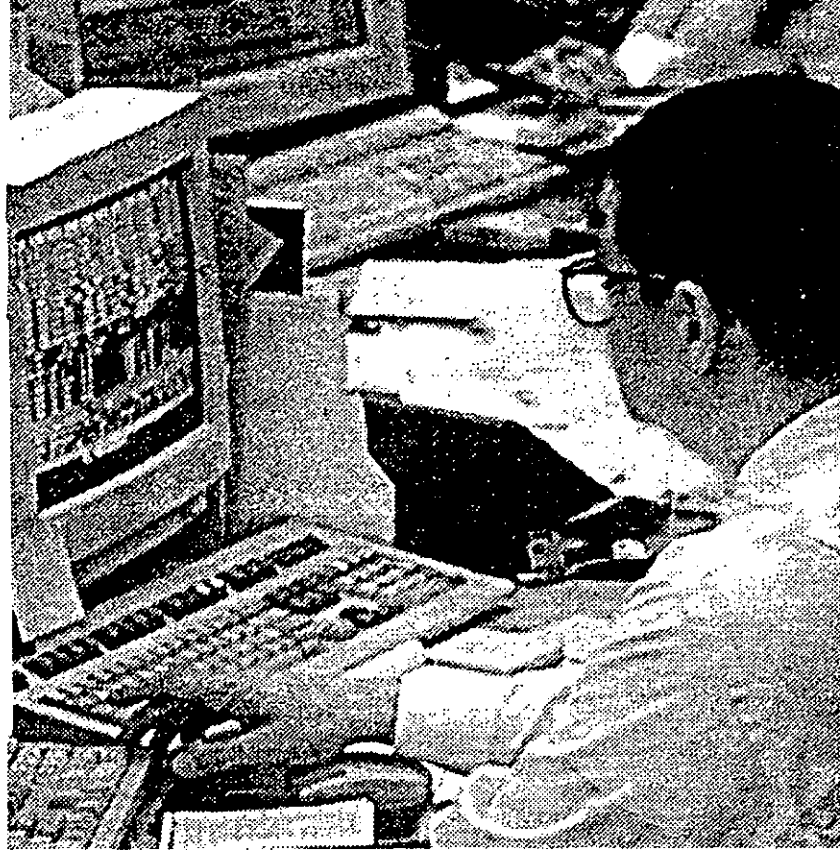
از صمد پور اصدا...

معلم ادبیات ما، مرد عاشق و علاقه‌مندی بود به نام باقر امامی. می‌گویم عاشق و علاقه‌مند؛ زیرا با تمامی وجود، تلاش می‌کرد آنچه می‌داند، به ما بیاموزد. در مکتب‌خانه درس خوانده بود. شاید، نتوان او را از بزرگان فرهنگ دانست، ولی با شوریدگی فوق‌العاده‌ای، برای ما حرف می‌زد. از همه جا و همه چیز؛ از فلسفه، از هنر، از موسیقی و حتی به قول خودش، از «علم حیل» (مکانیک). سالهای زیادی از عمر او گذشته بود. با عصا راه می‌رفت و یک چشم او بکلی نابینا بود؛ ولی وقتی به شوق می‌آمد چالاکتر از جوانان می‌نمود و... اگر احساس می‌کرد کسی به خود مشغول است و به سخن او گوش نمی‌دهد، خشم سراپای وجودش را فرامی‌گرفت و با عصا به طرف او حمله می‌کرد... شاید در زمینه ادبیات، فلسفه و دانش، چیز زیادی به من نیاموخته باشد و این، البته گناه او نبود... هرچه می‌دانست و هرچه به او آموخته بودند بازگو می‌کرد؛ ولی شوق عشق او به یاد دادن، خیلی چیزها به من یاد داد. از همان روزهایی که روی نیمکت دبستانی، خیره و گاه شگفت‌زده از این همه گذشت و شوریدگی، سرکلاس درس او نشسته بودم، یادگرفتم که، یا نباید وظیفه و مسؤولیتی را بپذیریم و یا باید با تمام وجودم، به آن پردازم. امامی زندگی فقیرانه‌ای داشت و با ماهیانه بسیار ناچیزی معلمی می‌کرد؛ اما شیدای کار خود بود و من، هر وقت سرکلاس می‌روم، هر وقت با دانش‌آموزان روبه‌رو می‌شوم، به یاد آن زنده‌یاد می‌افتم و امیدوارم که، دست کم اندکی از عشق و شیدایی او را در وظیفه سنگین معلمی، کسب کرده باشم.



تفکر الگوریتمی، هنر برنامه‌نویسی

● نوشته: عبدالحسین مصحفی



حل ریاضی یک مسأله با الگوریتم حل کامپیوتری آن تفاوت‌هایی دارد. ابزارهایی که در این دو الگوریتم به کار می‌روند با یکدیگر متفاوتند. این بدان معنی نیست که در راه حل کامپیوتری باید راه حل ریاضی را نادیده گرفت، بلکه نخست باید راه حل ریاضی را به دست آورد و آنگاه با به کار بردن ابزارها و ساختارهای نرم‌افزاری، آن راه حل ریاضی را به صورت الگوریتمی کامپیوتری درآورد. الگوریتم حل مسأله که معلوم شود نوشتن آن به یکی از زبانهای برنامه‌نویسی کاری به نسبت ساده خواهد بود، به پاکتویس کردن یک انشای طرح‌ریزی شده می‌ماند.

هنر برنامه‌نویسی در آن است که متناسب با مسأله مورد نظر، کاراترین ابزارها و ساختارهای نرم‌افزاری گزیده شوند و کوتاهترین و زیباترین الگوریتم فراهم آید. از این رو برای ورزیده شدن در هنر برنامه‌نویسی، شناسایی ابزارها و ساختارهای نرم‌افزاری و بی‌بردن به چگونگی کارکرد آنها نخستین گام است. گامهای بعدی، تمرین هرچه بیشتر و به دست آوردن الگوریتمهای مربوط به حل مسأله‌هایی از گونه‌های متفاوت است.

ابزارها و ساختارهای نرم‌افزاری

متغیرها: در برنامه‌نویسی، متغیرها، همانند متغیرهای جبری، برای کلیت دادن به دستورها و قاعده‌ها به کار می‌روند. اما در

با به پای گسترده‌تر شدن کاربردهای کامپیوتر، گرایش به ورزیدگی در کار کردن با آن نیز افزوتر شده است. در این باره سروکار هم با سخت‌افزار است و هم با نرم‌افزار. شناخت سخت‌افزار، بیشتر جنبه حرفه‌ای دارد و به سادگی برگزار می‌شود. در زمینه نرم‌افزار نیز برنامه‌نویسی مسأله‌هایی که جنبه استاندارد داشته باشند، دشواری ویژه‌ای را در پی نخواهد داشت؛ کافی است که قالب برنامه مربوط به هر مسأله شناخته شود و به کار رود. برای برنامه‌نویسی مسأله‌هایی از گونه‌های دیگر، از جمله بسیاری از مسأله‌های ریاضی، تفکری ویژه لازم است که تفکر الگوریتمی یا هنر برنامه‌نویسی نامیده می‌شود. دانش‌آموزانی که در مسابقه‌ها و در المپیادهای کامپیوتری می‌درخشند، از چنین تفکری برخوردارند و در چنین هنری ورزیدگی دارند. دانش‌آموزان و کسانی دیگر هم دستیابی به روشهایی را خواهند که پیشرفت و ورزیده شدن آنها را در برنامه‌نویسی در پی داشته باشد. امید است که این نوشتار برای اینان کارساز باشد.

برای نوشتن برنامه مربوط به راه حل یک مسأله، نخستین گام، بی‌بردن به الگوریتمی است که باید به کار برد. الگوریتم، که تحریف شده الخوارزمی است، و امروزه به معنی ویژه «راه حل کامپیوتری» زبانه شده، همان اصطلاح «قاعده (روش)» است که در متنهای ریاضی به کار می‌رفته و به کار می‌رود. اما الگوریتم

زیروند داشته باشد، آرایه را یک بعدی، دو بعدی، ... یا n بعدی می‌نامند. آرایه یک بعدی یک دنباله و آرایه دو بعدی یک جدول یا یک ماتریس خواهد بود. دنباله رقمهای عدد نویسی دهدهی آرایه‌ای یک بعدی می‌سازند که اگر نام آن را D بگذاریم هر درایه‌اش (= هر رقم) با $D(I)$ نموده می‌شود که I یکی از شماره‌های از ۰ تا ۹ است. جدول ضرب دهدهی آرایه‌ای دو بعدی است که با انتخاب مثلاً MUL برای نام آن، هر درایه‌اش با $MUL(I,J)$ نموده می‌شود که I شماره سطر و J شماره ستون است، چنان‌که $MUL(7,3)$ نمایانگر 7×3 و برابر با ۲۱ است.

در هریک از زبانهای برنامه‌نویسی، دستوری ویژه برای معرفی آرایه وجود دارد. آرایه‌ای یک بعدی از عددهای صحیح که A نام و ۵۰ اندازه آن باشد، در زبان BASIC به صورت

`DIM A(50)`

در زبان PASCAL به صورت

`TYPE A = ARRAY[0 .. 50] OF INTEGER;`

`int a [50]`

و در زبان C به صورت

معرفی می‌شود.

همانند متغیرهای ساده، برای هر آرایه نیز کامپیوتر خانه‌هایی به تعداد درایه‌های آن را در حافظه خود ذخیره می‌کند. هر کدام از این خانه‌ها با متغیر زیرونددار، نظیر هریک از درایه‌های آرایه نشان می‌شوند و مقدار آغازی هر کدام صفر خواهد بود.

گمارش و جایگزین کردن: یک مقدار یا حاصل عددی یک عبارت جبری را می‌توان به یک متغیر نسبت داد (در آن گمارد) یا اینکه آن را به جای مقدار قبلی آن متغیر قرار داد (آن را جایگزین مقدار قبلی متغیر کرد) در این مورد فرق نمی‌کند که متغیر ساده یا زیرونددار باشد. در بیشتر زبانهای برنامه‌نویسی همان نشانه « $=$ » و در زبان پاسکال نشانه « $:$ » را برای هریک از دو عمل گمارش و جایگزینی به کار می‌برند؛ نام متغیر در سمت چپ نشانه و مقدار ثابت یا عبارتی که حاصل آن باید در آن متغیر جایگزین شود در سمت راست نشانه نوشته می‌شود. دستور گمارش و جایگزینی در زبان بیسیک بیشتر با `LET` آغاز می‌شد و امروزه می‌توان از به کار بردن آن خودداری کرد. هریک از دو دستور

`LET PI=3.14` یا `PI=3.14`

از زبان بیسیک و دستور

`PI:=3.14`

کامپیوتر هرگونه محاسبه و پردازش روی مقدارهای معلوم انجام می‌گیرد. اگر در جبر می‌توان عملهایی را روی خود متغیرها انجام داد، مثلاً حاصل عبارت $(2x+1)^2$ را برحسب x به دست آورد، در کامپیوتر حاصل این عبارت، تنها آنگاه به دست می‌آید که معلوم شده باشد چه مقدار عددی باید جانشین x شود و حاصل عمل هم یک مقدار عددی خواهد بود.

هر متغیر با یک نام نموده می‌شود. این نام می‌تواند یک حرف، ترکیبی بی‌معنی یا با معنی از یک یا چند حرف و عدد باشد.

چنان‌که نامهایی از گونه `SUM`، `DICE`، `X1`، `A` و `COUNT` را می‌توان برای متغیرها برگزید. به هنگام اجرای برنامه، کامپیوتر با هر متغیر که روبرو شود جایی (خانه‌ای) از حافظه خود را برای آن متغیر در نظر می‌گیرد و هرگونه پردازش روی آن متغیر را روی مقدار موجود در آن جای انجام می‌دهد. مقدار یک متغیر اگر معلوم نشده باشد، کامپیوتر آن را صفر می‌گیرد.

متغیرهای زیرونددار: همان‌گونه که در ریاضیات متغیر زیرونددار، مثلاً x_n برای نشان دادن مجموعه مقدارهایی به کار می‌رود که همه این مقادارها با نام x شناسایی و با زیروندهای ۱، ۲، ۳، ...، n ، ... از یکدیگر تمیز داده می‌شوند، در الگوریتمها و برنامه‌نویسیها نیز می‌توان مجموعه مقدارهایی را با یک متغیر زیرونددار نشان داد و به کار برد. اما در اینجا زیروند، که عدد صحیح نامنی است، در کنار متغیر و داخل پرانتز یا کروشه نوشته می‌شود. چنان‌که متغیر $X(1)$ یا $X[I]$ به معنی متغیر با نام X و با زیروند ۱ است در حالی که $X1$ نشانه یک متغیر ساده است. متغیرهای با دو زیروند، با سه زیروند و با زیروندهای بیشتر را می‌توان به کار برد.

آرایه: مقدارهایی (عددی یا غیر عددی) که چنان مرتب شده باشند که بتوان آنها را شماره‌گذاری کرد و به هریک از آنها از روی شماره‌اش پی‌برد، مجموعه‌ای منظم را تشکیل می‌دهند که آن را آرایه، هریک از آن مقادارها را یک درایه (عضو) آن آرایه، و تعداد درایه‌ها را اندازه آن آرایه می‌نامند. هر آرایه با یک نام و با اندازه‌اش شناخته می‌شود و هر درایه آن را می‌توان با یک متغیر زیرونددار نشان داد. این متغیر همان نام آرایه و زیروند آن شماره ترتیب درایه است. در بیشتر زبانهای برنامه‌نویسی، شماره‌گذاری درایه‌های آرایه از صفر آغاز می‌شود. بنابر آن که متغیر نمایانگر درایه‌های آرایه، یک زیروند، دو زیروند، ... یا n

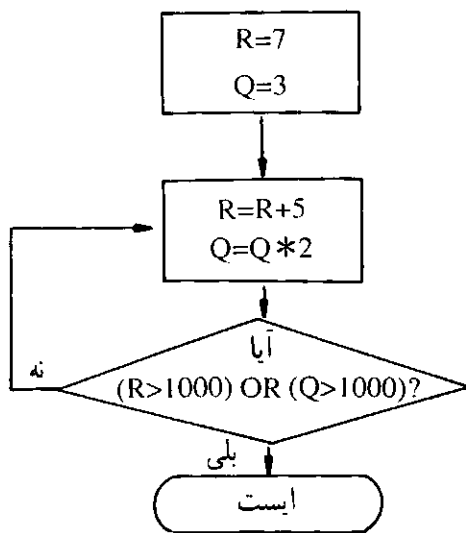
بنابراین فرآیند، دو دنباله بی پایان زیر پدید می آید:

۷، ۱۲، ۱۷، ۲۲، ...

۳، ۶، ۱۲، ۲۴، ...

که اولی تصاعد حسابی و دومی تصاعد هندسی است.

گزینش: بنابر نمودار شکل (۱) تکرار دو عمل جایگزینی بدون وقفه ادامه خواهد داشت. اما در عمل چنین امکانی وجود ندارد و لازم است که در مرحله‌ای از تکرار عملها جلوگیری شود. در این مرحله، شرطی گنجانیده می شود که بنابر آن که برقرار باشد یا نباشد. عمل تکرار یا متوقف می شود یا باز دنبال می شود. چنین شرطی یک مرحله گزینش را بر سر راه قرار می دهد که باید از دو یا چند امکان تنها یکی از آنها برگزیده شود. برای مثال، اگر توقف عمل تکرار در نمودار شکل (۱) موکول به آن باشد که دست کم یکی از دو مقدار R یا Q از ۱۰۰۰ تجاوز کند، در این صورت نمودار شکل (۲) را خواهیم داشت:



(شکل ۲)

بنابراین نمودار، پس از مرحله جایگزینی یک مرحله گزینش (= یک دوراهی) وجود دارد؛ هرگاه شرط بیشتر شدن یکی از دو مقدار R یا Q از ۱۰۰۰ برقرار شده باشد، عمل پایان می یابد، وگرنه بازهم عملهای جایگزینی تکرار می شوند.

در بیشتر الگوریتمها، دست کم یک مرحله گزینش وجود دارد که در آن مسیر گردش کار دو یا چند شاخه می شود و بنابر آنچه مورد نظر باشد، یکی از مسیرها گزیده می شود.

چرخه (=حلقه): در بیشتر الگوریتمها لازم می شود که یک عمل یا مجموعه‌ای از چند عمل یا به تعداد معین یا تا برقراری

از زبان پاسکال، به معنی گماشتن عدد ۳/۱۴ در متغیر به نام PI است.

در دستور جایگزینی ممکن است که عبارت طرف راست نشانه همان متغیر سمت چپ را نیز دربرداشته باشد. در این صورت، حاصل عبارت طرف راست، برحسب آخرین مقدار آن متغیر حساب می شود و آنچه به دست آید، مقدار جدید آن متغیر می شود. چنان که اگر $F(A, X, SUM)$ عبارتی جبری برحسب متغیرهای A، X و SUM باشد، دستور

$$A = F(A, X, SUM)$$

به این معنی است که:

(مقدار SUM و مقدار X و مقدار قبلی A) = مقدار جدید A

مثال ۱: در برنامه‌ای به زبان بیسیک، هرگاه سه مرحله گمارشها و جایگزینی‌های زیر یکی پس از دیگری انجام گیرند:

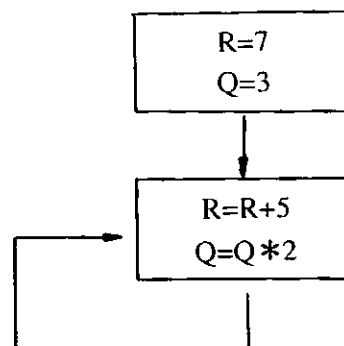
$$(۱): I=10, J=17, A(I,J)=-20$$

$$(۲): I=I+1, J=J+1, A(I,J)=A(I-1,J-1)+7$$

$$(۳): I=5, J=J-4, A(I,J)=2*(I+J)$$

در مرحله (۱)، مقدار I برابر ۱۰، مقدار J برابر ۱۷ و مقدار A برابر $A(10,17)$ از آرایه A برابر -۲۰ می شود. در مرحله (۲)، مقدار I برابر با $10+1=11$ ، مقدار J برابر با $17+1=18$ و مقدار A برابر $A(11,18)$ برابر با $-20+7=-13$ می شود. در مرحله (۳)، مقدار I برابر با ۵، مقدار J برابر با $18-4=14$ و مقدار A برابر با $A(5,14)=2*(5+14)=38$ می شود. (نشانه * به جای عملگر ضرب به کار می رود).

مثال ۲: بنابر نمودار شکل (۱)، مقدار R در آغاز برابر ۷ و مقدار Q در آغاز برابر ۳ است. پس از آن رابطه‌های جایگزینی $R=R+5$ و $Q=Q*2$ پشت سرهم تکرار می شوند که در هر بار تکرار آنها مقدار R افزایشی به اندازه ۵ خواهد داشت و مقدار Q دوبرابر می شود.



(شکل ۱)

تشکیل می‌شود که هر کدام از این بخشها ممکن است، بخشهای کوچکتری را دربرداشته باشد. در نخستین بخش از الگوریتم، چگونگی دسترسی به داده‌هایی که باید به کار روند مشخص می‌شود و متغیرهای ساده یا زیرونداری که باید داده‌ها را در خود نگهدارند انتخاب و معرفی می‌شوند. این بخش از الگوریتم که به زبان بیسیک برگردانده شود، ساختاری بسیار ساده دارد. دومین بخش اصلی الگوریتم، که معمولاً چند بخش فرعی را دربر دارد، از ابزارها و ساختارهایی نرم‌افزاری تشکیل می‌شود که برای پردازشهای لازم روی داده‌ها به کار می‌روند. در این پردازشها گاه لازم می‌شود متغیرهایی کمکی نیز به کار روند؛ وقتی روی متغیری عمل جایگزینی انجام گیرد مقدار قبلی آن متغیر از دسترس خارج می‌شود، حال اگر بنا باشد روی مقدار قبلی بازهم پردازشی انجام گیرد از متغیر کمکی برای نگهداری آن مقدار استفاده می‌شود. در سومین بخش اصلی الگوریتم، چگونگی در دسترس گذاشتن پاسخ یا پاسخهای خواسته شده معلوم می‌شود.

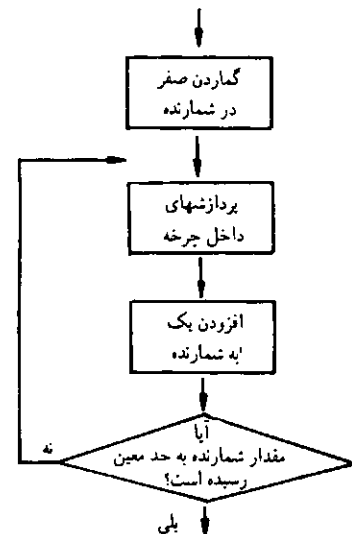
الگوریتم پیش از نموده شدن، در ذهن، طرح‌ریزی و ساختار هر یک از بخشها و ترتیب به کار رفتن آنها مشخص می‌شود. پس از نموده شدن الگوریتم هم باید مقدارهایی معلوم روی آن آزمایش شوند و درستی الگوریتم بررسی گردد. یک الگوریتم خوب، آن است که برنامه نظیر آن برای بارشدن روی کامپیوتر جایی هرچه کمتر لازم داشته باشد و برای اجرای آن زمانی هرچه کوتاهتر صرف شود. برای این کار، باید تعداد متغیرهای به کار رفته در آن و هم تعداد عملهای پردازشی آن، هرچه ممکن است کمتر باشند. نه تنها هر چرخه به کار رفته در الگوریتم، بلکه خود الگوریتم نیز باید در مرحله‌ای پایان یابد.

مسأله نمونه

می‌خواهیم الگوریتم برنامه‌ای را طرح کنیم که بنابر آن برنامه، هر بار که یک عدد حقیقی (در حالت کلی به صورت ممیزدار و با تعداد محدودی از رقمها) به کامپیوتر داده شود معلوم کند هر یک از رقمهای دهگانه چند بار به صورت با معنی در آن عدد به کار رفته است (صفرهای واقع در سمت چپ عدد صحیح و صفرهای واقع در سمت راست کسر دهمی رقمهای با معنی به شمار نمی‌آیند).

متغیر N را انتخاب می‌کنیم تا عددی را که هربار به کامپیوتر داده می‌شود، در خود نگه‌دارد. الگوریتم باید هربار برای هریک

شرطی معین تکرار شود. چنین فرآیندی را چرخه عملیاتی (=حلقه عملیاتی) و بیشتر فقط چرخه یا حلقه می‌نامند. چرخه‌ها از مهمترین ساختارهای نرم‌افزاری‌اند و یک ابزار توانمند الگوریتمها به شمار می‌آیند. هر چرخه یک مرحله گزینش دارد که در آن یک شرط بررسی می‌شود و بنابر آن، یا گردش کار چرخه پایان می‌یابد یا باز تکرار می‌شود. این شرط ممکن است یک گزاره (ساده یا مرکب) باشد. مانند شرط شکل (۲) که ترکیب فصلی دو گزاره است، و ممکن است که شرط توقف چرخه یک شمارنده باشد. در این حالت، یک متغیر به نام شمارنده انتخاب و پیش از آغاز کار چرخه مقدار آن صفر (یا یک، بنابر آن که مرحله گزینش در آغاز یا در پایان چرخه باشد) می‌شود و با هر بار تکرار چرخه، یک بار عدد یک به شمارنده افزوده می‌شود. در مرحله گزینش بررسی می‌شود که آیا مقدار شمارنده به حد مورد نظر رسیده است یا نه. ساختار کلی یک چرخه شمارشی مطابق با نمودار شکل (۳) است:



(شکل ۳)

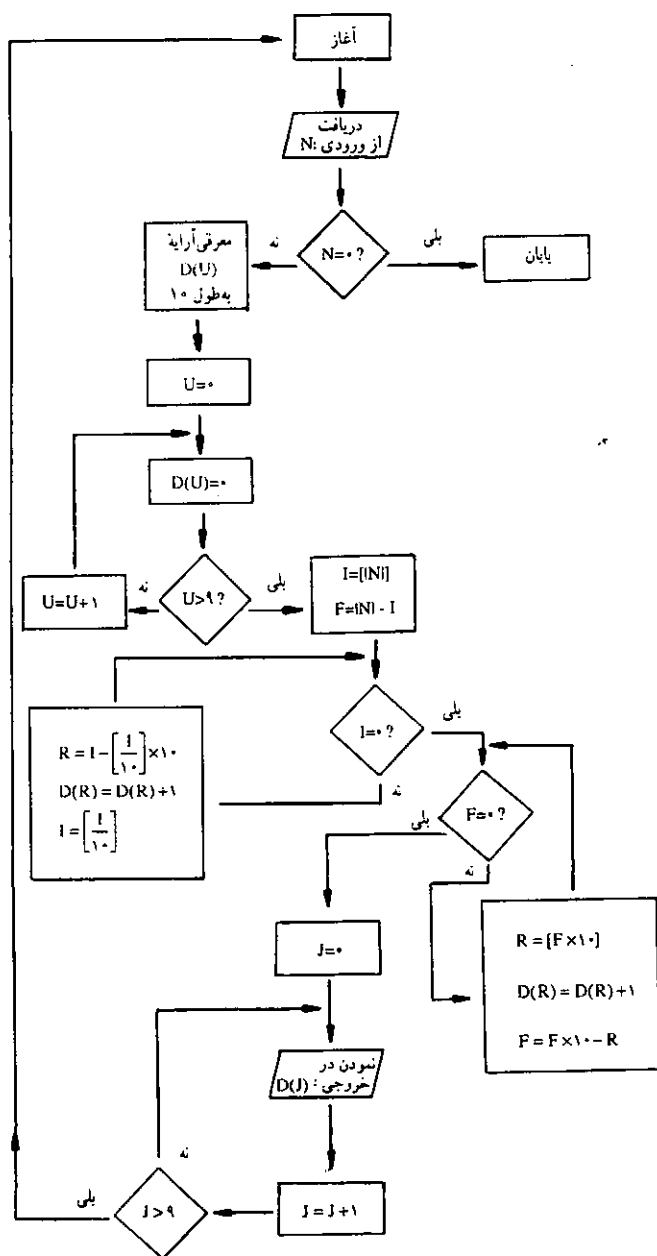
در هر یک از زبانهای برنامه‌نویسی، دستور عملهایی ویژه هریک از دو گونه چرخه وجود دارد. چنان که در زبان بیسیک دستور عملهای FOR - NEXT را برای چرخه شمارشی و دستور عملهای WHILE - WEND را برای چرخه شرطی می‌توان به کار برد. بدون به کار بردن این دستور عملهای ویژه، می‌توان الگوریتم شکل (۳) را به زبان بیسیک برگرداند.

ساختار الگوریتم

هر الگوریتم یک برنامه کامپیوتری معمولاً از سه بخش اصلی

پردازشهای مربوط به، به دست آوردن و شمارش رقمها که پایان یابند، مقدار واقع در هر درایه از آرایه D برابر با تعداد رقمهای برابر با زیروند آن درایه است. این مقادارها با یک چرخه شمارشی در خروجی دستگاه نموده می شوند.

الگوریتم بیان شده، مطابق با نمودار گردش کار شکل (۴) و برنامه آن به زبان بیسیک می تواند به گونه ای باشد که در صفحه پس از آن درج می شود.



(شکل ۴)

از این عددها تکرار شود و برای باز ایستادن این چرخه تکرار، عدد صفر را به کار می بریم؛ هرگاه عدد صفر به کامپیوتر داده شود، روی آن پردازشی انجام نگیرد و الگوریتم پایان یابد.

برای شمارش هریک از رقمهای به کار رفته، باید ده متغیر را به عنوان شمارنده به کار ببریم. این ده شمارنده را با متغیر زیرونددار D(U) نشان می دهیم که U یکی از عددهای از ۰ تا ۹ خواهد بود. این متغیر زیرونددار به صورت آرایه با نام D و به اندازه ۱۰ معرفی می شود و مقدار آغازی هریک از درایه های آن صفر می گردد. شمارش رقمها به این ترتیب انجام می گیرد که با هر بار به دست آمدن یکی از آنها، یک بار عدد یک به مقدار درایه با زیروند برابر با آن رقم افزوده می شود. مثلاً هر بار که رقم ۷ به دست آید، یک به مقدار D(۷) افزوده می شود.

برای به دست آوردن رقمها، در مرحله نخست، قدر مطلق جزء صحیح عدد را در متغیری به نام I و قدر مطلق جزء کسری را در متغیری به نام F می گماریم که ممکن است مقدار یکی از اینها صفر باشد. جزء صحیح را از راه به کار بردن تابع جزء صحیح، که در زبان بیسیک با INT(X) نموده می شود، و جزء کسری را از کم کردن جزء صحیح از خود عدد به دست می آوریم. تابع جزء صحیح همان است که در ریاضیات با [X] نشان داده می شود و کوچکترین عدد صحیح نابزرگتر از عدد مفروض است. از آن رو که اگر عدد منفی باشد علامت منفی در نوع رقمهای عدد تأثیری ندارد، قدر مطلق عدد مفروض را در نظر می گیریم.

پس از جدا کردن جزءهای صحیح و کسری عدد از هم، جزء صحیح را که بر ۱۰ تقسیم کنیم، خارج قسمت به دست آمده را باز بر ۱۰ تقسیم کنیم، و این فرآیند را تا زمانی تکرار کنیم که خارج قسمت صفر به دست آید، باقیمانده های تقسیمها رقمهای جزء صحیح عدد (به ترتیب از راست به چپ) خواهند بود. همچنین اگر جزء کسری عدد را در ۱۰ ضرب کنیم و جزء کسری حاصل ضرب را باز در ۱۰ ضرب کنیم و این فرآیند را تا زمانی تکرار کنیم که حاصل ضرب با جزء کسری برابر با صفر به دست آید، جزءهای صحیح حاصل ضربها رقمهای جزء کسری عدد مفروض (به ترتیب از چپ به راست) خواهند بود. هر بار که یک تقسیم بر ۱۰ انجام گیرد، خارج قسمت به جای مقسوم در I جایگزین می شود، همچنین پس از هر بار عمل ضرب، جزء کسری حاصل ضرب جایگزین مقدار قبلی F می شود. به این ترتیب هر دو گونه پردازش همواره روی دو متغیر I و F انجام می گیرد.

مسئله‌هایی برای تمرین

الگوریتم حل کامپیوتری هر یک از مسئله‌های زیر را طرح کنید و آن را یا با نمودار نشان دهید یا به یکی از زبانهای برنامه‌نویسی بنویسید :

۱ - دنباله عددی $[I_n]$ به گونه زیر تعریف شده است :

$$I_1 = 1 \text{ و } I_n = n + 2I_{n-1}$$

جمله‌های این دنباله و شماره ترتیب آنها تا آنگاه به دست آیند که آخرین جمله از ۱۰۰۰ بزرگتر نباشد.

۲ - کسری متعارفی ساده نشدنی و کوچکتر از یک به دهدهی دوره‌ای ساده تبدیل شده است. عدد A برابر با بخشی (ابتدا از ممیز) این کسر دوره‌ای است که دست کم یک دوره گردش را دربر دارد و عدد طبیعی N برابر با تعداد رقمهای دوره گردش است. دو عدد A و N داده می‌شوند. صورت و مخرج کسر متعارفی مفروض را به دست آورید.

۳ - در مسئله دانه‌های گندم «صفحه شطرنج» جواب برابر با «۱ - ۲^{۶۴}» است. به فرض آنکه هر عدد صحیح بزرگتر از $۶۵۵۳۶ = ۲^{۱۶}$ در کامپیوتر به صورت نمایی نموده شود که بنابر آن، تعدادی از رقمهای غیر صفر عدد به صفر تبدیل می‌شوند. چه الگوریتمی را باید به کار برد تا بنابر آن، تعداد دانه‌های گندم مسئله صفحه شطرنج با همه رقمهای اصلی خود در خروجی کامپیوتر نموده شود؟



برنامه به زبان بیسیک الگوریتم نمودار شکل (۴) می‌تواند چنین باشد :

```

10 INPUT N
20 IF N=0 THEN 200
30 DIM D (10)
40 FOR U=0 TO 9
50 D(U)=0 : NEXT U
60 I=INT (ABS(N)) : F=ABS(N)-I
70 IF I=0 THEN 110
80 R=I-INT (I/10)* 10
90 D(R)=D(R)+1
100 I=INT(I/10) : GOTO 70
110 IF F=0 THEN 150
120 R=INT (F*10)
130 D(R)=D(R)+1
140 F=F*10-R : GOTO 110
150 PRINT "Each of the digits has been used in
number as follow:"
160 FOR J=0 TO 9
170 PRINT "The digit" ; J,D(J) "times"
180 NEXT J
190 GOTO 10
200 END

```

برای مثال می‌توانید عدد $۸۹۰۸۷/۳۵۹$ را به جای N در نظر بگیرید و آن را روی برنامه آزمایش کنید که خروجی چنین باید باشد : ۱ بار رقم ۰، ۰ بار رقم ۱، ۰ بار رقم ۲، ۱ بار رقم ۳، ۰ بار رقم ۴، ۱ بار رقم ۵، ۰ بار رقم ۶، ۱ بار رقم ۷، ۲ بار رقم ۸، ۲ بار رقم ۹.

تحقیقی درباره نقش تاریخ ریاضیات در آموزش ریاضی

• میرشهرام صدر

مقدمه

آموزش ریاضیات، فقط برای کاربرد آن در دیگر علوم و در زندگی، یا برای بالا بردن توان فکری نیست. ریاضیات، به علت داشتن تاریخ طولانی، انبوه متراکمی از دانسته‌ها را پدید آورده است، که بخش مهمی از فرهنگ بشری را تشکیل می‌دهد. بنابراین اگر آموزش را به عنوان ابزار حفظ و انتقال و بالا رفتن سطح فرهنگ تعریف کنیم، یکی از وظیفه‌های معلمان ریاضی این است که گنجینه عظیم تاریخ ریاضیات را از طریق مدارس به نسل آینده انتقال دهند.

در آموزش ریاضیات کنونی، اغلب معلمان ریاضی همواره می‌کوشند، تا دانش‌آموزان درک درستی از مفاهیم ریاضی داشته باشند، سپس تکنیکها و روشهای حل مسئله را ارائه می‌دهند و در مرحله آخر، کاربردهایی از درس مورد نظر را برای دانش‌آموزان بیان می‌کنند و در ارائه این مطالب از روشهای مختلف آموزش استفاده می‌کنند. معلم ریاضی با دانستن تاریخ ریاضیات براساس فعالیت دانش‌آموز، می‌تواند طوری تدریس کند که دانش‌آموز در فرایند حل مسئله یا اثبات یک قضیه قرار گیرد. با این روش کاری می‌کنیم که دانش‌آموز، مراحل مختلف حل مسئله را خودش انجام دهد.



بنابراین، آشنایی با تاریخ ریاضیات، تسلط معلمان ریاضی را بر مباحث درسی کاملتر می‌کند و به آنها امکان می‌دهد تا موضوع تدریس خود را عمیقتر و با احساس قویتری درک و تدریس کنند. اکنون نقش تاریخ ریاضیات را در آموزش ریاضی به پنج مورد زیر تقسیم می‌کنیم، سپس درباره هر کدام شرح می‌دهیم:

۱- تاریخچه مختصری از موضوع درسی می‌تواند در دانش‌آموز ایجاد انگیزه و کلاس درس را زنده‌تر و جذابتر کند.

۲- تقویت هدف پرورشی آموزش ریاضی که همان اعتقاد به خود و اتکای به نفس در دانش‌آموز است.

۳- معرفی ریاضیدانان ایران به عنوان الگو و حفظ و انتقال فرهنگ ریاضی کشورمان به نسل آینده.

۴- پاسخگویی به بعضی از پرسشهای دانش‌آموزان که به اطلاعات دقیق تاریخ ریاضی نیازمند است.

۵- مطلع ساختن دانش‌آموزان از بی‌توجهی یا کم‌توجهی که غربیان نسبت به ریاضیدانان شرق بخصوص ایران در آثارشان موجود است.

شرح ۱. وقتی معلم در هنگام تدریس یک موضوع درسی، گوشه‌ای از تاریخ ریاضی در رابطه با موضوع درسی را بیان می‌کند، چون این گونه مطالب برای دانش‌آموزان تازگی دارد، بنابراین آنها به طور دقیق به این مطالب گوش می‌دهند و آمادگی کامل برای خود درس را پیدا می‌کنند. یعنی یکی از راه‌های آماده کردن دانش‌آموزان در کلاس درس، گریزهایی است که معلم به تاریخ ریاضی می‌زند. بنابراین آگاهی از روند پیدایش مفاهیم و مباحث هر رشته علمی از جمله ریاضیات، موضوع درسی را برای فراگیرنده آن ملموس‌تر و جذابتر می‌کند و این امر، یادگیری مطالب ریاضی را سریعتر و آسانتر می‌کند. همچنین با این کار دانش‌آموزان به درک علت پیدایش مفاهیم و موضوعهای ریاضی دست پیدا می‌کنند و این امر باعث ایجاد انگیزه برای آموختن یک موضوع درسی در دانش‌آموزان می‌گردد. در زیر به ارائه چند تاریخچه از مفاهیم ریاضی می‌پردازیم:

نمونه الف. وقتی موضوع لگاریتم را تدریس می‌کنیم، اگر وقت کلاس و میزان اطلاعات دانش‌آموزان این اجازه را به ما ندهد که تاریخچه پیدایش لگاریتم را مطرح کنیم، دست کم باید نامی از جان نپر و کارهای شگفت‌انگیز او برده شود، به عنوان مثال: شگفت‌آور نیست که نبوغ و قدرت تجسم نپر بعضی‌ها را بر آن داشت تا وی را از لحاظ فکری نامتعادل پندارند و برخی دیگر او را به عنوان رواج دهنده سحر و جادو تلقی کنند، همچنین

این کار باعث می‌شود که دانش‌آموز تا اندازه‌ای در جریان حل مسأله و تاریخچه کشف یک قضیه قرار گیرد و به جای تکرار لفظی قضایا، علم را پیش خود بازآفرینی کند، تا این که به نتیجه مطلوب برسد.

وقتی به تاریخ می‌نگریم، ملاحظه می‌کنیم که در زمان سقراط نیز مسأله آموزش و پرورش و تئوری یادگیری مورد مطالعه بوده است. سقراط در روش خود موسوم به روش «مامایی» بیان می‌کند که آموزش باید طوری باشد که دانش‌آموز (به معنی اعم آن) مفاهیم را بیازماید و به نظر او معلم در این تولد، نقش «ماما» را دارد. همچنین ژان ژاک روسو اعتقاد خود را به آموزش بر محور دانش‌آموز بیان می‌کند، همچنین وی تأکید می‌کند که دانش‌آموز باید علم را پیش خود بازآفرینی کند، او می‌گوید دانش‌آموز باید علوم را کشف کند.

ژاک آدامار در کتاب روانشناسی ابداع در ریاضیات از قول هانری پوانکاره می‌نویسد:

«من بیان خواهم کرد که حل فلان قضیه تحت بهمان شرایط اتفاق افتاد؛ این قضیه یک نام غیره مصطلح دارد که برای بسیاری کسان بیگانه است، اما این موضوع اهمیتی ندارد، آنچه برای روانشناس ریاضی جالب است، نه خود قضیه بلکه اوضاع و احوالی است که به ابداع منجر می‌شود.»

جیمز کلارک ماکسول معتقد است، خیلی مفید خواهد بود، اگر شاگردان در هر مبحثی، نوشته‌های دست‌اول مربوط به آن مبحث را بخوانند، زیرا علوم همیشه در همان صورتی که تولد یافته‌اند، بهتر جذب می‌شوند.

بنابراین، برای رسیدن به هدفهای ظریفی که در بالا پیشنهاد شده است، یعنی «افزایش درک ریاضی»، باید تاریخ ریاضیات را به عنوان یک ابزار در دست معلم برای دادن بینش به دانش‌آموزان و برانگیختن علاقه آنها در نظر گرفت. اگر با کاوشی در تاریخ ریاضیات بتوانیم دانش‌آموز را در اوضاع و احوالی که منجر به کشف یک قضیه یا فرایند حل یک مسأله قرار دهیم، در این صورت تدریس را به طور جذابتر انجام داده‌ایم و دانش‌آموز با فکر خود «مانند یک ریاضیدان» شروع به اکتشاف می‌کند. در نتیجه دانش‌آموز با این عمل مفاهیم را کمتر فراموش خواهد کرد و چه بسا با این فرایند، دانش‌آموز بتواند مطالبی را با فکر خود بیازماید، که برای ما تازگی داشته باشد، زیرا ریاضیات در حقیقت آفرینش آزادانه ذهن بدون هیچ محدودیتی بجز ماهیت خود ذهن است.

کند، به طریق زیر عمل کرد :

مثال. ابتدا با داشتن $\sin 3^\circ$ و $\sin 45^\circ$ توانست $\sin 15^\circ$ را محاسبه کند، سپس از روی ده ضلعی منتظم $\sin 18^\circ$ را محاسبه کرد و به کمک $\sin 15^\circ$ و $\sin 18^\circ$ چون $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$ توانست $\sin 3^\circ$ را محاسبه کند، سپس $\sin 3^\circ$ را بر حسب $\sin 1^\circ$ به صورت زیر نوشت :

$$\sin 3^\circ = 3 \sin 1^\circ - 4 \sin^3 1^\circ$$

با فرض این که $x = \sin 1^\circ$ خواهیم داشت :

$$4x^3 - 3x + \sin 3^\circ = 0$$

چون هر معادله درجه سوم را می توان به معادله ناقص تبدیل کرد، کاشانی جواب این معادله را با هر تقریب دلخواهی به دست آورد. بنابراین وقتی فرمولهای مثلثات را می گوئیم، با گفتن مختصری تاریخچه، در دانش آموز ایجاد انگیزه کرده ایم و چه بسا دانش آموز با تکیه بر ضمیر ناخودآگاهش بتواند حدسهایی بزند و آنها را ثابت کند که برای جامعه ریاضی تازگی داشته باشد.

نمونه د. بعد از این که توانستیم در دانش آموز ایجاد انگیزه کنیم، باید او را هدایت کنیم، که وقت خود را برای حل مسائلی نگذارد که امتناع آنها قبلاً ثابت شده است. به عنوان مثال، ما هنوز با دانش آموزان یا افرادی روبه رو هستیم که درباره تثلیث زاویه به کمک خط کش غیر مدرج و پرگار، تربیع دایره و تضعیف مکعب، وقت صرف می کنند؛ در حالی که عدم اثبات این گونه مسائل قبلاً ثابت شده است. بنابراین اگر مغلم سر کلاس با اطلاع از تاریخ ریاضیات، این صحبتها را بازگو کند، دیگر کسی بی دلیل وقت خود را تلف نمی کند.

ولی کار بر روی مسائلی که امتناع آنها ثابت نشده است، و می دانیم که بالاخره به طریقی باید راه حلی برای آنها کشف کرد، مانند قضیه آخر یا بزرگ فرما، دارای ویژگی مهمی به صورت زیر است :

«ریاضیدانان و حتی غیر ریاضیدانانی بر روی این گونه مسائل کار کرده اند و بعضی از آنها ادعا می کردند که توانسته اند این مسائل را ثابت کنند، نکته مهم این است که ریاضیدانان برای این که بتوانند این مسائل را اثبات کنند، روشهای جدیدی را پیدا کرده اند و هم اکنون این مسائل چه حل شده باشند، یا نباشند، چیزی که باقی مانده و ارزشمند است، روشها و دیدگاههای مختلف ریاضی است.»

داستانهای نپر را درباره خروس سیاه زغالی ... و کبوترهای مزاحم همسایه اش ... بازگو کنیم.

نمونه ب. وقتی موضوع احتمال را تدریس می کنیم، معمولاً تاریخچه علم احتمال را براساس بازیهای شانسی معرفی می کنیم، در این صورت درس برای دانش آموزان جذابتر شده و درمی یابند که ریاضیات در زندگی روزمره آنها کاربرد دارد. در این باره می توان گفت : بازیهایی که متکی بر شانس است، از زمانهای بسیار قدیم رایج بوده است. در حفاریهای باستان شناسی، برخی وسایل و آثار مربوط به بازیهای شانسی مشاهده شده است که می توان از مکعبی استخوانی که روی وجه های آن عدد های از ۱ تا ۶ نقش شده است، نام برد. امروزه در مواردی که براحتهی توان یک انتخاب را بر انتخاب دیگر ترجیح داد، از شانس استفاده می شود؛ مثلاً برای شروع بازی از پرتاب سکه استفاده می کنند یا برای قبول یا رد یک موضوع از قرعه استفاده می کنند. در گذشته نیز خانواده هایی که همسرشان را به روش سنتی انتخاب می کردند، در حقیقت براساس شانس انتخاب همسر کرده اند. و در روزگار کنونی کسانی که قادر به تصمیم گیری نیستند، به فال گیری و پیشگویی روی می آورند و از این طریق بر شانس تکیه می ورزند.

نخستین مسأله های مربوط به نظریه احتمال در سده شانزدهم میلادی پدید آمد و مسأله ای که انگیزه ای برای تولد احتمال شد، مربوط به دمره نامی از دوستان پاسکال بود؛ «قرار بود مبلغی پول بین دو نفر با انجام یک بازی شرطی تاس تقسیم گردد». این مسأله را پاسکال حل کرد، سپس حل خود را به فرما نشان داد و فرما به یاری آنالیز ترکیبی این مسأله را حل کرد، سپس اگر کمی درباره تاریخ زندگی فرما صحبت کنیم، دانش آموزان درمی یابند که بعضی از ریاضیدانان بزرگ شغل دیگری داشته اند و برای اوقات فراغت و سرگرمی، ریاضی می خواندند.

«پیر فرما، فرزند یک تاجر پوست؛ درس حقوق خواند و در آغاز به عنوان وکیل مدافع به کار پرداخت، ولی بعد مشاور مجلس شد که تا پایان زندگی خود آن را حفظ کرد. شغل فرما هیچ ربطی به ریاضیات نداشت و این از جمله شگفتیهاست که وی از همه وقت آزاد خود برای بررسیهای ریاضی استفاده می کرد.»

نمونه ج. در این مقاله گفته شد که اگر دانش آموز را در مراحل مختلف حل یک مسأله، مانند یک ریاضیدان قرار دهیم، در این صورت درس جذابتر و باعث ایجاد انگیزه خواهد شد. در زیر به یک نمونه از این مسائل می پردازیم :

غیاث الدین جمشید کاشانی وقتی می خواست $\sin 1^\circ$ را حساب

جسم، به وسیله نیوتن، همچون جابه جایی مکانیکی در نظر گرفته می شد و لایب نیتس از درون هندسه به مفهوم مشتق و دیفرانسیل رسید. در ضمن، بسیاری از اصطلاح‌هایی که لایب نیتس در نوشته‌های خود به کار برده است، چنان خوب انتخاب شده بودند که تا امروز در ریاضیات باقی مانده است، از جمله می توان اصطلاح‌های تابع، مختصات، منحنی جبری و نمادهایی مانند λ و dy را نام برد.

با آن که نیوتن کوشیده بود نظریه حد را با دقت بیان کند، باز هم کمبودهایی در آن دیده می شد. از این گذشته در استفاده نیوتن از مقدارهای بی نهایت کوچک هم، ناروشتنی‌هایی به چشم می خورد. همچنین لایب نیتس و هواداران معاصر وی، تعریفی از کمتهای بی نهایت کوچک ارائه نداده اند. به این ترتیب، خلافت آنالیز ریاضی به صورت ازار نیرومندی برای مطالعه پدیده‌ها در دست انسان بود، بدون این که خود آنالیز ریاضی بدرستی در پایه‌های خود سازمان یافته و ساختاری منطقی داشته باشد.

بعدها، یاکوب برنولی و فرانسوا هوییتال ادامه دهندگان کار نیوتن و لایب نیتس شدند و هوییتال در سال ۱۶۹۶ کتاب «آنالیز بی نهایت کوچکها» را منتشر کرد که باید آن را نخستین کتاب منظم درسی در زمینه دیفرانسیل و انتگرال دانست. بالاخره کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) ریاضیدان فرانسوی با تعریف کمتهای بی نهایت کوچک، توانست پایه‌های آنالیز ریاضی را مستحکم کند.

شرح ۳. معرفی ریاضیدانان ایرانی و کارهایی که آنها انجام داده اند، باعث می گردد که دانش آموزان الگوهای درست در جهت فعالیت درسی انتخاب کنند. وقتی دانش آموزان بفهمند که اساس حساب، جبر و مثلثات، در ایران بنیاد نهاده شده است و ریاضیدانهای ایرانی، حتی مثلثات کروی را هم تجزیه و تحلیل کرده بودند، در این صورت نسبت به خودشان و کشورشان در مقابل غریبان احساس ضعف نمی کنند.

اگر به بناهای باستانی و سنتی سراسر ایران با دقت بنگریم؛ در این صورت در همگی آنها، مفاهیم و شکلهای هندسی را ملاحظه می کنیم که تجلی بخش معماری ایرانی است. بنابراین این نوع بناهای ریاضی وار و همچنین نوع زندگی (معشیتی، اعتقادی) و نوع کار علمی کردن و... ریاضیدانان ایرانی بخشی از فرهنگ ما را تشکیل می دهد، که معلم ریاضی می تواند آن را در کلاس درس به نسل آینده منتقل کند.

شرح ۴. گاهی در کلاس درس، سؤالاتی برای دانش آموزان

شرح ۲. اغلب دانش آموزان تصور می کنند مطالبی را که می خوانند، از ابتدا به همین شکل حاضر و آماده بوده است و کسی آنها را پیدا نکرده، یا این گونه مطالب به کمک کار تردستی و شعبده بازی به دست آمده اند. در حالی که اگر مطالبی راجع به تاریخ ریاضی گفته شود، دانش آموزان می فهمند که این مطالب چه مراحل را گذرانده اند و در ابتدای کار خیلی دقیق نبوده و بتدریج در طول سالها و شاید قرن‌ها به وسیله ریاضیدانان به شکل امروزی درآمده است.

به همین مناسبت دانش آموز اعتماد به نفس می یابد. اگر در جایی بی دقتی یا اشتباهی داشته باشد، متوجه می گردد که ریاضیدانها نیز در ابتدای کار چنین بوده اند و حتی بعضی از آنها از نظر دیگران افرادی کند ذهن به نظر می آمدند. در زیر به ارائه این گونه مطالب می پردازیم:

نمونه الف. دکارت عددهای منفی را دروغین می نامید، و از به کار بردن آنها پرهیز می کرد و گاوس با آن عظمت علمی که از او می شناسیم، از بی نهایت هراس داشت. این مطالب نشان می دهد که ریاضیات از طریق همین تعمیمها و تجربدها رشد کرد.

نمونه ب. زمانی که بویویی و لباچفسکی در قرن ۱۹ هندسه نااقلیدسی را ابداع کردند، خود متوجه نبودند که با ابداع هندسه نااقلیدسی، انقلابی در ریاضیات کرده اند و مطمئناً هرگز تصور نمی کردند که صد سال بعد از این کار، فیزیکدانان در فرمول بندی نظریه نسبیت، هندسه نااقلیدسی را درست همان ازاری می یابند که برای ساده سازی نظریه ایششتین نیاز دارند. در حقیقت ابداع کنندگان مفاهیم و دستگاه‌های ریاضی، غالباً کاربردهای این مفاهیم و دستگاه‌ها را پیش بینی نمی کردند و چنین کاربردهایی، سالها بعد به روشهای پیش بینی نشده ای یافت می شوند.

نمونه ج. در کتاب مشهور «مقدمات» اقلیدسی، اصلی وجود دارد که می گوید: «هر کل، از جزء خود بزرگتر است». این «اصل» چنان بدیهی به نظر می رسد که کسی کمترین تردیدی درباره درستی آن نداشت. ولی امروزه می دانیم، که این اصل، تنها درباره مجموعه‌های با پایان، درست است، زیرا اگر فرض کنیم $A = [1, 2]$ و $B = (1, 2)$ می دانیم که $B \subsetneq A$ ، در حالی که $L_A = L_B$.

نمونه د. درباره نحوه پیدایش مشتق و هندسه دیفرانسیل می توان گفت:

مفهومهای اصلی آنالیز ریاضی برای نیوتن بازتابی از مفهومهای مکانیک بود، حتی ساده ترین شکلهای هندسی، یعنی خط، زاویه و

توصیه‌ها

توصیه‌هایی به جامعه ریاضی دانشگاهی و مسئولان برنامه‌ریزی نیازهای علمی و انسانی:

الف. برای هر یک از کتابهای درسی، یک کتاب منطبق با فصلهای آن، برای تاریخچه لغات و تاریخ ریاضیات تألیف کنند، تا معلمان با دستی‌پُر از تاریخ ریاضی وارد کلاس شوند و دانش‌آموزان را از این مطالب آگاه سازند.

ب. در این قسمت، یک توصیه همراه با یک گله دارم: هم‌اکنون در کشور ما حتی یک نفر هم نیست که تحصیلات دانشگاهی وی در ارتباط با تاریخ علم ریاضی باشد و این به آن جهت است که تا به حال در ایران چنین رشته‌ای در دانشگاه نداشته‌ایم و در حال حاضر، اگر کسی تمایل داشته باشد که در چنین رشته‌ای متخصص شود، جایگاهی برای او نداریم، بنابراین اکنون که در آستانه سال جهانی ۲۰۰۰ و به احترام برگزاری اولین سمینار تاریخ ریاضی در دانشگاه هرمزگان و به پاس قدردانی از برگزارکنندگان سه کنفرانس آموزش ریاضی در کشور و از همه مهمتر به خاطر نیاز شدید ایران به این مهم، جایی برای این رشته در دانشگاه باز کنید، و از اساتید درس دو واحدی تاریخ ریاضیات، بخصوص در دانشگاه‌های تربیت معلم می‌خواهم که این درس را بیشتر از سابق جدی بگیرند (مانند جبر یا آنالیز)، زیرا هم‌اکنون این دو واحد درسی نیز در بیشتر دانشکده‌های ریاضی، مظلوم واقع شده است.

ان شاء...

فهرست منابع

- ۱- آشنایی با تاریخ ریاضیات جلد اول و دوم - هاورد و. ایوز / ترجمه دکتر محمد قاسم وحیدی اصل
- ۲- ریاضیدانان نامی - اریک تمپل بل / ترجمه حسن صفاری
- ۳- گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی - جی. ال. پرگرن / ترجمه دکتر وحیدی اصل و دکتر علیرضا جمالی
- ۴- ریاضیات مدرسه در دهه ۱۹۹۰ - برابان ویلسون / ترجمه ناهید ملکی
- ۵- روان‌شناسی ابداع در ریاضیات - ژاک آدمار / ترجمه عباس مخبر
- ۶- ریاضیات محاسبه‌ای / تألیف پرویز شهریاری
- ۷- تاریخچه احتمال - مجله رشد ریاضی شماره ۸ / نوشته دکتر عین‌الله پاشا

پیش می‌آید که معلم برای پاسخ به آنها باید اطلاعات دقیق تاریخ ریاضی داشته باشد. در زیر به چند نمونه می‌پردازیم:

نمونه الف. واژه سینوس در حقیقت تغییر شکل یافته واژه لاتینی است که ترجمه واژه عربی «جیب» است که ریاضیدانان مسلمان اشتباهاً به جای واژه هندی «جیا» به معنی «نصف وتر» به کار می‌بردند.

نمونه ب. درباره عدد e می‌توان گفت: اولین کسی که به اهمیت این عدد پی‌برد و آن را وارد ریاضیات کرد، اولر بود، همچنین او نماد e را برای عدد اولر $2/7182818284590452353602874713526624977572470966992654655648979090471361270139662422611706715566946229272605211$ که از رابطه زیر به دست می‌آید، به کار برد:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

وقتی در جهان هستی، پدیده‌های متنوع و بسیاری وجود دارد که مدل تغییرات آنها متضمن عدد e می‌باشد، به اهمیت عدد e بیشتری می‌بریم (مانند مدل تغییرات رشد و زوال) و بی‌سبب نیست که لگاریتم در پایه e را لگاریتم طبیعی می‌نامند. و اولین کسی که لگاریتم در پایه e را به کار برد، جان نپر بود و در حل بعضی از مسائل ریاضی، مانند مشتق تابع با ضابطه $y = a^x$ یکباره در مراحل حل مسأله، سروکله $\ln x$ پیدا می‌شود.

البته لازم به تذکر است، که تاریخچه این نوع مطالب در ریاضی، باید توسط سازمانهای دولتی و انتشاراتی و محققان از لایه لای تاریخ ریاضی بیرون آورده شود، تا در اختیار معلم قرار گیرد.

شرح ۵. کتابهای تاریخ ریاضی که تاکنون توسط غربیان نوشته شده است، به ریاضیدانان شرق بخصوص ایران، بی‌توجهی یا کم‌توجهی کرده‌اند؛ اگر هم نامی از این ریاضیدانها برده‌اند، از آنها ریاضیدان عرب و یا مثلاً ریاضیدانان دربار آلغ بیگ (نوه تیمور) نام برده‌اند، چون ریاضیدانان ایران در گذشته آثارشان را به زبان علم آن روز، یعنی عربی می‌نوشتند و این دلیلی بر عرب بودن آنها نیست، همانطور که از اسامی ریاضیدانان ایرانی، مانند کاشانی، کرجی، خوارزمی و ابوالوفای بوزجانی (تربت جام) معلوم است همه آنها ایرانی بوده‌اند و عرب نیستند. در این زمینه باید توجه داشت که ما ضد عرب نیستیم، بلکه می‌خواهیم هر کسی را در جای حقیقی خودش قرار دهیم و به اهمیت ریاضیدانان ایرانی بی‌بریم. از طرفی تا حدود قرن ۱۶، ریاضیدانان غرب آثارشان را به زبان علم آن روز غرب، یعنی لاتین می‌نوشتند، اما در کتابهای تاریخ ریاضی همه آنها منسوب به کشور خودشان شده‌اند.

کاربرد ریاضی در علوم

و

شگفتیهای زمین

● شادی دلکش رودسری

تعیین اندازه آنها و ترسیم منحنیهای مربوطه و مقایسه آنها با یکدیگر، برای شناسایی این که کدام یک دارای جورشدگی بهتری از دیگری است، یا این که ذرات دانه ریز، در نمونه فراوانتر است یا ذرات دانه درشت، یک سری پارامترهای آماری از قبیل: میانگین، کج شدگی، کشیدگی و انحراف معیار را محاسبه می نماییم. اندازه گیری پارامترهای آماری، ممکن است به روش ترسیمی از روی منحنیها، یا به روش لحظه ای انجام شود.

در شماره قبل، یکی از انواع منحنیهای مربوط به اندازه ذرات رسوبی، به نام منحنی تجمعی ترسیم گردید؛ اما به دلیل تخصصی بودن و پیچیدگی روش ترسیم انواع منحنیها و جگونگی محاسبه پارامترهای آماری به روش ترسیمی از روی منحنیها، از توضیح این روش خودداری می شود و تنها به شرح پارامترهای آماری به طریق روش لحظه ای اکتفا می کنیم. برای آگاهی و آشنایی هر چه بیشتر شما عزیزان با علم زمین شناسی، قبل از شرح اندازه گیری به روش لحظه ای، توضیح مختصری در مورد هریک از پارامترهای آماری ارائه می شود:

۱- میانگین: عبارت است از حد متوسط اندازه ذرات در رسوب، که آن را با علامت MZ (در روش ترسیمی) و $X\phi$ (در روش لحظه ای) نمایش می دهند.

در این شماره، به پیوست مقاله شماره قبل، سعی می شود تا شما عزیزان را با کاربرد سریها در رسوب شناسی (یکی از رشته های تخصصی زمین شناسی) و اهمیت آن در آنالیز اندازه ذرات و محاسبه پارامترهای آماری برای شناسایی کلی ویژگیهای منطقه مورد بررسی، آشنا کنیم.

آنالیز اندازه دانه ها

آنالیز توزیع دانه های رسوبی، برای مقایسه نمونه های مختلف با یکدیگر از اهمیت خاصی برخوردار است؛ زیرا به این وسیله می توان به ویژگیهای مختلف رسوبات و فرایندهایی که منجر به تشکیل آنها می شوند، پی برد. همان طور که می دانید، ذرات رسوبی، بیشتر به وسیله آب و هوا منتقل می شوند و با کاهش شدت جریان، بتدریج، ذرات در اندازه های مختلف از یکدیگر جدا شده و رسوب می کنند. اگر رسوب از چندین منشأ متفاوت، سرچشمه گرفته باشد، ذرات آن در اندازه های مختلف دیده می شوند. مخلوطی از ذرات رسوبی در اندازه های متفاوت را تجمع (Population) می گویند که ممکن است این اندازه ها، از گراول تا رُس تغییر کند. برای درک بهتر توزیع دانه ها در رسوبات و ارزشیابی یک سری نمونه که توسط فرایندهای مختلفی پراکنده شده اند، پس از

۲- انحراف معیار (Standard Deviation): انحراف

معیار، میزان جورشدگی ذرات را مشخص می کند، که با علامت $\sigma\phi$ نمایش داده می شود.

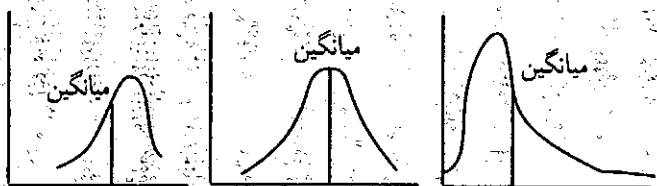
۱.۲- جورشدگی یا یکنواختی (Sorting): عبارت است از این که، ذرات تشکیل دهنده رسوب یا سنگ، تا چه اندازه به یکدیگر نزدیک باشند؛ همه ذرات دانه ریز باشند یا دانه درشت و یا ترکیبی از آن دو.

طبقه بندی زیر، برای تعیین جورشدگی ذرات براساس مقدار انحراف معیار در یک سری رسوب، توسط «فولک» (۱۹۷۴ م) ارائه شده است:

جورشدگی بسیار خوب	$S\phi < 0.25$ (فی)
جورشدگی خوب	$0.25 < S\phi < 0.5$
جورشدگی خوب متوسط	$0.5 < S\phi < 0.75$
جورشدگی متوسط	$0.75 < S\phi < 1$
جورشدگی بد	$1 < S\phi < 2$
جورشدگی بسیار بد	$2 < S\phi < 4$
جورشدگی بی نهایت بد	$S\phi > 4$

۳- کج شدگی یا نامتقارن بودن منحنی (Skewness):

کج شدگی عبارت از نامتقارن یا نامتجانس بودن منحنی توزیع ذرات که به وسیله دنباله منحنی توزیع، مشخص و با علامت $SK\phi$ نشان داده می شود. در منحنیهای متقارن، مقدار کج شدگی صفر است؛ ولی در منحنیهایی که دنباله آنها به طرف راست یا به طرف رسوبات دانه ریزتر متمایل باشد، مثبت، و اگر دنباله منحنی به طرف چپ یا رسوبات دانه درشت تر باشد، منفی است. (شکل ۱- الف، ب و ج).



الف - نامتقارن مثبت ب - متقارن ج - نامتقارن منفی

شکل ۱- منحنیهای فراوانی متقارن و نامتقارن (مثبت و منفی)

از آن جا که کج شدگی در ارتباط با اندازه ذرات تشکیل دهنده رسوب یا سنگ است، از آن برای تعبیر و تفسیر محیط رسوبی و فرآیندهایی که باعث حمل و نقل شده اند، استفاده می شود. فولک

(۱۹۷۴ م) مقیاسی را برای کج شدگی به شرح ذیل ارائه داده است:

کج شدگی زیاد به سمت ذرات دانه ریز $+1 < SK\phi < +0.3$
 کج شدگی به سمت ذرات دانه ریز $+0.3 < SK\phi < +0.1$
 کج شدگی صفر = تقریباً متقارن $-0.1 < SK\phi < +0.1$
 کج شدگی به سمت ذرات دانه درشت $-0.1 < SK\phi < -0.3$
 کج شدگی زیاد به سمت ذرات دانه درشت $-0.3 < SK\phi < -1$

۴- کشیدگی (Kurtosis): عبارت است از اندازه گیری نوک تیزی یا کشیدگی منحنی توزیع ذرات که با علامت $K\phi$ نشان داده می شود. فولک (۱۹۸۴ م) مقیاسی برای طبقه بندی کشیدگی منحنیها به شرح زیر ارائه کرده است:

بسیار پهن	$K\phi < 0.67$
پهن	$0.67 < K\phi < 0.9$
متوسط	$0.9 < K\phi < 1.1$
کشیده	$1.1 < K\phi < 1.5$
بسیار کشیده	$1.5 < K\phi < 3$
بی نهایت کشیده	$K\phi > 3$

اندازه گیری به روش لحظه ای (method of moment)

برای محاسبه پارامترهای آماری که برای آنالیز اندازه دانه ها به کار می رود، از فرمولهای زیر استفاده می شود (مک بوزاید، ۱۹۷۷ م):

$$\text{میانگین} = \bar{X}\phi = \frac{\sum fm}{n}$$

$$\text{انحراف معیار} = \sigma\phi = \sqrt{\frac{\sum f(m - \bar{X}\phi)^2}{100}}$$

$$\text{کج شدگی} = SK\phi = \frac{\sum f(m - \bar{X}\phi)^3}{100 \cdot \sigma\phi^3}$$

$$\text{کشیدگی} = K\phi = \frac{\sum f(m - \bar{X}\phi)^4}{100 \cdot \sigma\phi^4}$$

f: درصد وزن دانه ها. m: نقطه وسط هر رده در مقیاس

فی

n: شمارش اعداد به دست آمده در هر نمونه، و زمانی که f به درصد است، برابر با ۱۰۰ می باشد.

همان طور که می دانید، مفهوم دیگری که با مفهوم دنباله ارتباط نزدیک دارد، سری می باشد. سری چیزی جز مجموع حاصل از

چون سری فوق دارای حد برابر یک می باشد، پس سری همگرا است.

بحث سریها را می توان به عنوان مطالعه دو دنباله در نظر گرفت؛ دنباله اصلی که جمله هایش سری هستند و دنباله مجموعهای جزئی (S_n) به این معنا که، $\{a_n\}$ ما را به سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ می رساند، که این سری، به توبه خود، ما را به دنباله دوم $\{S_n\}$ می رساند که در آن:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 = S_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4 \\ &\vdots \\ S_n &= \sum_{i=1}^n a_i = S_{n-1} + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

تعریف همگرایی را می توان برحسب همگرایی یک دنباله، به صورت زیر بیان کرد:

تعریف: سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ همگرا است؛ اگر دنباله مجموعهای

جزئی آن، $\{S_n\}$ ، که $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ ، همگرا باشد، در غیر این صورت، $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ واگرا است.

بعضی از قضایای سریها

قضیه ۱. اگر $a_i = a$ و a برای هر i ثابت باشد، $\sum_{i=1}^n a_i = na$.

قضیه ۲. $\sum_{i=1}^n (k_i \pm g_i) = \sum_{i=1}^n k_i \pm \sum_{i=1}^n g_i$.

قضیه ۳. اگر a ثابت باشد، $\sum_{i=1}^n a k_i = a \sum_{i=1}^n k_i$.

قضیه ۴. $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

قضیه ۵. $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

قضیه ۶. $\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

جمله های یک دنباله نیست؛ یعنی جمله های یک سری، جمله های یک دنباله می باشند؛ یعنی توابع حقیقی که قلمرو آنها، اعداد صحیح غیر منفی می باشند.

مجموع n جمله دنباله $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$ را به صورت $\sum_{i=1}^n k_i$ نمایش می دهیم و می خوانیم مجموع k_i ها وقتی که i از ۱ تا n تغییر می کند، و نشانه گذاری سیگما یا نشانه جمع بندی نامیده می شود.

سریها به طور کلی، به دو دسته متناهی و نامتناهی تقسیم می شوند. سریهای متناهی، یعنی سریهایی با تعداد جمله های محدود و مشخص. به طور مثال، یکی از سریهای متناهی دنباله $\{a_n\}$ ، $a_n = \frac{1}{n^2}$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \end{aligned}$$

سریهای نامتناهی، یعنی سریهایی با تعداد جمله های نامتناهی و نامشخص. به طور مثال، سری نامتناهی دنباله $\{a_n\}$ ، $a_n = \frac{1}{n}$ به صورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$$

بحث دیگری که در مورد سریها مطرح می شود، همگرا و واگرا بودن آنها می باشد. به بیان ساده، اگر حد یک سری مشخص باشد، آن سری، همگرا نامیده می شود، در غیر این صورت، سری واگرا است.

مثال: آیا $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ همگراست؟

حل: این عبارت، سری هندسی با $\left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$ است.

به علاوه، چون جمله اول آن $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ است، پس:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

که توسط آنالیز اندازه دانه‌ها، می‌توان به چگونگی حمل و نقل و شرایط رسوبگذاری در هنگام تشکیل، ویژگی‌های مختلف رسوبات و محیط‌های رسوبگذاری، فرایندها و ویژگی‌هایی که منجر به تغییر محیط رسوبگذاری می‌شوند و در نهایت، وقایع و اتفاقاتی که از زمان تشکیل تا به حال، در منطقه صورت گرفته، پی برد. مطلب مهمی که باید مورد توجه قرار گیرد، این است که تمام پارامترهای آماری محاسبه شده از آنالیز اندازه دانه‌ها برای تعبیر و تفسیر رسوبات قدیمه، در صورتی حائز اهمیت است که اندازه دانه‌ها در اثر عمل دیازیز، تغییر نکرده باشد.



ادب ریاضی

برخلاف آنچه عامه مردم تصور می‌کنند، کلمه‌های محاسب و ریاضیدان مترادف نیستند و بسیار ممکن است که شخص ریاضیدان زبردستی باشد؛ اما برای یک عمل جمع صحیح، گرفتار زحمت شود. هانری پوانکاره از جمله ریاضیدانانی بود که در فن محاسبه قدرتی ندارد. فقط در علم نجوم است که شخص باید هم ریاضیدان و هم محاسب زبردست باشد.

این مطلب برای تشویق منجمانی گفته نشده است که محاسبه‌های طویل خود را تکالیف شاقی می‌دانند؛ بلکه منجمانی دیگری هستند که این محاسبه‌ها را با شغف بسیار استقبال می‌کنند و تمام روز، با شور و حرارت، با اعداد پازره رقمی عمل می‌کنند. منجم فرانسوی هانری آندویر (H. Andoyer) (۱۸۶۲-۱۹۲۹) از جمله این منجمان محسوب می‌شود، او یلر نیز چنین استعدادی داشت و مسلماً گاوس هم از جمله آنان بود.

تاریخ علوم - پی‌یر روسو - حسن صفاری

با استفاده از فرمولهای ذکر شده و تعیین پارامترهای آماری مورد نظر، از آنالیز اندازه دانه‌ها، می‌توان برای تشخیص رسوبات در محیط‌ها و رخساره‌های مختلف استفاده کرد که این خود، اطلاعاتی در مورد فرایندهای رسوبگذاری و نوع جریان در اختیار ما قرار خواهد داد. توزیع اندازه دانه‌ها در رسوبات، به اختصاصات سنگ منشأ فرایندهای هوازدگی، سایش و جورشدگی انتخابی آنها در هنگام حمل و نقل، بستگی دارد.

بررسی توزیع اندازه ذرات آواری در رسوبات، نشان داده است که یک رابطه کلی بین پارامترهای آماری از قبیل: میانگین، جورشدگی و کج‌شدگی وجود دارد. مطالعات زیادی برای ارتباط دادن توزیع دانه‌ها - از نظر آماری - در رسوبات عهد حاضر با محیط رسوبی آنها انجام شده است که از آن جمله می‌توان مطالعات «فریدمن» (۱۹۶۱ و ۱۹۶۷) را نام برد؛ که نتایج به دست آمده توسط او، به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

رسوبات رودخانه‌ای، اغلب دارای جورشدگی بدتری نسبت به رسوبات ساحلی و کج‌شدگی مثبت می‌باشند. کج‌شدگی مثبت، به علت وجود مقادیر زیادی مواد معلق از قبیل سیلت و رس، در رودخانه است که پس از رسوبگذاری، مقداری از این ذرات در داخل رسوبات باقی مانده است. رودخانه‌هایی که مقادیر زیادی ذرات دانه درشت را با خود حمل می‌کنند، ممکن است دارای کج‌شدگی منفی باشند.

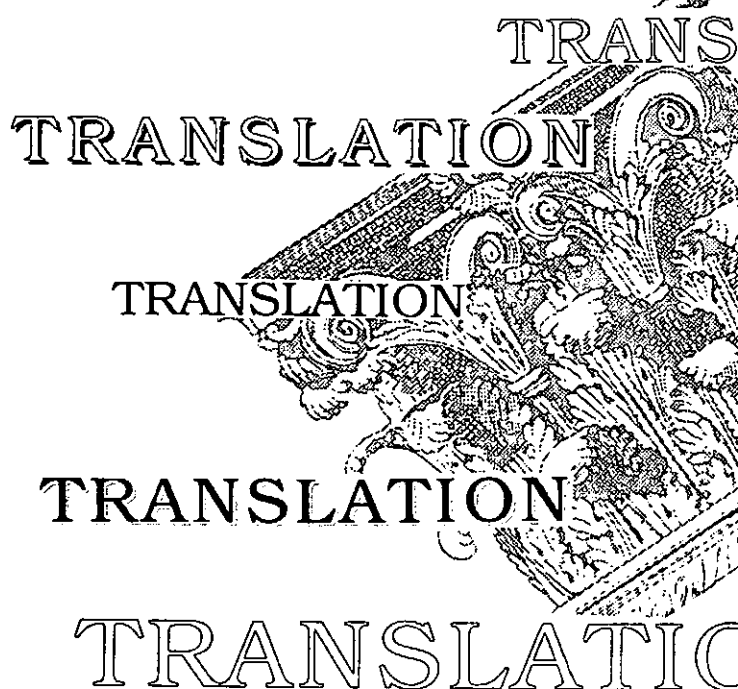
رسوبات ساحلی دارای جورشدگی خوب و کج‌شدگی منفی هستند؛ زیرا در محیط‌های ساحلی، به علت حرکت امواج، ذرات دانه درشت‌تر، بر جای مانده و کج‌شدگی منفی را تشکیل می‌دهند. رسوبات تپه‌های شنی، حاوی ذرات ماسه‌ای ریزتر از رسوبات ساحلی هستند و کج‌شدگی آنها مثبت می‌باشد، که این مثبت بودن، در اثر حرکت ذرات دانه ریز به وسیله باد و بر جای ماندن ذرات دانه درشتی است که باد قادر به حرکت آنها نبوده و به نام دانه‌های «باقیمانده» (lag) معروف می‌باشند. سپس دانه‌های درشت باقیمانده که تعداد آنها بسیار کم است و باد قادر به حرکت آنها نمی‌باشد، موجب می‌گردند تا فراوانی ذرات ریزتر، بیشتر شده و کج‌شدگی مثبت تشکیل شود. بنابراین، کج‌شدگی مثبت رسوبات رودخانه‌ای و تپه‌های شنی، از دو مکانیزم متفاوت تشکیل شده است که در رودخانه به علت وجود ذرات دانه ریز بوده، ولی در تپه‌های شنی، به علت وجود ذرات دانه درشت باقیمانده است.

بنابراین، از اطلاعات ارائه شده در بالا، چنین استنباط می‌شود

آموزش ترجمه متون ریاضی (۲۳)

Multiple choice Tests in advanced mathematics از کتاب

● حمیدرضا امیری



Test 8

Time allowed: 1¼ hours

SECTION I

Questions 1–20

(Twenty questions)

1. Given that $x \in \mathbb{R}$ and $2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$, then

- A $x = 1$ or $\frac{1}{2}$ B $x = 0$ or $\ln 2$
C $x = 1$ or $-\ln 2$ D $x = 0$ or $-\ln 2$
E x cannot be found

2. The gradients of the tangents from the origin to the circle

$$x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0,$$

are

- A $\pm \frac{3}{4}$ B $\pm \frac{4}{3}$
C $\pm \frac{3}{5}$ D $\pm \frac{5}{3}$
E $\pm \frac{5}{4}$

تست ۸

وقت ۱¼ ساعت

بخش ۱

سوالهای ۱ الی ۲۰

(بیست سوال)

۱. با فرض این که $x \in \mathbb{R}$ و $2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$ ، در این صورت،

(۱) $x = 1$ یا $\frac{1}{2}$ (۲) $x = 0$ یا $\ln 2$

(۳) $x = 1$ یا $-\ln 2$ (۴) $x = 0$ یا $-\ln 2$

(۵) x ای یافت نمی شود.

۲. ضریب زاویه (خطهای) مماس بر دایره $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$ ، از مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) $\pm \frac{3}{4}$ (۲) $\pm \frac{4}{3}$

(۳) $\pm \frac{3}{5}$ (۴) $\pm \frac{5}{3}$

(۵) $\pm \frac{5}{4}$

3. Given that $x \in \mathbb{R}$, which one of the following is *not* an even function of x ?

- A $f: x \mapsto |3x|$ B $f: x \mapsto \sin^2 x$
 C $f: x \mapsto \cos x$ D $f: x \mapsto x^2 - 1$
 E $f: x \mapsto (x - 1)^2$

4. $\int \frac{x^2}{(x^3 + 1)^{1/2}} dx =$

- A $\frac{1}{3} \ln(x^3 + 1)^{1/2} + \text{constant}$
 B $\frac{2}{3} \ln(x^3 + 1)^{1/2} + \text{constant}$
 C $\frac{3}{8} (x^3 + 1)^{1/2} + \text{constant}$
 D $\frac{1}{6} (x^3 + 1)^{1/2} + \text{constant}$
 E $\frac{1}{4} (x^3 + 1)^{1/2} + \text{constant}$

5. The complete set of values of x for which $(x + 3)(x^2 - 9) > 0$, where $x \in \mathbb{R}$, is

- A $\{x: x > 3\}$ C $\{x: -3 < x < 3\}$
 B $\{x: x > -3\}$ E $\{x: x < -3\}$
 D $\{x: x < -3\} \cup \{x: x > 3\}$

6. The general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x+2}{y+2} = 0$$

is, P being an arbitrary constant,

- A $x^2 - y^2 + 4x - 4y = P$
 B $x^2 - y^2 + 2x - 2y = P$
 C $y + 2 = \frac{P}{x + 2}$
 D $x^2 + y^2 + 2x + 2y = P$
 E $x^2 + y^2 + 4x + 4y = P$

۳. با فرض این که $x \in \mathbb{R}$ ، کدام یک از تابعهای زیر تابعی زوج نمی‌باشد؟

- $f: x \rightarrow \sin^2 x$ (۲) $f: x \rightarrow |3x|$ (۱)
 $f: x \rightarrow x^2 - 1$ (۴) $f: x \rightarrow \cos x$ (۳)
 $f: x \rightarrow (x - 1)^2$ (۵)

۴. حاصل $\int \frac{x^2}{(x^3 + 1)^{1/2}} dx$ کدام است؟

- $\frac{2}{3} \ln(x^3 + 1)^{1/2} + c$ (۲) $\frac{1}{3} \ln(x^3 + 1)^{1/2} + c$ (۱)
 $\frac{1}{6} \ln(x^3 + 1)^{1/2} + c$ (۴) $\frac{2}{3} \ln(x^3 + 1)^{1/2} + c$ (۳)
 $\frac{1}{3} \ln(x^3 + 1)^{1/2} + c$ (۵)

۵. مجموعه جواب نامعادله $(x + 3)(x^2 - 9) > 0$ کدام است؟ ($x \in \mathbb{R}$)

- $\{x: x > -3\}$ (۲) $\{x: x > 3\}$ (۱)
 $\{x: -3 < x < 3\}$ (۳)
 $\{x: x < -3\} \cup \{x: x > 3\}$ (۴)
 $\{x: x < -3\}$ (۵)

۶. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} + \frac{x+2}{y+2} = 0$ کدام است؟

- $x^2 - y^2 + 4x - 4y = P$ (۱)
 $x^2 - y^2 + 2x - 2y = P$ (۲)
 $y + 2 = \frac{P}{x + 2}$ (۳)
 $x^2 + y^2 + 2x + 2y = P$ (۴)
 $x^2 + y^2 + 4x + 4y = P$ (۵)

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x+3)(2x+5)}{(x+3)(x+5)}$

A = 15

B = 8

C = 1

D = 0

E does not exist

۷. حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x+3)(2x+5)}{(x+3)(x+5)}$ کدام است؟

۸ (۲)

۱۵ (۱)

۰ (۴)

۱ (۳)

(۵) وجود ندارد.

8. Given that $x = t^2$, $y = t$, then

$\frac{d^2y}{dx^2} =$

A 0

B $-\frac{1}{2t^2}$

C $\frac{1}{4t^2}$

D $-\frac{1}{4t^3}$

E $-\frac{1}{t}$

۸. با فرض این که $x = t^2$ و $y = t$ ، حاصل $\frac{d^2y}{dx^2}$ کدام است؟

$-\frac{1}{2t^2}$ (۲)

۰ (۱)

$-\frac{1}{4t^3}$ (۴)

$\frac{1}{4t^2}$ (۳)

$-\frac{1}{t}$ (۵)

9. All solutions of the equation

$\tan x = -\sqrt{3}$

are obtained by taking all integer values of n in

A $n\pi - \pi/3$

B $2n\pi \pm \pi/3$

C $n\pi + (-1)^{n+1} \pi/3$

D $n\pi - \pi/6$

E $n\pi + \pi/6$

۹. با قرار دادن هر مقدار صحیح به جای n ، با کدام عبارت می‌توانیم همه جوابهای معادله $\tan x = -\sqrt{3}$ را به دست آوریم؟

$2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲)

$n\pi - \frac{\pi}{3}$ (۱)

$n\pi - \frac{\pi}{6}$ (۴)

$n\pi + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3}$ (۳)

$n\pi + \frac{\pi}{6}$ (۵)

10. The number of 4 letter code words which can be made using the letters P, Q, R, S, if repetitions are allowed, is

A 16

B 24

C 64

D 128

E 256

۱۰. تعداد کدهای ۴ بستنی ۴ حرفی که با حروف P, Q, R, S می‌توان ساخت که تکرار مجاز باشد، کدام است؟

۲۴ (۲)

۱۶ (۱)

۱۲۸ (۴)

۶۴ (۳)

۲۵۶ (۵)

11. Given that $\vec{OP} = \mathbf{p}$, $\vec{OQ} = \mathbf{q}$ and the points O, P, Q are not collinear, which one of the following points, whose position vectors are given, is not collinear with P and Q?

A $\frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}$

B $3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$

C $\mathbf{p} - \mathbf{q}$

D $\frac{1}{3}\mathbf{p} + \frac{2}{3}\mathbf{q}$

E $2\mathbf{p} - \mathbf{q}$

۱۱. با فرض این که $\vec{OP} = \mathbf{p}$ و $\vec{OQ} = \mathbf{q}$ و نقاط P, Q, R بر یک امتداد نباشند، کدام یک از نقاط زیر که بردار مکان در نظر گرفته شده‌اند، با P و Q بر یک امتداد نیستند؟

$3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$ (۲)

$\frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}$ (۱)

$\frac{1}{3}\mathbf{p} + \frac{2}{3}\mathbf{q}$ (۴)

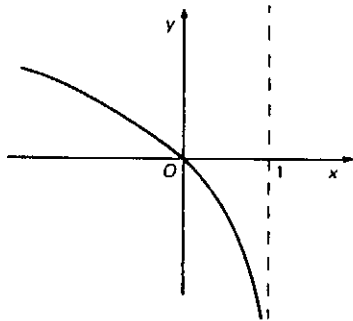
$\mathbf{p} - \mathbf{q}$ (۳)

$2\mathbf{p} - \mathbf{q}$ (۵)

12. The gradient of the normal to the curve $y = e^{-\cos x}$ at the point where $x = \pi/3$ is

- A $\frac{\sqrt{3}}{2e^{1/2}}$ B $-\frac{2e^{1/2}}{\sqrt{3}}$
 C $\frac{1}{2e^{(\sqrt{3})/2}}$ D $\frac{2e^{1/2}}{\sqrt{3}}$
 E $-e^{-1/2}$

13.



The graph could be a sketch of the curve

- A $y = \frac{1}{x-1}$ B $y = \frac{1}{1-x}$
 C $y = \ln(1-x)$ D $y = \ln(x-1)$
 E $y = \ln(1-x^2)$

14. Given that

$$f(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

where $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ and are constants, and $f(-3/2) = 0$, which one of the following must be a factor of $f(x)$?

- A $x - \frac{3}{2}$ B $2 - 3x$
 C $3 - 2x$ D $2x + 3$
 E $3x + 2$

15. An equation of the tangent to the circle $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$ at the origin is

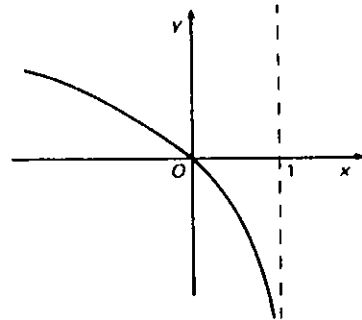
- A $2x - 3y = 0$ B $3x + 2y = 0$
 C $2x + 3y = 0$ D $3x - 2y = 0$
 E none of the above

۱۲. ضریب زاویه نرمال منحنی (به معادله) $y = e^{-\cos x}$ در نقطه

$x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2e^{1/2}}$
 (۲) $-\frac{2e^{1/2}}{\sqrt{3}}$
 (۳) $\frac{1}{2e^{(\sqrt{3})/2}}$
 (۴) $\frac{2e^{1/2}}{\sqrt{3}}$
 (۵) $-e^{-1/2}$

۱۳.



نمودار (مفروض) ترسیمی از کدام منحنی می تواند باشد؟

- (۱) $y = \frac{1}{x-1}$
 (۲) $y = \frac{1}{1-x}$
 (۳) $y = \ln(1-x)$
 (۴) $y = \ln(x-1)$
 (۵) $y = \ln(1-x^2)$

۱۴. با فرض این که $f(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$ و

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ثابت‌هایی باشند، و $f(-\frac{3}{2}) = 0$ ، کدام یک (از

عبارت‌های زیر) می تواند یک عامل برای $f(x)$ باشد؟

- (۱) $(x - \frac{3}{2})$
 (۲) $(2 - 3x)$
 (۳) $(3 - 2x)$
 (۴) $(2x + 3)$
 (۵) $(3x + 2)$

۱۵. معادله خط مماس بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$ از مبدأ

مختصات کدام است؟

- (۱) $2x - 3y = 0$
 (۲) $3x + 2y = 0$
 (۳) $2x + 3y = 0$
 (۴) $3x - 2y = 0$
 (۵) هیچ کدام از گزینه‌های قبل (از موارد بالا)

16. Given that $0 < \theta < \pi/2$, then the argument of

$$\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} \text{ is}$$

- A $-\theta$ B θ
C $\pi - 2\theta$ D 2θ
E -2θ

17. The roots of the equation

$$2x^2 + 6x + 7 = 0$$

are α and β . Then

$$|\alpha - \beta| =$$

- A $\sqrt{5}$ B $2\sqrt{5}$
C $4\sqrt{5}$ D $\sqrt{5/2}$
E $1/(2\sqrt{5})$

18. The sum of all the positive even numbers less than 100 is

- A 5000 B 4900 C 2550
D 2500 E 2450

19. The number of solutions, which lie in the range $0 \leq \theta \leq 4\pi$, of the equation

$$\cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 2 = 0$$

is

- A 2 B 3 C 4
D 5 E more than 5

20. Given the following two statements,

$$(1) (x - 2)(3 - x) < 0, (2) x > 3,$$

where $x \in \mathbb{R}$, which one of the following statements is always true?

- A $(1) \Rightarrow (2)$ but $(2) \not\Rightarrow (1)$
B $(2) \Rightarrow (1)$ but $(1) \not\Rightarrow (2)$
C $(1) \Leftrightarrow (2)$
D $(1) \not\Rightarrow (2)$ and $(2) \not\Rightarrow (1)$
E None of the above

۱۶. با فرض این که $0 < \theta < 2\pi$ ، آرگومان $\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta}$ کدام

است؟

- (۱) $-\theta$ (۲) θ
(۳) $\pi - 2\theta$ (۴) 2θ
(۵) -2θ

۱۷. اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 + 6x + 7 = 0$ باشند،

حاصل $|\alpha - \beta|$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$
(۳) $4\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{\frac{5}{2}}$
(۵) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

۱۸. حاصل جمع همه اعداد زوج و مثبت کوچکتر از ۱۰۰ کدام است؟

- (۱) ۵۰۰۰ (۲) ۴۹۰۰
(۳) ۲۵۵۰ (۴) ۲۵۰۰
(۵) ۲۴۵۰

۱۹. تعداد جوابهای معادله $\cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 2 = 0$ که در

محدوده $0 \leq \theta \leq 4\pi$ قرار دارند، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴
(۴) ۵ (۵) بیشتر از ۵

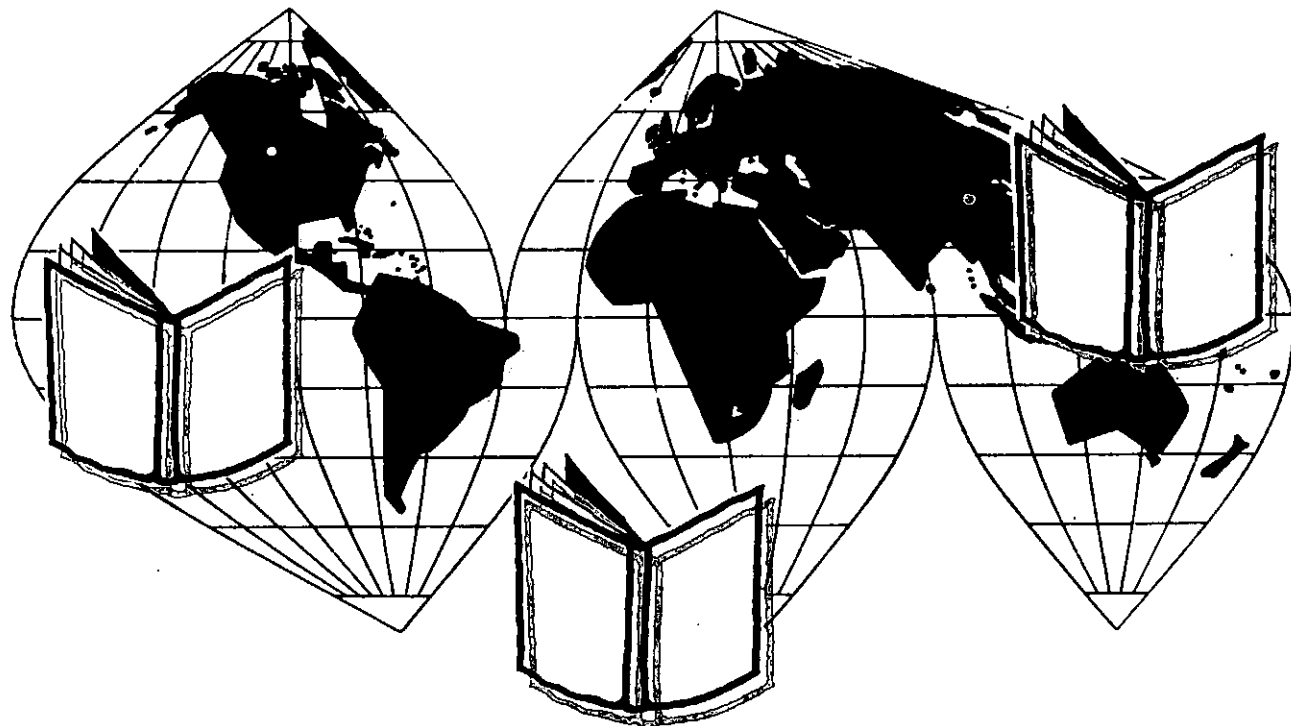
۲۰. دو نامعادله زیر را در نظر می‌گیریم،

$$(1) (x - 2)(3 - x) < 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(2) x > 3$$

کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

- (۱) $(1) \Rightarrow (2)$ ولی $(2) \not\Rightarrow (1)$
(۲) $(2) \Rightarrow (1)$ ولی $(1) \not\Rightarrow (2)$
(۳) $(1) \Leftrightarrow (2)$
(۴) $(1) \not\Rightarrow (2)$ و $(2) \not\Rightarrow (1)$
(۵) هیچ‌یک از موارد قبل (بالا)



مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۲۵)

تحقیق در هندسه مثلث به کمک کامپیوتر

از: Adrian Oldknow
The mathematical gazette
Volume 79 Number 485 July 1995

(قسمت سوم)

● ترجمه: غلامرضا یاسی پور

$$X' = (1, 1-2e, 1-2f) = I - 2D$$

$$P' = (1-2d, 1-e, 1-f)$$

$$S' = (1-d, 1-e, 1-f) = I - G$$

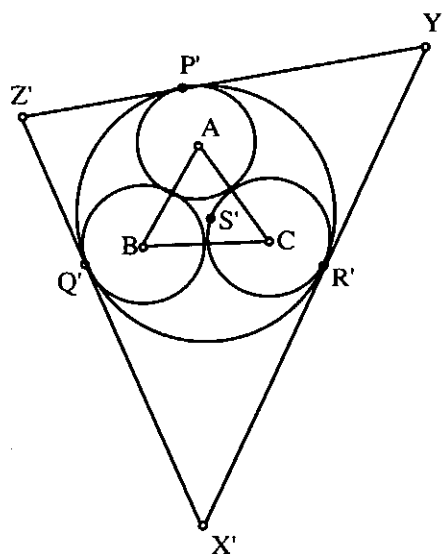
$$O' = (1-2d, 1-2e, 1-f) = I - 2G$$

$$1/t' = 2/r - 1/a' - 1/b' - 1/c' \quad (A)$$

و غیره

تا این مرحله، با دایره درونی سدی سروکار داشته‌ایم. البته در این مورد، انتظار مجموعه‌ای از نتایج ساده و مشابه متناظری را برای دایره برون سدی (شکل ۸)، S' ، مرکز آن، نقاط تماس P' ، Q' ، R' ، رأسهای مماس x' ، y' ، z' ، O' ، مرکز پرسپکتیو و شعاع t' داریم، و در این انتظار، نیز ناامید نمی‌شویم!

بنابراین، بسادگی ملاحظه می‌شود که خط سدی «Soddy line» شامل چهار نقطه دیگر O' ، O ، G ، I است که در آن، هریک از آنها مرکز پرسپکتیو جفت‌های مربوطه از مثلث‌های (ABC, xyz) ، (ABC, DEF) ، (DEF, xyz) و $(ABC, x'y'z')$ است. اما برای مطرح شدن ۶ مثلث داریم - ۳ مثلث مماس ABC ، xyz ، $x'y'z'$ و ۳ مثلث تماس DEF ، PQR و $P'Q'R'$ - و بنابراین، برای بررسی، ۱۵ جفت موجودند. چند دقیقه‌ای استفاده از نرم‌افزار هندسی مورد بحث، چهار نقطه دیگر K ، K' ، M و M' را بر خط سدی آشکار می‌کند،



شکل ۸

که h آن در (۷) تعریف شده است و اکنون می توان ملاحظه کرد که S خط IG را به طور درونی به نسبت $r:h$ تقسیم می کند؛ درحالی که S' خط IG را به طور برونی، به همین نسبت تقسیم می نماید. گفته می شود که چهار نقطه $S'ISG$ تشکیل دسته همساز «harmonic range» می دهند و محقق است که خط $S'D$ ، با داشتن آنها غنی است!

با استفاده از استدلالی مشابه فوق، به جای سه خطیهای تبدیل شونده به دقیقهها، بسادگی می توان نشان داد که چهار نقطه K, M, L, N ، که به ازای آنها رابطه

$$L = K + \lambda M, \quad N = K - \lambda M$$

بین اختیارهایشان موجود است، نیز در دسته همسازند. بنابراین S, I, G را می توان به صورت $I, I-G, I+G$ و S' نوشت و دسته مورد بحث آشکار است.

ممکن است خواننده مایل باشد این مطلب را نشان دهد که I, S, O, G, X, D, X' نیز چنین دسته های همسازی هستند.

با تحقیقی جامع بین ده نقطه ای که تاکنون برخط سدی شناسایی کرده ایم، ۲۲ دسته همساز به دست آورده ام. در این موارد، از محاسبه های نسبتاً ظریفی استفاده می کنند که توسط K, S, I و O توضیح داده شده اند. داریم:

$$K = I + \frac{1}{3}G, \quad S = I + G, \quad O = I + \frac{2}{3}G$$

$$S = \frac{3}{4}K + \frac{1}{4}I \quad \text{بنابراین:}$$

$$O = \frac{3}{2}K - \frac{1}{2}I \quad \text{و}$$

و از آنجا که با انتخابها سروکار داریم، موارد

$$S = K + \frac{1}{3}I$$

$$O = K - \frac{1}{3}I \quad \text{و}$$

را داریم و دسته موردنظر به صورت

$$I, K + \frac{1}{3}I, K, K - \frac{1}{3}I$$

مشخص می شود.

قضیه دزارگ «Desargues» بر این است که دو مثلث مثل ABC و DEF ، که مرکز پرسپکتیوی در نقطه ژرگون G دارند، دارای محور پرسپکتیو «axis of Perspective» نیز هستند. دو ضلع متناظر BC و EF از این دو مثلث در نقطه D' واقع بر BC

که همان طور که در جدول زیر نشان داده ایم، مراکز پرسپکتیوند:

	DEF	PQR	XYZ	P'Q'R'	X'Y'Z'
ABC	G	S	O	S'	O'
DEF		O	I	O'	I
PQR			K	I	M
XYZ				M'	I
P'Q'R'					K'

در این جا

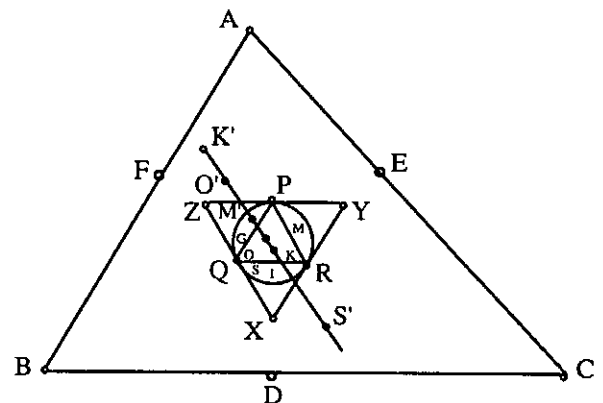
$$K = I + \frac{1}{4}G, \quad K' = I - \frac{1}{4}G, \quad M = I + \frac{2}{3}G$$

$$M' = I - \frac{2}{3}G$$

و بنابراین نقاط $S'ISKOMGM'O'K'$ با پارامترهای $-1, 0, 1, \frac{4}{3}, 2, 4, \infty, -4, -2, -\frac{4}{3}$ در امتداد خط سدی (شکل ۹) که معادله

$$(f-e)x + (d-f)y + (e-d)z = 0$$

را داراست، مرتبط اند.



شکل ۲

با این اطلاعات، ترسیمهای ساده ای برای دایره برونی سدی داریم. خط IP را رسم می کنیم تا بار دیگر دایره سدی O_A را در P' قطع کند و غیره. در این صورت S' تقاطع $P'A$ ، $Q'B$ و $R'C$ است. مماس در P' بر $P'A$ عمود است و امتداد IE را در Y' قطع می کند و غیره.

اگر S, G, I, S' را با سه خطیهای دقیق I, G, S, S' نمایش دهیم، روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\underline{S} = \frac{h}{(h+r)}\underline{I} + \frac{r}{(h+r)}\underline{G}$$

$$\underline{S'} = \frac{h}{(h-r)}\underline{I} - \frac{r}{(h-r)}\underline{G}$$

$T = I - KG$ تلاقی می کنند که در آن

$$K = \sqrt{3}(\sqrt{d} + \sqrt{e} + \sqrt{f})$$

قبلاً تذکر دادیم که به بسیاری از نقاط و خطوط مثلث، اسم تخصیص داده ایم. اعتقاد ندارم که خط سدی معروف باشد؛ اما امیدوارم نشان داده باشم که باید چنین باشد. این را نیز نمی دانم که خط زرگون پیش از این، از این طریق خاص شناخته شده باشد؛ اما خواننده ای که تصویرهایی از چند ضلعیهای کامل را در کتابهای هندسه تصویری ملاحظه کرده باشد، می تواند

A و B و C و D' و E' و F'

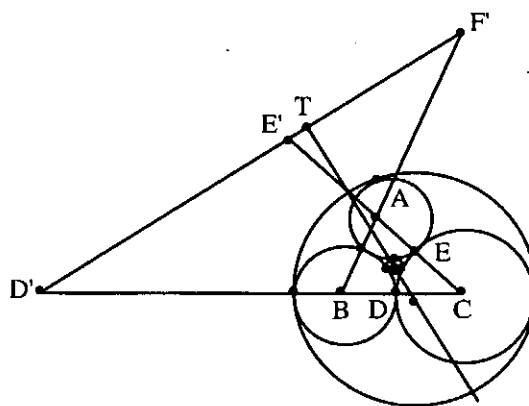
را به جا آورد.

مشخص شده است که خطوط سدی و اوپلر در نقطه جالب L ، به نام نقطه لانگ چمپ «de longchamps point» تلاقی می کنند؛ چنانکه نقطه وسط L و محل تلاقی ارتفاعات «orthocentre» h مرکز دایره محیطی مثلث یا O است. در این مورد، نمی توان یک چنین نتیجه جالبی درباره رأس سوم V از مثلث قائم الزامیه اوپلر، سدی، زرگون TVL به دست آورد؛ ممکن است خواننده مایل باشد این مطلب را بررسی کند که، در صورتی که ABC متساوی الساقین باشد، چه اتفاقی برای نقاط و خطوط مورد بحث می افتد، و در صورتی که به مثلث متساوی الاضلاع تغییر شکل دهد، چه اتفاقی به طور خودبه خود، در این باره رخ می دهد.

اکنون موضوع کوچک ۱۰ نقطه M, K', K, O', O ، M', M, D', E', F' و T را داریم، و در صورتی که قبلاً مطرح نشده باشد، مایلیم T را به عنوان نقطه فلچر «Fletcher point»، D', E', F' را به عنوان نقاط نابز «Nobbs points»، M را به عنوان نقاط گریفیث «Griffiths points» و K, K' را به عنوان نقاط درونی و برونی ریگ بای «Rigby» پیشنهاد و انجام کارهای باقیمانده را که کم هم نیستند، به خواننده واگذار کنم.



تلاقی می کنند و نقاط مشابه E', F' نیز موجودند. این سه نقطه جدید، یعنی D', E', F' ، در محور پرسپکتیو مربوط به دو مثلث مربوطه، همخط اند (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

انتخابهای سه خطی این نقاط نیز بسیار ساده اند:

$$D'(\circ, e, -f), E'(-d, \circ, f), F'(d, -e, \circ)$$

با به خاطر آوردن این مطلب که D و C, B انتخابهای سه خطی $(\circ, e, f), (\circ, \circ, 1), (\circ, 1, \circ)$ را دارند، آن گاه:

$$D = eB + fC, D' = eB - fC$$

و بنابراین D', D, B, C ، در دسته همسازند و غیره.

می توانیم محور $D'E'F'$ را خط زرگون «Gergonne line» بنامیم. معادله این خط عبارت است از:

$$xef + yfd + zde = \circ$$

در واقع ضلعهای $BC, EF, QR, YZ, Q'R', Y'Z'$ از D' می گذرند و بنابراین، هریک از ۱۵ جفت مثلثی که مراکز پرسپکتیو شان بر خط سدی مربوط واقع اند، خط زرگون را به عنوان محور پرسپکتیو دارد. سامرویل «Somnerille» [8] شرط زیر را، برای این که خط های $px + qy + rz = \circ$ و $p'x + q'y + r'z = \circ$ برهم عمود باشند، به دست داده است:

$$pp' + qq' + rr' = (qr' + rq') \cos A$$

$$+(rp' + pr') \cos B + (pq' + qp') \cos C$$

استفاده از فرمول کسینوسها و یورش سختی با درایو، نشان می دهد که خطهای سدی و زرگون متعامدند. آنها در نقطه

نابرابریها

میانگینها و نابرابریهای مربوط به آنها

(قسمت چهارم)

● میرشهرام صدر

در شماره های قبل با تعریف و خواص و قضایای نابرابریها آشنا شدیم، اکنون مطالب دیگری را درباره میانگینها و نابرابریهای مربوط به آنها، مطرح می کنیم.

۱- میانگین حسابی: فرض کنید a و b دو عدد حقیقی

باشند، عدد $\frac{a+b}{2}$ را میانگین حسابی دو عدد a و b گوئیم.

۲- میانگین هندسی: فرض کنید a و b دو عدد حقیقی

مثبت باشند، عدد $\sqrt{ab}$ را میانگین هندسی دو عدد a و b گوئیم.

قضیه ۱۴: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b ، ثابت کنید که،

واسطه حسابی، از میانگین هندسی کوچکتر نیست؛ یعنی:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

برهان: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

به دو طرف نابرابری اخیر، $2ab$ را می افزاییم:

$$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a > 0, b > 0)$$

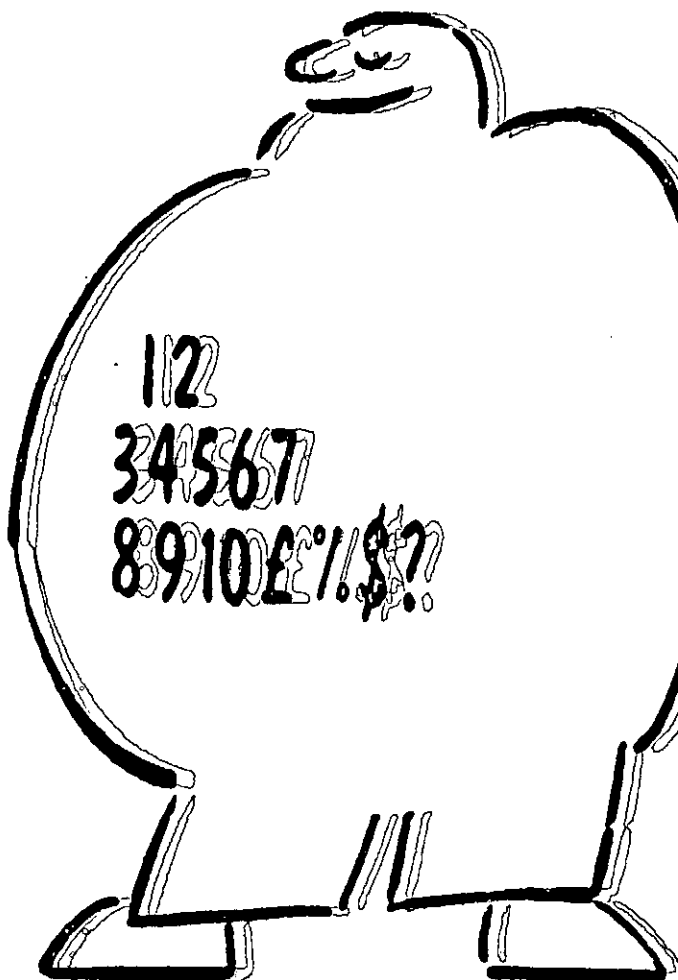
$$\text{یا } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

نابرابری کوشی ۱

فرض کنیم n عدد حقیقی مثبت به صورت $a_1, a_2, \dots, a_n$

داشته باشیم، نابرابری زیر که در واقع تعمیمی از قضیه ۱۳ (در

مقاله شماره قبل) است، به نام نابرابری «کوشی» معروف است:



مثال: ثابت کنید که برای هر دو عدد حقیقی $a > 1$ و $b > 1$ ، داریم $\log_a^b + \log_b^a \geq 2$.

حل: می‌دانیم که $\log_a^b = \frac{1}{\log_b^a}$ ، بنابراین:

$$\log_a^b + \log_b^a = \log_a^b + \frac{1}{\log_a^b} \geq 2 \sqrt{\log_a^b \times \frac{1}{\log_a^b}} = 2$$

$$\Rightarrow \log_a^b + \log_b^a \geq 2$$

مثال: بیشترین مقدار کسر $A = \frac{x}{1+x^2}$ را برای هر عدد حقیقی

$x > 0$ بیابید.

چون $x \neq 0$ ، با تقسیم صورت و مخرج کسر A بر x ، داریم:

$$A = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{\frac{1}{x} + x}$$

اما برای هر $x > 0$: $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ، در نتیجه $\frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2}$ ، پس

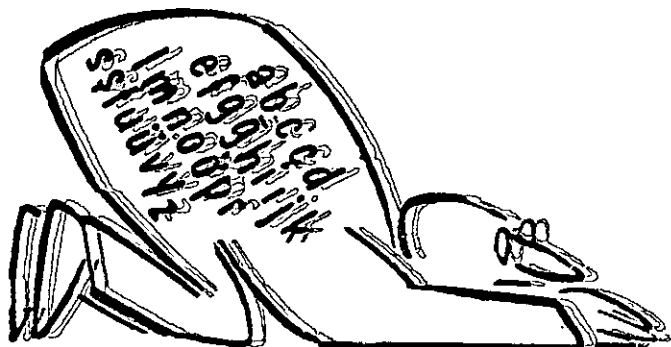
$A \leq \frac{1}{2}$ ، بنابراین بیشترین مقدار کسر A ، برابر است با $\frac{1}{2}$.

۳- میانگین توافقی

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی ناصفر باشند، عدد $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ را

میانگین توافقی دو عدد a و b گوئیم.

مثال



$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

مسئله ۱: برای هر عدد حقیقی $x > 0$ ، ثابت کنید:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

حل:

روش اول: چون $x > 0$ ، با توجه به قضیه ۱۳ داریم:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

حالت برابری، وقتی اتفاق می‌افتد که، $x = \frac{1}{x}$ یعنی $x = 1$.

روش دوم:

$$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$

دو طرف نابرابری اخیر را بر $x > 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} \geq \frac{2x}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

مسئله ۲: برای هر عدد حقیقی $x < 0$ ثابت کنید:

$$x + \frac{1}{x} \leq -2$$

حل:

$$(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq -2x$$

دو طرف نابرابری اخیر را بر $x < 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} \leq \frac{-2x}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$$

نتیجه: با توجه به مسئله‌های ۱ و ۲، می‌توان نوشت:

$$\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$$

مثال: ثابت کنید که برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، نابرابری $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$

همواره برقرار است.

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\geq 2 \sqrt{\sqrt{x^2+1} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = 2 \Rightarrow \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{2ab}{4} \geq 0$$

اگر به دو طرف نابرابری اخیر $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$ را بیفزاییم:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \geq \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{2ab}{4} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

نتیجه: با مقایسه قضیه‌های ۱۳، ۱۴، ۱۵ برای دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

قضیه ۱۷ (نامساوی برنولی): اگر $x+1 \geq 0$ و $0 < \alpha < 1$ ، در این صورت داریم: $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$

و اگر $\alpha < 0$ یا $\alpha > 1$ ، در این صورت: $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ ، علامت تساوی در هر دو حالت به ازای $x=0$ برقرار است (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم).

مسئله ۴: اگر $-1 < \alpha < 0$ و $n \in \mathbb{N}$ ، ثابت کنید:

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

حل: $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow 0 < \alpha+1 < 1$
طبق نامساوی برنولی رابطه‌های زیر را داریم:

$$(1 + \frac{1}{n})^{\alpha+1} < 1 + (\alpha+1) \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} < 1 + \frac{\alpha+1}{n}$$

$$(1 - \frac{1}{n})^{\alpha+1} < 1 - (\alpha+1) \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{(n-1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} < 1 - \frac{\alpha+1}{n}$$

اگر دو طرف نابرابری‌های بالا را در $n^{\alpha+1}$ ضرب کنیم، داریم:

$$(n+1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} + (\alpha+1)n^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha \quad (1)$$

$$(n-1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} - (\alpha+1)n^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} > n^\alpha \quad (2)$$

قضیه ۱۵: ثابت کنید که برای دو عدد حقیقی مثبت a و b ، میانگین هندسی از واسطه توافقی کوچکتر نیست؛ یعنی:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

برهان: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b ، طبق قضیه ۱۳ داریم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

دو طرف نابرابری اخیر را بر $ab > 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a+b}{ab} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{ab} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

مسئله ۳: فرض کنیم که a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند،

$$\text{ثابت کنید: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

حل: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b ، طبق قضیه‌های ۱۴ و ۱۳، داریم:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

۴ - میانگین مربعی

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند، عدد $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ را میانگین مربعی دو عدد a و b گوئیم.

قضیه ۱۶: ثابت کنید که برای دو عدد حقیقی مثبت a و b ، میانگین مربعی از میانگین حسابی کوچکتر نیست؛ یعنی:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

برهان: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

n بعدی، بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دارای مختصات $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ هستند، با توجه به تعریف دیگر ضرب نقطه‌ای بردارها داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

و قضیه مربوط به طول بردارها می‌گوید:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad |\vec{b}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \times \sum_{i=1}^n b_i^2$$

دو نابرابری هم‌ارز

دو نابرابری را هم‌ارز گوئیم، در صورتی که هر یک، با استفاده از خاصیتها و قضیه‌های نابرابری و اعمال جبری؛ دیگری را نتیجه دهد. به عنوان مثال، برای اثبات نابرابری کوشی ۲ می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \quad (\text{نابرابری کوشی ۲})$$

$$\Rightarrow a^2 c^2 + b^2 d^2 + 2abcd \leq a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2$$

از دو طرف نابرابری $a^2 c^2$ و $a^2 d^2$ را کم می‌کنیم:

$$a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \geq 0 \Rightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر، همواره درست است و با نابرابری حکم هم‌ارز است، پس نابرابری کوشی ۲ درست است. با توجه به نابرابری آخر، حالت تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که، $ad - bc = 0$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{یا}$$

مثال: نابرابری‌های زیر را ثابت کنید:

$$۱) a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$$

$$۲) a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 \geq 2a + 12b + 6c$$

با توجه به نابرابری‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

نابرابری کوشی ۲

فرض کنیم a, b, c, d عددهای حقیقی دلخواهی باشند، ثابت کنید:

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

و برابری وقتی برقرار است که $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

برهان: برای عددهای حقیقی a, b, c, d داریم:

$$(ad - bc)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \geq 0$$

با اضافه کردن $a^2 c^2 + b^2 d^2$ به دو طرف نابرابری اخیر، داریم:

$$a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 \geq a^2 c^2 + b^2 d^2 + 2abcd$$

با دسته‌بندی جمله‌های دو طرف نابرابری، خواهیم داشت:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

با توجه به نابرابری $(ad - bc)^2 \geq 0$ حالت برابری، تنها وقتی

پیش می‌آید که، $ad - bc = 0$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

نتیجه: فرض کنیم $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ عددهای حقیقی دلخواهی باشند. تعمیم نابرابری کوشی ۲ به صورت زیر است:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

$$\times (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

نتیجه فوق را با استفاده از نماد زیگما می‌توان به صورت

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \quad \text{نوشت.}$$

یک راه حل هندسی زیبا برای اثبات این نابرابری وجود دارد، که در این جا ارائه می‌شود:

با توجه به هندسه بردارها و تعریف ضرب نقطه‌ای دو بردار،

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \quad \text{می‌دانیم:}$$

که در این رابطه $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ طولهای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند

و $0 \leq \alpha \leq \pi$ زاویه بین دو بردار است. اکنون در یک فضای

$$a^2 - a + 1 \geq a \Rightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر هم ارز حکم و درست است، در نتیجه حکم درست می باشد. حالت تساوی در صورتی که $a=1$ ؛ پیش می آید.
(۵) دو طرف نابرابری را در ۲ ضرب می کنیم:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) +$$

$$(b^2 - 2bc + c^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر درست و هم ارز با حکم است، پس حکم درست می باشد.

$$a^2 + b^2 \geq a^2b + ab^2 \Rightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad (۶)$$

$$\geq ab(a+b)$$

چون $b > 0$ و $a > 0$ ، پس $a+b > 0$ ؛ با تقسیم دو طرف نابرابری آخر بر $a+b$ داریم:

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همیشه درست است، در نتیجه، حکم درست می باشد.

(۷) دو طرف نابرابری را در ۲ ضرب می کنیم:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، در نتیجه، حکم درست می باشد.

$$a^4 + b^4 > a^2b + ab^2 \quad (a \neq b) \quad (۸)$$

$$\Rightarrow a^4 - a^2b + b^4 - ab^2 > 0$$

$$\Rightarrow a^2(a-b) - b^2(a-b) > 0$$

چون $a \neq b$ در نتیجه $a-b \neq 0$ ، با تقسیم دو طرف نابرابری آخر بر $a-b$ ، دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول: اگر $a-b > 0$ ، آن گاه $a^2 - b^2 > 0$ یا $a^2 > b^2$ ، که نابرابری اخیر با توجه به فرض درست است.

$$(۳) a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

$$(۴) a^2 + 1 \geq a^2 + a \quad (a \geq -1)$$

$$(۵) a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

$$(۶) a^2 + b^2 \geq a^2b + ab^2 \quad (a > 0, b > 0)$$

$$(۷) a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

$$(۸) a^4 + b^4 > a^2b + ab^2 \quad (a \neq b)$$

حل:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 \geq 2a + 2b + 2c \quad (۱)$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری اخیر درست است و با نابرابری حکم هم ارز است، پس نابرابری حکم درست است. حالت تساوی، وقتی پیش می آید که، $a=b=c=1$.

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 - 2a - 12b - 6c + 1 + 9 + 3 \geq 0 \quad (۲)$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + (3c^2 - 6c + 3) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری اخیر، هم ارز حکم و درست است، لذا حکم درست می باشد و حالت تساوی وقتی پیش می آید که، $c=1$ و

$$a=1 \text{ و } b=\frac{3}{2}$$

(۳) دو طرف نابرابری را در $(a+b)$ ضرب می کنیم و دو حالت

زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول: $a+b \geq 0$ ، داریم:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \geq 0 \Rightarrow a^3 \geq -b^3$$

چون فرض کردیم که $a+b \geq 0$ یا $a \geq -b$ ، بنابراین نابرابری آخر درست است؛ در نتیجه، نابرابری حکم درست می باشد.

حالت دوم: $a+b < 0$ ، داریم:

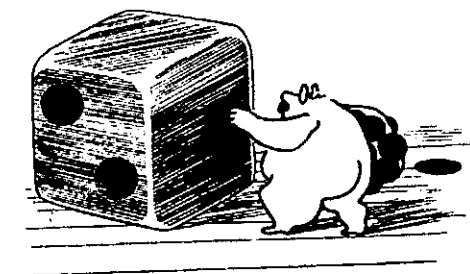
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) \leq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \leq 0 \Rightarrow a^3 \leq -b^3$$

چون فرض کردیم که $a+b < 0$ یا $a < -b$ ، بنابراین نابرابری آخر درست است، در نتیجه، نابرابری حکم درست است.

$$a^2 + 1 \geq a^2 + a \Rightarrow (a+1)(a^2 - a + 1) \geq a(a+1) \quad (۴)$$

چون $a \geq -1$ ؛ پس $a+1 \geq 0$ ، بنابراین دو طرف نابرابری اخیر

را بر $(a+1)$ تقسیم می کنیم:



تعداد نقطه‌هایی که روی سطح یک مهره معمولی گذاشته می‌شوند اتفاقی نیست. این نقطه‌ها طوری گذاشته می‌شوند که مجموع نقطه‌هایی دو سطح مقابل برابر ۷ باشد؛ مثلاً ۶ در مقابل ۱ است، ۵ در مقابل ۲ و ۴ در مقابل ۳. اما می‌توان نقطه‌های روی شش وجه (سطح) یک مهره را به چندین صورت مختلف گذاشت.

آیا می‌توانید بگویید به چند صورت؟

• از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکپور

جواب در صفحه ۸۸

حالت دوم: اگر $a - b < 0$ ، آن‌گاه $a^3 - b^3 < 0$ یا $a^3 < b^3$ ، که نابرابری اخیر با توجه به فرض، درست است.

مثال: ثابت کنید برای هر $a, b, c \in \mathbb{R}$ ؛ معادله زیر، همواره دارای دو ریشه حقیقی است:

$$a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-a)(x-b) = 0$$

حل: در صورتی که معادله بالا را بر حسب x مرتب کنیم؛ خواهیم داشت:

$$(a+b+c)x^2 - 2(ab+bc+ac)x + 3abc = 0$$

برای این که معادله درجه دوم، دارای دو ریشه حقیقی باشد، باید مبین معادله مثبت باشد؛ یعنی $\Delta > 0$ ، بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\Delta = 4(ab+bc+ac)^2 - 4(a+b+c) \times 3abc > 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ac)^2 - 3(a+b+c)abc > 0$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2ab^2c + 2a^2bc + 2abc^2$$

$$- 3a^2bc - 3ab^2c - 3abc^2 > 0$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 > 0$$

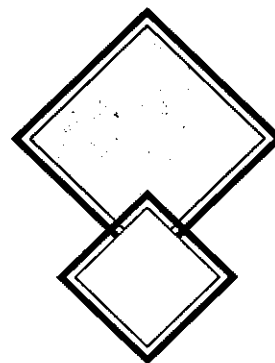
دو طرف نابرابری اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم؛ در نتیجه:

$$(a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2) + (a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2) +$$

$$(a^2c^2 - 2abc^2 + b^2c^2) > 0$$

$$\Rightarrow (ab-ac)^2 + (ab-bc)^2 + (ac-bc)^2 > 0$$

چون نابرابری آخر درست و هم‌ارز با نابرابری (۱) است، پس نابرابری (۱) برقرار است.



در باغ تجربه ها



- دبیرستانها و دانشگاه های محل تدریس:

- چهارده سال در مدارس ورامین، دو سال در شهر ری (دبیرستان عظیمیه) و بقیه در دبیرستانهای مناطق مختلف تهران و ارائه مقاله های ریاضی به کنفرانسهایی که در دانشگاه های شهید بهشتی، صنعتی شریف، کرمان و شیراز برگزار می شد.

- تألیفات و ترجمه ها (با شرح):

- در زمان جنگ تحمیلی هشت ساله، جزوه ها و مسائل مختلف از هندسه و مثلثات تهیه نموده و به دبیرستانهای مناطق تهران و شهرستانها ارسال نموده است؛ چون به موجب ابلاغ شماره $\frac{18403}{60/2/12}$ از دانشگاه شهید بهشتی مأمور آموزش ریاضی به فرزندان جنگزده مستقر در پارک هتل تهران بودم و مرتب این جزوه ها بین آنان توزیع شده است.

نشستی با استاد ارجمند و پیشکسوت آموزش ریاضی جناب آقای «محمد صفایی یزدی» داشتیم. ایشان یکی از معلمان زحمتکش و با سابقه ریاضیات هستند که ضمن تشکر از همکاری و مساعدتشان در پاسخ گویی به سؤالهای ما و آرزوی سلامتی برای ایشان، امید داریم که این مصاحبه بتواند تجارب مفیدی برای معلمان، دانش آموزان و خوانندگان عزیز، همراه داشته باشد.

- شرح حال:

- نام و نام خانوادگی: محمد صفایی یزدی/ تاریخ تولد: ۱۳۱۱/ محل تولد: یزد/ ازدواج در سال: ۱۳۳۶/ فرزندان و تحصیلات آنها: سه فرزند دختر با تحصیلات الف - لیسانس مامایی ب - پزشکی ج - مهندس کامپیوتر
- سابقه تدریس ریاضی:
- ۴۷ سال تمام.



- خاطراتی را از کودکی، نوجوانی، جوانی و ... ذکر کنید:

- از پنج سالگی، از پدری عالم و دانشمندی کم نظیر یتیم شدم. فقط مادرم با زحماتی بسیار، من و خواهرانم را با کوشش طاقت فرسا اداره می کرد. بدین جهت در آن زمان، خاطرات تلخ به یادگار مانده، ولی از دوران دبیرستان، بخصوص پس از دانشسرا و در طول خدمت دبیری، به شرحی که خواهیم داد، خاطرات بسیار شیرین دارم که چند نمونه آن را ذکر می کنم.

الف: یکی از روزهای «هفته معلم» بود که جناب آقای دکتر نجفی، وزیر محترم سابق آموزش و پرورش، ناگهان وارد کلاس هندسه دانش آموزان سال سوم ریاضی دبیرستان ۲۲ بهمن، منطقه پنج تهران شدند. پس از دقت بسیار و مشاهده کار دانش آموزان که بسیار آماده و قوی مسائل را حل می کردند، خطاب به بنده گفتند: «متأسفانه هر سال آمار دبیران هندسه رو به کاهش است، حال شما چند سال سابقه تدریس دارید؟»

عرض کردم ۳۹ سال (هشت سال قبل) ادامه دادند: «از خداوند می خواهم که با همین قدرت و عشق و علاقه بتوانید ۳۹ سال دیگر این چنین تدریس کنید.» سپس با خوشحالی تمام و اظهار لطف بسیار، خدا حافظی نمودند (به نظر می رسد که به فضل خدا، دعای ایشان مستجاب خواهد شد و آرزو دارم تا آخرین دقایق زندگی ام، در کلاس و در حال تدریس به سر برم).

ب: در روز اختتامیه بیست و هشتمین کنفرانس ریاضی کشور، در سالن بزرگ دانشگاه تبریز، ناگهان و بی خبر جناب آقای دکتر «عبدالحمید ریاضی» رئیس انجمن ریاضی کشور و ریاست دانشگاه صنعتی امیرکبیر، پس از ذکر مختصری از سابقه کار و امتیازهای

اینجانب، در حضور کلیه شرکت کنندگان (قریب ۸۰۰ نفر) جایزه ای بسیار ارزنده مرحمت نمودند (با توجه به تصویرهای موجود).

ج: سومین خاطره، در عصر روز سه شنبه ۷۷/۶/۳ بود که اطلاع دادند که من از میان تمامی کارکنان آموزش و پرورش انتخاب شده ام و باید ساعت هشت صبح فردا، به محل برگزاری اجلاس سران کشورهای اسلامی بروم تا جایزه خود را از دست ریاست محترم جمهوری دریافت کنم. همان گونه که در ساعت ۹^۱/_۴ از سیمای جمهوری اسلامی بخش و مشاهده شد، شخص رئیس جمهور محترم، لوحی بسیار زیبا همراه با اظهار لطف و محبت بسیار مرحمت فرمودند.

- خاطراتی را از دوران دبستان ذکر نمایید.

- بسیار تلخ، لذا قابل ذکر نیست.

- خاطراتی را از دوران دبیرستان ذکر نمایید.

- خوشبختانه دبیرانی با علاقه و دلسوز داشتم و گاه بنده را مورد تشویق قرار می دادند؛ از جمله آقایان دکتر احمد فیروزآبادی (استاد برجسته و معاون سابق دانشگاه صنعتی شریف) و مبینی تبار، خاتمی فیروزآبادی و ... را می توان نام برد که تشویق این بزرگواران، بهترین خاطرات مرا تشکیل می دهد.

- خاطراتی را از دوران دانشگاه ذکر نمایید:

- در دانشگاه از اول تا پایان گرفتن لیسانس و دوره های بعد از آن، خاطرات زیادی دارم. فقط یکی را عرض می کنم. شاید این خود برای دبیران هندسه، علوم و ... قابل توجه باشد.

از سال ۱۳۳۳ تا پایان دوران دانشگاه، همه ساله در اردوهای دانشجویان شرکت داشتم. روزی با قطار تهران - گرگان به یکی از





- تدریس استاد بزرگوaram جناب آقای دکتر «حسن صفاری» که یکی از ریاضیدانان بزرگ دنیا محسوب می‌شوند، بهتر می‌دانستم؛ زیرا اولاً، تسلط کامل بر ریاضیات داشتند (مؤلف تمام کتابهای ریاضی بودند) ثانیاً، همیشه در کلاس، رعایت تمام نکات یک معلم خوب را می‌کردند.

- کدام یک از دبیرستانها محل مناسبتری برای تدریس بودند و چرا؟

- دبیرستانهای مناطق محروم را مناسبتر می‌دانم؛ زیرا در آن جا شاگردان با علاقه و قدردان بیشتری و به‌طور کلی مؤمن‌تر و حق‌پذیرترند.

- از شاگردان بازیگوش خود، چه خاطراتی دارید و چگونه آنها را آرام می‌کردید؟

- همیشه آنان را مانند فرزندان خود می‌دانستم؛ چون بازیگوشی اقتضای سنشان است، لذا کوششی برای آرام کردن آنان نمی‌کردم؛ مگر زمانی که مانع درس خواندن می‌شدند. در آن وقت، با کمال مهربانی و نصیحت پدران، آرامشان می‌کردم.

- از شاگردان باهوش خود چه خاطراتی دارید؟

روزی وارد کلاس سوم ریاضی شدم که در جلسه قبل، چند قضیه از هندسه گفته بودم. دانش‌آموز نسبتاً خوبی، اجازه خواست و گفت، من فلان قضیه را خوب نفهمیدم، آن را بار دیگر بگویید. بلافاصله شاگرد باهوشی به نام آقای «ایرج رفیعی» (که اکنون کارشناس ارشد مخابرات هستند) گفت من شکلهایی ساخته‌ام که قضیه‌های درس گذشته را کاملاً گویا و روشن می‌کند. پس از استفاده از آن اشکال، نه تنها آن قضیه، بلکه مسائل دیگر نیز بهتر

شهرهای شمالی وارد و بلافاصله با اتوبوسهای آماده، هنگام شب وارد بایلسر شدیم. بنده که تا آن زمان دریا را ندیده بودم (فقط از کتاب جغرافیا مطالبی می‌دانستم) صبح زود، همراه جمعی از دانشجویان، از ورودگاه خارج شده و برای اولین بار به ساحل دریا رفتم. با مشاهده دریا، تصوّرهایی غلط قبلی‌ام را اصلاح کردم (به مصداق ضرب‌المثل معروف، شنیدن کی بود مانند دیدن) یعنی تا حدّ ممکن، باید مطالب را محسوستر و با استفاده از وسایل لازم بیان کرد.

- کدام یک از معلمان، بیشتر روی شما تأثیر گذاشته است و چرا؟

- اعمال و رفتار مرحوم «حسین فیروز» معاون محترم آن زمان دانشسرای تهران؛ زیرا به من اجازه داده بودند تا هر وقت هر مشکلی داشتم، به ایشان مراجعه کنم، که ایشان نیز با کمال دلسوزی و مهربانی پاسخگو بودند.

- روش تدریس کدام یک از معلمان خود را بیشتر می‌پسندیدید و چرا؟



شهید مفتاح) مشغول تحقیق و ترجمه کتابهای مختلف بودند.

- وضع تدریس ریاضیات در حال حاضر چگونه است؟

- خوب است. نمونه کامل آن، درخشندگی محصلان عزیزمان در دنیا و به دست آوردن مدالهای طلا و کسب امتیازهای بسیار خوب آنان است.

- وضع کتابهای درسی کنونی چگونه است؟

- دارای معایب و نواقصی است؛ مثلاً در بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور (در کرمان) با حضور مؤلفان محترم، به آن کتابها، انتقادهایی شد؛ ولی در جواب، علت آن را زمان کوتاه و ناکافی برای تألیف دانستند، که حاضران قانع نشدند.

- برای این که شاگردی در ریاضیات موفق باشد، باید چه کارهایی انجام دهد؟

- باید اولاً در هر مقطع، مطالب گذشته را خوب بداند. ثانیاً در کلاس با توجه کامل به تدریس استادان خود گوش فرا دهد و با کمال دقت و جرأت، مطالب ندانسته را بپرسد و خود با تفکر و اندیشه، آن را دنبال کند.

- یک کتاب درسی خوب، باید شامل چه محسناتی باشد؟

- اولاً، با چاپ خوب و خوانا، و بدون غلط تهیه شود، ثانیاً، همراه با تصویرهای گویا و بسیار آشکار باشد، مفاهیم خوب، مناسب و مطابق با نیاز ریاضی کشور داشته باشد و با استدلالی قوی تألیف شده باشد.

- آیا وجود کتابهای کمک درسی را لازم می دانید و اگر

لازمند، چه مشخصاتی باید داشته باشند؟

- اگر در مسیر هدایت دانش آموزان باشد، بلااشکال است و

تفهم شد، و تا آخر سال، همه دانش آموزان این شیوه ساخت و کاربرد وسایل کمک آموزشی را ادامه دادند.

- نام بعضی از شاگردان خود را که به مراتب بالای علمی رسیده اند، با ذکر مشخصات علمی شان بیاورید.

- خوشبختانه شاگردان بسیاری داشته ام و دارم که به درجات بالای علمی رسیده اند. حتی فرزندان و بعضاً نوه آنان نیز به مقامات علمی رسیده اند و پس از این هم خدا داند.

- وضع تدریس ریاضیات در قدیم چگونه بوده و آیا خودتان آن را می پسندیدید؟

- مشکندر بوده؛ زیرا امکانات کمتری وجود داشت؛ بنابراین مورد پسند نبود.

- وضع تألیف کتابهای ریاضی قدیم چگونه بود؟

- چون بیشتر ترجمه ها از کتابهای ریاضی ممالک دیگر بود، دارای معایب و نواقصی چند بود؛ ولی با زحمتهای آقایان صفاری، قربانی و دیگران، و با شناخت بیشتر، تألیفهایی انجام گردید که تا حدودی این معایب رفع شده بود.

- نام بعضی از مدرّسان و مؤلفان مورد توجه خود را با ذکر دلیل بیاورید.

- آقایان صفاری، قربانی، با همت و مدغم و ... مثلاً بنا به تشخیص اینجانب، جناب آقای حسن صفاری، بهترین مدرّس و مؤلف بودند؛ زیرا اولاً، با کمال حوصله و خوشرویی به پرسشها جواب می دادند. ثانیاً، از وقت خود، بهترین استفاده را می کردند، به طوری که همیشه ایشان را در حال مطالعه و تحقیق می دیدم. حتی در راه منزلشان (از خیابان بهار) تا دانشسرای تهران (خیابان



کافی در شب قبل (هر چند مسائلی بارها حل شده باشد).
 ۵- با حالت شادی و شادابی وارد کلاس شدن و این حالت را بدون عصبانیت تا پایان حفظ کردن.
 ۶- زودتر از شاگردان به کلاس رفتن و دیرتر از آنان خارج شدن، و هرگز غیبت و تأخیر نداشتن.
 ۷- عادت دادن دانش‌آموزان به مطالعه و استفاده کامل از اوقات گرانبهانشان.

۸- در انضباط، مطالعه و تلاش مستمر، سرمشق آنان بودن.
 ۹- ذکر خاطراتی آموزنده برای تنوع درس آنان.
 ۱۰- در پایان، خیلی کوتاه، درس اخلاق دادن.
 با تشکر از جناب‌عالی که با حوصله، به سؤالهای ما جواب دادید و با آرزوی سلامتی و شادکامی در همه موارد، بخصوص تدریس، که همواره عاشقانه به آن می‌پردازید.



ادب ریاضی

از نامه کوبرنیک به پاپ پل سوم
 اگر بر حسب اتفاق مردان خفیفی پیدا شوند که بدون هیچ گونه اطلاعات ریاضی بخواهند در هر موقع آن مقام مقدس را وادار به دخالت در این موضوع کنند و به اتکای کتاب مقدس، کتاب مرا مورد تهمت قرار دهند، از همین حالا اعلام می‌دارم که ابداً به وجود ایشان اهمیت نمی‌دهم و قضاوت آنان را همچون خاک می‌پندارم ... فقط ریاضیدانان هستند که حق دخالت در حقایق ریاضی را دارند.

تاریخ علوم - پی‌یر روسو

اگر جنبه حل المسائل داشته باشد، قدرت تفکر و اندیشه را از دانش‌آموزان می‌گیرد، لذا این چنین کتابهایی را لازم نمی‌دانم.
 - یک ریاضیدان، بجز ریاضیات، باید از چه علمی آگاهی داشته باشد؟ مثلاً دانستن ادبیات برای ریاضیدان لازم است؟
 - باید به سایر رشته‌های علوم، بخصوص به فیزیک آشنایی داشته باشد.

- خود شما بجز ریاضی، در چه مواردی تبحر دارید؟
 - به ادبیات فارسی و عربی و زبان فرانسه مختصر آشنایی دارم.
 - اگر مواردی بجز موارد بالا یا توصیه‌هایی به نظرتان می‌رسد، توضیح بفرمایید.

- بهتر است عوامل مؤثر در ایجاد علاقه و عشق به کارم و ادامه آن تا ۴۷ سال را به طور رسمی ذکر کنم:

۱- مهمترین عامل دلگرمی، دانش‌آموزان بودند که همیشه آنان را مانند فرزندان و چشمهای خود می‌دانستم و با کمال مهربانی و خوشرویی، آماده جواب به سؤالهایشان بودم.

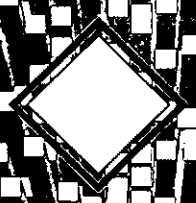
۲- هرگز احساس خستگی نمی‌کردم، از مهرماه ۱۳۳۰ (از ۱۸ سالگی) تاکنون به طور متوسط روزی دوازده ساعت، حتی در روزهای جمعه و تعطیل تدریس نموده‌ام، که به طور استاندارد، برای یک نفر، یک قرن و نیم (۱۵۰ سال) کار محسوب می‌شود. اکنون هم که از سال گذشته بازنشسته شده‌ام؛ یعنی با شروع چهل و هشتمین سال، به فضل خداوند متعال، رؤسای دبیرستانهای مناطق ۲، ۳ و ۵ آموزش و پرورش تهران، با نهایت اشتیاق، برنامه کارم را تنظیم نموده‌اند؛ زیرا آنان، آشنایی کامل به توانایی و روحیه این جانب دارند؛ چون بسیار دیده‌اند که چگونه در مدرسه‌های دولتی (بخصوص صبحهای روز جمعه) با ادغام دو یا سه کلاس (با بیش از صد نفر دانش‌آموز) بدون کوچکترین احساس خستگی در خود، برای آنان تدریس می‌کردم. پس نتیجه می‌گیریم که کار زیاد و مورد علاقه، خستگی نمی‌آورد؛ بلکه آن ناهنجاریهای روانی است که انسان را فرسوده می‌کند.

۳- به طوری که ذکر شد، عامل دیگر، تشویق مکرر مسئولان اداری و مقامات علمی کشور و مقامات عالی‌رتبه مملکتی بوده است.

۴- آمادگی کامل برای تدریس، در صورت نیاز تهیه و همراه داشتن وسایل کمک‌آموزشی متناسب با درس آن جلسه و مطالعه

مکان هندسی

(فصل هفتم)



مقطعهای مخروطی

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ &= 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx \\ \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a - \frac{cx}{a} \quad (2) \\ \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 &= a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx \\ \Rightarrow x^2 + c^2 - 2cx + y^2 &= a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx \\ \Rightarrow \frac{(a^2 - c^2)x^2}{a^2} + y^2 &= a^2 - c^2 \end{aligned}$$

با توجه به این که $a > c$ است، فرض می‌کنیم $a^2 - c^2 = b^2$ باشد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

معادله (۳)، معادله بیضی مورد نظر است.

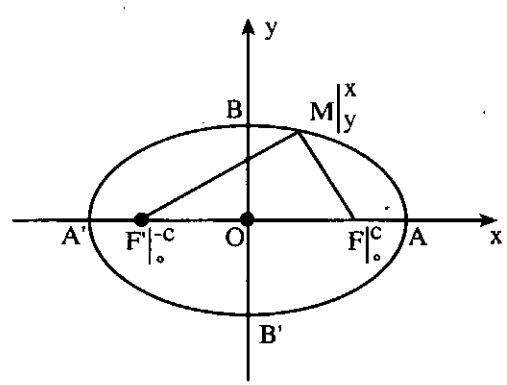
بعکس، ثابت می‌شود هر نقطه $M(x, y)$ که مختصاتش در

معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ صدق کند، به بیضی به کانونهای F و F' (با

فرض $FF' = 2c$) و عدد ثابت $2a$ تعلق دارد؛ زیرا:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

معادله بیضی. بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ را در نظر می‌گیریم. خط FF' را محور x ها و عمود منصف پاره خط FF' را محور y ها اختیار می‌کنیم. در این صورت، با توجه به این که $FF' = 2c$ است، $F(+c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ خواهد بود. اگر $M(x, y)$ یک نقطه از این بیضی باشد، داریم:



$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$MF' = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$MF + MF' = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad (1)$$

معادله (۱)، معادله بیضی مورد نظر است. برای گویا کردن این

معادله چنین عمل می‌کنیم:

بیضی است که آن را به طور خلاصه مرکز بیضی نیز می نامند.
 رأسهای بیضی. محور کانونی بیضی آن را در دو نقطه
 $A(+a, 0)$ و $A'(-a, 0)$ و محور ناکانونی بیضی، آن را در دو
 نقطه $B(0, +b)$ و $B'(0, -b)$ قطع می کند، که این چهار نقطه،
 رأسهای بیضی نامیده می شوند.

صورت های دیگر معادله بیضی:

۱. اگر مرکز بیضی نقطه $O'(\alpha, \beta)$ و محور کانونی آن موازی
 محور x ها باشد، معادله بیضی به صورت

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$
 است.

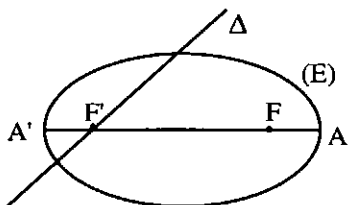
۲. اگر مرکز بیضی منطبق بر مبدأ مختصات و محور کانونی
 آن روی محور عرضها یعنی $F(0, c)$ و $F'(0, -c)$ باشد، معادله
 بیضی به صورت $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ است.

۳. اگر مرکز بیضی نقطه $O'(\alpha, \beta)$ و محور کانونی آن موازی
 محور عرضها باشد، معادله آن به صورت

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$
 است.

۴. اگر محورهای بیضی موازی محورهای مختصات نباشند،
 معادله بیضی به صورت کلی
 $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ است که در آن A و
 B هم علامت، ولی نابرابرند و $C \neq 0$ می باشد.
 بررسی بیشتر ویژگیهای بیضی، در بحث مقطعهای مخروطی
 انجام خواهد شد.

مثال ۱. بیضی (E) و خط Δ در یک صفحه مفروضند.
 نقطه ای روی این بیضی بیابید که از خط Δ به فاصله معلوم l
 باشد.



حل. می دانیم مکان هندسی نقطه ای که از خط راست Δ به
 فاصله معلوم l قرار دارد، دو خط Δ_1 و Δ_2 موازی خط Δ و به

$$\Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

از این رابطه، $|x| < a$ نتیجه می شود. اما $b^2 = a^2 - c^2$ و $F(c, 0)$
 و $F'(-c, 0)$ است. بنابراین داریم:

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ و } MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx} = \sqrt{(a - \frac{cx}{a})^2} = a - \frac{cx}{a}$$

$$MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow MF' = \sqrt{a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} + 2cx} = \sqrt{(a + \frac{cx}{a})^2} = a + \frac{cx}{a}$$

$$\Rightarrow MF' = a + \frac{cx}{a}$$

از آن جا:

$$MF + MF' = (a - \frac{cx}{a}) + (a + \frac{cx}{a}) = 2a$$

$$\Rightarrow MF + MF' = 2a$$

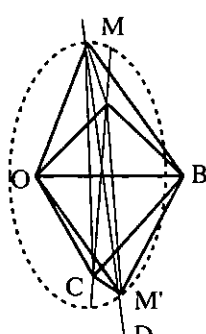
یعنی M روی بیضی است که کانونهای آن F و F' و عدد ثابتش
 2a است.

نکته. $MF' = a + \frac{cx}{a}$ و $MF = a - \frac{cx}{a}$ را اندازه شعاع
 حاملهای نقطه M می نامند.

محورهای تقارن و مرکز تقارن بیضی. بیضی به معادله
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را در نظر می گیریم. با تبدیل y به $-y$ ، این معادله
 تغییر نمی کند. بنابراین، محور x ها، یعنی خط FF' ، محور تقارن
 بیضی است که آن را محور کانونی بیضی نیز می نامند.
 با تبدیل x به $-x$ ، این معادله تغییر نمی کند. بنابراین، محور
 y ها یعنی عمود منصف پاره خط FF' محور تقارن بیضی است که
 آن را محور ناکانونی بیضی نیز می نامند.

با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ معادله بالا تغییر نمی کند. بنابراین
 مبدأ مختصات یعنی محل برخورد دو محور تقارن آن، مرکز تقارن

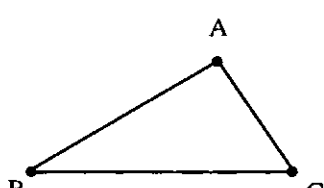
حل. مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر عدد ثابت $AB + BC$ است، یک بیضی به کانونهای A و C و عدد ثابت $AB + BC$ است که از نقطه B نیز می‌گذرد. این بیضی را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که به یک فاصله از دو نقطه B و D است، عمود منصف پاره خط BD است. این مکان هندسی را نیز رسم می‌نماییم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله دارای جواب است.



مثال ۴. در مثلثی ضلع BC ثابت است؛ اما رأس A چنان تغییر مکان می‌دهد که $\frac{\hat{A}}{\gamma} \cos^2 \frac{\hat{A}}{\gamma}$ مقدار ثابتی است. مکان هندسی رأس A را بیابید.

حل. مثلث ABC به ضلع ثابت $BC = a$ را در نظر می‌گیریم و مقدار ثابت $\frac{\hat{A}}{\gamma} \cos^2 \frac{\hat{A}}{\gamma}$ را برابر k اختیار می‌کنیم؛ یعنی

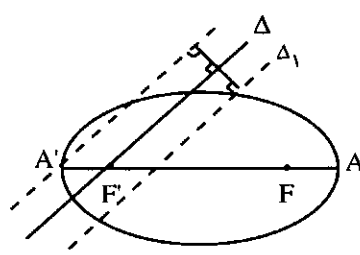
$$bc \cos^2 \frac{\hat{A}}{\gamma} = k \quad (1)$$



می‌دانیم که در هر مثلث ABC به ضلعهای $BC = a$ ، $AB = c$ و $AC = b$ داریم:

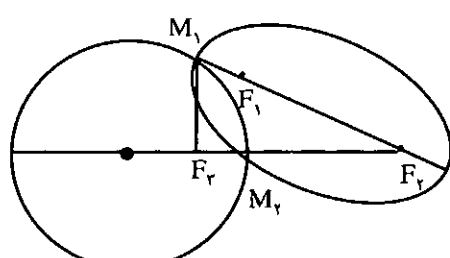
$$\cos^2 \frac{A}{\gamma} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} \quad (2)$$

فاصله‌ای از این خط می‌باشد. این دو خط را رسم می‌کنیم، نقطه‌های برخورد Δ_1 و Δ_2 با بیضی (E) جوابهای مسأله‌اند و به تعداد نقطه‌های برخورد مسأله، دارای جواب است.



مثال ۲. سه نقطه F_1 ، F_2 و F_3 در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه F_1 و F_2 برابر I_1 و نسبت فاصله‌اش از دو نقطه F_2 و F_3 برابر I_2 باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه ثابت F_1 و F_2 ، مقدار معلوم I_1 باشد، یک بیضی به کانونهای F_1 و F_2 و عدد ثابت I_1 است. این بیضی را رسم می‌کنیم (بیضی (E)). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت F و F' ، مقدار ثابت I است، یک دایره است که قطرش پاره خط FF' را به نسبت I_2 تقسیم می‌کند. این دایره را نیز رسم می‌کنیم (دایره آپولونیوس (C)). نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد مسأله دارای جواب است.



مثال ۳. چهارضلعی ABCD در یک صفحه داده شده است. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه A و C برابر $AB + BC$ و به یک فاصله از دو نقطه B و D باشد.

از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می شود:

$$bc \times \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = k \Rightarrow (b+c)^2 - a^2 = 4k$$

$$\Rightarrow b+c = \sqrt{a^2 + 4k} \text{ مقدار ثابت}$$

$$\Rightarrow AB+AC = \sqrt{a^2 + 4k} = Cte$$

چون دو نقطه B و C ثابت و AB+AC مقدار ثابت

$\sqrt{a^2 + 4k}$ است، بنابراین، مکان هندسی رأس A یک بیضی به

کانونهای B و C و عدد ثابت $2a = \sqrt{a^2 + 4k}$ است.

مثال ۵. معادله مکان هندسی نقطه ای از صفحه مختصات xoy را تعیین کنید که مجموع فاصله اش از دو نقطه $F(6, 2)$ و $F'(-2, 2)$ واقع در این صفحه، برابر ۱۰ باشد.

حل. راه اول. فرض می کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از این

مکان هندسی باشد. در این صورت داریم:

$$MF = \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2},$$

$$MF' = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

$$MF + MF' = 10 \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} +$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = 10 - \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 = 100 + (x+2)^2 + (y-2)^2 -$$

$$20\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow -16x - 68 = -20\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow -4x - 17 = -5\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 288x + 136x = 25(x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8)$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 25y^2 - 36x - 100y - 89 = 0 \quad (1)$$

معادله (۱)، معادله مکان هندسی موردنظر است که یک بیضی

به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۱۰ است. این معادله را به

صورت زیر می توان نوشت:

$$x^2 - 36x + 25y^2 - 100y - 89 = 0$$

$$\Rightarrow 9(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 4y) - 89 = 0$$

$$\Rightarrow 9[(x-2)^2 - 4] + 25[(y-2)^2 - 4] - 89 = 0$$

$$\Rightarrow 9(x-2)^2 + 25(y-2)^2 = 225$$

$$\Rightarrow \frac{9(x-2)^2}{225} + \frac{25(y-2)^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad (2)$$

معادله (۲) را معادله استاده یا استاندارد یا کانونیک بیضی

جواب مسأله می نامند.

راه دوم. با توجه به تعریف مکان هندسی جواب مسأله، یک بیضی است، که چون $y_F = y_{F'} = 2$ است، محور تقارن آن موازی محور x هاست و بنابراین معادله آن به صورت کلی

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \text{ است؛ اما:}$$

$$C \text{ مرکز بیضی} \begin{cases} \alpha = \frac{x_F + x_{F'}}{2} = \frac{6-2}{2} = 2 \\ \beta = \frac{y_F + y_{F'}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow CF = c = \sqrt{(6-2)^2 + (2-2)^2} = 4 \quad \text{و}$$

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

از آن جا معادله بیضی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

مثال ۶. معادله بیضی را که $F(5, 3)$ و $F'(-1, 7)$ دو

کانون آن، و عدد ثابتش برابر ۸ است، بنویسید.

حل. فرض می کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از مکان هندسی

موردنظر باشد. در این صورت داریم:

$$M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}, F \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \end{vmatrix}, F' \begin{vmatrix} -1 \\ 7 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} \quad \text{و}$$

$$MF' = \sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2}$$

$$MF + MF' = 8 \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} +$$

$$\Rightarrow -2x + y - 6 = -3\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + y^2 + 36 - 4xy + 24x - 12y$$

$$= 9x^2 + 9y^2 - 36y + 36$$

$$5x^2 + 8y^2 + 4xy - 24x - 36y = 0 \quad \text{معادله بیضی}$$

$$\begin{cases} 5x^2 + 8y^2 + 4xy - 24x - 36y = 0 \\ x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5(4y^2) + 8y^2 + 4y(2y) - 24(2y) - 36y = 0$$

$$36y^2 - 48y - 36y = 0 \Rightarrow 36y^2 - 84y = 0$$

$$\Rightarrow 12y(3y - 7) = 0 \Rightarrow y = 0, y = \frac{7}{3}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0,0)$$

$$y = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \frac{14}{3} \Rightarrow M_1\left(\frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

مثال ۸. دو نقطه $A(3,2)$ و $B(-1,2)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. نقطه M از صفحه این دستگاه مختصات را تعیین کنید که برای آن $MA + MB = 6$ و $MA^2 + MB^2 = \frac{41}{2}$ باشد.

حل. نقطه یا نقطه‌های جواب مسأله، نقطه یا نقطه‌های برخورد بیضی به کانونهای A و B و عدد ثابت ۶ و دایره‌ای به مرکز وسط پاره خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{41 - AB^2}$ است. بنابراین، معادله این بیضی و دایره را به دست آورده، نقطه‌های برخورد آنها را (در صورت وجود) تعیین می‌کنیم.

چون $y_A = y_B = 2$ است محور کانونی بیضی موازی محور x هاست. بنابراین داریم:

$$\text{مرکز بیضی } C \begin{cases} \alpha = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \\ \beta = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{cases}$$

$$CA = c = \sqrt{(3-1)^2 + (2-2)^2} = 2, 2a = 6, a = 3$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1 \quad \text{معادله بیضی}$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = 8 - \sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2}$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 + (y-3)^2 = 64 + (x+1)^2 + (y-7)^2 - 16\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2}$$

$$\Rightarrow -12x + 8y - 80 = -16\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2}$$

$$\Rightarrow -3x + 2y - 20 = -4\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2}$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 4y^2 + 400 - 12xy + 12x - 80y$$

$$= 16x^2 + 32x + 16 + 16y^2 - 224y + 784$$

$$\Rightarrow 7x^2 + 12y^2 + 12xy - 88x - 144y + 400 = 0$$

معادله به دست آمده، معادله بیضی مورد نظر است که محورهای تقارن آن، ناموازی با محورهای مختصات می‌باشند.

نکته. اگر زاویه $F'F$ با جهت مثبت محور x ها را α بنامیم، با یک دوران محورهای مختصات به اندازه زاویه α ، محورهای تقارن بیضی موازی محورهای مختصات جدید می‌گردد و معادله بیضی را می‌توان با استفاده از دستور

$$\frac{(X-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(Y-\beta)^2}{b^2} = 1 \quad \text{به دست آورد.}$$

مثال ۷. نقطه‌ای روی خط $\Delta: x - 2y = 0$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه $F(4,0)$ و $F'(0,2)$ برابر ۶ باشد. حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه ثابت $F(4,0)$ و $F'(0,2)$ برابر مقدار ثابت ۶ است، یک بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۶ است. معادله این بیضی را به دست می‌آوریم و نقطه یا نقطه‌های برخورد آن با خط Δ را تعیین می‌کنیم. برای این منظور، فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد، داریم:

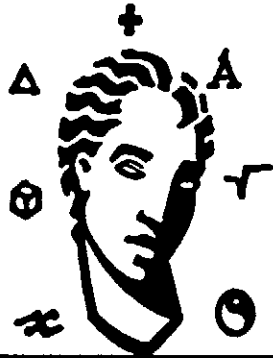
$$M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}, F \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix}, F' \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}, MF + MF' = 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6$$

$$\Rightarrow x^2 + 16 - 8x + y^2$$

$$= 36 + x^2 + y^2 - 4y + 4 - 12\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow -8x + 4y - 24 = -12\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$



تقریب اندیشه ۳

مقدار x را پیدا کنید

x عددی است بین یک تا ۵۰ و اعمالی در جهت سهم روی عدد x انجام گردیده، سعی کنید با توجه به اعمال فوق عدد نامعلوم x را پیدا کنید.

x	$\times 9$	$+17$	$:4$
-۹۳			
$:2$		$x=?$	
$\times 5$			
	-۲۸	$:3$	$\times 4$

از صمد پور اسد...

جواب در صفحه ۸۸

$$\text{مرکز دایره } C \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}, AB = 2c = 4$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - AB^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{2\left(\frac{41}{2}\right) - 16} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{25}{4} \quad \text{معادله دایره}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{\frac{25}{4} - (x-1)^2}{5} = 1$$

$$\Rightarrow 5(x-1)^2 + \frac{225}{4} - 9(x-1)^2 = 45$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow x-1 = \pm \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \frac{3\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \frac{45}{16} + (y-1)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = \frac{55}{16} \Rightarrow y-1 = \pm \frac{\sqrt{55}}{4}$$

$$y = 1 \pm \frac{\sqrt{55}}{4} \Rightarrow M_1 \left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{4}, 1 + \frac{\sqrt{55}}{4} \right) \text{ و}$$

$$M_2 \left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{4}, 1 - \frac{\sqrt{55}}{4} \right) \text{ و}$$

$$M_3 \left(1 - \frac{3\sqrt{5}}{4}, 1 + \frac{\sqrt{55}}{4} \right) \text{ و}$$

$$M_4 \left(1 - \frac{3\sqrt{5}}{4}, 1 - \frac{\sqrt{55}}{4} \right)$$

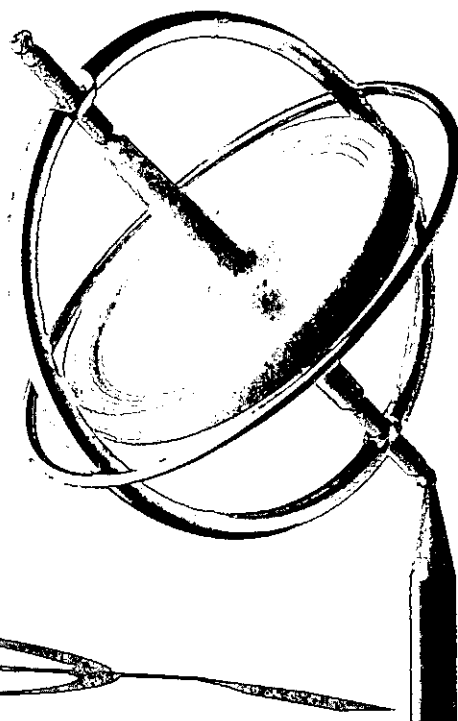
مسئله چهار جواب دارد.



بررسی قضیه‌های مشتق و کاربردهای آنها

(قسمت دوم)

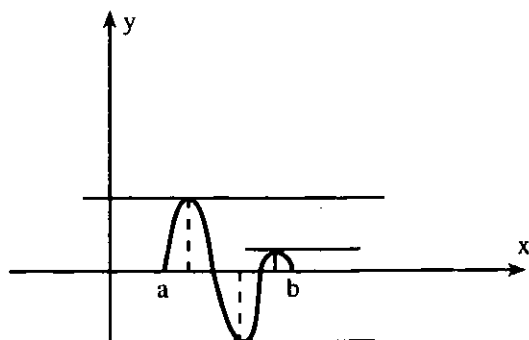
• محمد صادق عسگری



دارد. بنابراین، حداقل یکی از اکسترم‌های نسبی این تابع در نقاط داخلی فاصله $[a, b]$ قرار می‌گیرد. فرض کنیم $a < c < b$ طول نقطه اکسترم نسبی f باشد. بنابر قضیه ماکزیم و می‌نیم نسبی، داریم $f'(c) = 0$.

تعبیر هندسی قضیه

اگر تابع f در شرایط قضیه رول صدق کند، آن‌گاه نقطه‌ای به طول $a < c < b$ وجود دارد؛ به طوری که خط مماس در این نقطه موازی محور طولهاست.



پس از بررسی و کاربردهای قضیه ماکزیم و می‌نیم نسبی در برهان ۲۷ نوبت به بررسی قضیه رول می‌رسد. که صورت آن به شکل زیر است.

قضیه رول

فرض کنیم تابع f بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و بر فاصله $[a, b]$ مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b) = 0$ ، آن‌گاه وجود دارد $a < c < b$ ؛ به طوری که $f'(c) = 0$.

اثبات

اگر f تابع ثابت باشد، آن‌گاه حکم قضیه برقرار است. بنابراین، فرض کنیم f تابع غیر ثابت باشد. بنا به فرض داریم $f(a) = f(b) = 0$ ، در نتیجه، وجود دارد $a < x < b$ ؛ به طوری که $f(x) \neq 0$. همچنین f بر $[a, b]$ پیوسته است. در نتیجه، بنابر قضیه ماکزیم و می‌نیم توابع پیوسته، f مقادیر ماکزیم و می‌نیم خود را بر این فاصله اختیار می‌کند؛ چون f مقادیر مخالف صفر

نتیجه ۱
قضیه رول را می توان به صورت زیر نیز بیان کرد:
«اگر تابع f بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و بر فاصله $]a, b[$ مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b)$ ، آنگاه وجود دارد $a < c < b$ ؛ به طوری که $f'(c) = 0$ ».

مثال ۱۴: برای توابع زیر روی بازه های داده شده، شرایط قضیه رول را بررسی کنید و در صورت برقراری شرایط، نقاطی را که در آنها مشتق صفر است، بیابید.

الف: $f(x) = \sin x + \cos x - 1$ روی بازه $[0, 4\pi]$.

حل: شرایط پیوستگی و مشتق پذیری f بر فاصله $[0, 4\pi]$ ، با توجه به پیوستگی و مشتق پذیری توابع سینوس و کسینوس روی این فاصله برقرار است و $f(0) = f(4\pi) = 0$ بنابر قضیه رول وجود دارد $0 < c < 4\pi$ ؛ به طوری که $f'(c) = 0$ ، برای پیدا کردن نقاط داریم:

$$f'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow f'(c) = \cos c - \sin c = 0$$

$$\Rightarrow \cos c = \sin c \Rightarrow \operatorname{tg} c = 1 \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$$

ب: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5$ روی بازه $[1, 4]$.

حل: تابع f روی فاصله $[1, 4]$ پیوسته و مشتق پذیر است و $f(1) = 0$ و $f(4) = 3$ ، در نتیجه $f(1) \neq f(4)$ ؛ یعنی تابع f روی بازه $[1, 4]$ در شرایط قضیه رول صدق نمی کند. در صورتی که با یک محاسبه ساده، می توان وجود نقطه ای به طول $\frac{1}{3}$ در فاصله $[1, 4]$ را نشان داد که $f'(\frac{1}{3}) = 0$.

ج: $f(x) = x^2 + 3x + 2$ روی بازه $[0, 1]$.

حل: تابع f روی فاصله $[0, 1]$ پیوسته و مشتق پذیر است و $f(0) = 2$ و $f(1) = 6$ ، در نتیجه $f(0) \neq f(1)$ ؛ یعنی شرایط قضیه رول برای تابع f برقرار نیست. همچنین برای هر $0 < x < 1$ ، داریم $f'(x) = 2x + 3 \neq 0$.

د: $f(x) = 2\sqrt{x^2}$ روی بازه $[-1, 1]$.

تابع f در نقطه ای به طول $x = 0$ از این بازه پیوسته است؛ ولی مشتق پذیر نیست و $f(-1) = f(1) = 2$ ؛ یعنی شرط مشتق پذیری قضیه رول برقرار نیست. همچنین برای هر $-1 < x < 1$ ، داریم $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} \neq 0$.

توابع فوق در این مثال، اهمیت برقراری شرایط قضیه رول را نشان می دهند.

اثبات

فرض کنیم $f(a) = f(b) = k$ ، در این صورت تابع $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = f(x) - k$ را در نظر می گیریم. بنا به فرض، تابع g بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و بر فاصله $]a, b[$ مشتق پذیر است و داریم:

$$g(a) = f(a) - k = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - k = f(b) - f(b) = 0$$

در نتیجه، بنابر قضیه رول، وجود دارد $a < c < b$ ؛ به طوری که $g'(c) = 0$ ؛ چون $g'(x) = f'(x)$ ، پس $f'(c) = 0$.

تذکر

اگر در صورت قضیه رول، فقط مشتق پذیر بودن تابع f قید می شد، پیوسته بودن این تابع را می توانستیم نتیجه بگیریم؛ زیرا طبق قضیه، اگر تابعی در یک نقطه، مشتق پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته است.

نتیجه ۲ (رابطه بین قضیه رول و قضیه بولتزانو)

اگر تابع f بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و بر فاصله $]a, b[$ مشتق پذیر باشد و داشته باشیم: (۱) $f(a)f(b) < 0$ ، (۲) به ازای هر $a < x < b$ ، $f'(x) \neq 0$ ، آنگاه معادله $f(x) = 0$ در فاصله $]a, b[$ یک ریشه منحصر بفرد دارد.

اثبات

از شرط $f(a)f(b) < 0$ و قضیه بولتزانو نتیجه می شود معادله $f(x) = 0$ حداقل یک ریشه در فاصله $]a, b[$ دارد. ثابت می کنیم که این معادله فقط یک ریشه دارد (برهان خلف). فرض کنیم $a < c_1 < c_2 < b$ دو ریشه از معادله $f(x) = 0$ باشند؛ در نتیجه $f(c_1) = f(c_2) = 0$. چون $[c_1, c_2] \subset]a, b[$ ، پس f بر فاصله $[c_1, c_2]$ پیوسته و مشتق پذیر است. طبق قضیه رول وجود دارد:

ریشه در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ دارد.

مثال ۱۹: فرض کنید: $0 < a < b$ و f تابعی حقیقی و پیوسته بر بازه $[a, b]$ و مشتق پذیر بر بازه $[a, b]$ باشد. اگر $f(a) = a$ و $f(b) = b$ ، آن گاه ثابت کنید نقطه ای به طول $a < c < b$ وجود دارد؛ به طوری که خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $\left(\frac{c}{f(c)}\right)$ از مبدأ مختصات می گذرد.

حل: تابع جدید $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ را در نظر می گیریم. این تابع بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و مشتق پذیر است و

$$g(a) = \frac{f(a)}{a} = \frac{a}{a} = 1, \quad g(b) = \frac{f(b)}{b} = \frac{b}{b} = 1$$

یعنی تابع g روی بازه $[a, b]$ در شرایط قضیه رول صدق می کند. در نتیجه، نقطه ای به طول $a < c < b$ هست؛ به طوری که $g'(c) = 0$.

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$\Rightarrow g'(c) = \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow cf'(c) - f(c) = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(c)}{c} \quad (\text{ضریب زاویه خط مماس})$$

معادله خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $\left(\frac{c}{f(c)}\right)$ را می نویسیم:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

$$\Rightarrow y - f(c) = \frac{f(c)}{c}(x - c)$$

$$\Rightarrow y - f(c) = \frac{f(c)}{c}x - f(c)$$

$$\Rightarrow y = \frac{f(c)}{c}x$$

این خط مماس، از مبدأ مختصات می گذرد.

مثال ۲۰: ثابت کنید هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورت وجود، حداکثر دو ریشه دارد.

مثال ۱۵: ثابت کنید معادله $x^5 + 4x - 1 = 0$ در بازه $[-2, 2]$

فقط یک ریشه دارد.

حل: قرار می دهیم $f(x) = x^5 + 4x - 1$. تابع f روی بازه

$[-2, 2]$ پیوسته و مشتق پذیر است و $f(-2)f(2) = -1599 < 0$ (۱)

(۲) برای هر $-2 < x < 2$ ، داریم $f'(x) = 5x^4 + 4 \neq 0$. بنابراین،

طبق نتیجه (۲) معادله $x^5 + 4x - 1 = 0$ فقط یک ریشه در فاصله $[-2, 2]$ دارد.

مثال ۱۶: ثابت کنید معادله $x + e^x + 2 = 0$ فقط یک ریشه

حقیقی دارد.

حل: قرار می دهیم $f(x) = x + e^x + 2$. تابع f روی $\mathbb{R}$

پیوسته و مشتق پذیر است و به علاوه (۱) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(۲) برای هر x ، $f'(x) = 1 + e^x \neq 0$ ، پس طبق نتیجه (۲)

معادله $x + e^x + 2 = 0$ فقط یک ریشه حقیقی دارد.

مثال ۱۷: نشان دهید برای هر عدد $a > 1$ عدد حقیقی یکتای

b وجود دارد که $b = \sqrt[n]{a}$.

حل: تابع پیوسته و مشتق پذیر $f(x) = x^n - a$ را روی بازه

$[1, +\infty[$ در نظر می گیریم؛ اولاً $f(1) = 1 - a < 0$ و

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثانیاً برای هر $x > 1$ ، داریم

$f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$. در نتیجه، طبق نتیجه (۲)، معادله

$x^n - a = 0$ فقط یک ریشه بزرگتر از یک دارد؛ یعنی عدد حقیقی

ویکتای $b > 1$ وجود دارد؛ به طوری که $b^n - a = 0$ یا $b^n = a$.

یعنی $b = \sqrt[n]{a}$.

مثال ۱۸: ثابت کنید معادله $\cos x - 3x - x^2 = 0$ فقط یک

ریشه در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ دارد.

حل: تابع پیوسته و مشتق پذیر $f(x) = \cos x - 3x - x^2$ را

روی بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ در نظر می گیریم؛ اولاً $f(0) = 1 > 0$ و

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} < 0$ ، ثانیاً برای هر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ، داریم

$$f'(x) = -\sin x - 3 - 2x < 0$$

پس طبق نتیجه (۲) معادله $\cos x - 3x - x^2 = 0$ فقط یک



ادب ریاضی

ابوالحسن ثابت بن قُره، از مردم حرّان، واقع در بین النهرین، حدود سال ۲۲۱ هجری تولد و به سال ۲۸۸ هجری وفات یافت. در جوانی در حرّان به شغل صراف‌ی اشتغال داشت. هنگامی که محمد بن موسی بن شاکر (یکی از سه برادر مشهور به بنو موسی) از وقوف او بر زبانهای عربی و یونانی آگاه گردید، او را با خود به بغداد برد. وی تحت تعلیم و هدایت بنو موسی، به تحصیل ریاضیات، نجوم و طب ادامه داد و یکی از زبردست‌ترین دانشمندان و مترجمان عصر خود گردید. ثابت از نخستین کسانی است که در هیأت بظلمیوس دخالت کردند. وی برای آن که حرکت اقبال و ادبار اعتدالین را توجیه کند، فلک نهیمی بر هشت فلک بظلمیوسی افزود. آثار ریاضی ثابت، نقش مهمی در پیشرفت ریاضیات دوره اسلامی داشته است. نوشته‌های وی، راه را برای اکتشافهای بعدی مانند تعمیم مفهوم عدد صحیح به اعداد حقیقی مثبت، حساب و انتگرال، مثلثات کروی و جز اینها هموار کرد. طریقه وی در تعیین مساحت سهمی و حجم سهمیوار، بسیار جالب است.

زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی — ابوالقاسم قربانی

حل: فرض کنیم معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای سه ریشه x_1 و x_2 و x_3 باشد. در نتیجه، برای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ داریم $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. تابع f روی بازه‌های $[x_1, x_2]$ و $[x_2, x_3]$ در شرایط قضیه رول صدق می‌کند. بنابراین، نقاط $x_1 < c_1 < x_2$ و $x_2 < c_2 < x_3$ وجود دارند؛ به طوری که $f'(c_1) = 0$ و $f'(c_2) = 0$ ، یعنی c_1 و c_2 دو ریشه معادله $f'(x) = 0$ هستند. این تناقض است؛ زیرا معادله $f'(x) = 2ax + b = 0$ یک معادله درجه اول است، که همواره یک ریشه دارد.

مثال ۲۱: ثابت کنید هر معادله درجه n ، $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ با شرط $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$ همواره یک ریشه مثبت دارد. حل: قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x$$

تابع f روی بازه $[0, 1]$ پیوسته و مشتق پذیر است و $f(0) = 0$ و

$$f(1) = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$$

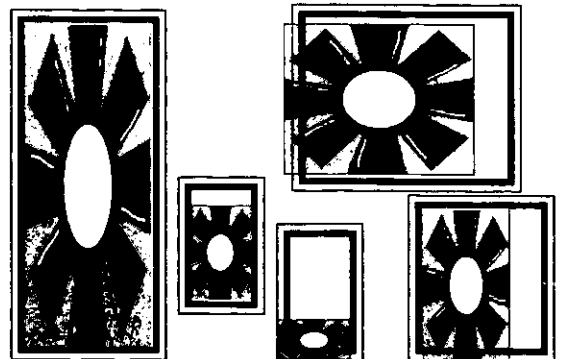
در نتیجه، طبق قضیه رول، وجود دارد $0 < c < 1$ ؛ به طوری که $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f'(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0 = 0$$

یعنی $0 < c < 1$ یک ریشه معادله $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ می‌باشد.

• یکی از نتایج مهم قضیه رول، قضیه مقدار میانگین است. در شماره بعد به بررسی کامل این قضیه می‌پردازیم و سپس طرز استفاده از قضیه را در حل مسائل، به کمک مثال، نشان می‌دهیم.



مربعهای فوق جادویی

● ترجمه: مهناز پاک خصال

مرجع:

نشریه SCIENTIFIC AMERICAN, Jan 1997

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

ممکن است به نظر برسد که تاکنون تمام مسائل مربوط به ساخت یک چنین مربعهایی بیان شده است و دیگر مسأله جدیدی وجود ندارد؛ ولی در جواب باید گفت که همین ده سال پیش، آقای «لی سالوز» (Lee Sallows) دیدگاه کاملاً جدیدی را دربارهٔ مربعهای جادویی کشف کرد. او متخصص بازی با حروف و متبخر در تلفیق کلمات با ریاضیات تفریحی است.

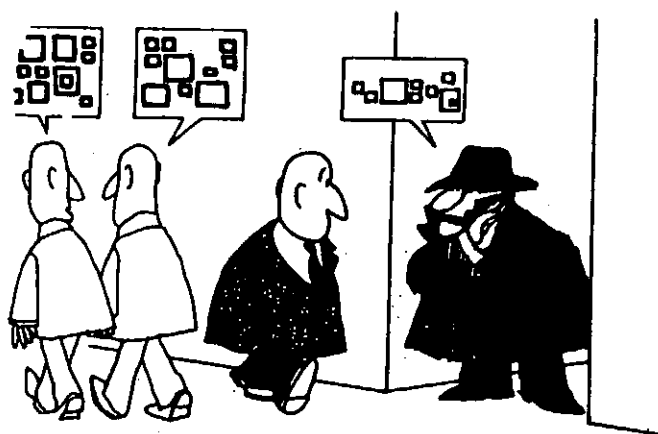
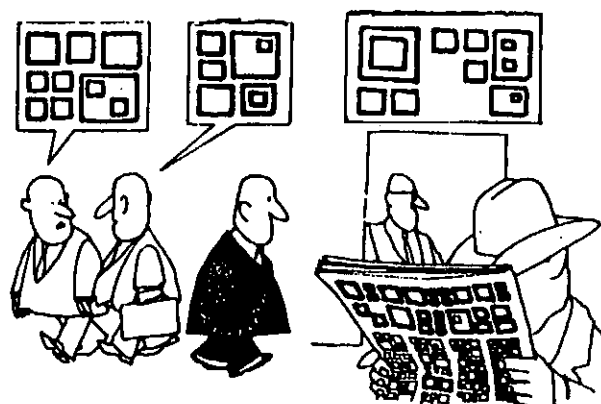
آقای سالوز در کتاب «مسیر نورانی تر ریاضیات (چاپ انجمن ریاضی آمریکا ۱۹۹۴)» دو مقاله نوشته است که از آنها در این جا استفاده می شود. دیدگاه جدید او کمی پیچیده است؛ برای مثال به جدول زیر توجه کنید:

۵	۲۲	۱۸
۲۸	۱۵	۲
۱۲	۸	۲۵

↔

five	twenty two	eighteen
twentyeight	fifteen	two
twelve	eight	twenty five

شکل ۱



در اصطلاح، به مربعهایی که مجموع سطرهای آن با مجموع ستونها یا قطرهای برابر باشد، مربعهای جادویی گفته می شود و در طی سالیان سال، به عنوان یکی از تفریحات ریاضی محسوب می شده است. طبق افسانه های چینی، ساده ترین مربعها به صورت زیر بوده است که امپراتور یو (Yü) در پشت یک لاک پشت در قرن ۲۳ پیش از میلاد حک کرده است:

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

در این مربع جادویی، مجموع اعداد، ۱۵ بوده و مربع از مرتبهٔ سوم می باشد. مربعهای با مرتبهٔ بالاتر نیز وجود دارد و حتی مکعب، هشت ضلعی، ده ضلعی و دایره های جادویی نیز وجود دارد.

مجموع سطرها و ستونهای یک چنین مربعی، برابر $3a$ خواهد بود. این فرمول، برای تمامی مقادیر a ، b و c و هر نوع مربع از مرتبه ۳ برقرار می باشد. با دقت در قطرهای مربع فوق، می توان دریافت که سه عدد، یک تصاعد حسابی تشکیل می دهند؛ یعنی اعداد با اختلاف یکسان، در پشت سرهم قرار گرفته اند. بنابراین، یک استراتژی خوب برای یافتن مربعهای فوق جادویی، جست و جوی اعدادی است که به صورت سه تایی مرتب بوده و یک سری حسابی را تشکیل می دهند.

البته باید این سه تایی ها را به نحوی قرار داد که مربع حاصله نیز دارای منطق مورد نظر باشد. به عنوان مثال، می توان عدد ۱۵ را در مرکز مربع قرار داد (چون از قبل می دانیم که حداقل یکی از این مربعها وجود دارد). با توجه به جدول لوگوریتیم مربوطه، پنج دسته عدد سه تایی مناسب می توان یافت: (۲، ۱۵، ۲۸) و (۵، ۱۵، ۲۵) و (۸، ۱۵، ۲۲) و (۱۱، ۱۵، ۱۹) و (۱۲، ۱۵، ۱۸) که مجموع حروف انگلیسی آنها سه برابر مجموع حروف fifteen است. حال می توان دو دسته را انتخاب کرده و به صورت قطری آنها را قرار داد. مثلاً برای دو دسته اول خواهیم داشت:

۲	۲۵
	۱۵
۵	۲۸

با توجه به فرمول لوکاس، می دانیم که مجموع سطرها یا ستونها باید سه برابر ۱۵ باشد و بنابراین، جدول فوق به صورت زیر درمی آید:

۲	۱۸	۲۵
۳۸	۱۵	-۸
۵	۱۲	۲۸

مربع فوق به دو دلیل قابل قبول نیست، اول آن که عدد منفی قابل قبول نیست و دیگر این که حتی اگر -۸ پذیرفته شود، باید آن را به صورت minus eight نوشت، که تعداد حروف (لوگوریتیم) آن برابر ۱۰ است و اگر مشتق لوگوریتیمی را ترتیب دهیم، خواهیم دید که جدول حاصله، جادویی نیست:

۳	۸	۱۰
۱۱	۷	۱۰
۴	۶	۱۱

اگر اعداد فوق به صورت رقم نوشته شود، مربع فوق، به یک مربع جادویی معمولی بدل می گردد، که مجموع آن ۴۵ است؛ ولی جالبتر آن است که اگر تعداد حروف (در زبان انگلیسی) اعداد فوق شمارش و نوشته شود نیز یک مربع جادویی حاصل می گردد که به صورت زیر است و مجموع اعداد آن، ۲۱ خواهد شد. اصطلاحاً به یک چنین مربعهایی، مربعهای فوق جادویی گفته می شود.

۴	۹	۸
۱۱	۷	۳
۶	۵	۱۰

آقای سالوز یک تئوری کلی برای این گونه مربعها ارائه کرده است. او تئوری خود را با تعریف «لوگوریتیم x » ($\log_{10} x$) یعنی تعداد حروف یک عدد (که با حروف نوشته شده باشد) آغاز می کند. البته با کمی دقت، می توان دریافت که در زبانهای مختلف، هر عدد دارای لوگوریتیم خاصی است؛ ولی در این مقاله، تأکید بر زبان انگلیسی است (می توان در زبان فارسی نیز لوگوریتیم های اعداد را یافت). باید دقت داشت که این مفهوم، با لگاریتم اشتباه نشود.

سؤال بعدی نیز آن است که آیا می توان یک چنین مربع های دیگری نیز یافت؟ جواب مثبت است؛ مثلاً اگر جلوی هر یک از ارقام شکل ۱، عبارت one million قرار داده شود، مجموع سطرها یا ستونها، سه میلیون افزایش می یابد. هنگامی که هر عدد با لوگوریتیم خود جایگزین می شود، مربع حاصل را مشتق لوگوریتیم گویند. مجموع سطرها و ستونهای این مربع نیز به اندازه سه برابر تعداد حروف موجود در عبارت one million افزایش خواهد یافت ($3 \times 10 = 30$). با توجه به این موضوع، می توان دریافت که در مربعهای 3×3 می توان بی نهایت از این سری مربعهای فوق جادویی یافت. آقای سالوز این مربعها را به عنوان «همسازهای» مربع اصلی معرفی می کند.

آیا تغییرات جالبتر دیگری نیز وجود دارد؟ در قرن نوزدهم، «ادوارد لوکاس» ریاضیدان فرانسوی، یک فرمول جالب برای مربع های 3×3 یافت که به صورت زیر است:

$a+b$	$a-b-c$	$a+c$
$a-b+c$	a	$a+b-c$
$a-c$	$a+b+c$	$a-b$

به هر یک از این مربعها، «مربع لاتینی» گویند؛ یعنی هر سه عدد، در سطرها و ستونهای مختلف وجود دارند و خود این موضوع نیز اندکی شگفت‌انگیز است. به علاوه، قطرها نیز شگفت‌آورند. از آن جایی که تعداد حروف هر یک از اعداد جدول ابتدایی، ۱۴ است، شگفتی نیز بیشتر می‌شود.

مربعهای بزرگتر چه وضعیتی دارند؟ برای این کار، می‌توان براحتی از مربعهای لاتینی متعامد، به خوبی استفاده کرد. برای مثال، در زبان انگلیسی، مربع چهارتایی زیر، فوق جادویی است:

۳۱	۲۳	۸	۱۵
۱۷	۵	۲۱	۳۴
۳۶	۳۸	۱۳	۰
۳	۱۱	۳۵	۲۸

آقای سالوز، از گروهی از این مربعها به عنوان «شبه طلا» یاد می‌کند؛ چون دستیابی به آنها آسان است و معتقد است که برای طلای واقعی، باید زحمت بیشتری کشید که نمونه آن نیز در ادامه ذکر شده است:

۳۶	۳۷	۴۸	۵۹
۴۹	۵۸	۲۷	۳۶
۵۷	۴۶	۳۹	۲۸
۳۸	۲۹	۵۶	۴۷

جواب سؤال داخل متن:

۸	۱۹	۱۸
۲۵	۱۵	۵
۱۲	۱۱	۲۲

حال می‌توان دسته‌های دیگر را نیز امتحان کرد تا جواب صحیح به دست آید (جواب در انتهای مقاله ذکر شده است).

آیا مربعهای دیگری وجود دارد که عدد وسط آن غیر از ۱۵ باشد. آقای سالوز برای یافتن مربعهای جادویی 3×3 یک برنامه کامپیوتری نوشته است و مربعهای زیادی نیز یافته است. یک نمونه دیگر از آنها نیز در زیر ذکر شده است:

۱۵	۷۲	۴۸
۷۸	۴۵	۱۲
۴۲	۱۸	۷۵

این بازی را برای زبانهای دیگری غیر از انگلیسی نیز می‌توان انجام داد. آقای سالوز برای اعداد تا ۱۰۰، مربعهای فوق جادویی را برای ۱۹ زبان یافته است.

در زبان فرانسه، برای اعداد تا ۲۰۰، فقط یک مربع فوق جادویی وجود دارد، ولی اگر اعداد تا ۳۰۰ افزایش یابند، می‌توان ۲۲۵ مربع دیگر نیز یافت، که یکی از آنها در زیر نشان داده شده است:

۱۵	۲۰۶	۱۱۵
۲۱۲	۱۱۲	۱۲
۱۰۹	۱۸	۲۰۹

در زبان آلمانی، با استفاده از اعداد کمتر از ۱۰۰، حدود ۲۲۱ مربع فوق جادویی وجود دارد که یکی از آنها در زیر نشان داده شده است. البته باید تعداد حروف «zig» و «und» را نیز در نظر گرفت.

۴۵	۶۲	۵۸
۶۸	۵۵	۴۲
۵۲	۴۸	۶۵

حال اگر رقم دهگان اعداد جدول فوق را در یک جدول، و رقم یکان را در جدول دیگری بنویسیم، خواهیم داشت:

۴	۶	۵
۶	۵	۴
۵	۴	۶

۵	۲	۸
۸	۵	۲
۲	۸	۵

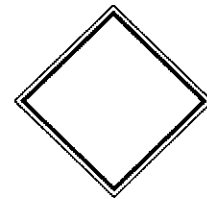




معماهایی با ماهیت ریاضی

(قسمت دوم)

(نظریه گرافها)



● هوشنگ شرقی

اردوی تفریحی رفته اند و با خود یک دوربین عکاسی با یک حلقه فیلم ۳۶ تایی همراه می‌پرند. در محل اردو، هر معلم از دانش‌آموزانی که شاگرد او بوده‌اند، عکس می‌گیرد و هر دانش‌آموز از معلمانی که استاد او نیستند، عکس می‌گیرد. (بدیهی است که دو معلم می‌توانند هر دو، استاد یک دانش‌آموز بوده باشند) و پس از پایان کار، تمام حلقه فیلم دوربین تمام می‌شود. تعداد دانش‌آموزان چند نفر بوده است؟

حل: اگر مسأله را بخواهیم با تشکیل معادله، حل کنیم قدری دشوار است؛ زیرا هر دانش‌آموز می‌تواند از یک یا دو یا هر سه معلم عکس گرفته یا از هیچ کدام عکس نگرفته باشد و نیز هر معلم می‌تواند از هر تعداد دانش‌آموز عکس گرفته یا از هیچ کدام نگرفته باشد. لذا فرموله کردن مسأله مشکل است. اما یک مدل گرافیکی، حل مسأله را بسیار آسان می‌کند؛ خواننده‌ای که با نظریه گراف آشنایی دارد، گراف دو پارچه را بخوبی می‌شناسد؛ یعنی گرافی که رؤوس آن در دو مجموعه جدا از هم واقعند و رؤوس هر مجموعه، تنها با رؤوس مجموعه دیگر ارتباط داشته و با رؤوس مجموعه خودش ارتباطی ندارد و رؤوس یالهای این گراف، از

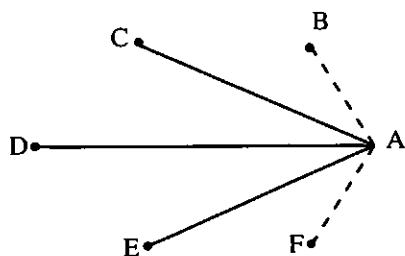
بحث معماهایی با ماهیت ریاضی را در شماره پیش، با اشاره به معماهایی که با اتکا به قضیه استقرای ریاضی حل می‌شوند، آغاز کردیم. اینک و در این شماره، به معماهایی می‌پردازیم که ریشه در نظریه «گرافها» دارند و به کمک قضیه‌های آن حل می‌شوند. فرض بر این است که خواننده با اصول این نظریه آشنایی دارد؛ اما برای اطلاع بیشتر، مطالعه بخش اول از کتاب ریاضیات گسسته دوره پیش دانشگاهی مفید می‌باشد. در ضمن، حل هر مسأله نیز به قضیه خاص که برای حل معما از آن استفاده شده، اشاره کرده‌ایم. معمولاً در اکثر مسائلی که ارتباطهایی مطرح است، مانند دوستی، آشنایی، دست دادن، نامه نوشتن، مسابقه دادن و ... می‌توان یک الگوی گرافیکی برای حل مسأله ایجاد نمود. رؤوس گراف می‌توانند افراد، تیمها و ... بوده و یالهای گراف معرف وجود ارتباط بین آنها (از نوع دوستی، دست دادن و ...) یا عدم وجود ارتباط باشد. هر یک از مثالهای زیر، می‌تواند نمونه‌ای از این نوع مسائل باشد. همچون قبل، توصیه می‌شود که پیش از دیدن راه حل مسأله، در مورد آن بخوبی فکر شود تا حداقل به طور شهودی، با ساختمان مسأله آشنایی به دست آید.

مثال ۱: سه نفر معلم و تعدادی دانش‌آموز دبیرستانی به یک

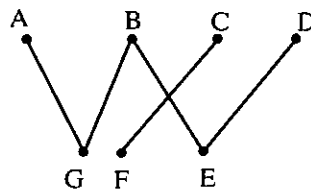
قضیه‌ای ابتدایی در نظریه گرافها می‌گوید، تعداد رؤوس، با درجه فرد در هر گراف، عددی زوج می‌باشد؛ بنابراین، تعداد افرادی که با تعداد فردی از افراد دست داده‌اند، عددی زوج است!

مثال ۳: ثابت کنید: در هر جمع ۶ نفره از افراد، همیشه می‌توان سه نفر را یافت که یا هر سه با هم دو به دو آشنا و یا هر سه با هم دو به دو ناآشنا باشند.

حل: یک مدل گرافیکی مناسب برای حل مسأله فوق، آن است که افراد را رؤوس یک گراف با شش رأس در نظر بگیریم. یال آشنایی را با یک رنگ و یال ناآشنایی را با رنگ دیگر در نظر بگیریم. (در شکل، یال آشنایی را توپر و یال ناآشنایی را با خط چین نمایش داده‌ایم). در این صورت، چون هر دو نفر دلخواه با هم یا آشنایند و یا ناآشنا، پس هر دو رأس این گراف، با یکی از این دو نوع یال (توپر یا خط چین) به هم مربوط می‌شوند و یک گراف کامل به دست می‌آید. روشن است که برای یک رأس دلخواه (مانند A) پنج یال خروجی از دو نوع داریم؛ بنابراین الزاماً حداقل سه تای آنها از یک نوع می‌باشند. دو حالت در نظر می‌گیریم: حالت اول آن که، سه یال خروجی توپر داشته باشیم (یعنی شخص A یا سه نفر آشنا باشند). مطابق شکل، واضح است که دو رأس از سه رأس C، D و E یا حداقل با یک یال توپر به هم مربوط می‌شوند که در این صورت، این یال با دو یال توپر دیگر خارج شده از A، تشکیل یک مثلث با یالهای توپر می‌دهند. (مثلاً مثلث ACE) یا این که هیچ کدام از آنها، با یال توپر به هم وصل نمی‌شوند، که در این صورت، یک مثلث با یالهای خط چین تشکیل می‌شود (مثلث CDE)؛ یعنی در هر حال، ما یا یک مثلث با سه یال توپر و یا یک مثلث با سه یال خط چین خواهیم داشت، که معادل آن است که در هر حال، سه نفر یافت می‌شوند که دو به دو با هم آشنا باشند یا سه نفر پیدا می‌شوند که دو به دو با هم ناآشنا باشند. حالت دیگری که حداقل سه یال خط چین را از رأس A خارج می‌شوند، به طریق مشابه می‌توان بررسی کرد و به



یک مجموعه نمی‌باشند. مانند گراف زیر:



که مجموعه یالهای آن به صورت

$$V = \{ AG, BG, CF, DE, BE \}$$

می‌باشند.

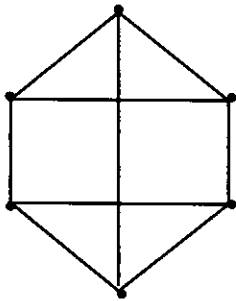
اینک مسأله را می‌توان یک گراف دو پارچه در نظر گرفت که در یک مجموعه، رؤوس معلمان و در مجموعه دیگر، دانش‌آموزان قرار گرفته‌اند. دو رأس به هم وصل می‌شوند. اگر هر یک از دو طرف از دیگری عکس بگیرد (توجه کنید که لازم نیست گراف جهت‌دار فرض شود؛ زیرا لزومی ندارد که دو طرف از هم عکس بگیرند و در واقع هرگز چنین نمی‌شود)، حال دیده می‌شود که هر معلم فقط از شاگردان خودش عکس می‌گیرد و هر شاگرد از معلمانی که استاد او نبوده‌اند، عکس می‌گیرد. پس هر دو رأس، متعلق به این دو مجموعه به صورت منحصر به فردی با یک و فقط یک یال به هم وصل می‌شود (اگر دانش‌آموز، شاگرد معلم باشد، یالی از طرف معلم به طرف شاگرد، و اگر نباشد، یالی از طرف شاگرد به طرف معلم رسم می‌شود و فقط یکی از این دو صورت ممکن است) و بنابراین، یک گراف دو پارچه کامل به دست می‌آید که یک مجموعه آن، شامل ۳ عضو (معلمان) و دیگری شامل x عضو (تعداد شاگردان) می‌شود و لذا تعداد کل یالهای این گراف، می‌شود $3x$ ؛ اما هر یال متناظر با یک قطعه عکس است و تعداد کل عکسها ۳۶ تا می‌باشد. پس $3x = 36$ و لذا $x = 12$ ؛ یعنی ۱۲ نفر دانش‌آموز به اردو رفته‌اند.

مثال ۲: ثابت کنید تعداد افرادی که در طول تاریخ بشر، با تعداد فردی از افراد دست داده‌اند، عددی زوج است.

حل: ممکن است مسأله به ظاهر مشکل بیاید؛ اما با وقوف به نظریه گرافها بسیار آسان می‌باشد. هریک از افراد بشر (از آغاز تاکنون) را رأس یک گراف در نظر بگیرید. انسانهایی که با هم (حداقل یک بار) دست داده‌اند، با یک یال به هم وصل کنید و در غیر این صورت، آنها را به هم وصل نکنید. درجه هر رأس این گراف، تعداد افرادی است که آن فرد با آنها دست داده است.

مثال ۵: در یک کنفرانس خبری ۳۰ خبرنگار حاضرند و هر نفر درست از اخبار k نفر از گروه مطلع است. حداقل k چه باشد تا این که بتوانیم بگوییم حتماً دو نفر پیدا می‌شوند که از اخبار یکدیگر مطلعند؟

حل: خواننده‌ای که با گراف k - منتظم آشنایی دارد، می‌داند که این مسئله نیز الگویی از آن گراف را دارد؛ یعنی گرافی که درجه هر رأس آن k می‌باشد. مثلاً در شکل زیر، یک گراف مرتبه ۶ و سه منتظم رسم شده است:



در مسئله فوق، یک گراف از مرتبه ۳۰ و k منتظم داریم. قضیه‌ای ابتدایی می‌گوید: در یک گراف با n رأس، حداکثر $\frac{n(n-1)}{2}$ یال داریم (گراف کامل n رأسی یا $n-1$ منتظم).

و می‌دانیم تعداد یالهای گراف مسئله ما $30k$ می‌باشد. اگر این تعداد از حداکثر تعداد یالهای گراف کامل با ۳۰ رأس یعنی $\frac{30(30-1)}{2}$ بیشتر باشد، شرط مسئله تحقق می‌یابد؛ یعنی حداقل

یکی از یالها دو طرفه می‌شود و این، به معنای آن خواهد بود که دو خبرنگار از اخبار هم مطلعند. بنابراین لازم است که داشته باشیم:

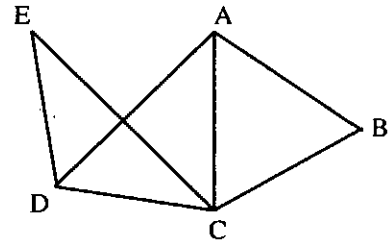
$$\frac{30 \times 29}{2} < 30k \Rightarrow k > 14/5 \Rightarrow k = 15$$

یعنی حداقل k مساوی ۱۵ است.

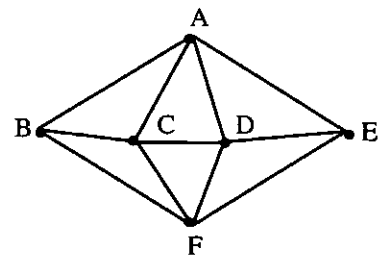
مثال ۶: خطوط هوایی بین شهرهای یک کشور، طوری تنظیم شده است که هر شهر حداکثر با سه شهر ارتباط هوایی دارد. در ضمن، برای مسافرت از هر شهر به هر شهر دیگر، بیش از یک بار نیاز به تعویض هواپیما نیست. حداکثر تعداد شهرهای این کشور چه قدر است؟

همین نتیجه رسید، که بررسی آن به عهده خواننده علاقه مند می‌باشد.
مثال ۴: اینک تعدادی دانش‌آموز را در نظر بگیرید که برای شرکت در اردو به جنگلی رفته‌اند و بین درختها پراکنده شده‌اند. به طوری که همه همدیگر را نمی‌بینند؛ ولی می‌دانیم که هر دو نفر دلخواه، یک نفر را به صورت مشترک می‌بینند. و روشن است که دیدن، یک رابطه تقارنی است، ولی یک رابطه تعدی نمی‌باشد؛ یعنی اگر A ، B را ببیند، B هم A را می‌بیند؛ ولی اگر A ، B را و B ، C را ببیند، الزاماً A ، C را نمی‌بیند. بگویید عده دانش‌آموزان حداقل چند نفر می‌باشد؛ اگر بدانیم هیچ کس وجود ندارد که همه را ببیند؟

حل: این یک مسئله خالص از گرافهاست، که بدون تجسم گرافیکی، قابل حل نمی‌باشد. در واقع، به زبان گرافها مسئله ما به این مسئله ساده تبدیل می‌شود؛ یعنی: یافتن یک گراف با n رأس که هر دو رأس آن، به یک رأس مشترک با دو یال مرتبط باشند و هیچ رأس آن، به تمام رؤوس مرتبط نباشد. بسادگی می‌توان فهمید که تا گراف مرتبه ۵ چنین کاری مقدور نیست و مطابق شکل، ممکن است فردی پیدا شود که همه افراد را ببیند (با حفظ شرط مسئله).



اما یک گراف با شش رأس می‌توان رسم نمود و بروشنی دید که اگر بخواهیم شرط مسئله حفظ شود، (وصل بودن هر دو رأس به یک رأس مشترک) هرگز نمی‌توان یک رأس را به تمام رؤوس وصل کرد:



اگر عده افراد از شش هم بالاتر باشد، به همین ترتیب مسئله حل می‌شود؛ یعنی عده دانش‌آموزان باید حداقل شش نفر باشد.

(۵) یک شرکت خصوصی، نیاز به یک مهندس الکترونیک، یک مهندس صنایع، سه نفر برنامه‌نویس کامپیوتر، دو نفر طراح سیستم و یک نفر حسابداری دارد. احمد حسابداری است و در ضمن، برنامه‌نویسی کامپیوتر هم می‌داند. حسین برنامه‌نویس کامپیوتر است و طراحی سیستم را هم می‌شناسد. رضا مهندس صنایع است و طراحی سیستم هم انجام می‌دهد. علی نیز برنامه‌نویس کامپیوتر و طراح سیستم است. محمد مهندس صنایع است و در ضمن، با حسابداری آشنایی دارد. و محسن مهندس الکترونیک می‌باشد و برنامه‌نویسی کامپیوتر هم می‌داند. آیا این شرکت می‌تواند ضمن برآورده کردن نیازهای شغلی خود، به همه این افراد، شغلی واگذار کند؟ چگونه و به چند طریق؟

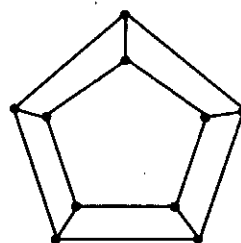
(۶) ۲۵ تیم فوتبال برای کسب عنوان قهرمانی کشور، با هم مسابقه می‌دهند. دست کم چند بازی باید انجام دهند تا بین هر سه تیم، دو تیم وجود داشته باشند که بازی خود را انجام داده باشند؟ (۷) n نقطه را به کمک پاره‌خطهای راست غیرمتقاطع، طوری به هم وصل کرده‌ایم که از هر نقطه، بتوان از طریق این پاره‌خطها به بقیه نقطه‌ها عبور کرد و در ضمن، دو نقطه‌ای پیدا نشوند که با دو مسیر به هم وصل شده باشند. ثابت کنید تعداد کل پاره‌خطهای راست برابر است با $n-1$.

(راهنمایی: از خواص گرافی به نام درخت استفاده کنید.) (۸) هفده نفر از طریق پست با هم مکاتبه می‌کنند، به طوری که هر شخص، با همه افراد دیگر مکاتبه دارد. در نامه‌های آنان، تنها سه موضوع مختلف مورد بحث قرار می‌گیرد. هر زوج از مکاتبه‌کنندگان، تنها به یکی از موضوعها می‌پردازند. «...» کنید حداقل سه نفر وجود دارند که درباره موضوع واحدی به یکدیگر نامه می‌نویسند.

(راهنمایی: گرافی با هفده رأس را در نظر بگیرید که همه یالهای آن، به سه رنگ مختلف می‌باشند؛ بنابراین، از یک رأس آن، حداقل شش یال به یک رنگ خارج شده است و ...).



حل: این مسأله، راه حل ساده‌ای دارد. در واقع از هر شهر مانند A، حداکثر ۴ سه شهر ارتباط وجود دارد و از هر کدام از آن سه شهر، به دو شهر (غیر از A) ارتباط وجود دارد. پس حداکثر تعداد شهرهای این کشور، می‌تواند $1+3+3 \times 2$ باشد (چرا؟) یعنی ۱۰ شهر؛ اما ارتباط این مسأله با نظریه گراف، انطباق ویژه‌ای است که بین این مسأله و یک نوع خاص از گرافها، یعنی گراف «پترسن» وجود دارد. مطابق شکل، این ارتباط می‌تواند بین شهرها (که رؤوس گراف پترسن می‌باشند) با هم توسط یالهای گراف پترسن انجام شود و شرایط مسأله محفوظ باشد و گراف مطلوب ۱۰ رأس داشته باشد:



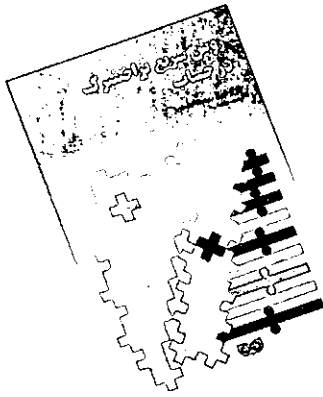
تمرینها

(۱) سه خواهر با برادران خود، دور میزی نشسته‌اند و روی میز یک بشقاب شیرینی وجود دارد. هر خواهر به برادر بزرگتر و هر برادر به خواهر بزرگتر خود شیرینی می‌دهد و در آخر، بشقاب شیرینی که شامل ۱۲ شیرینی بوده است، خالی می‌شود. تعداد برادران چند نفر است؟

(۲) ثابت کنید در یک جمع ۱۸ نفره، همیشه می‌توان چهار نفر را پیدا کرد که یا همه دو به دو با هم آشنا باشند و یا این که همه دوه‌دو با هم ناآشنا باشند. و این تعمیمی است از مثال ۳. برای آشنایی کامل با این بحث و تعمیم کلی آن، به مجله آشنایی با ریاضیات جلد سی و چهارم، مقاله‌ای با عنوان «از اصل لانه کبوتر تا نظریه رامزی» از دکتر «شهریار شهریار» مراجعه شود.

(۳) سه روستای A، B و C را می‌خواهیم با سه جاده به سه بیمارستان D، E و F وصل کنیم. آیا ممکن است طوری این کار را انجام دهیم که هیچ کدام دو جاده یکدیگر را قطع نکنند؟ (راهنمایی: به مسأله گراف هامنی مراجعه نمایید.)

(۴) پانزده نفر دانش‌آموز در یک کلاس درس می‌خوانند، آیا ممکن است هر کدام از آنان، دقیقاً با ۷ نفر از دانش‌آموزان دیگر دوست باشند؟



◀ روش سریع تراختنبرگ در حساب

آن کاتلر، رودلف مک شین

ترجمه محمد باقری

انتشارات فرهنگان

«پاکوف تراختنبرگ»، بنیانگذار مؤسسه ریاضی در زوریخ (سوئیس) و ابداعگر روشی نو و شگفت‌انگیز در حساب، عمیقاً معتقد بود که همه افراد با «استعدادهای چشمگیر برای محاسبه» به دنیا می‌آیند. او و بسیاری از مریدان، براین باورند که اگر اکثر اشخاص، در کار با اعداد، دچار مشکل می‌شوند و علت دشوار بودن، فهم حساب نیست؛ بلکه روش کهنه‌ای است که با آن، حساب را به آنان یاد داده‌اند.

مهمترین تأثیر روش تراختنبرگ، افزایش مهارت در انجام محاسبه‌هاست. این روش، شیوه تازه‌ای است برای انجام سریع بنیادی‌ترین عملهای حساب، که در آن از جدول ضرب و عمل تقسیم خبری نیست و تنها مبتنی بر کلیدهایی است که باید



◀ دیفرانسیل و انتگرال

(مفهوم، تعریف و محاسبه)

مؤلف: سید محمد رضا هاشمی موسوی

انتشارات دُرچ

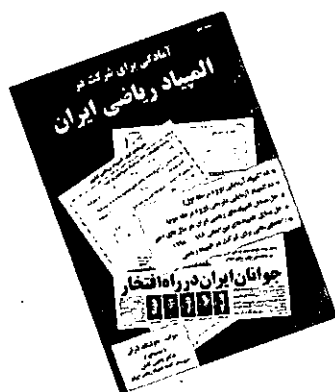
این کتاب، حاوی مفهوم، تعریف و محاسبه دیفرانسیل و انتگرال توابع با بیانی ساده است که پس از درس، با توجه به مفاهیم و مثالهای متن درس، تمرینهایی دوره‌ای برای احاطه و تسلط کامل روی مطالب فراگرفته شده، طرح شده است.

در پایان، تستهای کنکورهای سراسری مربوط به مباحث دیفرانسیل و انتگرال، و همچنین آزمونهایی برای پوشش دادن به مطلب، همراه با پاسخ تشریحی آنها آورده شده است تا معلومات و مهارت کافی را برای داوطلبان شرکت در آزمونهای سراسری فراهم کند.

معرفی

کتاب

و جلد هفتم، رابطه‌های متری در چندضامیهاست. جلد‌های سوم، چهارم، پنجم، ششم و هفتم زیر چاپ است. در هریک از این مجلدها، تعریفها، قضیه‌ها و مسأله‌ها، با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده است و این نظم و ترتیب، در دیگر مجلدهای دایرةالمعارف نیز رعایت شده است. قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، هریک با ذکر تاریخچه مختصری از زمان ارائه و راه‌حلها، و شرح حال ارائه‌دهنده آنها در قسمت مربوط به خود آمده‌اند.



◀ آمادگی برای شرکت در المپیاد ریاضی ایران

مؤلف: هوشنگ شرقی

ناشر: علوم پایه

شرکت در رقابت‌های علمی از جمله المپیاد ریاضی در سالهای اخیر در کشور ما اهمیت بسزایی یافته است. کتاب حاضر به منظور پاسخگویی به نیاز جوانان علاقه‌مند رشته ریاضی و به منظور آشنایی با نوع سؤالات المپیاد ریاضی تدوین شده است. کتاب شامل شش فصل و دو ضمیمه می‌باشد. ده المپیاد آزمایشی با سؤالات پنج‌گزینه‌ای (ویژه آزمون مرحله اول)، ده المپیاد آزمایشی تشریحی (ویژه آزمون مرحله دوم)، حل مسائل المپیادهای ملی و بین‌المللی سالهای اخیر از جمله موضوعات کتاب می‌باشد. همچنین اطلاعاتی از ترکیب اعضای تیمهای شرکت‌کننده کشورمان در المپیادهای بین‌المللی در ضمیمه کتاب آمده است.

آنها را به‌خاطر سپرد. مزیت این روش، در این است که دلبستگیهای تازه‌ای نسبت به ریاضیات در شخص برمی‌انگیزاند، در او اعتماد به نفس پدید می‌آورد و او را به فراگیری موضوعی علاقه‌مند می‌کند، که امروزه در مدرسه‌ها «درسی منفور» قلمداد می‌شود. روش تراختنبرگ، اکنون پس از گذشت چندین دهه پربار و سرنوشت‌ساز در بهینه ریاضیات و آموزش آن و تکامل ابزارهای محاسبه، بیش از هر چیز، یک مهارت جنبی و دانستنی سودمند است و در عین حال، به‌خاطر سرنوشت رنج‌بار و آموختنی پدیدآورنده آن، دارای جنبه انسانی گیرا محسوب می‌شود. به همین سبب، می‌تواند در کنار کتابهای درسی، دانش‌آموزان و آموزگاران را با جلوه‌های تازه‌ای از علم حساب آشنا کند. علاوه بر آنان، عده کثیری از دانشجویان پزشکی، معماران، مهندسان و ... دریافته‌اند که به کمک روشهای آسان تراختنبرگ، می‌توانند از عهده محاسبه‌های دشوار در امتحانها برآیند. اما امروزه ریاضیات در زندگی عادی نیز نقش حیاتی روزافزونی دارد، لذا این کتاب، برای کلیه افراد در تمامی سطوح، کتابی مناسب و کاربردی است.

◀ دایرةالمعارف هندسه

تألیف: محمد هاشم رستمی

انتشارات مدرسه

دایرةالمعارف هندسه، مجموعه کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه است.

جلدهای سوم، چهارم، پنجم، ششم و هفتم این دایرةالمعارف، شامل رابطه‌های متری در هندسه مسطحه است.

جلد سوم، رابطه‌های متری مربوط به نسبت پاره‌خطها در هندسه مسطحه؛

جلد چهارم، رابطه‌های متری در دایره؛

جلد پنجم، رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر؛

جلد ششم، رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الساقین و مثلث قائم‌الزاویه، مثلث با زاویه‌های حاده و مثلث با زاویه منفرجه) و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر؛

خم پروانه



• کریم احمدی دلیر

دانشگاه تربیت معلم تبریز - گروه ریاضی

برنامه است.

به علاوه، طراحی خمهایی که شکل آنها از قبل شناخته شده نیست، هیچانی در شخص ایجاد می کند. برای مثال، خمهای توصیف شده با معادله های قطبی $P = a + b \cos(n\theta)$ و $P^2 = a + b \cos(n\theta)$ بسیار جالبتر از معادله های قطبی توصیف شده با $P = a \cos(n\theta)$ هستند. شاگردان اغلب با رفتار آنها وقتی که $a < b$ ، $a > b$ ، $a = b$ ، n زوج است، n فرد است و غیره شگفت زده می شوند. سایر خمهای گلبرگی جالبی که تعداد گلبرگهای آنها را دانش آموزان می توانند حدس بزنند، عبارتند از: معادله های $P = (\cos(n\theta) + \cos(m\theta)) / \cos(\theta)$ که در آن n و m اعداد صحیح فرد هستند. اگر یکی از دو عدد n یا m زوج باشد، خم دارای یک مجانب خواهد بود و ظاهر کاملاً متفاوتی خواهد داشت. برای مثال، خمهای سرگرم کننده به ازای $(n, m) \in \{(5, 3), (3, 5), (1, 9), (3, 2)\}$ حاصل می شوند. شاید جالبترین و زیباترین همه این خمها، خم پروانه ای با معادله

زیبایی ذاتی برخی از خمهای مسطح که اغلب مربوط به تقارن، برگها و آویزه ها، رفتار مجانبی یا حتی عدم تقارن آنهاست، بسیاری از ما را مجذوب و علاقه مند به ترسیم آنها می کند. خمهایی نظیر گلهای چند پر و نظیر آنها، ممکن است شور و شوق زیادی در شاگردان ایجاد نکنند؛ اما ترسیم خمهای پیچیده تر به کمک یک رایانه، ضمن ایجاد علاقه، اغلب، شگفتیهای همراه دارد. البته در پویایی مشاهده خمی که روی صفحه رایانه ترسیم می شود، چیز خاصی وجود دارد که کل روند را لذت بخش تر می کند.

هدف این مقاله، اشاره به این نکته است که لذت و سرگرمی قابل ملاحظه ای در طراحی خم وجود دارد که در عین حال، به طور همزمان می توان به هدفهای آموزشی مورد نظر دست یافت. طبق اصول آموزشی، پرسشهای مهم درباره جاگذاری حدود یک متغیر مستقل، طرح اندازه گامها، اندازه پنجره صفحه مونیتور همگی قبل از «فشار تکمه Run» نیاز به آدرس دهی دارد. البته مشاهداتی در مورد اندازه، تناوب، تقارن، دامنه و نظیر آنها، رابطه جدیدی را به دانش آموز القا می کند و آن به حداقل رساندن زمان اجرای

و

$x_n = P(\theta_n) \sin(\theta_n)$, $y_n = P(\theta_n) \cos(\theta_n)$
 با قرار دادن $\theta_n = \theta_{n-1} + h$ و $\theta_0 = 0$ (که در آن h اندازه گامها را به ازای $0 \leq \theta \leq 2\pi$ نشان می دهد).
 البته با تعویض سینوس و کسینوس در معادله x_n و y_n ، پروانه 90° نسبت به وضعیت عمودی دوران می کند. این مجموعه داده ها، شامل تقریباً ۱۱۵۰۰ تا ۴۲۰۰۰ نقطه است.

طرحهای زیر با اندازه گامهای :

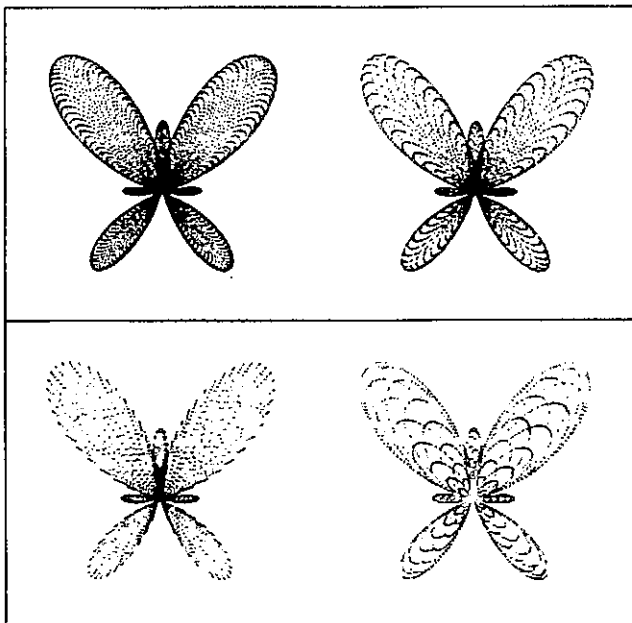
$$h_1 = 0.00015, h_2 = 0.0003,$$

$$h_3 = 0.0005, h_4 = 0.00055,$$

$$h_5 = 0.0007, h_6 = 0.00069,$$

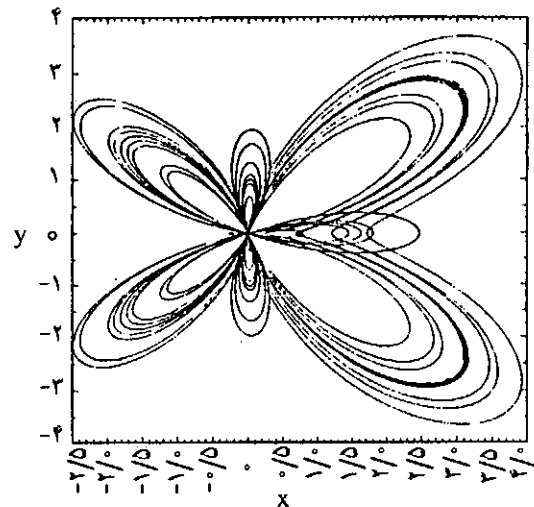
$$h_7 = 0.000711, h_8 = 0.00071$$

حاصل می شوند. تماشای پویایی طراحی نقاط پی در پی تولید شده (x_n, y_n) به خودی خود جالب است. احتمالاً دانش آموزان یا دانشجویان، از آزمودن معادله ها، مقادیر λ و اندازه های گامهای مختلف لذت خواهند برد.



$$P = e^{\cos(\theta)} - 2\cos(4\theta) + \sin^5\left(\frac{\theta}{17}\right)$$

باشد که در شکل (۱) نمایش داده شده است. جمله آخر $\sin^5\left(\frac{\theta}{17}\right)$ صرفاً جهت بالا بردن جذبه و زیبایی به آن افزوده شده است.



شکل ۱: خم پروانه $P = e^{\cos(\theta)} - 2\cos(4\theta) + \sin^5\left(\frac{\theta}{17}\right)$.

خم شبه پروانه دیگری دارای معادله $P = e^{\cos(\theta)} - 1/5\cos(4\theta)$ است که می توان با اضافه کردن جمله های دیگری نظیر بالا یا تعویض مقادیر ثابت، بر زیبایی آن افزود.

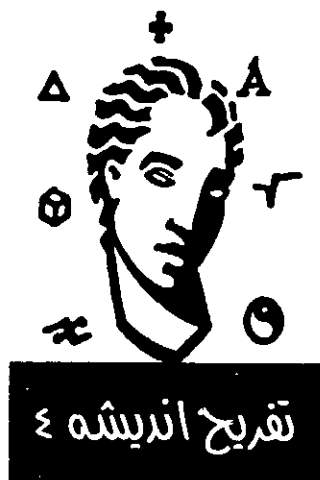
همچنین می توان مطالعه ای روی اندازه گامها انجام داد که احتمالاً این کار، دانش آموزان یا دانشجویان را شیفته خود خواهد کرد. خم پروانه، حساسیت بالایی نسبت به اندازه گامها دارد. معادله خم پروانه

$$P(\theta) = e^{\cos(\theta)} - 2\cos(4\theta)$$

را در نظر بگیرید. این خم را در عامل سینوسی متغیر سریعی مانند $(\lambda = 99999999)\sin^4(\lambda\theta)$ ضرب می کنیم. توان چهارم، برای نامنفی و کوچک نگه داشتن عامل انتخاب شده است. مقدار λ به طور اختیاری انتخاب شده است و هر عدد دلخواه بزرگ، می تواند همان اثر را داشته باشد.

مجموعه داده ها شامل نقاط (x_n, y_n) است که در آن :

$$P(\theta) = \left(e^{\cos(\theta)} - 2\cos(4\theta)\right)\sin^4(\lambda\theta)$$



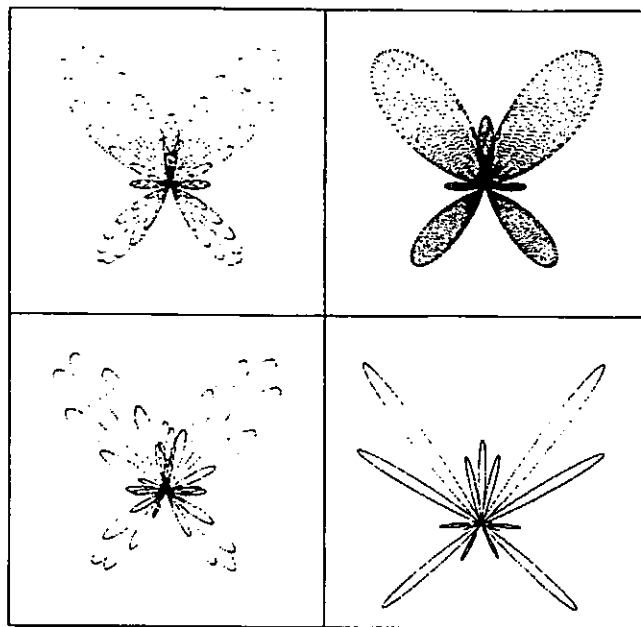
مهرداد هر روز پس از انجام کارش در ساعت مشخصی برای رفتن به حومه شهر سوار ترن می شود. در ایستگاه مقصد، خانمش با اتومبیل منتظر اوست تا با هم به منزل بروند.

یک روز مهرداد بدون اطلاع دادن به خانمش زودتر از هر روز دیگر سوار ترن می شود و پس از رسیدن به ایستگاه پیاده به طرف خانه اش به راه می افتد. بین راه خانمش را می بیند، ولی متأسفانه خانمش او را نمی بیند، و گر نه مهرداد می توانست ۲۰ دقیقه زودتر از همیشه به منزل برسد. مهرداد ۲۵ دقیقه دیگر به راه رفتن ادامه می دهد. در این لحظه خانمش که او را در ایستگاه نمی بیند فوراً برمی گردد و او را سوار می کند و با هم در همان وقت هر روز به خانه می رسند.

فرض می کنیم که خانم مهرداد در رفت و برگشت با سرعت ثابتی رانندگی کرده است و از زمانهای تلف شده مانند سوار شدن به قطار و سوار شدن به اتومبیل هم صرف نظر کنیم. در این صورت تعیین کنید مهرداد چند ساعت زودتر از هر روز سوار ترن شده است (یا ترنی که آن روز مهرداد سوار آن شده است، چند ساعت زودتر از ترنی که هر روز سوار می شده، حرکت کرده است).

• از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکبور

جواب در صفحه ۸۸



مراجع:

1. T.H. Fay and E.A. o'Neal, Counting the petals of rose carves, Math. and Computer Ed., 17 (1983) 24 - 29.
2. T.H. Fay, Asymptotes in polar coordinates, Math. and Computer Ed., 20 (1986) 19 - 31.
3. T.H. Fay, The butterfly curve, Am. Math. Monthly 96 (1989) 442 - 443.
4. T.H. Fay, A study in step size, Math. Magazine, 70 (1997) 116 - 117.

نام تعدادی از خوانندگان محترم مجله ریاضی برهان
که برای ما نامه ارسال کرده اند:

آقایان: فرزاد زمانی نژاد (تهران)، علیرضا محقق (تهران)،
حسین عرب عامری (شاهرود)، محسن شجاعی پور (کازرون)،
ابوذر بازیاری (کازرون)، بابک عقیلی (گرگان)، حنیف احمدی
(رشت)، سیدنواب صالحی (فرخ شهر)، فرزاد دولت علیزاده
(دزفول)، حسین نوری (خلخال)، آریا جمشیدی (تهران)،
ابوالفضل کریمانی (ملارد کرج)، علی اصغر صفوی (گرگان) و
خانم ها: مریم گودرزی (بروجرد) و پریسا رحمانی (فولادشهر
اصفهان).

از همه شما عزیزان برای ارسال مقاله های درسی، کمک درسی
و مسائل همراه با حل، سپاسگزاریم. در صورت امکان، از این
مسئله ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه ای مجله استفاده
خواهیم کرد و مقاله های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه،
چاپ خواهیم کرد.

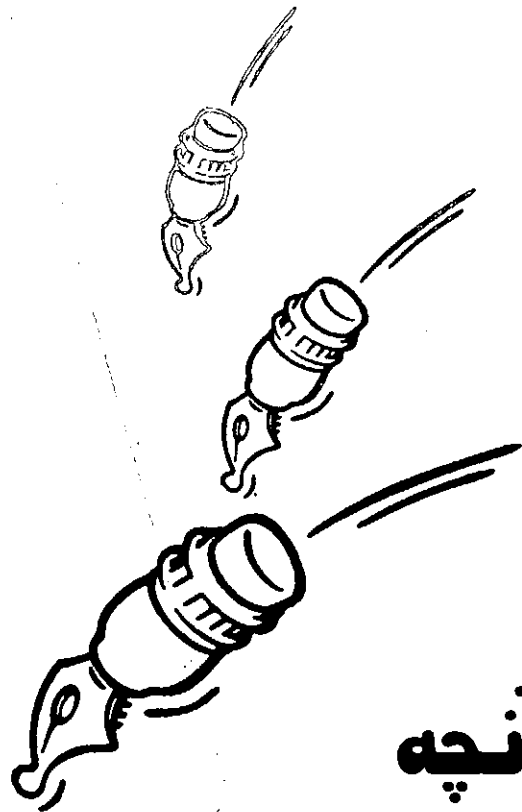
آقای سجاد پوررحیمی آذر (تبریز) از پیشنهادهای سازنده شما
سپاسگزاریم. همان طور که در این شماره ملاحظه می کنید،
پرسشهای چهارگزینه ای آمده است، ان شاء... از این پس، در
هر شماره مجله، پرسشهای چهارگزینه ای خواهیم داشت.

سرکار خانم م. ف (دانش آموز از مشهد مقدس) کتاب کوچک
ریاضی «عبارتهای جبری» چاپ شده و کتابهای «نابرابریها و
نامعادله ها» و «تقارن در جبر»، بزودی منتشر می شود. ان شاء...
این کتابها بتواند پاسخگوی سؤالهای شما در این زمینه ها باشد.

همکار محترم جناب آقای تیمور رضایی، فرهنگ و
دایرة المعارف ریاضی دبیرستان، از طرف انتشارات مدرسه بزودی
منتشر خواهد شد. ان شاء... این کتاب بتواند مشکلات
علاقه مندان به ریاضی را برطرف کند.

جناب آقای مهندس حسین نوری، مقاله های ارسالی شما
می تواند چند شماره باشد و موضوع مقاله می تواند جزو سرفصلهای
درسهای دبیرستانی باشد و همچنین موضوع مقاله می تواند ارتباطی
با سرفصلهای مطالب کتابهای ریاضی دبیرستان و پیش دانشگاهی
داشته باشد.

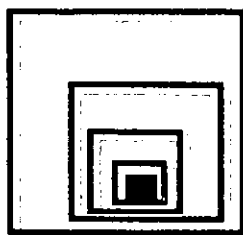
همکار محترم جناب آقای رسول کردی (باغ ملک خوزستان)
از شما به خاطر ارسال مسائل با حل، متشکریم. از آن جا که مسائل



آنچه از دوست رسد ...

با عرض سلام، خدمت همه دانش آموزان و خوانندگان مجله
ریاضی برهان

نامه ها و مقاله های پرمحتوا و ارزشمند شما به دستمان رسید!
خداوند بزرگ را بسیار شاکر و سپاسگزاریم که توفیق خدمت به
شما عزیزان را به ما ارزانی داشته است. پیش از هر چیز، باید از
راهنماییها و پیشنهادهای سازنده شما عزیزان، به خاطر بالا بردن
کیفیت مجله قدردانی و تشکر کنیم. هیأت تحریریه مجله، با چاپ
پرسشهای چهارگزینه موافقت کردند و از این پس، در هر شماره
مجله، می توانید علاوه بر بخش مسائل برای حل، شاهد بخشی با
نام پرسشهای چهارگزینه ای باشید که این پرسشها، کلیه کتابهای
ریاضی دبیرستان و دوره پیش دانشگاهی را پوشش می دهد.



مسئله مسابقه‌ای

مثلث ABC را که دارای زاویه‌های حاده است، در نظر می‌گیریم. نیمساز داخلی زاویه A را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطه L و دایره محیطی مثلث را در نقطه N قطع کند. از L عمودهایی بر ضلعهای AB و AC رسم می‌کنیم و پای دو عمود را K و M می‌نامیم؛ ثابت کنید مساحت چهارضلعی $AKNM$ با مساحت مثلث ABC برابر است.



حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۲۶

۱- به هر مهره آبی، یک مهره سفید می‌چسبانیم. در این صورت، ۵ مهره سفید و ۶ مهره آبی - سفید داریم و می‌خواهیم آنها را در یک ردیف، از راست به چپ قرار دهیم، که هر حالت قرار گرفتن این ۱۱ مهره، متناظر است با یک حالت چین مهره‌ها که پس از هر مهره آبی، لااقل یک مهره سفید واقع شده باشد و چون ۵ مهره سفید مثل هم و ۶ مهره آبی - سفید نیز مثل هم هستند، با توجه به فرمول تبدیل با تکرار، تعداد کل این حالتها برابر است با:

$$\frac{11!}{5! \times 6!} = 462$$

ارسالی شما می‌تواند مورد استفاده دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین، یکی از آنها را با راه حل آورده‌ایم:

دستگاه معادله‌های گنگ $\begin{cases} \sqrt{x} + y = 7 \\ x + \sqrt{y} = 11 \end{cases}$ ، $(x, y > 0)$ را حل کنید.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 7 \\ x + \sqrt{y} = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 4 - y \\ x - 9 = 2 - \sqrt{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = (2 - \sqrt{y})(2 + \sqrt{y}) \\ (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) = (2 - \sqrt{y}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 3 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)(2 + \sqrt{y})$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 3 = [1 - (\sqrt{x} + 3)(2 + \sqrt{y})] = 0$$

چون $(\sqrt{x} + 3)(2 + \sqrt{y}) > 1$ بنابراین داریم:

$$\sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow y = 4$$

آقای رسول رُشدی (تهران)، از ارسال مقاله، طرح جلد و مسائل، سپاسگزاریم. از آن‌جا که مطلب شما دربارهٔ شگفتیهای اعداد، می‌تواند مورد استفادهٔ علاقه‌مندان به ریاضی قرار گیرد، آن را در زیر می‌آوریم و بقیهٔ مطالب ارسالی جنابعالی، در صورت تصویب در هیأت تحریریه چاپ خواهد شد.

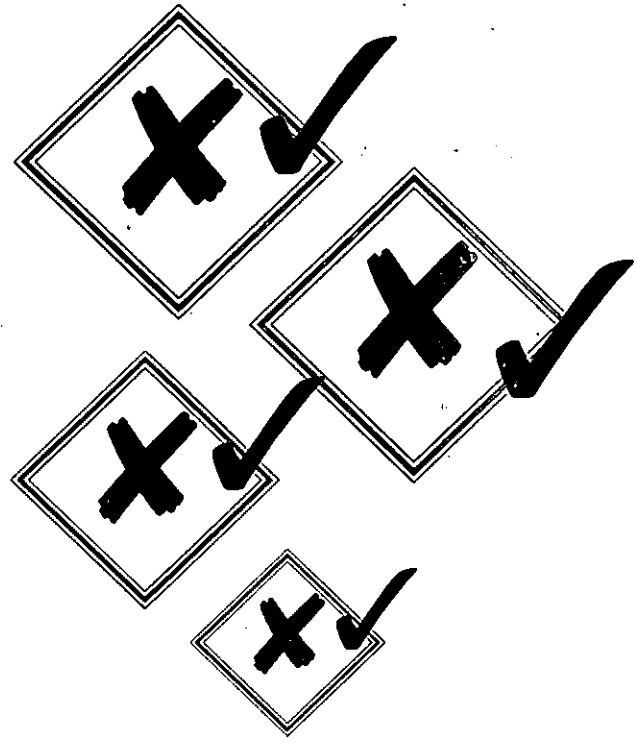
شگفتیهای اعداد

$$\begin{aligned} 123456789 \times 9 \times 1 &= 111111111 \\ 123456789 \times 9 \times 2 &= 222222222 \\ 123456789 \times 9 \times 3 &= 333333333 \\ 123456789 \times 9 \times 4 &= 444444444 \\ &\vdots \\ 123456789 \times 9 \times 9 &= 999999999 \end{aligned}$$



پرسشهای چهار گزینه ای

- ☐ احمد قندهاری
- ☐ محمد هاشم رستمی
- ☐ حمید رضا امیری
- ☐ میر شهرام صدر
- ☐ سید محمد رضا هاشمی موسوی



۴. نیمسازهای زاویه های درونی یک دوزنقه متساوی الساقین، کدام چهار ضلعی را می سازند؟

- (۱) تنها محاطی
 - (۲) تنها محیطی
 - (۳) غیر محاطی و غیر محیطی
 - (۴) محاطی و محیطی
۵. طول وتر نظیر کمان درخورد زاویه 60° درجه در یک دایره، برابر ۲۴ سانتیمتر است. اندازه شعاع این دایره چند سانتیمتر است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$
 - (۲) $4\sqrt{3}$
 - (۳) $6\sqrt{3}$
 - (۴) $8\sqrt{3}$
۶. اندازه خط المکزین دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O', 3)$ برابر ۱۰ است. نسبت اندازه های مماس مشترک برونی و مماس مشترک درونی این دو دایره چند است؟

- (۱) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$
 - (۲) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
 - (۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 - (۴) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
۷. در مثلث قائم الزاویه، طول دو ضلع زاویه قائمه $2\sqrt{3}$ و ۶ سانتیمتر است. اندازه شعاع دایره محاطی درونی این مثلث، چه قدر است؟

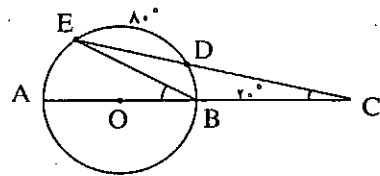
- (۱) $3 - \sqrt{3}$
 - (۲) $4 - \sqrt{3}$
 - (۳) $2 - 2\sqrt{3}$
 - (۴) $5 - \sqrt{3}$
۸. نقطه های $A = (-1, 1)$ ، $B = (3, 1)$ ، $C = (3, 5)$ و $D = (-1, 5)$ رأسهای یک مربعند. اگر نقطه های A' ، B' ، C' و D' بترتیب تبدیل یافته های نقطه های A ، B ، C و D در دوران $R(x, y) = (y, -x)$ باشند، اندازه مساحت $A'B'C'D'$

❖ هندسه ۲

۱. شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه های درونی یک مستطیل کدام شکل است؟

- (۱) مربع
 - (۲) مستطیل
 - (۳) لوزی
 - (۴) متوازی الاضلاع
۲. مکان هندسی نقطه ای در درون یک مکعب که از دو وجه مقابل آن به یک فاصله است، کدام است؟
- (۱) صفحه ای عمود بر آن دو وجه
 - (۲) یک خط موازی آن دو وجه
 - (۳) صفحه ای موازی آن دو وجه
 - (۴) تنها یک نقطه

۳. در شکل زیر $\hat{C} = 20^\circ$ و $\widehat{ED} = 80^\circ$ و O مرکز دایره است. زاویه ABE چند درجه است؟



- (۱) ۲۵
- (۲) ۳۵
- (۳) ۴۵
- (۴) ۷۵

چه قدر است؟

۱۵. اگر $f(x+2) = \frac{x+4}{x}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۶. اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin kx \sin 2kx}{6x^3} = 3$ باشد، k برابر است

با:

- (۱) ۳+ (۲) ۳و- (۳) ۲و+ (۴) ۳و-

۱۷. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x > -3 \\ 13, & x = -3 \\ 2ax^2 + bx - 2, & x < -3 \end{cases}$ در نقطه $x = -3$ پیوسته باشد، $a+b$ چه قدر است؟

- (۱) -۳۳ (۲) ۳۳ (۳) ۲۲ (۴) -۲۲

۱۸. حدود a برای آن که تابع $f(x) = \begin{cases} -2x+a, & x \geq 1 \\ x^2+3x, & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته نباشد، کدام است؟

- (۱) $a \neq 3$ (۲) $a \neq 4$ (۳) $a \neq 5$ (۴) $a \neq 6$

۱۹. اگر $f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$ باشد، آن گاه $f'(4)$ چند است؟

- (۱) ۱۸ (۲) $+\frac{1}{36}$ (۳) $-\frac{1}{36}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۲۰. اگر $A = (-2, -7)$ نقطه ماکزیم یا می نیم تابع $f(x) = ax^2 + bx - 3$ باشد، $2a-b$ چه قدر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۴

❖ حسابان ۲

۲۱. زاویه بین دو نیم مماس بر منحنی به معادله

 $f(x) = |\sin x|$ در نقطه $x_0 = 0$ کدام است؟

- (۱) 60° (۲) 120° (۳) 90° (۴) 45°

۲۲. در تابع به معادله $f(x) = |4 - x\sqrt{x}|$ ، $f'(1) + f'(9)$ برابر

است با:

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{6}$

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴) ۲

۹. تحت یک بازتاب نقطه $M(3, -1)$ روی نقطه $M'(1, 1)$

تصویر می شود. معادله محور تقارن این بازتاب کدام است؟

- (۱) $y = x+2$ (۲) $y = x-2$

- (۳) $y = -x+2$ (۴) $y = -x-2$

۱۰. کدام گزاره نادرست است؟

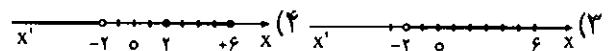
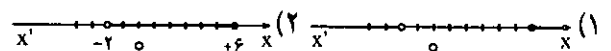
(۱) دو خط متمایز عمود بر یک صفحه، باهم موازیند.

(۲) دو صفحه متمایز عمود بر یک خط، باهم موازیند.

(۳) دو خط متمایز موازی یک خط، همواره باهم موازیند.

(۴) دو خط متمایز موازی یک صفحه، همواره باهم موازیند.

❖ ریاضی ۵

۱۱. جواب نامعادله $2 \leq \frac{x}{y} - 1 < 2$ کدام نمودار است؟۱۲. اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}+x, & x \geq 1 \\ \sqrt{2}-x, & x < 1 \end{cases}$ باشد، $ff(-2)$ چقدر

است؟

- (۱) $\sqrt{2}+2$ (۲) $2\sqrt{2}+1$ (۳) $\sqrt{2}+1$ (۴) $2\sqrt{2}+2$

۱۳. اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ باشد، $f(x)f(-\frac{1}{x})$ کدام مقدار

است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۴. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} (a+1)x+3, & x > -2 \\ -2x^2+1, & x < -2 \end{cases}$ وقتی $x \rightarrow -2$ دارای حد

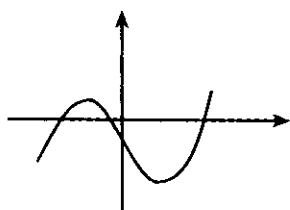
است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

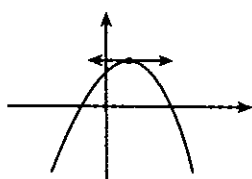
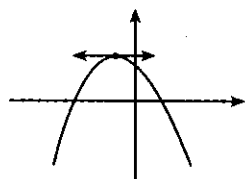
به معادله $y = 2x - 9$ چه قدر است؟

(۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{5}$

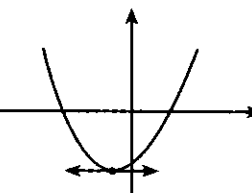
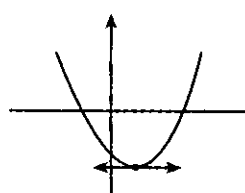
۳۲. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، آن گاه نمودار تابع f' کدام است؟



(۲) (۱)



(۴) (۳)



۳۳. اگر $y = \int_1^x e^{t^2} dt$ ، آن گاه عبارت $(y'' + 2y')$ کدام است؟

(۱) $2e^{2x}$ (۲) $3e^{2x}$ (۳) $4e^{2x}$ (۴) $\frac{e^{2x}}{4}$

۳۴. حاصل $\int_{-1}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ برابر است با:

(۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۳۵. اگر $\int (x^2 - 2x - 1)e^x = (mx^2 + nx + k)e^x$ ، آن گاه $(4m + 3n + 2k)$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۳

۲۳. اگر در تابع f داشته باشیم $f'(27) = 12$ ، آن گاه مشتق تابع به معادله $y = f(x\sqrt{x})$ در $x = 9$ کدام است؟

(۱) ۳۴ (۲) ۴۴ (۳) ۵۴ (۴) ۶۴

۲۴. تابع به معادله $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ در بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

(۱) یک نقطه (۲) دو نقطه (۳) سه نقطه (۴) چهار نقطه

۲۵. در تابع به معادله $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$ ، کدام نتیجه درست است؟

(۱) اگر $x > 0$ تابع صعودی اکید است.

(۲) اگر $x < 0$ تابع نزولی اکید است.

(۳) تابع در R صعودی اکید است.

(۴) تابع در R نزولی اکید است.

۲۶. در تابع به معادله $f(x) = -(x-5)^{2n}$ ، $x = 5$ ، $n \in N$ ،

طول نقطه:

(۱) ماکزیمم است (۲) می نیمم است

(۳) عطف است (۴) زاویه دار است

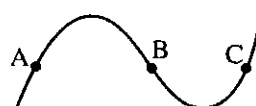
۲۷. در تابع به معادله $f(x) = (x+3)^{n+1}$ ، $n \in N$ ،

$x = -3$ طول نقطه:

(۱) ماکزیمم است (۲) می نیمم است

(۳) عطف است (۴) زاویه دار است

۲۸. تابع f به صورت شکل زیر است، کدام نتیجه درست است؟



(۱) در نقطه A $f'' < 0$ و $f' > 0$

(۲) در نقطه B $f'' > 0$ و $f' < 0$

(۳) در نقطه C $f'' > 0$ و $f' > 0$

(۴) در نقطه B $f'' < 0$ و $f' > 0$

۲۹. اگر در تابع به معادله $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ نقطه F ،

نقطه عطف باشد، $(a-b)$ برابر است با:

(۱) -۵ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) -۴

۳۰. کدام یک از تابعهای به معادله های زیر متناوبند.

(۱) $\sqrt{\sin 2x}$ (۲) $\sin \sqrt{x}$ (۳) $\cos \frac{1}{x}$ (۴) $\tan \frac{1}{x}$

۳۱. نزدیکترین فاصله منحنی به معادله $y = x^2 - 2x$ از خط

❖ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

(۱) تابع f صعودی اکید است.

(۲) تابع f نزولی اکید است.

(۳) تابع f صعودی است.

(۴) تابع f نزولی است.

۴۲. بخشی از جدول رفتار تابع به معادله $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

در بازه $[-\pi, \pi]$ به صورت

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
f'		-	+	-
f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

است، آن گاه می توان گفت :

(۱) این تابع، یک ماکزیمم نسبی و یک می نیمم نسبی دارد.

(۲) این تابع، اکسترمم نسبی ندارد.

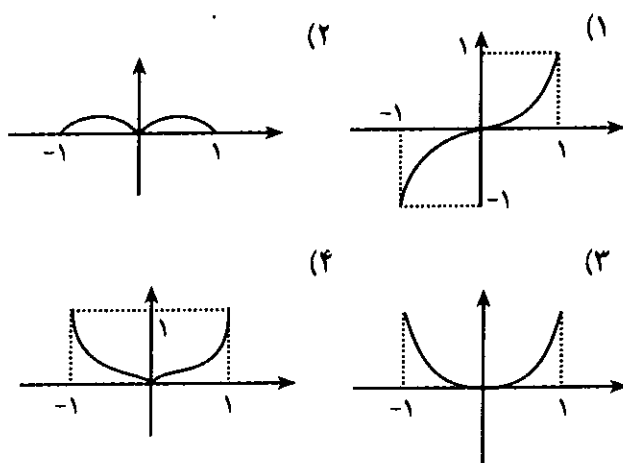
(۳) این تابع، بی شمار ماکزیمم نسبی و بی شمار می نیمم نسبی دارد.

(۴) این تابع، بی شمار ماکزیمم نسبی دارد

۴۳. مقدار ماکزیمم تابع به معادله $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ چه قدر است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۴۴. نمودار تابع به معادله $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ کدام است؟



۴۵. در تابع به معادله $f(x) = x^2 + 2x$ در نقطه $x = 1$ و $dx = 0/1$ خطا برابر است با :

(۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{1}{20}$ (۳) $\frac{1}{50}$ (۴) $\frac{1}{100}$

۳۶. در تابع به معادله $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 12\sqrt{3}}{\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + 12}$ چند

ماکزیمم نسبی و چند می نیمم نسبی وجود دارد؟

(۱) یک ماکزیمم نسبی و یک می نیمم نسبی.

(۲) دو ماکزیمم نسبی و دو می نیمم نسبی.

(۳) ماکزیمم نسبی یا می نیمم نسبی ندارد.

(۴) بی شمار ماکزیمم نسبی و بی شمار می نیمم نسبی دارد.

۳۷. اگر در تابع f ، $x = a$ طول نقطه اکسترمم نسبی باشد

شرط $f'(a) = 0$:

(۱) شرط لازم است. (۲) شرط کافی است.

(۳) شرط لازم و کافی است. (۴) نه لازم است و نه کافی.

۳۸. تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ در بازه $[-2, 2]$ چند

نقطه بحرانی دارد؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۳۹. اگر تابع به معادله $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 3 \\ ax + b & x < 3 \end{cases}$ در $x = 3$

مشتق داشته باشد، a و b کدامند؟

(۱) $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} a = 6 \\ b = -3 \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} a = -6 \\ b = -3 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} a = -6 \\ b = 3 \end{cases}$

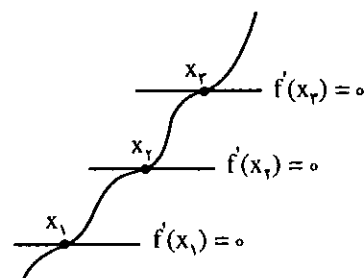
۴۰. در تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3$ چند عدد C

بنا به قضیه مقدار میانگین در بازه $[0, 3]$ وجود دارد؟

(۱) یک عدد (۲) دو عدد (۳) سه عدد (۴) هیچ عدد

۴۱. تابع f به صورت شکل زیر است. کدام نتیجه درست و

کامل است؟



است؟

۴۶. معادله $x^3 - 3x - 1 = 0$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) صفر

۴۷. اگر $f(a) = 10$ و $f'(a) = -8$ ، آن گاه $f(a + \frac{1}{10})$ تقریباً

برابر است با:

(۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{9}{6}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{9}{2}$ ۴۸. حاصل $\int \frac{4dx}{4+e^x}$ برابر است با:(۱) $x + \ln(4+e^x) + c$ (۲) $x - \ln(4+e^x) + c$ (۳) $e^x + \ln(4+e^x) + c$ (۴) $e^x - \ln(4+e^x) + c$ ۴۹. مقدار متوسط $\int_1^3 (x + \frac{1}{x}) dx$ برابر است با:(۱) $2 + \frac{\ln(3)}{2}$ (۲) $4 + \frac{\ln(3)}{3}$ (۳) $3 + \frac{\ln(3)}{2}$ (۴) $4 + \frac{\ln(3)}{2}$ ۵۰. تابع به معادله $f(x) = x^2$ را در بازه $[1, 3]$ در نظر

می گیریم. اگر این بازه را به چهار زیربازه مساوی افراز کنیم،

مجموع پایین ریمان تابع کدام است؟

(۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{23}{4}$ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) $\frac{27}{4}$

❖ ریاضی عمومی ۲

۵۱. ماکزیم مقدار تابع با ضابطه $y = \frac{1 - \sin x}{1 - 2 \sin x}$ در فاصله $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ کدام است؟(۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۲. چند خط با ضریب زاویه ۲ می توان بر منحنی به معادله

 $2x^2 - y^2 = 1$ مماس رسم کرد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی شمار

۵۳. اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و $x + 2y = 8$ ، آن گاهماکزیم xy کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۵۴. مکان هندسی نقطه M کدام مقطع مخروطی $\left| \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha - 1} \right|$

(۱) بیضی (۲) دایره (۳) سهمی (۴) هذلولی

۵۵. خروج از مرکز بیضی به معادله $y^2 + 4x^2 - 8x - 28 = 0$

کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۵۶. دو دایره به معادله های $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ و $(x-5)^2 + (y-7)^2 = 1$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(۱) متخارج (۲) متداخل

(۳) مماس خارج (۴) مماس داخل

۵۷. معادله های مجانبهای هذلولی به معادله

 $9x^2 - 4y^2 - 16y = 52$ کدام است؟(۱) $3x = \pm 2y - 4$ (۲) $2y = \pm 3x - 4$ (۳) $2x = \pm 3y - 4$ (۴) $3y = \pm 2x - 4$ ۵۸. اگر $\int_0^{\frac{\pi}{2}} k \sin \frac{kx}{2} dx = \frac{1}{2}$ ، آن گاه مقدار k چه قدر است؟(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۵۹. سطح محصور بین منحنی به معادله

 $x^2 + 4y^2 + 16y - 20 = 0$ را حول محور y ها دوران می دهیم،

حجم جسم حادث کدام است؟

(۱) 24π (۲) 36π (۳) 72π (۴) 144π ۶۰. اگر مقدار متوسط تابع با ضابطه $f(x) = m + mx$ درفاصله $[-m, m]$ برابر ۱ باشد، m کدام است؟ ($m \neq 0$)(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

❖ جبر خطی

۶۱. اگر $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی و پوشا باشد و f^{-1} نگاشت وارون آن باشد، کدام گزینه نادرست است؟ (ماتریسنگاشت خطی f را $\bar{A}$ می نامیم.)(۱) f^{-1} یک به یک است.(۲) $|A| \neq 0$ (۳) $f^{-1}(kx) = \frac{1}{k} f^{-1}(x)$ (۴) ماتریسی چون $B_{n \times n}$ می توان یافت که $AB = I_n$

۶۲. کدام گزینه نادرست است؟
 $AX = \vec{0}$ فقط دارای جواب صفر باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) f یک به یک است $f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$ هسته f

(۲) f هسته $f^{-1} = \emptyset$

(۳) f هسته $f^{-1} = \{\vec{0}\}$

۶۶. اگر $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه برای نگاشت خطی f با ماتریس A باشد و (-3) مقدار ویژه نظیر آن باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(۲) $A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

(۳) $A \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \end{bmatrix}$

(۴) $A \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \end{bmatrix}$

۶۷. اگر $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ معادله مشخصه نگاشت خطی f با ماتریس A باشد، در این صورت (A^{-1}) کدام است؟

(۱) $(A - 2I)$ (۲) $(A + 2I)$ (۳) $(A - I)$ (۴) $(A + I)$

۶۸. اگر λ یک مقدار ویژه برای نگاشت f باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) λ^{-1} یک مقدار ویژه A^{-1} است.

(۲) λ^3 یک مقدار ویژه A^3 است.

(۳) λ^2 یک مقدار ویژه fof است.

(۴) 2λ یک مقدار ویژه $2A$ است.

۶۹. اگر ۲ و -۱ و -۳ مقادیر ویژه ماتریس A وابسته به نگاشت $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ باشند، در این صورت کدام ماتریس می تواند وارون پذیر باشد؟

(۱) $(A - 2I)$ (۲) $(A + 3I)$ (۳) $(A + I)$ (۴) $(A - I)$

۷۰. اگر ۲ و -۴ مقادیر ویژه نگاشت $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y) = (mx - y, nx + 2y)$ باشند، حاصل $(n - 2m)$ کدام است؟

(۱) -۸ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) -۴

۷۱. اگر $|A| = 3$ و A ماتریسی 2×2 باشد در این صورت حاصل $||A|A|$ کدام است؟

(۱) ۲۷ (۲) ۹ (۳) ۸۱ (۴) ۲۴۳

(۱) اگر $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی و یک به یک باشد آنگاه، تابع ثابت $fof^{-1} = f^{-1}of = f$

(۲) اگر $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی و A ماتریس f باشد و $|A| \neq 0$ آنگاه f وارون پذیر است.

(۳) اگر $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی و یک به یک باشد و A ماتریس f و B ماتریس f^{-1} آنگاه $B^{-1}A^{-1} = I$.

(۴) اگر $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی و پوشا باشد و A ماتریس f باشد آنگاه $|A^{-1}| \neq 0$.

۶۳. اگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y) = (x + y, x + 2y)$ نگاشتی خطی باشد، f^{-1} کدام است؟

(۱) $\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f^{-1}(x, y) = (2x + y, -x + y) \end{cases}$

(۲) $\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f^{-1}(x, y) = (2x - y, -x + y) \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f^{-1}(x, y) = (-2x + y, x - y) \end{cases}$

(۴) $\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f^{-1}(x, y) = (-2x + y, -x - y) \end{cases}$

۶۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل AA^*

کدام است؟ (A^* ماتریس الحاقی A است.)

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

(۴) $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

۶۵. اگر $A_{n \times n}$ ماتریس نگاشت خطی f باشد و دستگاه همگون

هندسه ۱

۱. گزینه (۴) درست است: زیرا مثلث AEF متساوی الساقین و زاویه رأس آن $\widehat{EAF} = 36^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 60^\circ) = 150^\circ$ است.

بنابراین $\widehat{AEF} = 15^\circ$ و متمم آن 75° است.

۲. گزینه (۲) جواب است: زیرا مثلثهای STU و QRS متساوی الساقین و مجموع زاویه‌های رأسهای آن، دو برابر 90° است. بنابراین:

$$\widehat{RSQ} + \widehat{UST} = 36^\circ - 9^\circ = 27^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{RSQ} + \widehat{UST} = 135^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{QSU} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

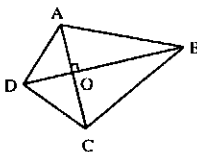
۳. گزینه (۲) درست است. راه اول: اگر اندازه قطرهای یک چهارضلعی محدب d و d' و زاویه بین دو قطر برابر α باشد، مساحت چهارضلعی برابر $\frac{1}{2}dd'\sin\alpha$ است. در این چهارضلعی $\alpha = 90^\circ$ است: بنابراین مساحت آن برابر است با:

$$\frac{1}{2}dd'\sin 90^\circ = \frac{1}{2}d \cdot d' \times 1 = \frac{1}{2}dd'$$

راه دوم: اگر نقطه برخورد دو قطر چهارضلعی را O بنامیم، داریم:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AO + \frac{1}{2}BD \cdot OC$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD(AO + OC) = \frac{1}{2}BD \cdot AC$$



۴. گزینه (۴) جواب است: زیرا مثلث CDE متساوی الاضلاع به ضلع ۱۲cm است: پس $DE = 12\text{cm}$ است و در مثلث قائم الزاویه ADP، $AD = 8\text{cm}$ و $\widehat{A} = 60^\circ$ است. بنابراین:

$DP = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\text{cm}$ است: پس در مثلث قائم الزاویه DPE،

$$PE = \sqrt{DE^2 + DP^2} = \sqrt{144 + 48} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$

۵. گزینه (۱) درست است: زیرا اگر نسبت تشابه دو مثلث را k فرض کنیم، داریم:

$$\frac{S}{S'} = k^2 = a^2 + 3, \quad \frac{1P}{1P'} = k = a + 1$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 = a^2 + 3 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

۶. گزینه (۳) جواب است: زیرا اگر قطر مکعب $\sqrt{2}$ برابر شود، ضلع آن نیز $\sqrt{2}$ برابر خواهد شد. بنابراین، اگر a ضلع مکعب نخست و a' ضلع مکعب بعدی باشد، $a' = a\sqrt{2}$ و در نتیجه $a'^2 = 2\sqrt{2}a^2$ ؛ یعنی $V' = 2\sqrt{2}V$ است.

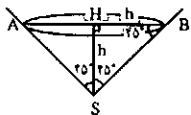
۷. گزینه (۲) درست است: زیرا ارتفاع منشور، برابر است

با: $12 \times \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}\text{cm}$ ، و مساحت قاعده آن، برابر $8 \times 8 = 64\text{cm}^2$ است. بنابراین:

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم منشور مایل}$$

$$= 64 \times 6\sqrt{3} = 384\sqrt{3}\text{cm}^3$$

۸. گزینه (۴) جواب است: زیرا ارتفاع مخروط ایجاد شده، با شعاع قاعده آن برابر است. بنابراین، اگر ارتفاع آب را h فرض کنیم، شعاع قاعده آن نیز h خواهد بود. بنابراین داریم:



$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{حجم مخروط}$$

$$\Rightarrow 72\pi = \frac{1}{3} \times \pi h^2 \cdot h \Rightarrow \pi h^3 = 216\pi$$

$$\Rightarrow h^3 = 216 \Rightarrow h = 6$$

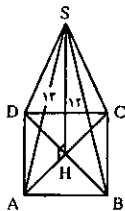
۹. گزینه (۱) درست است: زیرا داریم:

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow 36\pi = 4\pi R^2 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3\text{cm}$$

$$\Rightarrow \text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi (3)^3 = 36\pi$$

$$\Rightarrow \text{حجم نیمکره} = 18\pi\text{cm}^3$$

۱۰. گزینه (۲) درست است: زیرا اگر ارتفاع SH و SA یک پال این هرم منتظم باشد، داریم:



$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$$

$$\Rightarrow \text{قطر مربع} = AC = 10 = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{ضلع مربع} = 5\sqrt{2}\text{cm}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت قاعده} = a^2 = 50\text{cm}^2$$

ریاضیات گسسته پیش‌دانشگاهی

۱۱. گزینه (۳) صحیح است (با توجه به تعریف گرافهای جهت‌دار برای رابطه‌ها).

۱۲. گزینه (۲) صحیح است (با توجه به تعریف ماتریس برای

پاسخ پرسشهای

چهارگزینه‌ای

برهان ۲۷

گرافهای جهت دار).

۱۳. گزینه (۴) صحیح است. روی رأس C طوفه نداریم پس R انعکاسی نیست، و R متقارن هم نیست: زیرا مثلاً $(a, b) \in R$ ولی $(b, a) \notin R$ (از رأس b به رأس a پیکانی رسم نشده است) و همچنین R تراپایی نیست: زیرا به طور مثال $(a, d) \in R$ و $(d, c) \in R$ ولی $(a, c) \notin R$.

۱۴. گزینه (۲) صحیح است: زیرا تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

۱۵. گزینه (۴) صحیح است: زیرا هر جمله از بسط عبارت $(a+b+c+d)^9$ جمله‌ای به صورت $a^x b^y c^z d^t$ می‌باشد که مجموع توانها باید ۹ باشد، یعنی $x+y+z+t=9$ و t, z, y, x اعداد صحیح و نامنفی می‌باشند (صفر هم می‌توانند باشند) و تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله فوق برابر است با $\binom{9+4-1}{4-1}$.

۱۶. گزینه (۳) صحیح است: زیرا فضای نمونه‌ای برابر است با m^n (برای هر کدام از m ظرف n راه انتخاب داریم) و باید به $\binom{n}{k}$ طریق k مهره را از بین n مهره انتخاب کرده و $(n-k)$ مهره باقی را در $(m-1)^{n-k}$ ظرف به $(m-1)^{n-k}$ طریق قرار دهیم.

۱۷. گزینه (۳) صحیح است: زیرا طبق قاعده بیز داریم:
 $P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$
 $\Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \times P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{5}{24}$
۱۸. گزینه (۳) صحیح است: زیرا احتمال شرطی بوده و فضای نمونه برای این که مهره سیاه باشد ۸ است و اگر بخواهد از کیسه B باشد احتمال آن $\frac{5}{8}$ است.

۱۹. گزینه (۳) صحیح است: زیرا:
 $P(T) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(H) = \frac{1}{3}$
احتمال آنکه دقیقاً ۴ بار H بیاید
 $\left(\frac{5}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{3^5} = \frac{10}{3^5}$
۲۰. گزینه (۱) صحیح است: زیرا:

$\sum \text{deg } V_i = 2q = 2|E| \Rightarrow |E| = |V|$
 $\Rightarrow \sum |V_i| = |E| + 8 \Rightarrow \sum |V_i| = |V| + 8$
 $|V| = 8, |E| = 16$

۲۱. گزینه (۱) صحیح است: زیرا:
 $p = q + 1 \Rightarrow 14 = q + 1 \Rightarrow q = 13$
پس باید از ۲۲ بال ۹ یال را حذف کنیم تا تعداد یالها به ۱۳ برسد.
۲۲. گزینه (۳) صحیح است: زیرا:

$(2, 3) = 1 \Rightarrow (2^5, 3^m) = 1 \Rightarrow [(2^5, 3^m), (3^m, 6^m)]$
 $= [(1, 3^m, 6^m)] = (3^m, 6^m), 3^m | 6^m$
 $\Rightarrow (3^m, 6^m) = 3^m$

۲۳. گزینه (۲) صحیح است: زیرا:
 $(5, 7) = 1 \xrightarrow{\text{تقسیم فرما}} 5^7 \equiv 1 \Rightarrow (5^6)^{12} \equiv 1 \Rightarrow 5^{120} \equiv 1$
 $\Rightarrow 5^{120} - 1 = 5^6 - 1 = R = 1$

۲۴. گزینه (۲) صحیح است: زیرا شرط لازم و کافی برای آن که معادله $mx + m^1y = k$ دارای جواب باشند آن است که $k | (m, m^1)$ و چون $(m, m^1) = |m|$ پس باید $|m| | k$ در نتیجه $(m, k) = |m|$.

جبر و احتمال

۲۵. گزینه (۳): زیرا اگر دایره مثلثاتی را به چهار ناحیه تقسیم کنیم، وقتی ۵ نقطه روی محیط آن در نظر می‌گیریم، طبق اصل لانه کیوتری، حداقل دو نقطه درون یک ناحیه قرار می‌گیرند.
۲۶. گزینه (۱): زیرا:

$$A = \{3, 4, \dots, k-6, k-5, k-4, k-3\}$$

$$\Rightarrow A - B = \{k-5, k-4, k-3\}$$

۲۷. گزینه (۴): زیرا ضرب دکارتی دو مجموعه A و B وقتی خاصیت جابه‌جایی دارد، که داشته باشیم:

$$A = B = \left\{ \begin{matrix} 3x-2=2 \\ x-y=1 \end{matrix} \right. \Rightarrow x = \frac{5}{3}, y = \frac{2}{3}$$

$$[a] = [b] \Rightarrow (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

$$\Rightarrow (a, b) \in R^{-1}$$

$$[a, b] = \{(x, y) | (x, y) R (a, b)\}$$

$$= \{(x, y) | x + b = y + a\}$$

$$= \{(x, y) | y = x + (b - a)\}$$

۲۸. گزینه (۱): زیرا:
۲۹. گزینه (۳): زیرا:
۳۰. گزینه (۵): زیرا اگر عددی به ۴ ختم شود، توانهای زوج آن، به ۶ و توانهای فرد آن، به ۴ ختم می‌شوند:

$$4^{100} \div 6$$

$$49 \equiv -1 \Rightarrow (49)^{100} \equiv -1$$

$$(49)^{100} + 4^{100} \equiv -1 + (-1) = 0$$

$$4! = 24 \Rightarrow 4! \equiv 0, 5! = 5 \times 4! \equiv 0$$

$$1! + 2! + \dots + 20! \equiv 1 + 2 + \dots + 20 \equiv 210 \equiv 6$$

$$P(A) = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{5}{210}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{210} = \frac{205}{210}$$

$$P(1) = x, P(2) = 2x, P(3) = x,$$

$$P(4) = 2x, P(5) = x, P(6) = 2x$$

$$x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

$$A = \{1, 2, 3\}; P(A) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{1-x}{1-x} \times \frac{x}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

$$1+x > 2-x \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$1+2-x > x \Rightarrow x < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow L_A = 1$$

$$2-x+x > 1 \Rightarrow 2 > 1$$

$$\frac{L_A}{L_S} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{L_A}{L_S} = \frac{1}{2}$$

$$1+x > 2-x \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$1+2-x > x \Rightarrow x < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow L_A = 1$$

$$2-x+x > 1 \Rightarrow 2 > 1$$

$$P(A - B) + P(B)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) = P(A \cup B)$$

۳۶. گزینه (۴): زیرا احتمال آن که هر دو به هدف بزنند، از یکدیگر مستقل است:

$$P(A) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$$

حسابان

۳۷. گزینه (۲)

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2 \geq \sqrt{x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4 \geq x-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

۳۸. گزینه (۴)

برد تابع اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی ۲ و اعداد صحیح کوچکتر یا مساوی -۲ است.
۳۹. گزینه (۲)

ابتدا $f(x-1)$ را رسم کنید، سپس فریفته آن را نسبت به محور x بکشید. آن گاه شکل حاصل را یک واحد به سمت بالا ببرید.

$$f(x) = \left[\frac{x^2}{x^2+1} \right] = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0$$

در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ اگر a و c مختلف‌العلامه باشند، دلتای معادله $ax^2 + bx + c = 0$ همیشه مثبت است. چون در این تست، a و c مختلف‌العلامه است، پس سهمی به ازای همه مقادیر m محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.

۴۲. گزینه (۴)
پس $f(x)$ بر x بخش‌پذیر است: در نتیجه $f(2x-1)$ بر $(2x-1)$ بخش‌پذیر است.
۴۳. گزینه (۴)

$$y-1 = x^2 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow y-1 = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x-1}$$

۴۴. گزینه (۱)

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow \lim f(x) = \left(\left\lfloor 2^+ \right\rfloor - 2 \right) \left(\left\lfloor 2^+ \right\rfloor - 1 \right)$$

$$= (2-2)(1) = 0$$

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow \lim f(x) = \left(\left\lfloor 2^- \right\rfloor - 2 \right) \left(\left\lfloor 2^- \right\rfloor - 1 \right)$$

$$= (1-2)(1-1) = 0$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{2/12}{6} = 0/52$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{[x + \sin x]}{[\sin x]} = \frac{[\pi/6 + 0.5]}{[0.5]} = \frac{[1.02]}{[0.5]} = \frac{1}{2}$$

۴۶. گزینه (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4x^2 - 5}{x^2 + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4(x^2 + 1) - 9}{x^2 + 1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{-9}{x^2 + 1} \right)$$

$$= 4 + \left[\frac{-9}{\infty} \right] = 4 - 0 = 4$$

۴۷. گزینه (۴)، چون عدد مجانب قائم $x = 2$ با عدد مجانب افقی $y = 2$ برابر است، پس معادله تابع معکوس، همان معادله تابع اصلی است.

۴۸. گزینه (۲)

$$h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2t \Rightarrow \begin{cases} f(t) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = t \\ h(2t) = y \Rightarrow h^{-1}(y) = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow h^{-1}(y) = 2f^{-1}(y) \Rightarrow h^{-1}(x) = 2f^{-1}(x)$$

۴۹. گزینه (۳)

$$|f(x) - 5| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x + 2 - 5| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow |3(x - 1)| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{300} \Rightarrow -\frac{1}{300} < x - 1 < \frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{300} < x < 1 + \frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow \frac{299}{300} < x < \frac{301}{300}$$

۵۰. گزینه (۲)

$$\frac{49}{10} < 2x + 1 < \frac{51}{10}$$

$$\frac{49}{10} - 5 < 2x + 1 - 5 < \frac{51}{10} - 5 \Rightarrow -\frac{1}{10} < 2x - 4 < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{20} < x - 2 < \frac{1}{20} \Rightarrow |x - 2| < \frac{1}{20} \Rightarrow x \rightarrow 2$$

۵۱. گزینه (۴)

$$y = \frac{x + \sqrt{x}}{2x - 1}$$

مجاانب افقی $y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

۵۲. گزینه (۲) و $f(x) = \frac{4x - 1}{bx + 1}$ باید

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) = \frac{4}{b} = 1 \Rightarrow \boxed{b = 4} \Rightarrow a + b = 4$$

۵۳. گزینه (۲)

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 2}$$

مجاانب قائم غیر قابل قبول است.

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \text{حد } y = \text{حد } \frac{\pm x}{x} \Rightarrow y = \pm 1$$

مجاانب افقی

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x}$$

چون $\sin x$ در صورت نیز هست، پس مخرجی این تابع مجانب قائم ندارد.

۵۵. گزینه (۲)

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=-1} \end{cases}$$

معادله مجانب قائم: غیر قابل قبول

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{حد } y = 0 + 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

مجاانب افقی

$$-2x^2 + 11x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1, \frac{9}{2}$$

چون ضریب x^2 منفی است؛ پس $D_f = \left[1, \frac{9}{2} \right]$ این تابع

در بازه $\left[1, \frac{9}{2} \right]$ پیوسته است و در هر زیرمجموعه آن نیز پیوسته

است؛ پس این تابع در بازه $\left[2, \frac{9}{2} \right]$ هم پیوسته است.

● دیفرانسیل و انتگرال ۱

۵۷. گزینه (۴): بنا به قسمت ج صفحه ۷ کتاب درسی.

۵۸. گزینه (۳): از دو طرف نامساوی $\frac{a+b}{2}$ را کم کنید.

$$a - \frac{a+b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < b - \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{b-a}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}$$

۵۹. گزینه (۲)

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty, \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n) = \infty \right. \right.$$

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = 1, \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \right. \right.$$

۶۰. گزینه (۲)

$$1/999 - 2 < \frac{4n+1}{2n-5} - 2 < 2/001 - 2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{11}{2n-5} \right| < \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow \frac{2n-5}{11} > 1000 \Rightarrow n > \frac{11005}{2} \Rightarrow n \geq 5503$$

۶۱. گزینه (۳)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \pi + 2n^2 - 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \pi}{n^2 + 1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$= 0 + 2 = 2$$

۶۲. گزینه (۴)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \sqrt{6+1} \Rightarrow 1^2 - 1 - 6 = 0 \Rightarrow (1-2)(1+2) = 0$$

$$\Rightarrow 1 = 2$$

۶۳. گزینه (۳)

$$f(k) = \frac{1}{k^2 + 1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n (f(k) - f(k+1)) = f(1) - f(n+1)$$

اگر

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2 + 1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2 + 1} \right) = \frac{1}{2}$$

۶۴. گزینه (۴)

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\log k - \log(k+1)) \quad f(k) = \log k$$

$$\sum_{k=1}^n (f(k) - f(k+1)) = f(1) - f(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n = \log 1 - \log(n+1) = 0 - \log(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1) = -\infty$$

۶۵. گزینه (۴)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

این تابع در $x_1 = 3$ حد چپ دارد و مقدار حد صفر است. و این تابع در $x_2 = -3$ حد راست دارد و مقدار حد صفر است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{n} \right] = \left[1 + 0^+ \right] = 1$$

۶۷. گزینه (۱)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right] = \left[1 + 0^\pm \right] = \begin{cases} \left[1 + 0^+ \right] = 1 \\ \left[1 + 0^- \right] = 0 \end{cases}$$

۶۸. گزینه (۱)

$$\begin{cases} x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim f(x) = a - 4 \\ x \rightarrow 0^- \Rightarrow \lim f(x) = -1 \\ x = 0 \Rightarrow f(0) = b - 1 \Rightarrow b = 0, a = -3 \Rightarrow a + b = -3 \end{cases}$$

$$(x - \frac{2}{3})(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2, \frac{2}{3}$$

این تابع در نقاط به طولهای عددهای صحیح، فقط در $x = \pm 2$ پیوسته است.

۷۰. گزینه (۴) به تعریف تابع معکوس دقت کنید.

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \lim y = \frac{x^2}{\pm x} \Rightarrow y = \pm x$$

۷۲. گزینه (۳): این تابع در $x = 0$ نه حد راست دارد و نه حد چپ. در نتیجه، نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ. مسلماً نه مشتق راست دارد و نه مشتق چپ.

۷۳. گزینه (۳)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\pi}{4} + 2h) - f(\frac{\pi}{4} - 2h)}{2h} = 2f'(\frac{\pi}{4})$$

$$f(x) = \tan^2 x \Rightarrow f'(x) = 2(1 + \tan^2 x) \cdot \tan x$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = 2(1 + 1) = 4$$

$$\Rightarrow 2f'(\frac{\pi}{4}) = 2 \times 4 = 8$$

۷۴. گزینه (۱)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^2 & x=2 \\ 2ax & \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow 2^+ \Rightarrow \lim f(x) = 8 \\ x \rightarrow 2^- \Rightarrow \lim f(x) = 2a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a + b = 8 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a - b = 7$$

۷۵. گزینه (۲)

$$y = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow y'_{(1)} = \frac{2xx'}{2\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$\Rightarrow y'_{(1)} = \frac{2 \times 3 \times 5}{2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow y'_{(1)} = 3\sqrt{5}$$

۷۶

$$S = \pi R^2 \Rightarrow S'(t) = 2\pi R R' = 2 \times 3 / 14 \times 10 \times 2$$

$$\Rightarrow S'_t = 125 / 6 \text{ متر بر ثانیه}$$

● ریاضی عمومی ۱

۷۷. گزینه (۲): زیرا:

$$V_{1x} = \frac{\delta_{1x}}{\delta_{1x}} = \frac{2\delta_{1x}}{2\delta_{1x}} = \frac{\delta_{1x}}{\delta_{1x}} = V_1$$

۷۸. گزینه (۳).

۷۹. گزینه (۱): زیرا:

$$P(A) = \frac{\binom{7}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{7}{9}$$

$$P(B) = \frac{\binom{7}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{7}{9}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{49}{81}$$

۸۰. گزینه (۱): زیرا:

$$\frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

۸۱. گزینه (۴): زیرا:

$$\begin{vmatrix} a & -2 \\ b & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 + 2b = 0 \Rightarrow a^2 = -2b$$

۸۲. گزینه (۲): زیرا:

$$y = 2^{2x-1} \Rightarrow \log y = (2x-1) \log 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{2}$$

۸۳. گزینه (۱): زیرا:

$$e^x = u \Rightarrow u^2 - 2u + 1 = 0 \Rightarrow (u-1)^2 = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

۸۴. گزینه (۱): زیرا:

$$\begin{cases} a+1=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow -a = 1$$

۸۵. گزینه (۴): زیرا:

$$f'(x) = \frac{(\Delta x^2 + \Delta)(x^2 + \Delta x)}{x^2 + \Delta x} \Rightarrow f'_+(0) = 0$$

$$f'_-(0) = -5$$

۸۶. گزینه (۳): زیرا

$$f(x, y) = 2e^{\cos(x-y)} + 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \sin(x-y) e^{\cos(x-y)}}{2 \sin(x-y) e^{\cos(x-y)}} = -1$$

۸۷. گزینه (۲): زیرا منحنی وقتی دارای یک مجانب قائم

است که:

$$\begin{cases} y \rightarrow \pm\infty \\ x^2 + mx + n = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = m^2 - 4n = 0 \Rightarrow m = \pm 4$$

هندسه تحلیلی

۸۸. گزینه (۴): جواب است: زیرا داریم:

$$AB = \sqrt{(a+1-1)^2 + (2-3)^2 + (3+a+1-a)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{26} = \sqrt{a^2 + 1 + 16}$$

$$\Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

۸۹. گزینه (۳): زیرا شرط برابری دو بردار، آن

است که تصویرهای متناظرشان برابر باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m-1=3 \\ m+p-1=2p+5 \\ m+n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=-3 \\ p=-2 \end{cases} \Rightarrow m+n+p=-1$$

نکته: اگر دستگاه سه معادله سه مجهولی بر حسب m, n, p را به صورت

$$\begin{cases} m-1=3 \\ 2p+5=m+p-1 \\ m+n=1 \\ m+n+p=-1 \end{cases}$$

بنویسیم، با جمع کردن طرفهای نظیر سه رابطه جواب مسئله مشخص می شود.

۹۰. گزینه (۱): جواب است.

$$a = 2i + j + 3k, \quad b = -i + 2j - k$$

$$a \cdot (a + 2b) = a^2 + 2a \cdot b$$

$$= 2^2 + 1^2 + 3^2 + 2(2 \times -1 + 1 \times 2 + 3 \times -1)$$

$$= 14 - 6 = 8$$

۹۱. گزینه (۱): درست است. می دانیم که قرینه بردار a نسبتبه بردار b برداری است مانند a'' به قسمی که

$$a'' = \frac{a \cdot b}{b \cdot b} b - a$$

$$a'' = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{4 + 1 + 9} (2, 1, 2) - (2, -1, 0)$$

$$= \left(\frac{6}{14}, \frac{2}{14}, \frac{1}{14} \right) - (2, -1, 0)$$

$$\Rightarrow a'' = \left(-\frac{12}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7} \right)$$

$$\Rightarrow a'' = \left(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7} \right)$$

۹۲. گزینه (۲): درست است. تصویرهای بردار $(2a) \times (3b)$ نشان برای تصویرهای نظیر از بردار $a \times b$ است. بنابراین، تصویربرداری روی محور z ها را پیدا کرده و در ۶ ضرب می کنیم.اما تصویر این بردار، روی محور z برابر ۱۱ یا $(2)(3) - (-1)(2) = 11$ است. بنابراین، جواب این تست ۶۶ یا 6×11 است.

۹۳. گزینه (۴): جواب است. دو نقطه از این خط

 $A = (2, 0, 0)$ و $B = (3, 4, 5)$ است. بنابراین معادله متقارن

آن به صورت زیر است:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-0}{4-0} = \frac{z-0}{5-0} \Rightarrow x-2 = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$$

۹۴. گزینه (۱): درست است. مختصات نقطه A در معادلهخط گذرنده از دو نقطه $B = (2, 5, 7)$ و $C = (0, 3, 2)$ صدق

می کند:

$$BC: \frac{x-2}{0-2} = \frac{y-5}{3-5} = \frac{z-7}{2-7} \Rightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{-5}$$

$$A = (x, y, z) \xrightarrow{BC \text{ معادله}} \frac{x-2}{-2}$$

$$= \frac{y-5}{-2} = \frac{1-5}{-2} = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y-7}{-4} = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow x+y = 7 - \frac{24}{2} = \frac{11}{2}$$

۹۵. گزینه (۲): جواب است. بردار هادی خط D ، بردار

نرمال صفحه مورد نظر است. بنابراین:

$$V_P = V_D = (2, -3, 1), \quad M = (2, 4, -1)$$

$$\Rightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-2) - 3(y-4) + (z+1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3y + z + 9 = 0$$

۹۶. گزینه (۴): جواب است. می دانیم که فاصله نقطه

 $A = (x_1, y_1, z_1)$ از صفحه $P: ax + by + cz + d = 0$ برابر است

$$d = AH = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

بنابراین داریم:

$$4 = \frac{|4m + 2 - m + 2 + 2m|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \Rightarrow 4 = \frac{|5m + 4|}{3} \Rightarrow$$

$$|5m + 4| = 12 \Rightarrow 5m + 4 = \pm 12$$

$$\Rightarrow m = \frac{8}{5} = 5m + 4 = -12$$

$$m = -\frac{16}{5}$$

۹۷. گزینه (۳): جواب است: زیرا داریم:

$$V_D = (1, 2, 3), \quad V_P = (2, -4, 3)$$

$$\cos(V_D, V_P) = \frac{V_D \cdot V_P}{|V_D| |V_P|}$$

$$= \frac{2 - 8 + 9}{\sqrt{1 + 4 + 9} \cdot \sqrt{4 + 16 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{14} \sqrt{29}} = 0$$

$$\Rightarrow (V_D, V_P) = 90^\circ \Rightarrow \text{زاویه خط با صفحه}$$

$$= 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

ریاضی ۱

۹۸. گزینه (۲): صحیح است: زیرا:

$$(A' \cap B) \cup (A - \emptyset) = (A' \cap B) \cup A$$

$$= (A' \cup A) \cap (B \cup A) = M \cap (B \cup A) = A \cup B$$

۹۹. گزینه (۳): صحیح است: زیرا زیرمجموعه های مجموعه

 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ چنین است:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, A$$

۱۰۰. گزینه (۴): صحیح است: زیرا:

$$(ab)^{m-n} + (a^m \cdot b^n \cdot a^n \cdot b^m)$$

$$= (ab)^{m-n} + (a^{m+n} \cdot b^{m+n})$$

$$= (ab)^{m-n} + (ab)^{m+n}$$

$$= (ab)^{m-n-(m+n)} = (ab)^{-2n}$$

۱۰۱. گزینه (۳): صحیح است: زیرا:

$$x = 0 / \sqrt{27}, \quad 10x = 2 / \sqrt{27}, \quad 100x = 22\sqrt{27} / \sqrt{27}$$

$$100x - 10x = 22\sqrt{27} / \sqrt{27} - 2 / \sqrt{27} = 224 / \sqrt{27}$$

$$990x = 224 / \sqrt{27}; \quad x = \frac{224}{990} = \frac{26}{110} = \frac{13}{55}$$

$$18 + 55 = 73$$

۱۰۲. گزینه (۴): صحیح است: زیرا:

$$(xyz)^{-1} (xy^2z^3)^{-1} (-2x^2y) = (2)^{-1} (x^2y^2z^3)^{-1}$$

$$(-2)(x^2y^2z^3) = (2x^2y^2z^3)^{-1}$$

۱۰۳. گزینه (۴): صحیح است: زیرا:

روش ۱ (با عمل تقسیم):

$$x^2 - 8x + 15 \Big| -x + 3$$

$$\frac{-(x^2 - 3x)}{-5x + 15}$$

$$\frac{-(-5x + 15)}{0}$$

(باقیمانده)

۱۱۴. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{x^2} - \sqrt{2} &= |x-2| + |x| - \sqrt{2} \\ x &= 2 - \sqrt{2} : |x-2| + |x| - \sqrt{2} \\ &= |2 - \sqrt{2} - 2| + |2 - \sqrt{2}| - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = -2 \end{aligned}$$

۱۱۵. گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 - x : x^0 = (x^2)^2 \cdot x = (1-x)^2 \cdot x \\ &= (1-2x+x^2) \cdot x \\ &= (1-2x+1-x)x = (2-3x)x \\ &= 2x - 3x^2 = 2x - 3(1-x) \\ &= 2x - 3 + 3x = 5x - 3 \end{aligned}$$

۱۱۶. گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt{2}-4\sqrt{3}} &= \sqrt[3]{\sqrt{2}-4\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3} \\ \sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} &= \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = 1 \end{aligned}$$

۱۱۷. گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x + \\ &+ \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = 2 \\ &+ \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = 2 \end{aligned}$$

۱۱۸. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x-1} + \frac{Ax}{2x+1} &= 2x ; \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = x ; \\ \frac{x^2+x+x^2-x}{x^2-1} &= x \\ \frac{2x^2}{x^2-1} &= x ; \frac{2x^2}{x^2-1} - x = 0 ; \frac{2x^2-x^2+x}{x^2-1} = 0 ; \\ \frac{-x(x^2-2x-1)}{x^2-1} &= 0 \\ -x &= 0 ; x^2-2x-1=0 ; x=0 , \\ \Delta' &= 1+1=2 > 0 \end{aligned}$$

۱۱۹. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{aligned} x(x+2) - (x-1)(x+2) &\geq 0 ; \\ (x+2)(x-x+1) &\geq 0 ; x+2 \geq 0 ; x \geq -2 \end{aligned}$$

۱۲۰. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{aligned} a+b=1 , ab=-1 \\ k = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} &= \frac{b^2+a^2}{a^2b^2} = \frac{(b+a)^2-2ba}{(ab)^2} \\ &= \frac{(1)^2-2(-1)}{(-1)^2} = 3 \end{aligned}$$

۱۲۱. گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{3} &\geq \frac{x+1}{2} ; 2x+4 \geq 3x+3 ; x \leq 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{2}{3} &> \frac{x-2}{6} ; 3x-4 > x-2 ; 2x > 2 ; x > 1 \end{aligned}$$

اشتراک مجموعه جوابهای نامعادله ها، مجموعه تهی ($\emptyset$) است.

$$x+y=xy=-2$$

$$x^2+y^2=(-2)^2-2(-2)(-2)=-8-12=-20 ,$$

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$

$$(x-y)^2=(-2)^2-4(-2)=4+8=12 ,$$

$$B = \frac{-20}{12} = -\frac{5}{3}$$

● ریاضی ۲

۱۰۸. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا معادله نیمساز ناحیه دوم و چهارم $y=-x$ است. بنابراین، هر نقطه به مختصات $M(x_0, -x_0)$ روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم واقع است:

$$4m-1=-(2m-1) ; 4m+2m=2 ;$$

$$6m=2 ; m=\frac{1}{3}$$

۱۰۹. گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$AB^2=(2-2n+1)^2+(2n-2)^2=5^2=25 ;$$

$$(3-2n)^2+(2n-2)^2=25 ;$$

$$(9-12n+4n^2)+(4n^2-8n+4)=25 ;$$

$$8n^2-12n+8=25 ; 8n^2-12n-17=0 ;$$

$$2n^2-3n-4=0 ;$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9+32}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} , n=3 ; n=-\frac{1}{2}$$

۱۱۰. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا اگر a یک ضلع مربع و R قطر مربع باشد:

$$2a^2=R^2$$

$$R^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$

$$= (1+2)^2 + (3-1)^2 = 9+4=13$$

$$2a^2=13 ; a^2=\frac{13}{2} ; S=a^2=\frac{13}{2} \text{ (مساحت مربع)}$$

۱۱۱. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا مختصات نقطه ای به طول ۱- در هر دو خط صدق می کند و همچنین حاصل ضرب ضریب زاویه دو خط برابر ۱- است، بنابراین:

$$\begin{cases} a(-1)-y=1 & (از خط اول) \\ b(-1)-y+1=0 & (از شرط عمود بودن) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-2 \\ ab=-1 \end{cases}$$

$$ab=(b-2)b=-1 ; b^2-2b+1=0 ;$$

$$(b-1)^2=0 ; b=1$$

$$b=1 ; a(1)=-1 ; a=-1 ,$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \text{ مقدار میانگین}$$

۱۱۲. گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 2y-x-1=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-2}{5} , y = \frac{1}{5} ; O(\frac{-2}{5}, \frac{1}{5})$$

$$d = \frac{|\frac{-2}{5} + \frac{1}{5} - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|\frac{-12}{5}|}{\sqrt{2}} = \frac{12}{5\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

۱۱۳. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\frac{y}{m} = \frac{m}{2} \neq \frac{6}{5} ; m^2=4 ; m=\pm 2$$

روش ۲ (بدون عمل تقسیم):

ابتدا مقسوم علیه $(-x+3)$ را برای صفر قرار می دهیم:

$$-x+3=0 ; x=3$$

مقسوم را به ازای ریشه مقسوم علیه حساب می کنیم، که در این صورت عدد حاصل، باقیمانده تقسیم است:

$$x=3 : p(3)=(3)^2-8(3)+15$$

$$=9-24+15=24-24=0$$

۱۰۴. گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

روش ۱ (با عمل تقسیم):

$$\begin{aligned} x^0+x+1 & \left| \frac{x^2-x^2+1}{x^2-x^2+x+1} \right. \\ & \frac{-(x^0-x^2+x^2)}{x^2-x^2+x+1} \\ & \frac{-(x^2-x^2+x)}{x^2-x^2+x+1} \\ & \frac{-(x^2-x^2+1)}{x^2-x^2+x+1} \end{aligned}$$

روش ۲ (روش عددگذاری):

ابتدا حاصل عبارت $\frac{x^0+x+1}{x^2-x^2+1}$ را به ازای عدد دلخواهی

مانند $x=1$ حساب می کنیم:

$$x=1 : \frac{(1)^0+(1)+1}{(1)^2-(1)^2+1} = 3$$

همچنین حاصل هر یک از عبارتهای داده شده را به ازای $x=1$ حساب می کنیم، بدیهی است که فقط حاصل x^2+x+1 برابر ۳ است.

۱۰۵. گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

روش ۱ (روش تجزیه):

$$\begin{aligned} A &= y^2+2y-x^2+1=(y^2+2y+1)-x^2 \\ &= (y+1)^2-x^2 \\ &= (y+1-x)(y+1+x) \\ &= (x+y+1)(y-x+1) \end{aligned}$$

روش ۲ (روش عددگذاری):

حاصل عبارت A را به ازای $x=1, y=x$ حساب می کنیم:

$$y=x=1 : A=(1)^2+2(1)-(1)^2+1=3$$

فقط حاصل عبارت گزینه (۳) به ازای $x=1, y=x$ برابر ۳ می شود:

$$\begin{aligned} y=x=1 : (x+y+1)(y-x+1) \\ = (1+1+1)(1-1+1) = 3 \end{aligned}$$

۱۰۶. گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2) ,$$

$$3x^2-3=3(x-1)(x+1)$$

$$A = \frac{(x-1)(x-2)}{2(x-2)} \times \frac{12}{2(x-1)(x+1)}$$

با توجه به $x \in \{1, 2\}$ می توان نوشت:

$$A = \frac{1}{x+1}$$

۱۰۷. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy(x+y) ,$$

ریاضی ۵

۱۱. گزینه (۲) درست است؛ زیرا داریم:

$$-2 < \frac{x}{2} - 1 \leq 2 \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} \leq 3 \Rightarrow -2 < x \leq 6$$

۱۲. گزینه (۴) درست است؛ زیرا داریم:

$$f(-2) = \sqrt{2} - (-2) = \sqrt{2} + 2$$

$$\Rightarrow f(f(-2)) = \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

۱۳. گزینه (۲) درست است؛ زیرا داریم:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{-1}{x} - 1}{\frac{-1}{x} + 1} = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\Rightarrow f(x)f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x+1} \times \frac{-(x+1)}{x-1} = -1$$

۱۴. گزینه (۱) جواب است. باید حد راست و حد چپ تابع وقتی $x \rightarrow 2$ با هم برابر باشند.

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2(a+1) + 3 = -2a+1$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2(2) + 1 = -3$$

$$l_1 = l_2 \Rightarrow -2a+1 = -3 \Rightarrow a = 2$$

۱۵. گزینه (۳) درست است؛ زیرا داریم:

$$f(x+2) = \frac{x+4}{x} \Rightarrow f(x-2+2) = \frac{x-2+4}{x-2} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{0} = \infty$$

۱۶. گزینه (۲) جواب است؛ زیرا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin kx \sin \pi kx}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times kx \times \pi kx}{x^3} = \frac{k^2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{3} = 3 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3, k = -3$$

۱۷. گزینه (۱) درست است. شرط پیوستگی تابع در یک نقطه، آن است که حد چپ تابع و حد راست تابع و مقدار تابع در آن نقطه برابر باشند. بنابراین داریم:

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -3a+1$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 18a-3b-2$$

$$f(-3) = 13$$

$$-2a+1 = 13 \Rightarrow a = -4 \quad 18a-3b-2 = 13 \Rightarrow b = -29$$

$$\Rightarrow a+b = -33$$

۱۸. گزینه (۴) درست است؛ زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2+a, f(1) = -2+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1+3=4$$

$$l_1 \neq l_2 = f(1) \Rightarrow -2+a \neq 4 \Rightarrow a \neq 6$$

۱۹. گزینه (۲) جواب است. داریم:

$$f'(x) = \frac{1(x+\sqrt{x}) - (1+\frac{1}{2\sqrt{x}})x}{(x+\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})^2}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

۲۰. گزینه (۳) درست است؛ زیرا داریم:

$$A = (-2, -7) \xrightarrow{\text{متناهی}} -7 = a(-2)^2 + b(-2) - 3$$

$$\Rightarrow 2a - 2b = -4 \Rightarrow a - b = -2 \quad (1)$$

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 2a(-2) + b = 0 \Rightarrow -2a + b = 0 \quad (2)$$

$$\hat{E} = \hat{G} = 90^\circ \Rightarrow \hat{E} + \hat{G} = 180^\circ \Rightarrow \text{محلای است } EFGH$$

$$EF = FG, GH = HE \Rightarrow EF + HG$$

$$= FG + EH \Rightarrow \text{محیطی است. } EFGH$$

۵. گزینه (۴) درست است. اگر AB وتر نظیر کمان حاوی ۶۰

درجه باشد، کمان کوچک AB برابر ۱۲۰ است؛ یعنی $AB = C_r = R\sqrt{3}$. اما در دایره به شعاع R، بنابراین داریم:

$$24 = R\sqrt{3} \Rightarrow R = 8\sqrt{3}$$

نکته: می دانیم که اگر AB وتر نظیر کمان در خور زاویه α در

دایره ای به شعاع R باشد، $\sin \alpha = \frac{AB}{2R}$ است. بنابراین با استفاده

از این رابطه، می توان R را محاسبه کرد.

$$\sin 60^\circ = \frac{AB}{2R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{2R} \Rightarrow R = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

۶. گزینه (۲) جواب است؛ زیرا اگر d خط المرکزین این دو دایره، مماس مشترک بیرونی T_1T_2 و مماس مشترک درونی آنها باشد، داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} = \sqrt{10^2 - (5-3)^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

$$T_1T_2' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2} = \sqrt{10^2 - (5+3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$TT' : T_1T_2' = 4\sqrt{6} : 6 = 2\sqrt{6} : 3$$

۷. گزینه (۱) درست است؛ زیرا اگر مثلث را قائم الزاویه در رأس A فرض کنیم، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 12 + 36 = 48 \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2p = 2\sqrt{3} + 6 + 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2p = 6 + 6\sqrt{3} \Rightarrow p = 3 + 3\sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 = 6\sqrt{3}, r = \frac{S}{P} = \frac{6\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2} = 3-\sqrt{3}$$

۸. گزینه (۳) درست است؛ زیرا چون دوران، شکل را تغییر نمی دهد و مساحت مربع $A'B'C'D'$ با مساحت مربع ABCD برابر است، بنابراین داریم:

$$AB = a = \sqrt{(3+1)^2 + (1-1)^2} = 4 \quad \text{ضلع مربع}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت } S = a^2 = 16$$

۹. گزینه (۲) جواب است. اگر $M' = (1,1)$ و $M = (3,-1)$ باشد، محور تقارن بازتاب عمود منصف پاره خط MM' است.

بنابراین داریم:

$$MM' \text{ وسط } H = (2,0)$$

$$m/MM' = (3-1)/(-1-1) = -1 \Rightarrow$$

$$\text{عمود منصف } m = +1$$

$$\Rightarrow \text{معادله عمود منصف: } y - 0 = +1(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = x - 2 \quad \text{معادله محور تقارن}$$

۱۰. گزینه (۴) جواب است؛ زیرا شرط موازی بودن یک خط با یک صفحه، آن است که با یکی از خطهای آن صفحه موازی باشد. بنابراین، دو خط مورد نظر، می توانند با دو خط متقاطع از صفحه موازی باشند، که در این صورت، موازی یکدیگر نخواهند بود.

۱۲. گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$y = x' + px + q = (x + \frac{p}{q})' - \frac{p'}{q} + q$$

$$y - \frac{pq - p'}{q} = (x + \frac{p}{q})'$$

$$S(-\frac{p}{q}, \frac{pq - p'}{q}), S(-2, 2)$$

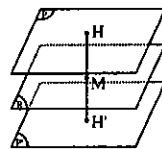
$$\begin{cases} -\frac{p}{q} = -2 : p = 2q \\ \frac{pq - p'}{q} = 2 : q = 11 \end{cases} \Rightarrow \frac{p+q}{2} = \frac{2+11}{2} = \frac{13}{2}$$

پاسخ پرسشهای چهار گزینه ای برهان ۲۸

هندسه ۲

۱. گزینه (۱) درست است؛ زیرا مثلثهای قائم الزاویه ایجاد شده، به وسیله نیمسازهای زاویه های درونی مستطیل متناوب الساقین می باشند.

۲. گزینه (۳) جواب است؛ زیرا مکان هندسی نقطه ای که به یک فاصله از دو صفحه موازی است، صفحه ای است موازی آن دو صفحه و به یک فاصله از آن دو صفحه.



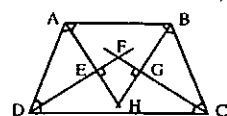
۳. گزینه (۲) درست است؛ زیرا داریم:

$$\widehat{AE} + \widehat{DB} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \quad (1)$$

$$\widehat{C} = \frac{AE - BD}{2} \Rightarrow 40^\circ = \widehat{AE} - \widehat{BD} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \widehat{AE} = 70^\circ, \widehat{DB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

۴. گزینه (۴) جواب است؛ زیرا اگر EFGH چهار ضلعی حاصل از برخورد زاویه های درونی دوزنقه متناوب الساقین ABCD باشد، داریم:



$$= \frac{1}{y} (e^{yx} - e^x) = y \Rightarrow y' = \frac{1}{y} (ye^{yx}) = e^{yx}$$

$$y'' = ye^{yx} \Rightarrow y'' + 2y' = ye^{yx} + e^{yx} = 3e^{yx}$$

راه دیگر:

$$(\int_1^x e^{t^2} dt)' = e^{x^2} = y' \Rightarrow y'' = 2xe^{x^2}$$

$$\Rightarrow y'' + 2y' = 2xe^{x^2} + e^{x^2} = 3e^{x^2}$$

گزینه (۲)

$$\int_1^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (\text{Arcsin } x) \Big|_1^{\sqrt{x}}$$

$$= \text{Arcsin } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \text{Arcsin } 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

گزینه (۳)

$$\int (x^2 - 2x - 1)e^x = (mx^2 + nx + k)e^x$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x - 1)e^x \equiv (mx^2 + nx + k)e^x$$

$$\Rightarrow (2mx + n)e^x + e^x (mx^2 + nx + k) \equiv (x^2 - 2x - 1)e^x$$

$$\Rightarrow (mx^2 + (2m + n)x + (n + k))e^x = (x^2 - 2x - 1)e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ 2m+n=-2 \\ n+k=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-4 \\ k=3 \end{cases} \Rightarrow 2m+n+2k=-2$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

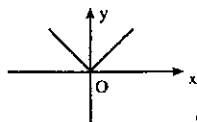
گزینه (۴): زیرا تابع، تابع ثابت است. در تابع ثابت، هر نقطه اکسترم نسبی است.

$$y = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}x^2 - \frac{6}{\sqrt{x}}x + 12)}{\sqrt{x}x^2 - 2\sqrt{x}x + 12}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}x^2 - 2\sqrt{x}x + 12)}{\sqrt{x}x^2 - 2\sqrt{x}x + 12} \Rightarrow y = \sqrt{x}$$

گزینه (۴): مثلاً در تابع به معادله $y = |x|$ نقطه $(0,0)$

می نیم نسبی است؛ در حالی که $f'(0)$ وجود ندارد.



$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

گزینه (۲)

$$f(0) = 0, \quad f'(-2), \quad f'(2)$$

وجود ندارند:

گزینه (۲)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 2 \\ a & x < 2 \end{cases} \Rightarrow 2(2) = a \Rightarrow a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 9 + a = 2a + b$$

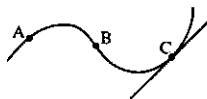
$$\Rightarrow 9 + 4 = 18 + b \Rightarrow b = -5$$

گزینه (۱)

$$f'(x) = 6x^2 - 8x$$

گزینه (۳)

این تابع در همسایگی نقطه C صعودی اکید است؛ پس $f' > 0$. اگر در نقطه C خطی مماس بر منحنی رسم کنیم، منحنی بالای خط مماس قرار می گیرد؛ پس منحنی به طرف بالا است؛ یعنی $f'' > 0$.



$$y = x^2 + ax^2 + b$$

گزینه (۲)

در تابع درجه سوم طول نقطه عطف $-\frac{b}{3a}$ است؛ یعنی در این

$$-\frac{a}{3} = -\frac{a}{3}$$

$$-\frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = -3$$

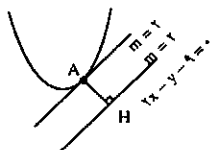
$$f(0) = 0 = 1 + a + b \Rightarrow 0 = 1 - 3 + b \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a - b = -5$$

گزینه (۱): یک تابع مثلثاتی وقتی متناوب است که توان x

در کمان مثلثاتی، فقط و فقط عدد (۱) باشد. پس گزینه (۱) درست است.

گزینه (۲): مماسی بر منحنی به موازات خط رسم می کنیم تا نقطه تماس (A) به دست آید. سپس فاصله AH را محاسبه می کنیم. مطابق شکل

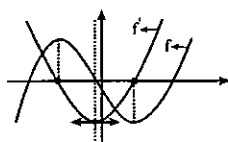


$$y' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0)$$

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 - 0 - 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$$

گزینه (۲)

طولهای اکسترم نسبی تابع f برابر طولهای نقاط برخورد منحنی با محور xهاست. طولهای نقاط عطف تابع f برابر طولهای اکسترم نسبی تابع f است. در ضمن، در ابتدای شکل تابع f صعودی اکید است؛ پس $f' > 0$ در نتیجه، نمودار f' در ابتدای شکل بالای محور xهاست. پس شکل (۳) درست است.



گزینه (۲)

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_1^x 2te^{t^2} dt = \frac{1}{2} (e^{t^2}) \Big|_1^x$$

$$(1), (2) \Rightarrow a=1, \quad b=4 \Rightarrow 2a-b=-2$$

نکته: رابطه (۱) خود، مقدار مورد نظر جواب تست را نشان می دهد.

حسابان ۲

گزینه (۲)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x| - |\sin -|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{+\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 = f'_+(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x| - |\sin -|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 = f'_-(0)$$

دویم مماس بر هم عمودند $\Rightarrow m \times m' = f'_+(0) \times f'_-(0) = -1$

گزینه (۲)

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow f(x) = 4 - x\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = -(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}})$$

$$\Rightarrow f'(1) = -(1 + \frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$$

$$x \rightarrow 9 \Rightarrow f(x) = x\sqrt{x} - 4 \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(9) = 3 + \frac{9}{2 \times 3} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow f'(1) + f'(9) = 3$$

گزینه (۳)

$$y = f(x\sqrt{x}) \Rightarrow y'_x = (x\sqrt{x})' \times f'(x\sqrt{x})$$

$$y'_x = (\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}) \times f'(x\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow x_0 = 9 \Rightarrow y'_{x=9} = (3 + \frac{9}{6}) \times f'(9\sqrt{9})$$

$$= (3 + \frac{3}{2}) f'(27) = \frac{9}{2} \times 12 = 54$$

گزینه (۲): توابع رادیکالی غیر کسری با فرجه زوج، به ازای xهایی که داخل رادیکال را صفر کنند، مشتق پذیر نمی باشند؛ پس:

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \text{در دو نقطه}$$

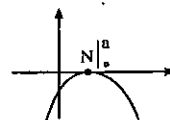
گزینه (۳)

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{3\sqrt{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} > 0$$

تابع در $D_f = R$ پیوسته است و $f' > 0$. پس تابع در R صعودی اکید است.

گزینه (۱)

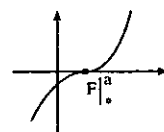
نمودار تابعهای به معادله $y = -(x-a)^{2n}$, $n \in N$ به صورت زیر است،



پس $x=a$ طول نقطه ماکزیمم است.

گزینه (۳)

نمودار تابعهای به معادله $y = (x-a)^{2n+1}$, $n \in N$ به صورت زیر است و ریشه داخل برآتر، طول نقطه عطف است.



۵۶. گزینه (۲): زیرا:

$$c \sqrt[3]{r}, r=4; c \sqrt[3]{r}, r=1$$

$$cc' = \sqrt{(r-5)^2 + (r-7)^2} = \sqrt{20} = 5$$

$$cc' = r + r' = 5 \quad \text{مساحت خارج}$$

۵۷. گزینه (۲): زیرا:

$$9x^2 - 4(y^2 + 4y) = 52 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{52}{9}} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{52}}{3}} = \pm \frac{y+2}{2} \Rightarrow 2y = \pm 3x - 4$$

۵۸. گزینه (۴): زیرا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{kx}{2} dx = -\frac{2}{k} \cos \frac{kx}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{k} \Rightarrow k = 4$$

۵۹. گزینه (۴): زیرا:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 16y - 20 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -5, y = 1$$

$$V = \pi \int_{-5}^1 x^2 dy = \pi \int_0^{\pi} (10 - 16y - 4y^2) dy = 144\pi$$

۶۰. گزینه (۱): زیرا:

$$\hat{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{m+m} \int_{-m}^m (m+mx) dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ym} \int_{-m}^m m(1+x) dx = 1 \Rightarrow m = 1$$

● جبر خطی پیش دانشگاهی

۶۱. گزینه (۲): زیرا $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یوناس پس یک به یکاست و لذا f^{-1} نیز نگاشتنی خطی می‌باشد پس

$$f^{-1}(kf(x)) = kf^{-1}(x)$$

۶۲. گزینه (۱): زیرا، $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ هر کدام تابع همانی

هستند.

۶۳. گزینه (۲) صحیح است: زیرا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x, y) = (2x - y, -x + y)$$

۶۴. گزینه (۴) صحیح است: زیرا:

$$AA^* = A^*A = |A|, |A| = 12 \Rightarrow AA^* = 12I$$

۶۵. گزینه (۲): زیرا هسته f هیچگاه تهی نیست و حداقلاین که $f(0) = 0 \in \ker f$.۶۶. گزینه (۴): زیرا هر مضرب بردار ویژه A یک بردار ویژهبرای A محسوب می‌شود و مقدار ویژه برای همه آنها همان (-2)

است پس باید:

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

۶۷. گزینه (۱) صحیح است: زیرا طبق قضیه کبلی «هر ماتریس

در معادله مشخصه خود صفر می‌کند» پس باید

$$A(A - 2I) = I \Rightarrow A^2 - 2A - I = 0$$

$$A(A - 2I) = I \Rightarrow (A - 2I) = A^{-1}$$

۶۸. گزینه (۱): زیرا λ^{-1} در صورتی یک مقدار ویژه برای

۶۸. گزینه (۲) کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\int \frac{2dx}{x+e^x} = \int \frac{-e^x + (e^x + 2)}{x+e^x} dx$$

$$= -\int \frac{e^x}{x+e^x} dx + \int dx = -\ln(x+e^x) + x + c$$

$$u = x + e^x \Rightarrow u' = e^x$$

توجه:

۶۹. گزینه (۴)

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx : \text{مقدار متوسط برای } f(x) \text{ با } \int_a^b f(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-1} \int_1^2 (x + \frac{1}{x}) dx = \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x) \right) \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2} + \ln(2) - \frac{1}{2} - \ln(1) \right) = \frac{3}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

۷۰. گزینه (۴)

$$\frac{x-1}{4} = \frac{1}{x}$$

$$\ln(f) = \frac{1}{x} \left(1^2 + \left(\frac{r}{x}\right)^2 + (y)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4} \right) = \frac{27}{x}$$

● ریاضی عمومی ۲

۵۱. گزینه (۱): زیرا:

$$y' = \frac{-\cos x(1 - \sin x) + \sin x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2} = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{2}}{1 - \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1-1}{1-1} = 0$$

۵۲. گزینه (۲): زیرا:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{-2y} = 2 \Rightarrow x = y$$

$$2x^2 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1; y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

۵۳. گزینه (۲): زیرا:

$$\begin{cases} x+2y=8 \Rightarrow x=8-2y \\ A=xy=(8-2y)y=8y-2y^2 \end{cases}$$

$$A' = 8 - 4y = 0 \Rightarrow y = 2, x = 8 - 4 = 4$$

$$A = xy = 2 \times 4 = 8$$

۵۴. گزینه (۳): زیرا:

$$\begin{cases} x = \sin^2 \alpha \Rightarrow x = \sin^2 \alpha \Rightarrow x + (y+1)^2 = 1 \\ y = \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow y+1 = \cos^2 \alpha \end{cases}$$

۵۵. گزینه (۴): زیرا:

$$y^2 + 4(x-1)^2 = 32 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{y^2}{32} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 32 - 8 = 24$$

$$\Rightarrow c = 2\sqrt{6}; e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(x) \Rightarrow 6 = 6x^2 - 8x \Rightarrow 3x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1/8 \\ x=-2/3 \end{cases} \Rightarrow 0 < 1/8 < 2 \Rightarrow c=1/8$$

۹۱. گزینه (۱): اگر در تابع مشتق پذیر f داشته باشیم $f'(x) \geq 0$ ، به شرط آن که تابع f ثابت نباشد یا بخشی از تابع دربی‌شمار نقطه ثابت نباشد، آنگاه تابع f اکیداً صعودی است. مثلاً،

$$\text{تابع به معادله } g(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

باشد.

۹۲. گزینه (۳): باید توجه داشت که این تابع متناوب است و

تناوب اصلی آن (2π) است. جدول تغییرات در یک دوره رسم

شده است که یک ماکزیمم نسبی و یک می‌نیم در جدول مشاهده

می‌شود. پس تابع در کل، بی‌شمار ماکزیمم نسبی و بی‌شمار می‌نیم

نسبی دارد.

$$y = \sqrt{x^2(1-x^2)} \quad \text{گزینه (۲)}$$

مجموع دو مقدار x^2 و $1-x^2$ مقدار ثابت (۱) است،

حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که مساوی باشند

$$\text{پس: } x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

۹۴. گزینه (۴): آنچه از ظاهر معادله تابع برمی‌آید، این است

که $f(x) \geq 0$ ، پس شکل بالایی محور x است و در $x=0$ ، تابعمشتق پذیر نیست و $x = \pm 1 \Rightarrow y = 0$ ، پس شکل (۴) درست

است.

۹۵. گزینه (۱)

$$dy = y' \cdot dx = (2x+2)dx = (2+2) \times \frac{1}{x} = 0/4$$

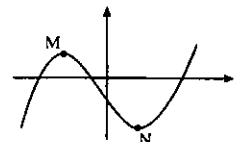
$$\Delta y = y_2 - y_1 = (1/1)^2 + 2(1/1) - 1 - 2 = 0/41$$

$$\text{خطا} = |\Delta y - dy| = |0/41 - 0/4| = \frac{1}{41}$$

$$y = x^2 - 3x - 1 \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$y' = 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

نقاط اکسترمم نسبی

در ضمن $y \rightarrow \pm \infty$ ، $x \rightarrow \pm \infty$ یعنی منحنی از ربع سومشروع شده، به ربع اول ختم می‌شود و از نقاط M و N می‌گذرد.به طوری که در شکل ملاحظه می‌شود، منحنی محور x ها رادر سه نقطه قطع می‌کند: پس معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ سه ریشه

حقیقی متمایز دارد.

۹۷. گزینه (۴)

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

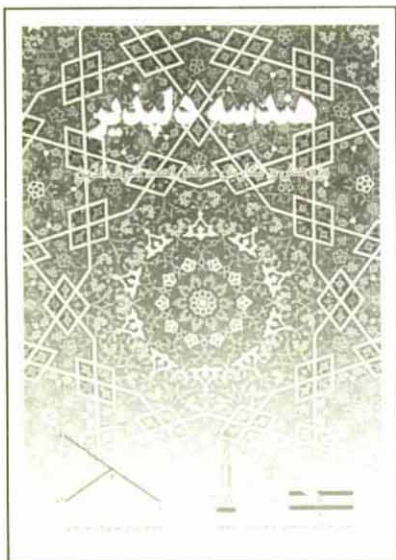
$$\Rightarrow f(a + \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(a) + f'(a) \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow f(a + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 10 - 8(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 10 - 4\sqrt{2} = 9/2$$





معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه



جدید

هندسه دلبزیر

پژوهش و نگارش: دکتر احمد شرف الدین / ناشر: انتشارات مدرسه

کتاب «هندسه دلبزیر» اثری است که می تواند مورد استفاده استادان، دبیران، دانشجویان و دانش آموزان قرار گیرد. مطالب این کتاب برای دانش آموزان، بسیار سودمند و آموزنده است و علاقه آنان را به هندسه می افزاید و دبیران می توانند برای دلپذیر ساختن تدریس خود، از مطالب این کتاب، باری جویند.

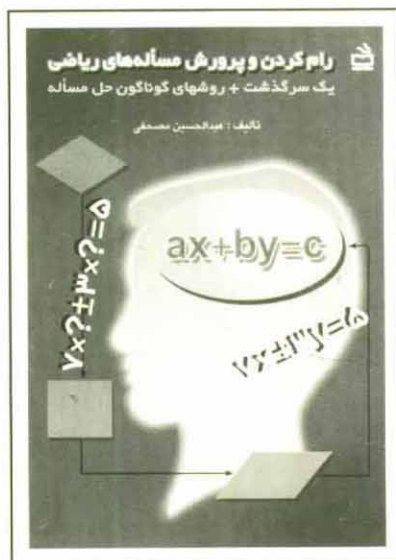
در بخش اول این کتاب، با عنوان «هندسه دلها» درباره قدرت تخیل آفرین استادان نقشگر ایرانی در کاشیکاریها، قالبها و ... سخن رفته است.

در بخش دوم کتاب، اساس هندسی تعداد زیادی از دستگاه های صنعتی شرح داده شده است.

در بخش سوم کتاب، مثالهایی برای طرح و حل مسائل جبر و آنالیز با هندسه ارائه شده است.

در بخش چهارم، چند مثال هندسی، که از آن نتایج فلسفی مهم و جالب حاصل می شود،

مطرح شده است.



جدید

رام کردن و پرورش مسأله های ریاضی

عبدالحسین مصحفی / ناشر: انتشارات مدرسه

مؤلف محترم در این کتاب، با شیوه ای داستان گونه و بسیار شیوا، اصول اولیه برخورد با مسائل ریاضی و چگونگی راهیابی به الگوریتم حل آن را مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می دهد.

این کتاب، ثمره بیش از نیم قرن سابقه تدریس، تألیف، ترجمه و سردبیری مجله ریاضی (یکان) می باشد.

مؤلف محترم در ضمن این که به دانش آموزان و خوانندگان، نحوه برخورد با مسائل ریاضی و یا به عبارت دیگر، رام کردن و پرورش مسأله های ریاضی را یاد می دهد؛ نکات و ظرایف بسیاری را در آموزش ریاضی گوشزد می کند که مطالعه کتاب را جذابتر می نماید.

مطالعه و استفاده از این کتاب را به همه دانش آموزان، دبیران، دانشجویان و همه علاقمندان به ریاضیات توصیه می کنیم.

توجه: از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ می باشند:

۱- ورودی به نظریه اعداد / حمید رضا امیری - مازیار رامین راد ۲- دیفرانسیل و انتگرال نامعین / محمد عابدی

۳- انتگرال معین و کاربردهای آن / محمد عابدی ۴- بردار / سید محمد رضا هاشمی موسوی

۵- نابرابریها و نامعادله ها / میرشهرام صدر ۶- استقرای ریاضی / پرویز شهریاری ۷- آمار و مدل سازی /

دکتر عین ... پاشا ۸- تقارن در جبر و روش ضرایب نامعین / پرویز شهریاری

جلد اول دائرةالمعارف هندسه بصورت دومجلد جدید (جلد اول و جلد دوم) زیر چاپ است.

ابومحمود حامد بن خضر خجندی

ریاضیدان مسلمان و منجم معروف ایرانی (در حدود ۳۹۰)

ابومحمود حامد بن خضر خجندی از بزرگان علمای ریاضی و هیأت و به قول بیرونی، یگانه زمان خود در ساختن اضطرلابها و افزارهای نجومی بود. وی در زمان فخرالدوله دیلمی در ری می‌زیست. چنانکه خواهیم دید، خجندی برهانی بر امتناع حل معادله $x^2 + y^2 = z^2$ آورده است. وی یکی از کسانی است که اختراع «شکل مغنی» بین آنان، مورد بحث است. شکل مغنی، یعنی رابطه زیر در مثلث کروی غیر قائم الزاویه ABC:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

وجه تسمیه آن شکل به «مغنی» این است که این رابطه، منجمان را از «شکل قطاع» که به کاربرستنش مشکل بود، بی‌نیاز می‌ساخت. ابوریحان بیرونی در کتاب «مقالید علم الهیته» و نصیرالدین طوسی در کتاب «کشف القناع عن اسرار شکل القطاع» برهان خجندی را برای شکل مغنی ثبت کرده‌اند.

بیرونی در شهر ری با خجندی ملاقات کرده و کتابی از وی دیده بوده است که در آغاز آن کتاب، خجندی «شکل مغنی» را بیان نموده و همه مطالب کتاب را بر آن شکل، بنا کرده و آن شکل را «قانون الهیته» نامیده بوده است. بیرونی خود در این باره نوشته است: «سپس به شهر ری رفتم و در آنجا ابومحمود حامد بن خضر خجندی را ملاقات کردم و او کتابی به من نشان داد که درباره «اعمال اللیل بالکواکب الثابتة» نوشته و در اوایل آن همین قضیه را با برهان طولانی دیگر، بیان کرده و آن را «قانون الهیته» نامیده بود و همه اعمال آن کتاب را بر آن بنا نهاده بود.»

اثر ریاضی موجود وی

از خجندی چند کتاب درباره نجوم و افزارهای نجومی در دست است. اما تنها اثر ریاضی که از وی باقی مانده، رساله‌ای است مختصر متعلق به یک مجموعه در کتابخانه خدیویه مصر. از جمله رسائل آن، مجموعه رساله‌ای است موسوم به: «مسائل متفرقة هندسیة لبعض العلماء» این رساله، دارای دوازده مسأله است. یکی از این مسأله‌ها را که اثر خجندی است، «کارل شوی» در آخر یکی از مقالات خود به زبان آلمانی ترجمه کرده است.

مسأله مذکور، که در واقع قضیه‌ای از مثلثات کروی است، این است:

قضیه. هرگاه دو دایره عظیمه در سطح کره، یکدیگر را به زاویه معینی، مثلاً در نقطه Z قطع کنند و روی دایره عظیمه اول قوسهای ZT و ZC را در یک جهت و قوس ZF را در جهت دیگر جدا کنیم و از نقاط T و C و F دایره عظیمه‌ای بر دایره عظیمه دوم عمود کنیم و پای عمودها را به ترتیب K و D و Q بنامیم، روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{\sin TZ}{\sin TK} = \frac{\sin ZC}{\sin CD} = \frac{\sin ZF}{\sin FQ}$$

استدلال این قضیه را در مقاله کارل شوی خواهید یافت.

خجندی و معادله $x^2 + y^2 = z^2$

در بیشتر کتابهای تاریخ ریاضیات می‌نویسند که خجندی برهان ناقصی بر عدم امکان حل این معادله آورده است. اما این که این استدلال چه بوده و چرا ناقص بوده و منبع این خبر چیست، سخنی به میان نمی‌آورند. در هر صورت، تردیدی نیست که خجندی رساله‌ای درباره حل معادله مذکور نوشته یا کتابی تألیف کرده بود که حل معادله مذکور جزو مطالب آن بوده و آن رساله یا کتاب از بین رفته است.