

آموزش ریاضه ۹۷

رشد

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره ی بیست و هفتم، شماره ی ۱، پاییز ۱۳۸۸، بها: ۴۵۰۰ ریال

www.roshdmag.ir

- کارهای ثبت شده ی کاشانی
- یادگیری حسابان در دام مفهوم حدونماها
- زبان به عنوان یکی از اصول آموزش ریاضی
- رد پای پولیا بر سنگ قبر آخرین قضیه ی فرما

ISSN 1606-9188



ICT

مطالب پرونده‌ی موضوع ICT را در
صفحه‌های ۳۵ تا ۴۹ مطالعه کنید.



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

مدیر مسئول: محمد ناصری

سرمدبیر: زهرا گویا

مدیر داخلی: سپیده چمن آرا

اعضای هیئت تحریریه: اسماعیل بابلیان، میرزا جلیلی،

سپیده چمن آرا، مهدی رجبعلی پور، مانی رضائی،

شیوا زمانی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام آزاد و

محمد رضا فدائی

طراح گرافیک: مهدی کریم خانی

آموزش ریاضی ۹۷

دوره ی بیست و هفتم، شماره ی ۱، پاییز ۱۳۸۸

آموزشی-تحلیلی-اطلاع رسانی

www.roshdmag.ir

یادداشت سردبیر

یادگیری حسابان در دام مفهوم حد و نمادها ۴ یوسف آذرنگ

رد پای پولیا بر سنگ قبر آخرین قضیه ی فرما ۱۱ محسن یزدان فر

کارهای ثبت شده ی کاشانی و... ۱۹ ایمان هادی، محمد دهقان دار

زبان به عنوان یکی از اصول آموزش ریاضی ۲۴ لیلا احمدلو، مریم استادی، افسانه حیدری ارجلو،

زهرا صباغ زاده، نرگس عقیلی

شمارش با رابطه ی $1+2+3+\dots+n = nI$ ۲۷ قاسم حسین قنبری

روایت معلمان: تدریس شهودی و اثر آن بر یادگیری دانش آموزان ۳۳ علیرضا کردیانی

پرونده ی یک موضوع: ICT

استفاده از ICT در آموزش ریاضیات ۳۵ سیده زهرا ابوالحسنی

جایگاه تکنولوژی آموزشی در فرآیند یاددهی-یادگیری هندسه ی فضایی ۴۲ نورالدین بهین آیین، مریم غلامی

معرفی کتاب: آموزش ریاضیات به کمک ICT ۴۸ مانی رضائی

مثال هایی برای اصل لانه کبوتری ۵۰ محمدحسین کریمیان، مجتبی توسل

استفاده از اصل لانه کبوتری در حل مسائل متنوع ۵۳ الکساندر یوری ویک والنا بسوونا ترجمه: فرشته رنگی

دیدگاه: درسی که از آموزش ریاضی آموختیم ۵۶ زهرا صباغ زاده فیروزآبادی

چکیده های پایان نامه ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی ۵۹

نامه های رسیده ۶۳

مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تاپه شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، بهرست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیات تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
- هم چنین:
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاماً معین نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی شود.

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی

۱۵۸۷۵ - ۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱-۹۰ (داخلی ۲۷۲)

۸۸۲۰۵۸۶۲ و

شماره ی پیام گیر مجلات تخصصی رشد:

۰۲۱-۸۸۲۰۱۴۸۲-۱۱۲

E-mail: riaz@roshdmag.ir

چاپ: شرکت انست (سهامی عام)

شمارگان: ۱۴۰۰۰

معلمان ریاضی؛

مخاطبان و صحنه گردانان اصلی مجله

دغدغه‌ی اصلی مجلات رشد تخصصی

بی‌پشتوانه و بی‌بها، جلوگیری می‌نماید، و چنین شد که مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نیز برنامه‌ی سالانه‌ی خود را ارائه کرد. در این برنامه، جزئیات محتوای مجلات و نسبت آن‌ها با یکدیگر، بیان شده است. به‌طور مشخص مسئولیت کلیدی مجلات تخصصی، ارتقای آموزش معلمان و به زبان ادبیات پژوهشی روزآمدتر، توسعه‌ی دانش حرفه‌ای یا همان توسعه‌ی دانش موضوعی، دانش روشی و دانش پداگوژیکی میخواست.

محتوای برنامه‌ی سالانه مجله

با توجه به این امر، طبق روالی که چندین سال است و هیئت تحریریه بر آن توافق نموده، برنامه‌ی ارائه شده که از محتوای مجلات استخراج گردیده و در حال حاضر، راهنمای تولید هر شماره است، شامل بخش‌های زیر می‌باشد:

○ دست کم یک مقاله‌ی تألیفی یا ترجمه‌ای در حوزه‌ی تخصصی آموزش ریاضی که هدف عمده‌ی آن‌ها، تعمیق دانش نظری معلمان و آشنا نمودن علاقه‌مندان با مبانی نظری کلاسیک، جاری و آرمانی این حوزه است. این مقالات، عمدتاً پژوهشی‌اند و به دلیل ماهیتشان، طولانی، سخت و درک آن‌ها نیازمند دقت و زمان بیش‌تر است. در نتیجه، سعی می‌شود تا با سوتیترهای مناسب، هم به خواننده در انتخاب مقاله، کمک شود و هم امکان تقسیم مقاله به چند بخش و مطالعه‌ی دقیق آن در چند نوبت فراهم گردد.

○ یک یا چند مقاله‌ی موضوعی ریاضی که هدف اصلی آن‌ها، دانش‌افزایی موضوعی معلمان ریاضی و آماده‌تر کردن ایشان برای ورود به عرصه‌های ابتکاری و خلاق موضوعات ریاضی مدرسه‌ای است. این مقاله‌ها، می‌توانند زمینه‌های عملی و مناسبی برای

دغدغه‌ی اصلی مجلات رشد تخصصی، آموزش معلمان در حوزه‌های مختلف و جدی گرفتن خواسته‌ها، نیازها، آرمان‌ها و اعتلای آن‌هاست. بدین سبب، هر از چند گاهی، این دغدغه پررنگ‌تر می‌شود و همه‌ی دست‌اندرکاران این مجلات و سیاست‌گذاران آن برای اطمینان از این که مخاطبان اصلی با دقت در نظر گرفته شده‌اند، اقدام به ارزیابی‌های عرضی و طولی مجلات می‌کنند. ما نیز به عنوان مسئولیت‌پذیران این مجله، علاقه‌مندیم تا با ارائه‌ی شواهد مستند، به این ارزیابی‌ها کمک کنیم و از نتایج آن‌ها برای توسعه‌ی کیفی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، استفاده نماییم. در واقع، هدف این نوشتار آن است که از خوانندگان خود تقاضا کنیم تا با نقدهای منصفانه، بی‌غرضانه، صریح و بدون تعارف، هم زحمت کشیده و نقش دیده‌بان را ایفا کنند و هم به عنوان عضوی از این خانواده‌ی وسیع، با تلاش خود، محتوای مجله را غنی‌تر و غنی‌تر کنند.

اما برای انجام این مهم - که همیشه در طول زمان، به شکل‌های متنوع و ظریفی انجام شده است - نیازمند داشتن اطلاعات لازم و سازوکارهای عملی هستیم. به این دلیل، از دو سال پیش، مسئولان دفتر کمک آموزشی، از هیئت‌های تحریریه مجلات تخصصی درخواست نمودند تا برنامه‌های سالانه‌ی خود را تنظیم کرده و نسبت به اجرای با کیفیت آن‌ها، متعهد شوند. این حرکت که از زمان مدیر مسئول محترم قبلی شروع شد و با مدیر مسئول محترم جدید تداوم یافته است، گام مهمی در جهت پاسخ‌گو کردن و پاسخ‌گو شدن است که باید آن را به فال نیک گرفت. مهم‌تر این که داشتن برنامه، حدود و ثغور فعالیت را روشن می‌کند و از کارهای

دخل و تصرف به جای معلمان در برنامه‌ی درسی کلان یا به اصطلاح امروزی، برنامه‌ی درسی مدرسه - محور را فراهم نمایند. در نتیجه در این قسمت، تنها مباحثی مورد پذیرش قرار می‌گیرند که با برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای. که تجلی آن کتاب‌های درسی ریاضی است، هم‌سویی داشته باشند. این مقالات، تألیفی یا ترجمه‌ای هستند و معلمان ریاضی در تهیه‌ی این بخش، مشارکت چشم‌گیری دارند که از همه‌ی آن‌ها قدردانی می‌شود.

○ یک یا چند مقاله‌ی مروری آموزشی مرتبط با برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای و چگونگی تدریس و ارزشیابی که ترکیبی از تألیف و ترجمه‌اند و باز هم معلمان در این بخش، فعالانه سهمیم هستند.

○ ستون روایت معلمان که ویژه‌ی تجربه‌های کلاس درس است و کاملاً برگرفته از کلاس‌های واقعی تدریس ریاضی است.

○ ستون دیدگاه که عرضه‌ی منحصربه‌فردی برای طرح دیدگاه‌ها، نقدها و نظرهای خوانندگان مجله است. ویژگی این ستون آن است که در چارچوب سیاست‌گذاری‌های کلان مجلات، دیدگاه‌ها بدون ویرایش چاپ می‌شوند و دیگران فرصت دارند که پاسخ یا بازتاب خود را بر آن نوشته، در همین ستون و باز هم بدون ویرایش، عرضه کنند.

○ گزارش‌های متنوع از برگزاری کنفرانس‌ها و همایش‌ها، نشست‌های تخصصی، کارگاه‌های آموزشی و فعالیت‌های ابتکاری معلمان در شهرهای مختلف که همگی مرتبط با تدریس و یادگیری ریاضی‌اند.

○ چکیده‌ی پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی در دانشگاه‌های مجری این دوره از زمان تأسیس دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی در ایران که خوانندگان را با تحقیقات انجام شده در این حوزه آشنا می‌کند. انتظار می‌رود که این بخش، بتواند در خدمت کسانی باشد که به ادامه‌ی تحصیل خود در این رشته فکر می‌کنند. از زمانی که این بخش به مجله اضافه گردید، از دانشگاه‌های مجری دعوت عام شد که در صورت تمایل، چکیده‌های این پایان‌نامه‌ها را با امضای استادان محترم راهنما، برای چاپ در مجله ارسال نمایند. این بخش نیز بدون ویرایش، به چاپ سپرده می‌شود.

○ معرفی کتاب که هر چند شماره یک بار انجام می‌شود. علت این‌کندی، ملاحظات است که در سطوح مختلف، برای معرفی یک کتاب در نظر گرفته می‌شود که مهم‌تر از همه این است که حالت تجاری یا تبلیغاتی به خود نگیرد. علاوه بر این، معرفی‌کننده، کتاب را به خوبی خوانده باشد تا بتواند معرفی آگاهانه و منصفانه‌ای از کتاب را ارائه نماید.

○ پاسخ به نامه‌ها که طبق توافق هیئت تحریریه، به این معناست

که افرادی که لطف کرده و برای مجله مطلب ارسال نموده‌اند یا نقد و نظری داشته‌اند، تنها نامشان ذکر می‌شود و برای حفظ حرمت افراد، به محتوای نامه‌ها و پاسخ‌ها، اشاره‌ای نمی‌شود. البته در مکاتبات فردی با همکاران محترم، به جزئیات توجه می‌شود.

○ ترجمه‌ی عنوان‌های هر شماره به انگلیسی به منظور آشنایی دیگران با ماهیت مجله و تسهیل ارجاع دهی به آن‌ها در صورتی که ضرورتی برای این کار باشد.

○ بالاخره سخن سردبیر که در آن، سعی می‌شود تا حد امکان، به مباحث روز ریاضی مدرسه‌ای در ایران پرداخته شود. هم چنان که در بعضی مواقع نیز مانند همین شماره، درباره‌ی موضوعاتی ضروری مانند برنامه‌ی سالانه‌ی مجله، اطلاع‌رسانی می‌شود.

در هر صورت، مروری بر شماره‌های پیشین مجله نشان می‌دهد که خوشبختانه، همکاری معلمان ریاضی با مجله، به‌طور قابل توجهی بیشتر شده و به‌طور مداوم، این مشارکت افزایشی است. این نکته از اهمیت قابل‌ستایشی برخوردار است زیرا نشان می‌دهد که برنامه‌ی تدوین شده برای مجله، توانسته است در خدمت مخاطبان و صحنه‌گردانان اصلی آن یعنی معلمان ریاضی باشد. به‌طور مثال، محتوای مجله با مقالات مروری و ترویجی در خدمت تدریس روزانه‌ی معلمان بوده و از طریق مقالات نظری، سطح انتظارات آن‌ها را بالاتر برده و شوق ترقی و توسعه را در ایشان ایجاد کرده است. بهترین نمونه‌ی این ادعا، چکیده‌ی پایان‌نامه‌هایی است که تقریباً بدون استثنا، پژوهشگران آن‌ها همگی معلمان رسمی یا غیررسمی ریاضی‌اند و این یعنی رساندن این پیام‌ها به معلمان شاغل که می‌توانم اگر بخواهم! جالب این است که معلمان ریاضی از دور افتاده‌ترین شهرهای ایران - به دلیل توزیع به‌روز و مناسب مجله - توانسته‌اند جزو مخاطبان مجله باشند و ما به خود می‌بالیم که موفق شده‌ایم این ارتباط معنادار را با معلمان ریاضی ایران برقرار کنیم.

آخرین کلام آن که با وجود اشتیاق و تلاش و همت معلمان ریاضی، مجله از بسیاری از اخبار مربوط به تصمیم‌گیری‌های کلان ریاضی به‌طور رسمی بی‌خبر است و در نتیجه، این فرصت طلایی که می‌توانست از طریق مجله، بین سیاست‌گذاران و تصمیم‌گیرندگان و تصمیم‌سازان برنامه‌ریزی و تألیف برنامه‌ها و کتاب‌های درسی ریاضی و معلمان ریاضی که مخاطبان و مجریان و نفع‌بران اصلی آن تصمیمات هستند به وجود آید، تاکنون به معنای واقعی پیش نیامده است.

امیدواریم دانستن و اطلاع‌رسانی را حق یک دیگر بدانیم و اجازه دهیم تا با نقد مشفقانه و بی‌غرضانه، هم دیگر را در کمک به یادگیری ریاضی آینده‌سازان ایران عزیز، یاری رسانیم.

حسابان

در دام مفهوم

حد و نمادها

یوسف آذرنگ

کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی آذربایجان غربی

مقدمه

به کارگیری قواعد و روابط ریاضی این حوزه را به معنای درک مفاهیم آن تلقی کرده‌ایم. این همان هشداری است که کانفری و اسمیت^۱ (۱۹۴۴)، متذکر شده‌اند.

به عقیده‌ی آن‌ها، به دلیل آن‌که وارد دنیایی شده‌ایم که جبر، مکانی برای انجام دادن اعمال ایجاد کرده است. یک خطر واقعی وجود دارد که قادر نباشیم اعمال ریاضی را در یک زمینه‌ی هندسی (یا نموداری) ببینیم. کاپوت^۲ (۱۹۴۴)، هم در مورد فعالیت‌هایی که افراد مختلف در طول تاریخ رشد و توسعه‌ی حسابان داشته‌اند اظهار می‌دارد تمام آن فعالیت‌ها، بازنمایی^۳‌هایی هندسی رضایت‌بخشی داشته‌اند و افراد، بازنمایی‌های معادل را برای فعالیت‌های خود بسیار بیش‌تر از فعالیت‌های امروزی که برای رسم نمودارها انجام می‌شود، در نظر می‌گرفتند. حال سؤال اصلی این است که اگر مفاهیم حسابان را با صورت‌های نمادین در قالب مهارت‌های جبری انجام دهیم، درک نمادین، از این مفاهیم تا چه اندازه است؟ در این مقاله، مشکلات حسابان را در ارتباط با مفهوم حد و نمادها بررسی می‌کنیم. در ابتدا به‌طور خلاصه به ریشه‌های حسابان و بستگی آن به جبر پرداخته می‌شود.

قرن هفدهم را به نوعی می‌توان زمان برخورد مفاهیم جبر، هندسه و حسابان نامید. پیدایش نمادها و علائم ریاضی موجب شد بسیاری از فعالیت‌های ریاضی به سادگی صورت گیرند؛ مهارت‌های جبری توسعه یابند؛ جبر و هندسه باهم پیوند خورند و هندسه‌ی تحلیلی را به وجود آورد تا گام مهمی به سمت ابداع حسابان برداشته شود. ورود اعمال جبری به حسابان، غنای زیادی به این حوزه می‌بخشد و به همین میزان هندسه و حسابان تأثیر متقابلی برهم می‌گذارند تا پایه‌های هندسه‌ی دیفرانسیل بنا شود. لذا قرن هفدهم را می‌توان قرن به تکامل رسیدن بسیاری از پایه‌های ریاضی دانست؛ یعنی جایی که جبر، هندسه و حسابان به شکل ظریفی درهم عجین می‌شوند و هر یک موجبات رشد و توسعه‌ی دیگری را فراهم می‌آورند. بدین ترتیب، نمادگذاری و کشف روابط ریاضی، بیش‌تر حوزه‌های ریاضی را تسخیر می‌کند، چیزی که امروزه در پناه آن قادریم اعمال ریاضی را با امنیت خاطر بیش‌تری انجام دهیم! و حتی دوست داریم هندسه و مسائل آن را هم به روش تحلیلی پاسخ دهیم. حسابان و مفاهیم آن هم از این قاعده مستثنی نبوده‌اند و به کرات دیده‌ایم که

ابداع هندسه تحلیلی با رهایی «اصل هم‌گونی»^۴

رابطه‌ی بین جبر و هندسه را باید در ساده‌ترین مفاهیم آن، یعنی عدد حقیقی و نقطه جستجو کرد. وقتی که طول پاره‌خط را با نماد x و یا مساحت یک مربع را با نماد x^2 نمایش می‌دهیم، در واقع پلی بین مفاهیم جبر و هندسه برقرار کرده‌ایم. هندسه‌ی تحلیلی در سایه‌ی ارتباط بین جبر و هندسه توسط فرما و دکارت ایجاد شد تا بین منحنی‌ها و معادلات، رابطه برقرار شود. ابداع هندسه‌ی تحلیلی باعث ایجاد انقلابی عظیم در ریاضی شد زیرا تا قبل از آن، طبق نظر یونانیان، یک متغیر با طول یک پاره‌خط، حاصل ضرب دو متغیر با مساحت یک مستطیل و حاصل ضرب سه متغیر با حجم یک مکعب مستطیل متناظر بود. یونانیان نمی‌توانستند از این فراتر بروند. زیرا به دلیل سه بعدی بودن جهان، x^4 و x^5 و ابعاد بالاتر برای آن‌ها

بی‌معنی بود. این اصل نزد ریاضی دانان یونانی معتبر بود و به «اصل هم‌گونی» معروف بود. در هندسه‌ی تحلیلی که توسط دکارت به تکامل رسید، x^2 تنها دلالت بر یک مساحت نمی‌کرد، بلکه دال بر جزء چهارم در تناسب $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2}$ بود و دکارت نشان داد که چگونه با استفاده از پاره‌خطی به عنوان واحد طول، هر توانی از یک متغیر یا حاصل ضرب هر تعدادی از متغیرها را می‌توان به صورت یک طول نشان داد.

کاپوت (۱۹۹۴)، به نقل از مرتز تاخ^۵ (۱۹۸۹)، در مورد اهمیت کار دکارت بیان

می‌کند «دکارت، اساساً سنت یونانی‌ها را شکست و به جای در نظر گرفتن x^2 و x^3 به عنوان مساحت و حجم، آن‌ها را به عنوان خطوط تعبیر نمود. این کار باعث شد تا دکارت، اصل هم‌گونی را با حفظ معنی هندسی آن رها کند. واضح است که دکارت، هم‌گونی در تفکر را جایگزین هم‌گونی در شکل کرد و این گامی بود که جبر هندسی او را انعطاف‌پذیرتر ساخت. هم‌چنان که امروزه می‌خوانیم xx یعنی مربع x بدون این که حتی یک مربع را در چشم ذهن خود ببینیم» (صص ۱۰۳ و ۱۰۴).

با ابداع هندسه‌ی تحلیلی و ایجاد رابطه بین هندسه و جبر، راه تازه‌ای برای تکامل ریاضیات گشوده شد و روش مختصاتی، این امکان را فراهم آورد تا مسئله‌های هندسی به یاری رابطه‌ها و

معادله‌های جبری حل شوند. کاپوت (۱۹۹۴)، اظهار می‌دارد که ارکالد و ورناد^۶ (۱۹۸۰)، رفتار موازی آن‌چه را که در طول تاریخ ریاضی شکل گرفته است، در دانش‌آموزان پیدا کرده‌اند. در مطالعه‌ای که آن‌ها با دانش‌آموزان ۱۰ تا ۱۳ سال انجام داده بودند، فرایند مرتبط کردن اعداد به نقاط روی یک خط راست برای آن‌ها بسیار با اهمیت بود. آن‌ها دریافتند، اکثر دانش‌آموزان تمایل داشتند که اعداد را به جای نقاط، به فاصله‌ها متناظر کنند. لذا کاپوت نتیجه گرفته است که هم به لحاظ تاریخی و هم به لحاظ روان‌شناسی، معرفی کردن یک کمیت به صورت پاره‌خط به جای نقاط یا معرفی طول به جای موقعیت مکانی، ساده‌تر است.

ریشه‌های حسابان و بستگی آن با جبر

حسابان یکی از بزرگ‌ترین ابداعات ریاضی در تاریخ است که به طور هم‌زمان توسط نیوتن و لایب‌نیتز و با دو رویکرد متفاوت به وجود آمد. محققان مختلف، نظرات متفاوتی نسبت به ریشه‌های حسابان و چگونگی پیدایش آن دارند که کاپوت (۱۹۹۴)، سه ریشه از حسابان را در نظر گرفته است که به وضوح، به طور پیچیده‌ای باهم عجین شده‌اند:

۱. ریشه‌ی اول، مربوط به موارد هندسی و در ارتباط با محاسبه‌ی سطح‌ها، حجم‌ها و مماس‌ها است. در واقع این ریشه، عملی بود و برای مثال ابتدا در کار ارشمیدس نمود پیدا کرد.

۲. ریشه‌ی دوم، آمیزه‌ای از علاقه‌های نظری و عملی و شامل توصیف و بهره‌برداری

از تغییرات پیوسته‌ی کمیت‌های فیزیکی است. شروع این ریشه به تصور یونانی‌ها به تولید اشیاء هندسی در اثر حرکت پیوسته برمی‌گردد. اما به طور جدی زمان بروز آن به تلاش‌های فیلسوفان آموزشی برای ریاضی‌وار کردن پدیده‌ی تغییر برمی‌گردد و این ریشه تا دهه‌های قبل از نیوتن و حتی دهه‌ی نیوتن نیز توسعه نیافت. این ریشه توسط فیزیک دانان / ریاضی دانان قرن‌های ۱۸ و ۱۹ که پدیده‌های فیزیکی را بیش‌تر و بیش‌تر کمی کرده‌اند، شکل انتزاعی به خود گرفت.

۳. ریشه‌ی سوم، ذاتاً نظری است که شروع آن با پارادوکس‌های قدیمی زنون است و تداوم آن مربوط به توسعه‌ی نظریه‌ی رسمی حد در قرن ۱۹ است و شامل بیش‌تر تلاش‌هایی

به عقیده‌ی کانفری و اسمیت، به دلیل آن که وارد دنیایی شده‌ایم که جبر، مکانی برای انجام دادن اعمال ایجاد کرده است، یک خطر واقعی وجود دارد که قادر نباشیم اعمال ریاضی را در یک زمینه‌ی هندسی (یا نموداری) ببینیم

بود که یک نظریه‌ی کامل از «بی‌نهایت کوچک‌ها» را نتیجه داد. به گفته‌ی کاپوت (۱۹۹۴)، ریشه‌های اول و دوم حسابان از این لحاظ مهم‌اند که ارتباط نزدیک‌تری با برنامه‌ی درسی مربوط به دانش‌آموزان دارند. هم‌چنین امروزه با اصرار و پافشاری روی روش‌های جبری کارآمد که همه‌جای برنامه‌ی درسی وجود دارند، به نظر می‌آید جایگاه آن‌ها از دست رفته است.

ایده‌ی تغییر و ریاضی‌وار کردن این پدیده که مبنای ریشه‌ی دوم حسابان است، به تدریج از قرن‌های ۱۲ و ۱۵ شکل گرفت. کاپوت به نقل از بویِر^۷ (۱۹۵۹)، اشاره می‌کند در حالی که یونانی‌ها، برخی گمانه‌زنی‌های کیفی روی موضوع حرکت داشته‌اند، اما به نظر نمی‌آید ایده‌ی تغییرات

پیوسته به وسیله‌ی اهمیت هندسی یا مطالعه‌ی آن برحسب گسستگی اعداد توسط آنان مطرح شده باشد. کاپوت اشاره می‌کند به تدریج در قرن‌های ۱۳ و ۱۵ عقاید سیار کلاسیک که تمام حرکت را نتیجه‌ی یک نیروی خارجی می‌دانست، به وسیله‌ی عقاید محرک جای‌گذاری شد؛ به این معنا جسمی که در حال حرکت است، تمایل دارد در حرکت باقی بماند. این عقیده به لحاظ ریاضی، ایده‌ی سرعت در یک نقطه و سرعت لحظه‌ای را ممکن ساخت. اما ابداع یک زبان ریاضی دقیق برای بیان این ایده، قرن‌ها به طول انجامید که شروع آن در قرن ۱۳ و احتمالاً در کار دانس اسکات^۸ و دیگران است. به هر حال با تمام پیشرفت‌هایی که تا قبل از قرن هفدهم در حسابان و شکل‌گیری آن صورت گرفت، دستگاه نمادین مناسبی برای آن پیدا نشد و بیش‌تر به زبان طبیعی و در نمودارها قابل بیان

بود. اما همان‌گونه که شهریار (۱۳۸۰)، ابراز کرده است «پیشرفت جبر، روش‌های آن و استفاده از نمادهای حرفی، در پیشرفت یکی از شاخه‌های تازه‌ی ریاضیات، یعنی آنالیز ریاضی، تأثیر جدی داشته است. نوشتن ساده‌ترین مفهومی‌های آنالیز مثل کمیت متغیر و تابع، بدون وجود نمادهای حرفی ممکن نبود. در آنالیز ریاضی به‌ویژه در حسابان به صورتی گسترده از ابزار جبر رسمی استفاده می‌شود» (ص ۹۵).

علاوه بر این، شهریار در مورد ارتباط جبر و آنالیز بیان می‌کند: «در سده‌های ۱۷ و ۱۸، جبر و آنالیز در بستگی کامل با یکدیگر پیش رفتند. تصور تابعی در جبر نفوذ کرد و نیوتن هم توانست آن را غنی‌تر کند. از طرف دیگر جبر، دستورها و روش‌های تبدیلی خود را به آنالیز داد که برای محاسبه‌ی انتگرال و نظریه‌ی معادله‌های دیفرانسیل نقش عمده‌ای به عهده گرفتند. مهم‌ترین پیشامد این دوره، پیدایش دوره‌ی جبر اولیه بود» (ص ۱۰۲).

به گفته‌ی کاپوت (۱۹۹۴)، این فعالیت‌ها باعث شد هم‌چنان که هندسه‌ی تحلیلی حوزه فعالیت خود را گسترش داد (هر معادله منجر به یک منحنی شد)، همین نقش را هم سری‌های نامتناهی بازی کنند، زیرا می‌توانستند به عنوان کلاس جدیدی از توابع بررسی شوند. در واقع هم نیوتن و هم لایب‌نیتز، حسابان را تعمیمی از جبر تلقی کردند؛ جبر نامتناهی یا جبری که تعداد نامتناهی از جملات را بررسی می‌کند. مانند آن‌چه که در سری‌های نامتناهی وجود دارد. شهریار در مورد تفاوت جبر و آنالیز و شروع آن اشاره می‌کند که تفاوت جبر و آنالیز در سده‌های ۱۸ و ۱۹، به این ترتیب مشخص شد که جبر با موضوع خاص خود که محدود است با نوعی گسستگی سروکار دارد. این ویژگی را الباجوفسکی در نیمه‌ی اول قرن نوزدهم در کتاب خود به نام «جبر با محاسبه‌ی محدوده‌ها» مشخص کرد. وی در ادامه توضیح می‌دهد که جبر با عمل‌های اصلی (جمع و ضرب) سروکار دارد و این عمل‌ها به تعداد محدودی انجام می‌گیرد. آنالیز نمادها را که بدون آن‌ها نمی‌توانست

حتی اگر دانش‌آموزان بپذیرند که غیرممکن است به حد دنباله برسند، باز هم تمایل دارند این امر نشدنی و محال را با توجه به زمان محدود و حساب محدود بشری با ماشین حساب‌های الکترونیکی ممکن سازند. آن‌چه به خوبی مشهود است این است که یک تضاد ذهنی در رسیدن یا نرسیدن به مقدار حد برای دانش‌آموزان ایجاد می‌شود

معنایی داشته باشد از جبر گرفت. از طرف دیگر، جبر اغلب از اندیشه‌ی پیوستگی نیز استفاده می‌کند، ولی به تدریج تصور تعداد نامحدودی «چیز» به صورت جدید و خاص خود، بر جبر دوره‌ی اخیر مسلط می‌شود. بالاخره فرودنتال (۱۹۷۹)، تأکید می‌کند «اختراع جبر حروفی، هندسه‌ی تحلیلی و حتی حسابان در ابتدا روش‌های سازمان‌دهی دوباره‌ی دانش موجود به وسیله‌ی خلق ابزارهای سازمان‌دهی بود. به تدریج که ثابت شد آن ابزارها بسیار

می‌بینند آن‌هایی هستند که از طریق فرمول‌های ساده‌ی جبری قابل توصیف‌اند و با حرکت‌های نامنظمی که در زندگی روزانه‌شان تجربه می‌کنند. کاملاً نامشابه است. از این‌رو، آن‌ها به لحاظ شناختی، نمی‌توانند کاربردهای مدرسه را با تجربه‌های روزانه‌ی خود مرتب سازند» (ص ۸۸).

شیوه‌ی ارائه‌ی مفاهیم ریاضی و ازجمله حسابان در قالب نمادین و مجرد که اکثر معلمان ریاضی به آن عادت کرده‌اند، شاید مجال کمتری به دانش‌آموزان بدهد که با تأمل و نگاه عمیق

آرتیگ^۱ (۱۹۹۶ به نقل از لگراند ۱۹۹۳)، اظهار می‌دارد که «فعالیت‌های ریاضی در آنالیز، قویاً وابسته به مهارت‌ها و شایستگی‌های جبری است. ولی هم‌زمان، ورود به «تفکر آنالیزی» ما را وادار می‌کند که از «تفکر جبری» فاصله بگیریم» (ص ۲۶). به عنوان مثال، وی به این موضوع اشاره می‌کند که

در آنالیز، نامساوی‌ها نقش غالب‌تری بر تساوی‌ها دارند و استدلال موضعی با شرایط کافی روی عبارات جبری، به صورت روش اصلی در استدلال‌ها درم آید.

تال^۱ (۲۰۰۲)، هم در ارتباط با مشکلات یادگیری حسابان، برنامه‌های درسی را خطاب قرار می‌دهد. وی بیان می‌کند بسیاری از برنامه‌های درسی حسابان، به سمت یک معنی منطقی از دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری بنا شده‌اند و به همین دلیل، برنامه‌ریزان تصمیم گرفته‌اند حسابان را با ابدهی حد شروع کنند. اگرچه چنین شروعی پایه و اساس یک منطق نظری زسمی است؛ اما چنین شروعی، الزاماً یک نقطه‌ی خوب برای آغاز یادگیری دانش‌آموزان نیست. در ارتباط با همین، تال (۱۹۸۵) اشاره می‌کند که معمولاً نخستین رویارویی با حسابان چنین است که با دو نقطه‌ی A و B روی یک نمودار شروع می‌شود و رفته‌رفته، با نزدیک و نزدیک‌تر شدن A به B، وتر AB نیز به خط مماس در نقطه‌ی A میل می‌کند. وی اشاره

می‌کند زبان رسمی به کار رفته در این مرحله می‌تواند موجب بروز مشکلات زیادی برای یادگیری حسابان توسط دانش‌آموزان شود. تال (۲۰۰۲)، در جایی دیگر یادآور می‌شود که تعداد کمی از دانش‌آموزان را یافته‌ام که به طور طبیعی مفهوم حد را برای خودشان ابداع کنند. برای مثال، وی نمودار سهمی $y = x^2$ را همراه خطی که از نقاط (۱) و (۱) و (k, k^2) می‌گذرد معرفی کرده و از

کاپوت (۱۹۹۴)، وضعیت ریاضی دانش‌آموزانی را که به‌طور سنتی وارد مطالعه‌ی حسابان می‌شوند، متناظر با جنبه‌های مشخصی از ریاضیات یونانی می‌داند. او بیان می‌کند «در ابتدا دانش‌آموزان اشخاصی حسابی هستند و درکشان از حروف جبری به جای متغیرها، مجهولات است و به‌طور واقعی، مفهومی از شتاب ندارند. برای آن‌ها، انواع حرکتی که در درون ریاضیات

توانستند این فرآیند را توضیح بدهند.

این مثال، دو چیز را به خوبی نمایان می‌سازد، اول این که وقتی دانش‌آموزان از الگوریتم‌ها و روش‌های قاعده‌مند جبری استفاده می‌کنند، در پناه آن‌ها راحت‌تر و به نتیجه‌ی کار خود مطمئن‌تر هستند و دوم این که، وقتی اصول اولیه‌ی حسابان به روش هندسی و بر مبنای ایده‌ی حد آموزش داده شوند، دانش‌آموزان را آزار خواهد داد. زیرا اساس این مفاهیم درگیر فرآیندهای نامتناهی است و آن‌ها به راحتی نمی‌توانند با چنین فرآیندهایی کنار آیند.

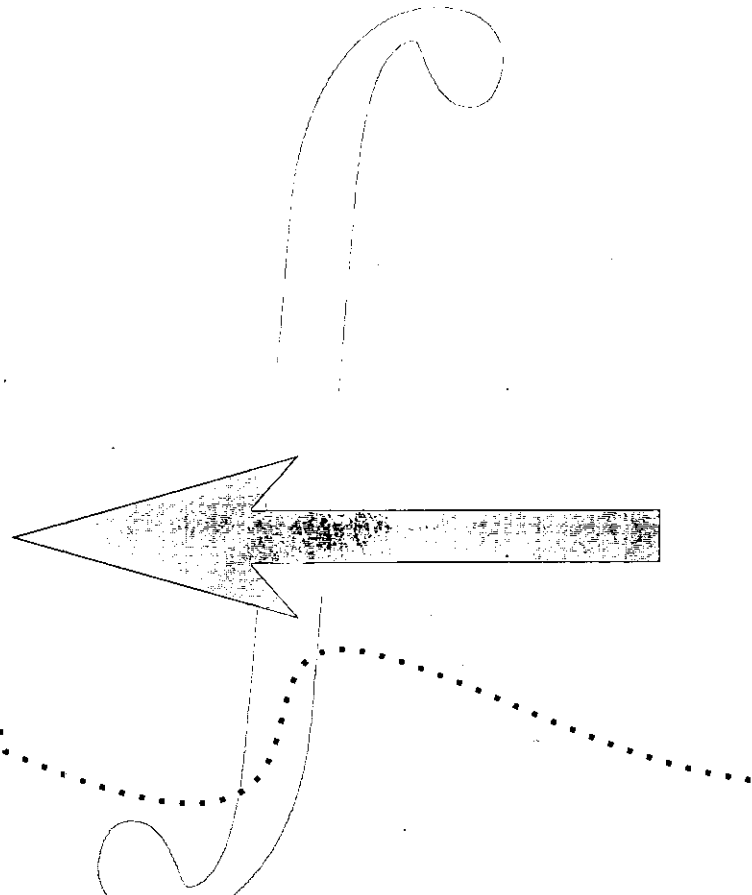
در هر حال تال با اشاره به این مثال‌ها، نتیجه‌گیری می‌کند که فرآیند حدگیری شاید یک مفهوم ریاضی «شهودی» باشد؛ اما یک مفهوم «شناختی» نیست و ابراز می‌دارد «اگر ایده‌ی محاسبه‌ی ضریب زاویه‌ی مماس به وسیله‌ی فرآیند حدگیری، یک مفهوم روان‌شناسی شهودی بود؛ دانش‌آموزان در روبه‌رو شدن با این مسئله فوراً با یک استدلال حدی پاسخ می‌دادند» (ص ۴).

بسیاری از محققان دیگر هم مشکلات این حوزه را در ارتباط با مفاهیم و اشیای آن بررسی کرده‌اند. به عنوان نمونه، می‌توان از بردنباخ^{۱۱} (۱۹۹۲)، و اسفارد^{۱۲} (۱۹۹۱)، وینر و دریفوس (۱۹۸۹)، بندر^{۱۳} (۱۹۹۶)، مک‌دونالد^{۱۴} (۲۰۰۰)، گری^{۱۵} (۲۰۰۲)، باگنی^{۱۶} (۲۰۰۳)، تال و آکو^{۱۷} (۲۰۰۳) نام برد. هریک از این افراد از زوایای مختلفی مشکلات مربوط به مفاهیم حسابان مانند تابع، دنباله و سری، اعداد حقیقی، حد و مشتق را به تصویر کشیده‌اند که به اختصار به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود.

آرتیگ (۱۹۹۶)، با اشاره به این که توابع می‌توانند دو چهره‌ی فرآیندی و شیئی داشته باشند، از وینر و دریفوس (۱۹۸۹)، نقل می‌کند قاعده‌ای که دانش‌آموزان برای تعیین یک تابع به کار می‌برند با تعریف رسمی این مفهوم- حتی برای دانش‌آموزانی که می‌توانند این تعریف را به کار برند- متفاوت است. این در حالی است که اسفارد (۱۹۹۱)، نقل شده از تال و آکو (۲۰۰۳)، تمایزی بین ادراک عملیاتی^{۱۸} و ادراک ساختاری^{۱۹} یک تابع ایجاد می‌کند، که در آن، مقدار یک تابع برای هر ورودی x با ادراک عملیاتی آن متناظر است. با وجود این در نظر گرفتن یک نمودار به عنوان یک کل انسجام‌یافته یا به عنوان یک شیء، با ادراک ساختاری مفهوم تابع متناظر است و نتیجه می‌گیرد که دسترسی به ادراک ساختاری توابع مشکل است.

مک‌دونالد و دیگران (۲۰۰۰) هم، درک مفهوم تابع را

دانش‌آموزان خواسته بود شیب خط مورد نظر را بنویسند و توضیح دهند که چگونه می‌توانند شیب خط مماس را در نقطه‌ی (۱ و ۱) بیابند. تال بیان می‌کند فقط یکی از دانش‌آموزان با بررسی حد تابع وقتی که $k \rightarrow 1$ از عهده‌ی این کار برآمد. باز هم در تأیید همین مطلب تال (۲۰۰۲)، مثال دیگری از دانش‌آموز ۱۵ ساله‌ای به نام جیمز ذکر می‌کند که با اصول و مبنای اولیه‌ی حسابان آموزش داده می‌شود. در ابتدا، معلم ایده‌ها را برحسب یک تصویر توضیح می‌دهد که چگونه مدار به موقعیت مماس نزدیک می‌شود. سپس او با مثال‌های عددی برای تابع $y = x^2$ ، کار را ادامه داد. برای این کار، در ابتدا برای مقادیر $x = 1$ و $x = 2$ و در ادامه به ترتیب شیب خط‌ها را از ۱ به ۲، از ۱ به ۱/۱ و از ۱ به ۱/۰۱ محاسبه کرد. سپس این ایده‌ها را به لحاظ جبری در نظر گرفت و به صورت $x^2 - (x + \Delta x)^2$ بر Δx نوشت. بعد از محاسبه‌ی شیب خط برای $y = x$ و $y = x^2$ ، معلم الگوی کلی مشتق x^n را به فرم nx^{n-1} نمایان ساخت و نشان داد که چگونه این قاعده برای چند جمله‌ای‌های کلی کار می‌کند. جیمز بعد از کلاس به معلم گفت «شما همیشه پیش از پرداختن به روشی ساده برای انجام دادن آن، روش‌های دشوار را به ما نشان می‌دهید». تال، در ادامه اظهار می‌دارد در این کلاس، تمام دانش‌آموزان مشتق گرفتن از چند جمله‌ای‌ها را یاد گرفتند، اما هیچ‌یک از آن‌ها



قرن ۱۷ به وسیله ی والیس^{۲۱} و منگولی^{۲۲} معرفی شد و به وسیله ی کوشی تکامل یافت، اشاره می کند ایده ی حد، عمدتاً به وسیله ی بازنمایی های کلامی

معرفی شد و تعریف وایراشتراس از حد، توسعه ی یک بازنمایی مدرن از حد بود. در واقع باگنی (۲۰۰۳)، با این توصیفات نشان می دهد که بازنمایی های کلامی، بیش تر حاصل ایده ی بی نهایت کوچک های بالقوه بوده است و در آن معمولاً بی نهایت کوچک های واقعی مورد توجه نبوده اند. لذا اگر دانش آموزان وجه فرآیندی حد را راحت تر درک می کنند، شاید به این دلیل است که تاریخ توسعه ی حسابان نیز وضعیت مشابه آن را داشته است. باگنی، در ادامه ی همین موضوع و با اشاره به انواع

گذر از جبر به حسابان گذر از فرآیندهای متناهی به فرآیندهای نامتناهی است. دانش آموزان با توانمندی ها و مهارت هایی که در جبر یاد گرفته اند پایه حوزه ی حسابان می گذارند. آن ها با انجام رویه ها بر مفاهیم حسابان، شاید وجود فرآیندهای نامتناهی را حس نکنند. لذا تکنیک های موجود در این حوزه، برای مفاهیمی از قبیل حد، دنباله، مشتق و غیره تا حدود زیادی فرآیندهای نامتناهی موجود در این مفاهیم را پنهان می کند و این کار موجب می شود که دانش آموزان، همان اعمال رویه ای را که در جبر انجام می دادند، در حسابان نیز دنبال کنند

بازنمایی های کلامی و نمادین که در طول تاریخ و در جریان توسعه ی مفهوم حد وجود داشته است، بیان می کنند «بازنمایی های کلامی به سختی، به طور کامل مفهوم حد را بیان می کنند و با توجه به این که تعارض های شناختی در یادگیری حد ها وجود دارد، بازنمایی کلامی می توانند هم به عنوان یک محدودیت و هم یک کمک برای ساختن این مفهوم در نظر گرفته شوند» (ص ۲). البته بد نیست اشاره شود که بازنمایی نمادین از مفهوم حد، مفهوم بی نهایت کوچک ها را در خود کتمان کرده است و همه می دانیم به کارگیری صورت های نمادین حد و انجام اعمال جبری با آن، همواره به معنای درک نمادین مفهوم حد نبوده است. به همین دلیل است که تال (۱۹۹۴)، اشاره می کند اکثر

پیش شرطی برای درک مفهوم دنباله می دانند. آن ها در باب اهمیت این موضوع بیان می کنند: «اهمیت درک غنی توابع به عنوان پیش شرطی برای درک بسیاری از پدیده های اساسی حسابان، اهمیت انجام تحقیق راجع به چگونگی درک و فهم دانش آموزان از مفاهیم حسابان را برجسته کرده است و ما معتقدیم برای داشتن یک درک عمیق از مفهوم دنباله، فهم و درک مفهوم تابع ضروری است» (ص ۸۱). زیرا آن ها در بررسی درک دانش آموزان از دنباله دریافتند که تصور مفهومی همه ی دانش آموزان مورد مطالعه از دنباله این بود که دنباله را فهرستی از اعداد می دانستند و درک دنباله به عنوان تابع برای آنان مشکل تر بود.

بندر (۱۹۹۶)، با ارجاع به بُعد تدریسی مفهوم حد و دنباله اشاره می کند در بسیاری از موارد حتی پنداره ها و ادراکات پویا هم برای شکل گیری اولیه ی این مفاهیم کمکی نمی کنند. وی یادآور می شود بسیاری از دانش آموزان به اشتباه تصور می کنند که یک دنباله ی ریاضی، عنصر آخر را در اختیار می گیرد یا این که حداقل یک دنباله می تواند به چنین عنصری برسد (هرچه که رسیدن معنی دهد) که اساس شکل گیری این بدفهمی اغلب در تدریس ریاضی است. به عنوان مثال زمانی که عدد π به وسیله ی تقریب معین می شود:

دانش آموزان یک دنباله از چندضلعی ها را در نظر می گیرند که رأس های آن بیش تر و بیش تر می شود تا آن جا که در نهایت به صورت یک دایره درآید. حتی اگر معلم دقیقاً از چنین بیان اشتباهی جلوگیری کند، دانش آموزان هنوز هم به سادگی تلقی می کنند که دایره، عنصر آخر دنباله خواهد بود. اولاً به خاطر استدلال های بصری و در ثانی به دلیل این که هدف از درس، تنها معین کردن یک حد به وسیله ی دنباله ای از عناصر است. لذا معلم چه به طور شفاهی، خواه توضیح دهد یا ندهد که نمی توان به آن حد دست یافت، تمام فعالیت ها موجب ایجاد این تلقی می شود. حتی اگر دانش آموزان پذیرند که غیرممکن است به آن برسند، باز هم تمایل دارند این امر نشدنی و محال را با توجه به زمان محدود و حساب محدود بشری با ماشین حساب های الکترونیکی ممکن سازند.

آن چه به خوبی مشهود است این است که یک تضاد ذهنی در رسیدن یا نرسیدن به مقدار حد برای دانش آموزان ایجاد می شود. از طرف دیگر، مفهوم بی نهایت بزرگ و بی نهایت کوچک هم یکی از موانع معرفت شناسی^{۲۳} در یادگیری مفاهیم حسابان است. باگنی (۲۰۰۳) با توجه به سیر تاریخی ایده ی حد که از

4. Comfrey, J. & Smith, E. (1994). Comments on James Kaput's Chapter "Democratizing Access to Calculus: New Routes to Old Roots".

5. Gray, E. (2002). Processes and Concept as "False Friends" In D. Tall & M. O.J. Thomas (EDS). **Intelligence, Learning and Understanding Mathematics**, 205-217, Post Pressed, Flaxton Australia.

6. Kaput, J. (1994). Democratizing Access to Calculus: New Routes to Old Roots. In **Mathematical Thinking and Problem Solving**. Edited by A.H. Schoenfeld.

7. McDonald M.A. Mathews, D.M. & Strobe, K.H. (2000). Understanding Sequences: A Tale of Two Objects. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld & Kaput (EDS), **Research in Collegiate Mathematics Education IV**, (PP. 77-102), Providence, RI: American Mathematical Society.

8. Pimm, D. (2002). The Symbol Is and Isn't The Objects. In D. Tall & M.O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and Understanding Mathematics**, 257-271 Post Pressed Flaxton Australia.

9. Demarois, P. (2006). **Begining Algebra Student's Image of Function Concept**.

10. Skemp, R.R. (1989). **Mathematics in the Primary School**. London: Routledge.

11. Tall, D. (2002). Continuities and Discontinuities in Long Term Learning Schemas. In D. Tall & M. O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and Understanding Mathematics**, 151-157, Post Pressed, Flaxton Australia.

12. Tall, D. (1994). **Cognitive Difficulties in Learning Analysis**. Mathematics Education Research Centre, Warwick University.

13. Tall, D. (1995). **Understanding the Calculus**. Mathematics Education Research Centre, Warwick University.

14. Tall, D. & Gray, E. & Ali, M. B. & Crowley, L. & De Marois, P. & McGrowen, M. & Pitta, D. & Pinto, M. & Thomas, M. & Yusuf, Y. (2001). **Symbols and The Bifurcation Between Procedural and Concept Thinking**. Mathematics Education Research Centre, Warwick University.

15. White, P. & Michelmores, M. (2002). Teaching and Learning Mathematics by Abstraction. In D. Tall & M.O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and understanding Mathematics**, 235-255, Post Pressed, Flaxton Australia.

۱۶. آرتینگ، میشل؛ دی پیم، آلپ (۱۹۹۶). آموزش و یادگیری آنالیز مقدماتی، ترجمه‌ی علیرضا مدقالجی. (۱۳۷۹ - ۱۳۸۰). مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۵۷، صص ۲۳ تا ۳۱، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۷. شهریاری، پرویز (۱۳۸۰) سرگذشت ریاضیات. نشر مهاجر.

۱۸. فرودنتال، هانس. (۱۹۷۹). ریاضی جدید یا آموزش جدید. ترجمه‌ی زهرا گویا و سحر ظهوری زنکنه (۱۳۸۱). مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۷۰، صص ۲۹. دفتر انتشارات کمک آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۹. تال، دیوید. (۱۹۹۶). تکنولوژی اطلاعات و آموزش ریاضی: اشتیاق‌ها، امکان‌ها و واقعیت‌ها، ترجمه‌ی شیوا زمانی. (۱۳۷۵). مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۴۷، صص ۱۱ تا ۲۳، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

دانش آموزانی که وارد دانشگاه می‌شوند، به‌وضوح ایده‌ی حد را درک نکرده‌اند و بیش‌ترین چیزی که به آن توجه دارند، فرآیندی است که نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود و این درک را جایگزین مفهوم مقدار حد می‌کنند.

به هر حال، بسیاری از مشکلات دانش‌آموزان در درک مفاهیم حسابان ناشی از نمادهای حرفی و انجام اعمال جبری با آنهاست؛ نمادهایی که در طول تاریخ برای ساده‌سازی مفاهیم به کار گرفته شده‌اند. در ادامه‌ی مقاله، به نقش نمادها در یادگیری مفاهیم و همچنین مشکلات ناشی از آنها اشاره می‌شود.

ادامه‌ی مقاله در شماره‌ی بعد...

پی‌نوشت‌ها

این مقاله از فصل دوم پایان‌نامه با عنوان «بسترهای لازم برای یاددهی و یادگیری مفاهیم حسابان در برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای» گرفته شده است که با راهنمایی خانم دکتر زهرا گویا نگارش شده است.

1. Comfrey & Smith
2. Kaput
3. Representation
4. Principle of Homogeneity
5. Mertzbach
6. Errecaide & Vergnavd
7. Boyer
8. Duns Scots
9. Artigue
10. Tall
11. Breidenbach
12. Sfard
13. Bender
14. Mc Donald
15. Gray
16. Begni
17. Akkoc
18. Operational
19. Struactical
20. Epistemological Obstacles
21. Wallis

منابع

1. Akkoc, Hf. & Tall, D. (2003). The Function Concept: Comprehension And Complication.
2. Bagni, Gt. (2003). Historical Roots of Limit Nation. Development@@@@@, Canadian Journal of Sciene, Mathematics and Technology Education.
3. Bender, P. (1996). Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concept, 8th International congress on Mathematics Education (ICME 8). Selected Lecture, Sevilla, 14-21.

رد پای پولیا

بر سنگ قبر آخرین قضیه‌ی فرما

محسن یزدان‌فر

کارشناس ارشد آموزش ریاضی
از دانشگاه شهید باهنر کرمان

مقدمه

ریاضیات با مسئله و ریاضی‌دان با حل مسئله پیوندی ناگسستنی دارند، اما همواره ریاضی‌دانان با مسائلی برخورد می‌کنند که به آسانی تسلیم نمی‌شوند. هدف اصلی این نوشتار، پرداختن به مسئله‌ای است که بیش از ۳۵۰ سال، تلاش ریاضی‌دانان حرفه‌ای و غیرحرفه‌ای را به خود مشغول کرد تا سرانجام روی در نقاب حل کشید و نماد مربعی را که هالموس آن را از بزرگ‌ترین یادگارهای خود می‌داند و معمولاً ریاضی‌دانان آن در انتهای برهان‌ها قرار می‌دهند، در پایان برهان خود دید. نمادی که اغلب، آن را سنگ قبر می‌نامند ([۵]، ص ۲۱). برای برخی اگر هر سال ۱ دقیقه باشد، پرداختن به مسئله‌ای که در ۳۵۰ دقیقه حل نشده باشد نیز ممکن است کاری بیهوده باشد. اما اندرو وایلز این جرأت را به خود راه داد، تلاش کرد و سرانجام در سال ۱۹۹۵ اثباتی حدود ۲۰۰ صفحه از آخرین قضیه‌ی فرما ارائه کرد. جورج پولیا آموزش گرجسته‌ی ریاضی در کتاب‌های «چگونه مسئله را حل کنیم» و «خلاصیت ریاضی» راه کارهایی کلی برای حل مسائل ریاضی پیشنهاد می‌کند. در این جا می‌خواهیم آن راه کارها را در مقایسه با حل آخرین قضیه‌ی فرما قرار دهیم.



فرما

توصیف اندرو وایلز از کاوش هفت ساله‌ی خود برای یافتن جام مقدس ریاضی‌دانان: «شاید بهترین توصیف من از ریاضیات با تکیه بر تجربه‌ام این باشد که بگویم ابتدا وارد مجتمع بزرگ تاریکی می‌شوید. اتاق اول تاریک است، کاملاً تاریک! تلوتلو می‌خورید، به اشیاء برخورد می‌کنید و رفته رفته می‌آموزید که هر وسیله کجاست، و سرانجام پس از شش ماه، کلید چراغ را می‌یابید و روشن می‌کنید. ناگهان همه جا روشن می‌شود و می‌توانید ببینید که دقیقاً کجا بوده‌اید. سپس به اتاق تاریک بعدی وارد می‌شوید...»

پولیا: چگونه مسئله را حل کنیم؟

پولیا^۱ در کتاب «چگونه مسئله را حل کنیم» (۱۹۴۴)، چهارچوبی کلی برای حل مسئله و راهنمایی‌هایی در مورد ریزه‌کاری‌های لازم برای پیاده کردن آن، ارائه می‌کند. این چهارچوب کلی، توصیفی چهار مرحله‌ای از فرایند حل مسئله ارائه می‌کند: فهم مسئله، طرح نقشه، اجرای نقشه و بازنگریستن به عقب. ریزه‌کاری‌های مذکور همان توصیه‌های رهگشای پولیا یا به قول خودش «رهگشایی نوین» هستند، که به کمک آن‌ها



پولیا

پولیا بیان می‌کند به ندرت می‌توانیم مسئله‌ای را در نظر بگیریم که مطلقاً نو باشد و با مسائلی که پیش‌تر حل کرده‌ایم، شباهت و مناسبتی در آن دیده نشود. از نظر او اگر چنین مسئله‌ای بتواند موجود باشد، غیرقابل حل خواهد بود

می‌توان راهی به سوی حل مسائل دشوار باز کرد. به عنوان مثال می‌توان به راهبردهایی برای فهم مسئله (مشخص کردن مجهول، رسم شکل، ...)، راهبردهایی برای طرح نقشه (یافتن مسئله‌ای مشابه، بیان مسئله به صورتی دیگر، ...) و راهبردهایی برای اجرای نقشه و بازنگری مجدد اشاره کرد ([۱]). در این جا ادعای آن نداریم که اندرو وایلز ابتدا کتاب «چگونه مسئله را حل کنیم» پولیا را مطالعه کرده و سپس شروع به اثبات آخرین قضیه‌ی فرما نموده است، بلکه هدفمان مقایسه‌ی اندیشه‌های پولیا با راهبردهای منجر به اثبات آخرین قضیه‌ی فرما می‌باشد.

پولیا: فهم مسئله

از نظر پولیا، اولین مرحله در حل هر مسئله، فهمیدن مسئله

است. او بیان می‌کند پاسخ دادن به یک پرسش که فهمیده نشده باشد کاری ابلهانه است ([۱]، ص ۸).

معادله‌ی $x^n + y^n = z^n$ برای $n \geq 3$ جوابی در اعداد صحیح ناصفر ندارد.

فرما^۲ (۱۶۴۵-۱۶۰۱) در حاشیه‌ی نسخه‌ای از آثار دیوفانت، چاپ باشه، که متعلق به خودش بود نوشت: «نوشتن یک مکعب یا دو مجذوری [توان چهارم عدد صحیح ناصفر] به صورت مجموع دو عدد مجذوری، یا به طور کلی، هر توان بیش از دو عدد [عدد صحیح ناصفر] به صورت دو عدد صحیح با همان توان، ممتنع است. من اثبات بسیار جالبی برای آن یافتم که در این حاشیه نمی‌گنجد» ([۴]، ص ۱). حکم اخیر - که صورت ریاضی آن را در بالا دیدیم - آخرین قضیه، حدس یا مسئله‌ی فرما نامیده می‌شود. همان‌طور که اشاره شد، فرما خود مدعی حل این مسئله بود ولی ریاضی‌دانان امروزه معتقدند که فرما در جایی اشتباه کرده و اثبات ساده‌ای برای قضیه‌اش وجود ندارد، اثبات نهایی این قضیه، در واقع حاصل نتایج به دست آمده طی سال‌های بسیار توسط ریاضی‌دانان متعدد و پیشرفت ریاضیات است ([۳]، ص ۱۱).

طرح نقشه

پولیا: تخصیص

از نظر پولیا، تخصیص عبارت است از گذشتن از ملاحظه‌ی دسته‌ای از چیزها به دسته‌ای کوچک‌تر یا تنها به یک موضوع و یک شیء مندرج در آن دسته ([۱]، ص ۱۱۳). پولیا بیان می‌کند معمولاً برای رد یک حکم، به تخصیص می‌پردازیم؛ یعنی از آن دسته یک مورد را انتخاب می‌کنیم که با آن حکم نمی‌خواند (مثال نقض). پولیا بیان می‌کند که باید در ابتدا، هر حالت ساده‌ی خاص را مورد آزمایش قرار دهیم؛ یعنی هر چیز که کمابیش به صورت اتفاقی انتخاب شود و بتوانیم آن را به آسانی امتحان کنیم. اگر این امتحان نشان دهد که آن حالت با حکم کلی بیان شده سازگار نیست، آن حکم باطل می‌شود و کار ما به پایان می‌رسد. ولی اگر آن مورد امتحان شده با حکم توافق داشته باشد، امکان آن هست که از امتحان آن مورد خاص، نکته و اشاره‌ای استخراج کنیم. ممکن است این اندیشه برای ما پیدا شود که حکم باید درست باشد و راهی به ذهن ما تلقین شود که از آن راه بتوانیم به اثبات حکم دست پیدا کنیم ([۱]، صص ۱۱۴ و ۱۱۵).

ریاضی‌دانان متعددی حالت‌های خاصی از مسئله‌ی فرما را

که مطلقاً نو باشد و با مسائلی که پیش تر حل کرده ایم، شباهت و مناسبتی در آن دیده نشود. از نظر او اگر چنین مسئله‌ای بتواند موجود باشد، غیرقابل حل خواهد بود. در واقع، هنگامی که به حل مسئله می‌پردازیم، همیشه از مسائل حل شده‌ی پیش‌تر بهره‌گیری می‌کنیم و نتیجه یا روش حل یا مهارت و تجربه‌ای را که از حل آن‌ها به دست آمده، مورد استفاده قرار می‌دهیم. البته



وایلز

در این جا ادعای آن نداریم که اندرو وایلز ابتدا کتاب «چگونه مسئله را حل کنیم» پولیا را مطالعه کرده و سپس شروع به اثبات آخرین قضیه‌ی فرما نموده است، بلکه هدفمان مقایسه‌ی اندیشه‌های پولیا با راهبردهای منجر به اثبات آخرین قضیه‌ی فرما می‌باشند

مسئله‌ای که از آن بهره‌مند می‌شویم می‌بایستی از جهتی با مسئله‌ی حاضر ارتباط و وابستگی داشته باشد ([۱]، ص ۶۶). فرما، خود نشان داد که معادله‌ی $x^4 - y^4 = z^2$ ، جواب نابدیهی در اعداد صحیح ندارد. او در اثبات خود روشی موسوم به «نزول نامتناهی»^{۲۲} ابداع کرد. این روش بدین صورت است که اگر (x, y, z) یک جواب از اعداد صحیح مثبت برای معادله‌ی $x^4 - y^4 = z^2$ باشد، آن گاه جواب دیگری چون (x_1, y_1, z_1) از اعداد صحیح مثبت به دست می‌آوریم که در آن $z_1 > z$. با ادامه‌ی این روند، دنباله‌ی کاهشی نامتناهی $z, z_1 > z_1 > z_2 \dots$ از اعداد صحیح مثبت به دست می‌آید که امکان‌پذیر نیست. استفاده از روش «نزول نامتناهی» نیز کمکی

در نظر گرفتند و موفق شدند این مسئله را در این حالت‌های خاص اثبات کنند؛ ولی هیچ‌یک از این راه‌حل‌ها منجر به حل مسئله در حالت کلی نشد. به عنوان مثال، مسئله‌ی فرما برای توان ۳ ($x^3 + y^3 = z^3$) از سال‌های ۱۷۹۵ تا ۱۹۴۴ توسط ۱۴ ریاضی‌دان (کاسلر^{۲۳} (۱۷۹۵)، لژاندر^{۲۴} (۱۸۲۳ و ۱۸۳۰)، کالزولاری^{۲۵} (۱۸۵۵)، لامه^{۲۶} (۱۸۶۵)، تیت^{۲۷} (۱۸۷۲)، گونتر^{۲۸} (۱۸۷۸)، گامبیولی^{۲۹} (۱۹۰۱)، کری^{۳۰} (۱۹۰۹)، ریشلیک^{۳۱} (۱۹۱۰)، استاکهاوس^{۳۲} (۱۹۱۰)، کارمیخائیل^{۳۳} (۱۹۱۵)، واندروکوروبوت^{۳۴} (۱۹۱۵)، تو^{۳۵} (۱۹۱۷)، دوارت^{۳۶} (۱۹۴۴)) به روش‌های متفاوت اثبات شد ([۳]، ص ۴۰) و این روند برای مقادیر دیگر تا 4×10^6 اثبات گردید (همان، ص ۴۳۱). ولی باز هم به راه حل نهایی مسئله منجر نشد. بنابراین بررسی و اثبات حالات خاص ممکن است هیچ کمکی به حل نهایی مسئله نکند.

پولیا: مسئله را به صورتی دیگر بیان کنید

پولیا بیان می‌کند آیا می‌توانید صورت مسئله را دوباره بیان کنید؟ آیا می‌توانید آن را به صورتی دیگر بیان کنید؟ از نظر او این پرسش‌ها مایه‌ی تقویت استعداد تغییر شکل دادن مسئله است ([۱]، ص ۷۵).

ریاضی‌دانان متعددی این راهبرد را نیز مورد استفاده قرار دادند که از میان آن‌ها می‌توان به لیگ^{۳۷} (۱۸۴۰)، کریستلس^{۳۸} (۱۹۶۷)، پرین^{۳۹} (۱۸۸۵) و هورویتز^{۴۰} (۱۹۰۸) و کاپفر^{۴۱} (۱۹۳۳) اشاره کرد. به عنوان مثال، لیگ بیان کرد که «اگر آخرین قضیه‌ی فرما برای نمای $n \geq 3$ درست باشد آن گاه معادله‌ی $x^{2n} + y^{2n} = z^{2n}$ تنها جواب‌های بدیهی دارد.» یا کاپفر اثباتی منتشر کرد که نشان داد آخرین قضیه‌ی فرما درست است اگر و تنها اگر معادله‌ی $x^{2n-2} + y^{2n-2} = z^{2n-2}$ جوابی برحسب اعداد صحیح ناصفر دو به دو متباین چون x, y, z نداشته باشد ([۴]، ص ۲۸۴). هیچ‌یک از این فرمول‌بندی‌های جدید و نتایج برآمده از آن‌ها نیز کمکی به حل مسئله‌ی فرما نکرد؛ هر چند تلاش‌ها برای حل این مسئله منجر به نتایج زیبایی از قبیل آن چه ذکر شد، گردید.

پولیا: آیا از مسئله‌ی وابسته‌ای آگاهی دارید؟

پولیا بیان می‌کند به ندرت می‌توانیم مسئله‌ای را در نظر بگیریم

گرفت و نیروی شگفت‌انگیزی یافت ([۳])، صص ۱۰۶ و ۱۰۷).

پولیا: آیا از قضیه‌ای که بتواند سودمند واقع شود آگاهید؟

پولیا بیان می‌کند؛ یک قسمت اساسی از شناخت و دانش ریاضی ما به صورت قضایای پیش‌تر به اثبات رسیده، در ذهنمان ذخیره شده است. به همین دلیل چنین سؤالی مطرح می‌شود که آیا از قضیه‌ای آگاهی دارید که بتواند سودمند باشد؟ طرح این پرسش مخصوصاً در آن هنگام شایسته است که مسئله‌ی ما یک مسئله‌ی ثابت‌کردنی باشد ([۱])، ص ۶۶.

هنگامی که اندرو وایلز از دوستش شنید کنت ریت حدس اپسیلون را اثبات کرده است هیجان زده شد. حدس اثبات شده‌ی اپسیلون همان قضیه‌ای بود که به تعبیر پولیا می‌توانست سودمند واقع شود.

خم‌های بیضوی

مطالعه‌ی مسئله‌های دیوفانتی، یعنی مسئله‌های ناشی از معادلات به صورتی که دیوفانت در قرن سوم ارائه کرده بود، در قرن بیستم با استفاده از عناصری به نام خم‌های بیضوی آغاز شد. خم‌های بیضوی نه بیضی هستند و نه تابع بیضوی؛ آن‌ها چند جمله‌ای‌های درجه‌ی ۳ با دو متغیر به صورت $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx$ هستند که در آن a و b و c اعدادی صحیح یا گویا باشند ([۳])، ص ۸۵.

خم‌های فری^{۲۸}

فری خم بیضوی معادله‌ی $y^2 = x(x-A)(x+B)$ را که در آن A و B اعداد صحیح مثبت متباین هستند و A بر ۱۶ بخش پذیر است را در نظر گرفت و ویژگی‌های آن را مطالعه کرد. او فرض کرد که آخرین قضیه‌ی فرما برای نمای $q \geq 5$ نادرست باشد، یعنی a و b و c اعداد صحیح مثبت دوه‌به‌دو متباین باشند که a زوج است و $a^q + b^q = c^q$. حال فرض کنیم که $A = a^q$ و $B = b^q$ در این حالت خم فری متناظر با این اعداد، ویژگی‌هایی کاملاً متضاد با ویژگی‌های خم‌های بیضوی دیگر نشان می‌دهد. فری متقاعد شد که چنین ویژگی‌هایی امکان ندارد و روشی را برای رسیدن به تناقضی با حدس شیمورا-تانیاما^{۲۹} در سر

دو مسئله‌ی کمکی مهم در جریان اثبات آخرین قضیه‌ی فرما نقش اساسی ایفا کردند. اولین مسئله، حدس فری بود که توسط ریت در ۱۹۸۶ اثبات شد و دیگری اثبات حدس شیمورا-تانیاما بود که ریت آن را در اثبات حدس فری درست فرض کرده بود. اثبات حدس شیمورا-تانیاما، آخرین حلقه‌ی زنجیر اثبات آخرین قضیه‌ی فرما بود که توسط اندرو وایلز صورت گرفت

به حل مسئله‌ی اصلی نکرد و تنها به کمک آن، مسئله‌ی فرما برای حالت $n = 4$ توسط اوایلر^{۳۲} (۱۷۷۰) و لزاندر (۱۸۰۸) اثبات شد (همان، ص ۱۶).

تا این جا به برخی از راهبردهایی اشاره شد که اگرچه ریاضی دانان آن‌ها را مورد استفاده قرار دادند ولی هیچ‌یک به هدف اصلی که همانا اثبات قضیه‌ی فرما در حالت کلی بود منجر نشد.

اندرو وایلز (۱۹۵۳ -)

فردی که می‌خواست آخرین قضیه‌ی فرما را اثبات کند، اندرو وایلز^{۳۴} بود. وقتی که او ده ساله بود به کتابخانه‌ی شهر کوچکش در انگلستان رفت و در کتابی ریاضی، مطالبی درباره‌ی آخرین قضیه‌ی فرما خواند، از جمله این که «طی بیش از سی صد سال هرگز کسی نتوانسته اثباتی برای آن بیابد.»

در سال ۱۹۷۰، اندرو وایلز وارد دانشگاه شد. علاوه بر این که آخرین قضیه‌ی فرما موضوع روز نبود، هیچ استاد راهنمای دکتری حاضر به پذیرش دانشجویی که می‌خواست در مورد چنین معمای باستانی - که باهوش‌ترین مغزهای جهان طی سه قرن از حل آن عاجز بودند کار کنند - نبود. در آن روزها «خم‌های بیضوی^{۳۵}» موضوع داغ برای پژوهش در نظریه‌ی اعداد بودند و وایلز وقتش را بر روی پژوهش روی خم‌های بیضوی گذاشت. در یک غروب گرم تابستان که اندرو وایلز در منزل دوستش چای سرد را مزه‌مزه می‌کرد ناگهان در وسط گفتگو، دوستش گفت «راستی شنیدی کنت ریت^{۳۶} حدس اپسیلون (فری)^{۳۷} را اثبات کرد؟» وایلز هیجان زده شد. می‌دانست که زندگیش در حال تغییر است. رؤیای کودکیش برای اثبات آخرین قضیه‌ی فرما قوت

می‌پروراند، ولی موانعی جدی وجود داشت که برای برطرف شدن به سال‌ها کار نیاز داشت ([۴]، ص ۴۴۰).

حدس شیمورا- تانیاما

هر خم بیضوی، مدولی است (همان، ص ۴۴۵).
در این جا نیازی به توضیح این حدس احساس نمی‌شود چون هدف ما، پرداختن به ساختار اثبات آخرین قضیه‌ی فرما است و شرح و توضیح این حدس، خارج از قلمرو و ریاضیات مقدماتی و مقاله‌ی حاضر می‌باشد. تنها کافی است مدولی بودن را خاصیتی برای هر خم بیضوی بدانیم، بدون این که نیازی به توضیح خاصیت مدولی بودن داشته باشیم. این حدس یک دهه بعد از کنفرانس توکیو- نیکو که در سپتامبر ۱۹۹۵ برگزار شد و اندرو وایلز نیز در آن شرکت داشت، توسط گورو شیمورا صورت‌بندی شد. هسته‌ی اولیه این حدس توسط یوناکا تانیاما در کنفرانس مذکور ریخته شده بود.

قضیه‌ی ای سودمند

در سال ۱۹۸۴ گرهارد فری سخنرانی‌ای در کنفرانس نظریه‌ی اعداد ایراد کرد. او حکمی را که به نظر ادعایی احمقانه می‌آمد مطرح کرد. اوراق تکثیر شده، مملو از فرمول‌های ریاضی، که در کنفرانس توزیع کرده بود، نشان می‌دادند که «اگر حدس شیمورا- تانیاما درست باشد، آخرین قضیه‌ی فرما اثبات می‌شود» (حدس اپسیلون (فری)). هنگامی که کنت ریبت برای اولین بار حکم فری را شنید فکر کرد که شوخی است و از خود پرسید مدولی بودن خم‌های بیضوی چه ارتباطی می‌تواند با آخرین قضیه‌ی فرما داشته باشد؟ اما ریبت، مردی که فکر می‌کرد پیشنهاد فری شوخی است، یک سال، بعد قضیه‌ی ای را صورت‌بندی کرد و نشان داد که اگر حدس شیمورا- تانیاما درست باشد آن‌گاه آخرین قضیه‌ی فرما از آن نتیجه می‌شود ([۳]، ص ۱۰۶). اثبات ریبت به طور خلاصه به این صورت است که «فرض کنیم آخرین قضیه‌ی فرما برای نمای q نادرست باشد. فرض کنیم E خم فری متناظر با جواب فرضی معادله‌ی فرما باشد. E یک خم بیضوی نیمه پایا است. حال اگر حدس شیمورا- تانیاما درست باشد، خم بیضوی متناظر با جواب فرضی معادله‌ی فرما مدولی است و ریبت در این جا با استفاده از این خاصیت به تناقض می‌رسد ([۴]، ص ۴۴۷).

وایلز در اثبات خود تمام توانایی‌های ابزارهای جدید جبر، هندسه، آنالیز و مباحث دیگر ریاضیات را به کار گرفت. او هم‌چنین توانست از نتایج ریاضی مهم هم عصر و پیشینیان تاریخی‌اش استفاده کند

پولیا: مسئله‌های درون مسئله (مسئله‌های کمکی)

پولیا متذکر می‌شود برای حل مسئله‌ی نخستین ممکن است به یک رشته مسئله‌های فرعی برخورد کنیم. او این مسائل را مسائل کمکی می‌نامد. مسئله‌ی کمکی به مسئله‌ای می‌گویند که باید به آن توجه و روی آن کار کنیم. این توجه یا کار، به خاطر خود این مسئله نیست، بلکه به این خاطر است که به حل مسئله‌ی دیگری- یعنی مسئله اصلی ما- کمک می‌کند ([۲]، ص ۳۲۰). دو مسئله‌ی کمکی مهم در جریان اثبات آخرین قضیه‌ی فرما نقش اساسی ایفا کردند. اولین مسئله، حدس فری بود که توسط ریبت در ۱۹۸۶ اثبات شد و دیگری اثبات حدس شیمورا- تانیاما بود که ریبت آن را در اثبات حدس فری درست فرض کرده بود. اثبات حدس شیمورا- تانیاما، آخرین حلقه‌ی زنجیر اثبات آخرین قضیه‌ی فرما بود که توسط اندرو وایلز صورت گرفت.

پولیا: متمرکز کردن دقت روی هدف

پولیا بیان می‌کند وقتی که می‌خواهید مسئله‌ای را حل کنید، غالباً درباره‌ی آن فکر می‌کنید. حتی ممکن است تا آن جا فکر شما را به خود مشغول کند که به اندیشه‌ای مزاحم تبدیل شود.



دیگر را به کار گیرد ([۳]، ص ۱۰۸).

آخرین قضیه‌ی فرما اثبات شد؟

در روز چهارشنبه ۲۳ ژوئن ۱۹۹۳، اندرو وایلز در آخرین سخنرانی‌اش در کنفرانس دانشگاه کمبریج، در حالی که همگان شگفت زده شده بودند، در حال تکمیل آخرین سطرهای اثبات خود از حدس شیمورا-تانیاما بود و پس از این که سطر پایانی را ارائه کرد، بدون مقدمه گفت: «و این آخرین قضیه‌ی فرما را اثبات می‌کند، فکر کنم در همین جا باید سخنرانی را متوقف کنم.» برای چند لحظه سکوت حیرت‌انگیزی در سالن حکمفرما شد و سپس صدای دست زدن‌های بی‌اختیار شرکت‌کنندگان مانند انفجاری در سالن پیچید ([۳]، ص ۵).

پولیا: هرگام را که برمی‌دارید واریسی و امتحان کنید، آیا می‌توانید آشکارا ببینید که گام برداشته شده درست بوده است؟

پولیا بیان می‌کند اطمینان حاصل کردن از درستی گام برداشته شده یا «شهودی» است و یا «صوری». باید تمام توجه ذهن خود را به نکته‌ی مورد بحث چندان معطوف داریم تا به وضوح و روشنی بر ما معلوم شود که آن گام برداشته شده درست بوده است ([۱]، ص ۱۴). وایلز اثبات خود را بارها مورد بررسی قرار داد و هیچ نقصی در آن مشاهده نکرد. مقاله‌ی ۲۰۰ صفحه‌ای وایلز به تعدادی از متخصصان پیشگام در نظریه‌ی اعداد ارسال شد. برخی از آن‌ها بلافاصله اظهار نگرانی و دلواپسی کردند ولی بیش‌تر ریاضی‌دانان فکر می‌کردند که این اثبات احتمالاً صحیح است. به هر حال آن‌ها منتظر قضاوت و رأی متخصصان بودند. یکی از متخصصان منتخب برای بررسی اثبات وایلز، دوست پرینستونی‌اش، نیک کاتز^{۲۲} بود. پروفیسور کاتز دو ماه تمام، ژوئیه و اوت ۱۹۹۳، کاری جز مطالعه‌ی کل اثبات نداشت. هر روز پشت میز می‌نشست و هر سطر، هر نماد ریاضی و هر نتیجه‌گیری منطقی آن را به آرامی می‌خواند تا مطمئن شود که کاملاً با معنی است و در واقع قابل قبول هر ریاضی‌دانی است که اثبات را می‌خواند. روزی یکی دو بار به وایلز نامه‌ی الکترونیکی ارسال می‌کرد و از او می‌پرسید منظورت از این سطر چیست؟ یا متوجه نمی‌شوم چطور این نتیجه از سطر بالایی حاصل می‌شود؟ یک روز هنگامی که کاتز حدود دو سوم از دست‌نویس طولانی وایلز را خوانده بود، با مشکلی مواجه شد. در وهله‌ی اول به نظر

ولی تنها فکر کردن ساده به مسئله کافی نیست، باید به صورتی پی‌گیر درباره‌ی آن بیندیشید به نحوی که مسئله را به صورتی روشن در برابر خود ببینید ([۲]، ص ۳۸۸). اندرو وایلز پس از آگاهی از اثبات حدس اسپیلون، با نیرویی شگفت‌انگیز به منزل رفت و فکر کرد که چطور می‌تواند حدس شیمورا-تانیاما را اثبات کند. او بعدها محرمانه گفته بود: «برای چند سال اول! می‌دانستم که رقیبی ندارم زیرا می‌دانستم که هیچ‌کس، از جمله خودم، ایده‌ای نداشت که کار را باید از کجا شروع کند.» او تصمیم گرفت که در خفای کامل و انزوا کار کند. «تعداد زیاد تماشاگر، تمرکز ذهن را به هم می‌زند.» به هر دلیل، وایلز خود را در دفتر کار زیر شیروانی‌اش محبوس کرد و به کار مشغول شد. او تمام پروژه‌های پژوهشی دیگر را کنار گذاشت تا وقتش را کاملاً به «فرما» اختصاص دهد. گرهارد فری بعدها می‌گوید: عظمت وایلز در این بود که به کاری که می‌کرد اعتقاد داشت؛ آن هم در زمانی که در واقع همه‌ی ریاضی‌دانان جهان معتقد بودند که حدس شیمورا-تانیاما را نمی‌توان در قرن بیستم اثبات کرد ([۳]، ص ۱۰۸).

پولیا: بسیج و سازمان‌دهی

پولیا بیان می‌کند: «هر قدر حل‌کننده‌ی مسئله جلوتر می‌رود، آگاهی‌های بیش‌تر و بیش‌تری در مورد موضوع مورد مطالعه‌اش پیدا می‌کند. آگاهی‌هایی که از قبل و ظاهراً بی‌ارتباط با مسئله‌ی مفروض در ذهن حل‌کننده بوده است، کاربرد مشخص خود را پیدا می‌کنند و به خوبی روشن می‌شود که به این‌ها مهم‌ترین قضیه‌هایی هستند که به مسئله‌ی من مربوط می‌شوند. حل‌کننده نمی‌تواند به هیچ وجه در ابتدای کار و موقعی که تازه حل مسئله را آغاز کرده، پیش‌بینی کند که این قضیه‌ها هستند که به کار او می‌خورند. این آگاهی‌ها در طول زمان در حافظه‌ی حل‌کننده جمع می‌شوند و سپس به صورتی مناسب جدا و از زرفای حافظه بیرون کشیده می‌شوند. جلب چنین آگاهی‌هایی را بسیج و به کار گرفتن آن‌ها را در حل مسئله سازمان‌دهی می‌نامیم ([۲]، ص ۳۷۰)». وایلز در اثبات خود تمام توانایی‌های ابزارهای جدید جبر، هندسه، آنالیز و مباحث دیگر ریاضیات را به کار گرفت. او هم چنین توانست از نتایج ریاضی مهم هم عصر و پیشینیان تاریخی‌اش استفاده کند. از روش‌های هوشمندانه‌ی ریت و همکارانش و نتایجش بهره‌مند شد. هم چنین توانست نظریه‌ی باری‌مازور^{۲۳} و ایده‌های شیمورا، فری، سره^{۲۴}، آندره ویل^{۲۵} و بسیاری از ریاضی‌دانان

می‌رسید که مانند بسیاری از موارد، وایلز پاسخی کاملاً رضایت‌بخش به کاتز دهد؛ اما این بار چنین نشد و پاسخ‌های وایلز، کاتز را راضی نکرد. همان موقع ریاضی‌دانان دیگر جهان نیز به همان مسئله در اثبات وایلز پی بردند، دستگاه اوایلر^{۳۴} در اثبات وجود نداشت و کاری نمی‌شد کرد. به بیان دیگر شکاف موجود در دستگاه اوایلر همه چیز را مانند خانه‌ی پوشالی فرو ریخته بود ([۳]، صص ۱۱۷ و ۱۱۸).

پولیا: پیگیری، ولی همراه با نرمش

اندرو وایلز در پاییز سال ۱۹۹۳ به پرینستون بازگشت. برآشفته، شرمسار، مضطرب، عصبانی و ناامید بود. احساس حقارت می‌کرد. در ریاضیات، تقریباً مانند هر مبحث دیگری، «جایزه‌ی دوم» یا «دنده‌ی دوم» وجود ندارد. وایلز سرافکنده به اتاق کوچک زیر شیروانی برگشت تا اثبات را کامل کند. به گفته‌ی نیک کاتز: «در این لحظه او رازی را از جهان مخفی می‌کرد. فکر می‌کنم خیلی احساس ناراحتی می‌کرد». وایلز گفته بود: «من در هر لحظه از هفت سالی که به تنهایی کار می‌کردم، بدون توجه به دشواری یا ناهموار بودن مانعی که پیش رویم قرار می‌گرفت، لذت می‌بردم و حالا کار ریاضی کردن این طور در معرض عام، سبک و شیوه‌ی من نیست. امیدوارم دیگر این تجربه را تکرار نکنم» ([۳]، ص ۱۱۹). «نبوغ، یعنی حوصله»، «نبوغ، عبارت است از یک درصد الهام و نود و نه درصد عرق ریختن». پولیا بیان می‌کند یکی از این جمله‌ها را بوفون^{۳۵} و دیگری را ادیسون گفته است؛ هر دو یک مفهوم دارند: کسی که می‌خواهد از عهده‌ی حل مسئله‌ای برآید، باید پی‌گیر باشد، به هدف خود اعتقاد داشته باشد و قبل از موقع تسلیم نشود، موضوعی را که مورد بررسی قرار داده‌اید، تا وقتی که هنوز امیدی برای رسیدن به اندیشه‌ای ثمر بخش وجود دارد ترک نکنید ([۲]، ص ۴۱۵). اندرو وایلز پس از گذشت یک سال از پیروزی کم دوامش در کمبریج، تقریباً داشت امیدش را از دست می‌داد و اثبات زمین گیر شده‌اش را رها می‌کرد. دوشنبه ۱۹ سپتامبر ۱۹۹۴، وایلز پشت میزش در دانشگاه پرینستون نشسته بود، توده‌های کاغذ دور و برش پراکنده بود. تصمیم گرفت قبل از این که اثباتش را کنار بگذارد و تمام امیدش را برای اثبات آخرین قضیه‌ی فرما رها کند، آخرین نگاه را به آن بیندازد. او احساس کرد اگر قرار است تسلیم شود دست کم باید پاسخی برای عدم موفقیتش ارائه دهد.

فرما خود مدعی حل این مسئله بود ولی ریاضی‌دانان امروزه معتقدند که فرما در جایی اشتباه کرده و اثبات ساده‌ای برای قضیه‌اش وجود ندارد، اثبات نهایی این قضیه، در واقع حاصل نتایج به دست آمده طی سال‌های بسیار توسط ریاضی‌دانان متعدد و پیشرفت ریاضیات است

پولیا: اندیشه‌ی روشن

از نظر پولیا، کار عمده برای حل یک مسئله، دست یافتن به تصور اندیشه‌ای درباره‌ی نقشه و برنامه‌ی حل مسئله است. این اندیشه ممکن است به تدریج حاصل شود یا پس از آزمایش‌های ظاهراً بی‌نتیجه و دوره‌ای از تردیدها، ناگهان به صورت برقی که می‌جهد، هم چون یک «اندیشه‌ی روشن» به ذهن حل‌کننده‌ی مسئله برسد. اندیشه‌های نیکو بر شالوده‌ی تجربه‌ی گذشته و شناختی که از پیش به دست آمده، بنا شده‌اند. برای اندیشه‌ی نیکو، تنها به خاطر آوردن کفایت نمی‌کند؛ بلکه باید چیزی را به دست آوریم که ارتباطی با موضوع مورد بحث داشته باشد ([۱]، ص ۱۰). وایلز مقاله‌ی پیش‌رویش را مطالعه کرد و حدود بیست دقیقه با دقت روی آن تمرکز کرد و سپس ناگهان متوجه شد که چرا نتوانسته بود دستگاه اوایلر را به کار اندازد. او بعدها احساسش را این طور توصیف کرد: «مهم‌ترین لحظه‌ی تمام زندگی کاریم بود. ناگهان به گونه‌ای کاملاً غیرمنتظره، کشفی خارق‌العاده به عمل آوردم. کاری که بعدها دوباره نمی‌توانم انجام دهم». وایلز ساعت‌ها در ساختمان گروه شروع به قدم زدن کرد. نمی‌دانست که خواب است یا بیدار. هر از گاهی به میزش سر می‌زد تا ببیند دست‌آورد خارق‌العاده‌اش هنوز آن جاست، و بود. باید با آن می‌خوابید. ممکن است فردا نقصی در آن پیدا شود. صبح روز بعد پشت میز کارش برگشت. کشف خارق‌العاده‌اش هنوز آن جا و منتظر او بود. مقاله‌هایش را به نشریه‌ی تخصصی Annals of Mathematics^{۳۶} فرستاد، روند داوری چند ماهی طول کشید ولی این بار نقصی در آن پیدا نشد. شماره‌ی منتشر شده‌ی نشریه در ماه مه ۱۹۹۵، شامل مقاله‌ی اصلی ارائه شده در کمبریج و اصلاح آن توسط وایلز بود. سرانجام آخرین قضیه‌ی فرما آرام گرفت ([۳]، صص ۱۲۱-۱۲۰).

نتیجه‌گیری

اندرو وایلز اثباتش را «اثبات قرن بیستمی» توصیف کرد. او از کارهای بسیاری از ریاضی دانان قرن بیستم و ریاضی دانان قبل استفاده کرد. در مجموع کارهای همگی آن‌ها باعث شد که حل نهایی حاصل شود. بدون کار ارنست کومر^{۳۷}، نظریه‌ی ایده‌آل‌ها وجود نداشت. بدون ایده‌آل‌ها کار باری مازور وجود نداشت. بدون کار باری مازور، حدس فری نبود و بدون این حدس اساسی و تلفیق ژان پیر سره، اثبات این مطلب از ریبت که حدس شیمورا - تانیاما آخرین قضیه‌ی فرما را اثبات می‌کند وجود نداشت ([۳]، ص ۱۲۲). همان‌طور که قبلاً هم متذکر شدیم، هدف این مقاله، رفتن به عمق اثبات اندرو وایلز نبوده - چه این هدفی در حیطه‌ی ریاضیات محض و شاخه‌های نظریه‌ی اعداد جبری و هندسه‌ی جبری حسابی می‌باشد. هدف، آموختن حل مسئله و نحوه‌ی تلاش‌ها در جریان حل مسئله بوده و در این حالت، چه مسئله‌ای شایسته‌تر از یکی از بزرگ‌ترین مسائل سه قرن پیش. در این نوشتار به برخی از استراتژی‌های تأثیرگذار در روند اثبات آخرین قضیه‌ی فرما اشاره شد؛ از جمله: امتحان کردن یک حالت خاص، بیان مسئله به صورتی دیگر، در نظر گرفتن مسئله‌ای وابسته به مسئله‌ی اصلی، جستجوی قضیه‌ای سودمند و تقسیم مسئله‌ای بزرگ به مسئله‌های کوچک‌تر؛ که برخی از این استراتژی‌ها نیز در عمل راه‌گشا نبودند و این نکته‌ای منفی به حساب نمی‌آید چرا که خود باعث کشف مسائلی مهم شدند. استراتژی‌های پولیا صرفاً حول مسئله نمی‌چرخد، بلکه او برای مسئله حل کردن نیز استراتژی‌های روان‌شناختی خاص خود را ارائه می‌کند: «این اشتباه است که حل کردن مسئله را کار عقلی محض بدانیم. تصمیمی سست به انجام دادن کاری اندک ممکن است برای حل کردن مسائل سردستی کلاس درس، خوب باشد ولی برای حل کردن یک مسئله‌ی علمی (ریاضی) جدی، قدرت اراده‌ای لازم است که شخص با آن بتواند سال‌های دراز، رنج و کوشش برای حل مسئله و نوامیدی‌های حاصل از ناکامی را تحمل کند» ([۱]، ص ۱۱۹). وایلز هفت سال به تنهایی در زیر شیروانی محل کارش کار کرد، بر تمام مشکلات غلبه کرد و سرانجام مسئله را حل کرد.

1. George Polya
2. Fermat
3. Kausler
4. Legendre
5. Calzolari
6. Lamé
7. Tait
8. Gunther
9. Gambioli
10. Krey
11. Rychlik
12. Stockhaus
13. Carmichael
14. Van der Corput
15. Thue
16. Duarte
17. Lebesgue
18. Christilles
19. Perrin
20. Hurwitz
21. Kapferer
22. Infinite Descent
23. Euler
24. Andrew Wiles
25. Elliptic Curves
26. Ribet
27. Epsilon (Frey) Conjecture
28. Frey Curves
29. Shimura - Taniyama conjecture
30. Barry Mazur
31. Serre
32. Andre Weill
33. Nick Katz
34. Euler System

۳۵. ژرژ بوفون (۱۷۰۷-۱۷۸۸) طبیعت‌شناس مشهور فرانسوی

36. "Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem." Annals of Mathematics. Vol. 142, 1995, pp. 443-551.
37. Ernest Eduard Kummer

منابع

۱. پولیا، جرج (۱۹۴۴): چگونه مسئله را حل کنیم؟، ترجمه‌ی احمد آرام، انتشارات کیهان، چاپ پنجم، ۱۳۷۹.
۲. پولیا، جرج (۱۹۶۵): خلافت ریاضی، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، چاپ چهارم، ۱۳۷۷.
۳. دی. اکزل، امیر (۱۹۹۷): آخرین قضیه‌ی فرما، افشای اسرار کهن یک مسئله‌ی ریاضی، ترجمه محمد مهدی ابراهیمی و مرگان محمودی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۸۵.
۴. رین بوییم، پائولو (۱۹۹۹)، آخرین قضیه‌ی فرما برای دوستان غیر حرفه‌ای، ترجمه محمد مهدی ابراهیمی و مرگان محمودی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۸۲.
۵. هالموس، پ. و: چگونه یک ریاضی‌دان محسوب شویم، ترجمه‌ی محمد صالح مصلحیان، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره ۵۷، صص ۱۹-۲۲، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

ایمان هادی

دانشجوی کارشناسی ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور واحد تفرش

محمد دهقاندار

دانشگاه پیام نور واحد تفرش

کارهای ثبت شده ی کاشانی

و

کارهای ثبت شده ی پیشینیان کاشانی به نام پسینیان وی



غیاث الدین جمشید کاشانی
یکی از ریاضی دانان توانمند
دوره ی اسلامی است که
علاوه بر علم ریاضیات در
نجوم نیز توانایی های خود را
به اثبات رساند

چکیده

در این مقاله، ابتدا کارهایی که توسط غیاث الدین جمشید کاشانی انجام شده و به نام وی ثبت شده مورد بررسی قرار گرفته است. این کارها عبارت اند از: اختراع روش کنونی جذر، محاسبه ی عدد پی تا ۱۶ رقم اعشار دقت و محاسبه ی نسبت مثلثاتی سینوسی یک درجه. هم چنین روش کنونی جذر به طور مفصل تری شرح داده شده است و یک مثال جهت تبیین موضوع آورده شده است. سپس کارهایی که در آثار کاشانی آمده، ولی کاشانی خود اذعان داشته که آثار پیشینیان وی می باشد و به نام اشخاص بعد از کاشانی ثبت شده، معرفی گردیده است. این موارد عبارت اند از مثلث حسابی و بسط دو جمله ای که در نسخ خطی کاشانی موجود است؛ در ادامه برای هر کدام مثالی از نسخه ی خطی کاشانی بیان شده است.

کلید واژه ها: کاشانی، جذر، عدد پی، سینوس، مثلث حسابی، بسط دو جمله ای

مقدمه

غیاث الدین جمشید کاشانی یکی از ریاضی دانان توانمند دوره ی اسلامی است که در حدود سال ۷۹۰ قمری (۱۳۸۸ میلادی) در کاشان متولد شد. وی علاوه بر علم ریاضیات در نجوم نیز توانایی های خود را به اثبات رساند به گونه ای که در مدت کوتاه زندگی ۴۲ ساله ی خود، آثار ارزشمندی به یادگار گذاشت. مهم ترین آن ها عبارت اند از:

زیج خاقانی، مفتاح الحساب، رساله ی محیطیه، رساله ی وتر و جیب، رساله ی علم هیئت، آلات رصد و نزّه الحدایق. کاشانی در ۱۹ رمضان سال ۸۳۲ قمری (۱۴۲۹ میلادی)، در خارج شهر سمرقند درگذشت.

کارهایی که توسط کاشانی انجام شده و به نام وی ثبت شده است

الف) اختراع روش کنونی جذر

کاشانی روشی را که قبل از وی بوده اصلاح کرده و سپس روش خود را که خلاصه و ساده شده ی همان روش قبلی است به دست آورده است. روش کاشانی همان است که امروزه برای یافتن جذر به کار می بریم و گرچه چند تفاوت جزئی دارد ولی هنوز می توان روش فعلی را از اختراعات کاشانی دانست. این تفاوت ها به شرح زیر هستند:

۱. تفاوت در محل ثبت محاسبات فرعی: اعمالی که کاشانی در پایین جدول ثبت می کرد، امروزه در بالای جدول و زیر ارقام جذر ثبت می شوند.

۲. کاشانی ضرب های محاسبات فرعی را روی کاغذ وارد نمی کرد و به ثبت نتیجه در جدول اکتفا می کرد.

برای درک بهتر شیوه ی جذر گرفتن کاشانی مثالی می آوریم. توضیح این نکته لازم است که کاشانی در این قسمت، «دور» را معرفی کرده است به این معنی که اگر می خواست از عددی مثلاً ریشه ی سوم بگیرد، ارقام آن عدد را از سمت راست ۳ تا ۳ جدا می کرد و هر دسته ی ۳ رقمی را یک دور می نامید.

مثال: مطلوبست جذر عدد ۳۳۱۷۸۱. در این جا نخست باید دورهای دورقمی را جدا کرد.

مرحله ی ۱. بزرگ ترین عددی را پیدا می کنیم که وقتی در خودش ضرب شود، از عدد دور اول (۳۳) کمتر باشد. این عدد ۵ است. آن را هم در بالای دور اول و هم با فاصله مناسب در

* نیوتن که در سال ۱۶۴۲ در انگلستان متولد شد، در حدود ۲۰۰ سال بعد از کاشانی، دستور بسط دو جمله ای را مجدداً به دست آورد

پایین جدول زیر آن دور می نویسیم. عدد بالایی را در پایینی ضرب کرده (۵×۵) و حاصل ۲۵ را زیر ۳۳ نوشته و از آن کم می کنیم. تفاضل را که ۸ می شود زیر ۲۵ نوشته و دور دوم را هم جلوی ۸ می نویسیم که می شود ۸۱۷.

مرحله ی ۲. عدد پایین جدول یعنی ۵ را دو برابر می کنیم و حاصل ۱۰ را طبق شکل، بالای ۵ می نویسیم. سپس بزرگ ترین عدد را می جویم که چون جلوی ۱۰ قرار گیرد و حاصل در همان عدد ضرب شود، مساوی یا کمتر از ۸۱۷ شود. این عدد ۷ است که چون در ۱۰۷ (حاصل قرار دادن ۷ جلوی ۱۰) ضرب شود ۷۴۹ می شود و آن را طبق شکل، زیر ۸۱۷ می نویسیم و تفاضلمان را هم که ۶۸ می شود زیرشان ثبت می کنیم. ضمناً عدد ۷ را هم جلوی ۵ (هم در سطر بالا و هم در سطر پایین جدول) در ستون مربوط به دور دوم وارد می کنیم که تا این جا به عدد ۵۷ می رسیم.

مرحله ی ۳. دور سوم را جلوی ۶۸ نوشته و همان کاری را که در مرحله ی دوم برای ۸۱۷ و ۵ انجام دادیم در این مرحله برای ۶۸۸۱ و ۵۷ انجام می دهیم.

مرحله ی اول	مرحله ی دوم	مرحله ی سوم
۵ ۳۳ ۱۷ ۸۱ ۲۵ ۸ ۱۷ ۵	۵ ۳۳ ۱۷ ۸۱ ۲۵ ۸ ۱۷ ۷ ۴۹ ۶۸ ۱۰ ۷ ۵ ۷	۵ ۳۳ ۱۷ ۸۱ ۲۵ ۸ ۱۷ ۷ ۴۹ ۶۸ ۸۱ ۷۶ ۵ ۱۱۴۶ ۱۰ ۷ ۵ ۷ ۶

جدول ۱

کاشانی لزومی به تکرار دورها نمی دید یعنی اعداد ۱۷ و ۸۱ را نمی نوشت. عدد ۵۷۶ که بالا (یا پایین جدول) ظاهر می شود همان جذر ۳۳۱۷۸۱ می باشد که باقیمانده ای هم مساوی ۵ دارد.

۱۰ ضرب و در جدولی ثبت کرد و برای محکم کاری، ارقام 2π را (از چپ به راست) به ابجد در یک بیت عربی و به رقم در یک بیت فارسی به نظم درآورد:

به عربی:
و بِحِجَا حَهَج صَرَازَطَه حَوْهٌ
محیط لقطر هو اثنان منه
به فارسی:

شش و دو هشت و سه یک هشت و پنج و سه صفری
بهفت و یک زا و نه پنج و هشت و شش پنج است.

روشی که کاشانی به کار می برد			روشی که امروزه به کار می رود		
۵	۷	۶	۲۳	۱۷	۸۱
۲۳	۱۷	۸۱	۲۵		
۲۵			۸	۱۷	
۸	۱	۷	۷	۴۹	
۷	۴	۹	۶۸	۸۱	
	۶	۸	۶۸	۷۶	
		۶۸		۵	
		۵			
	۱	۱			
۱	۰	۷			
۵	۷	۶			

جدول ۲

پس از آن که کاشانی به دستور استخراج جذر دست یافت، برای آن که مقدار جذر عدد دقیق تر باشد، کسری به آن اضافه کرده و فرمول زیر را به دست آورده است:

$$\sqrt{T^2 + r} = T + \frac{r}{2T+1}$$

برای مثال بالا به صورت زیر می توان عمل کرد:

$$\sqrt{576^2 + 5} = 576 + \frac{5}{2 \times 576 + 1} = 576 + \frac{5}{1153}$$

که در این فرمول، T ریشه ی دوم عدد و r ، باقیمانده ی آن است.

ب) عدد پی

کاشانی مقدار عدد 2π را با کسرهای شصت شصتی برابر با $2\pi = 6 \frac{1}{16} \frac{1}{59} \frac{1}{28} \frac{1}{34} \frac{1}{51} \frac{1}{46} \frac{1}{14} \frac{1}{50}$ به دست آورد و سپس آن را با کسرهای دهدهی که فکر می کرد خود مخترع آن هاست، به صورت زیر نوشت:

$$2\pi = 6 \frac{1}{28} \frac{1}{31} \frac{1}{85} \frac{1}{307} \frac{1}{179} \frac{1}{58} \frac{1}{65}$$

همه ی ۱۶ رقم اعشاری این عدد دقیق بوده که نهایت ظرافت کاشانی را می رساند و قبل از وی کسی به چنین دقتی دست نیافته بود. وی برای جلوگیری از اشتباهاتی که ممکن بود توسط نسخه نویسان به وجود آید، مقدار 2π را در اعداد صحیح ۱ تا

کاشانی عدد پی را، که همان نسبت محیط دایره به قطر آن است، با دقتی به دست آورد که تا حدود ۱۵۰ سال بعد از وی در دنیا بی رقیب ماند.

به بیان دقیق تر، کاشانی مقدار 2π را در سال ۱۴۲۴ میلادی تا ۱۶ رقم اعشاری به دست آورد و بعدها در اروپا، ویت^۱ در سال ۱۵۷۹ میلادی (یعنی در حدود ۱۵۵ سال بعد از کاشانی) فقط یازده اعشار دقیق پی را به دست آورده است و آدرین^۲ در سال ۱۵۹۳ میلادی، فقط ۱۵ رقم اعشار دقیق پی را و لودلف^۳ در سال ۱۶۱۰ میلادی، سی و پنج رقم اعشاری دقیق آن را حساب کرد.

ج) محاسبه ی $\sin 1^\circ$

کاشانی با روشی ابتکاری مقدار $\sin 1^\circ$ را محاسبه کرده است. وی ابتدا مقدار $\sin 2^\circ$ را تا ۱۷ رقم اعشار به شرح زیر به دست آورد:

$$\sin 2^\circ = 2,5,339,26,22,29,28,32,52,32$$

سپس این مقدار را نصف کرد و مقدار $\sin 1^\circ$ را به دست آورد:

$$\sin 1^\circ = 0,0125769835473539156$$

که این هفده رقم اعشار دقیق هستند.

۳) کارهایی که در آثار کاشانی آمده و به نام اشخاص بعد از کاشانی ثبت شده است. الف) مثلث حسابی

کاشانی در مثالی، مقدار ۴۵-۵۵ را حساب کرده است. وی برای محاسبه ی این مقدار از جدول های ۲ و ۳ و ۴ به شرح زیر استفاده کرده است.

با دقت به این چهار جدول، مشخص می شود که جدول شماره ی ۳، همان جدول شماره ی ۶، یعنی مثلث حسابی است که تفاوت هایی جزئی در آن به چشم می خورد؛ از جمله:

۱. وضع قرار گرفتن اعداد در آن تفاوت دارد یعنی اعدادی که در جدول در ستون قائم قرار گرفته اند، در مثلث حسابی در سطرها ی افقی قرار دارند.

۲. یک هایی که در مثلث حسابی در ستون چپ قرار دارد، در جدول دیده نمی شود.

کاشانی در مقدمه ی مفتاح الحساب به این نکته اشاره دارد که جدول های ۳، ۴ و ۵ را از پیشینیان اقتباس نموده است.

در مورد مثلث حسابی به طور دقیق نمی توانیم بگوییم چه کسی مخترع آن بوده است. فقط می دانیم سابقه ی به کارگیری و استفاده از این مثلث، به حدود ۸۰ سال قبل از عمر خیام باز می گردد. زیرا بنا بر اطلاعات ما، ابوبکر محمدحسین کرجی، نخستین کسی است که این مثلث را در آثار خود ثبت کرده است.

لازم به ذکر است که کرجی ریاضی دان ایرانی است که در اواخر قرن سوم و اوایل قرن چهارم زندگی می کرده است. از نکات قابل توجه این است که امروزه اروپاییان، جدول شماره ی ۵، یعنی مثلث حسابی را «مثلث حسابی پاسکال» می نامند. پاسکال در سال ۱۶۲۳ متولد شد؛ یعنی حدود ۲۰۰ سال بعد از کاشانی این مثلث را به نام خود ثبت کرده است.

ردیف ها	ستون توان دوم	ستون توان سوم	ستون توان چهارم	ستون توان پنجم	ستون توان ششم	ستون توان هفتم	ستون توان هشتم	ستون توان نهم
ردیف توان هشتم							۹	
ردیف توان هفتم							۳۶	۸
ردیف توان ششم						۷	۲۸	۸۴
ردیف توان پنجم				۶	۲۱	۵۶	۱۲۶	
ردیف توان چهارم			۵	۱۵	۳۵	۷۰	۱۲۶	
ردیف توان سوم		۴	۱۰	۲۰	۳۵	۵۶	۸۴	
ردیف توان دوم	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	
ردیف پایه	۲	۳	۴	۵	۵	۷	۸	۹

جدول ۳

ردیف ها	ستون توان پنجم	توان عدد ۴	حاصل ضرب ها
ردیف توان چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰
ردیف توان سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰
ردیف توان دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰
ردیف پایه	۵	۴	۲۰
$\begin{array}{r} ۲۱۰۰ \rightarrow \text{حاصل جمع} \\ + ۱ \\ \hline ۲۱۰۱ \\ ۵۵-۴۵ \end{array}$			

جدول ۴

ردیف ها	ستون توان پنجم	توان عدد ۴	حاصل ضرب ها	توان عدد ۳	حاصل ضرب های دوم
ردیف توان چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰	۳	۳۸۴۰
ردیف توان سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰	۹	۵۷۶۰
ردیف توان دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰	۲۷	۲۴۳۰
ردیف پایه	۵	۴	۲۰	۸۱	۱۶۲۰
$\begin{array}{r} ۱۵۵۲۰ \rightarrow \text{حاصل جمع} \\ ۳۹ \rightarrow \\ \hline ۱۵۵۵۹ \\ ۷۵-۴۵ \end{array}$					

جدول ۵

مثلث حسابی									
سطر اول	۱								
سطر دوم	۱	۱							
سطر سوم	۱	۲	۱						
سطر چهارم	۱	۳	۳	۱					
سطر پنجم	۱	۴	۶	۴	۱				
سطر ششم	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱			
سطر هفتم	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱		
سطر هشتم	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱	
سطر نهم	۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱
سطر دهم	۱	۹	۳۶	۸۴	۱۲۶	۱۲۶	۸۴	۳۶	۹

جدول ۶

مهم ترین آثار کاشانی زیج خاقانی،
مفتاح الحساب، رساله محیطیه، رساله
وتر و جیب، رساله ی علم هیات، آلات
رصد و نزهة الحدائق می باشد



که همان دستور بسط دو جمله ای است.
همان طور که گفتیم کاشانی این جدول ها را جزو کارهای خود
ندانسته و آن ها را کارهای افراد قبل از خود می داند.
طبق پژوهش هایی، دستور بسط دو جمله ای نیز (در حالتی
که نماینده ی آن عدد صحیح باشد)، در آثار و تألیفات کرجی
دید شده است.

متأسفانه کتاب کرجی موجود نیست، اما بخش هایی از آن
در کتاب «الباهر فی علم الحساب» نقل شده که از جمله تألیفات
«ابونصر سموال بن یحیی» است که در سال ۵۷۰ هجری قمری
در مراغه درگذشت.

نیوتن که در سال ۱۶۴۲ در انگلستان متولد شد، در حدود
۲۰۰ سال بعد از کاشانی، دستور بسط دو جمله ای را مجدداً
به دست آورد که امروزه دستور بسط دو جمله ای را به نام «دستور
بسط دو جمله ای نیوتن» می شناسند.

۴. نتیجه گیری

بررسی موارد فوق نشان می دهد که بسیاری از آثار مفاخر
علمی ما برای خود ما نیز ناشناخته است و متأسفانه بسیاری از
آن ها علی رغم وجود نسخ خطی دال بر مالکیت آن ها، به نام
کسانی ثبت گردیده اند که سال ها بعد از آن بزرگان پا به عرصه ی
وجود گذاشته اند. ضرورت پی گیری هویت این آثار و ثبت آن ها
به نام مؤلفین واقعی، امری کاملاً واضح به نظر می رسد.

پی نوشت ها

* کسرهای دهمی قبل از کاشانی هم بوده اند البته نحوه ی نمایششان فرق
می کرده است و احتمال دارد که کاشانی بی خبر بوده است. چنین به نظر می رسد
که برخی از کارهای خیام و امثال او به علت آشفتگی حاصل از حمله مغول ها
و تیموریان به اطلاع همگان نرسیده باشند و کاشانی امتیاز کافی را به پیشینیان
خود نداده باشد. به کتاب کاشانی نامه مراجعه فرمایید. (رشد آموزش ریاضی)

1. Viète
2. Adrian Romian
3. Ludolf

منابع

۱. کاشانی نامه، تألیف ابوالقاسم قربانی، چاپ دوم، ۱۳۸۶.
۲. در قلمرو ریاضیات، به کوشش مهندس یونس کرامتی، چاپ اول، ۱۳۸۱.
۳. مفتاح الحساب، تألیف: غیاث الدین جمشید مسعود طیب کاشانی،
کتاب خانه ی آیت الله مرعشی نجفی.
۴. رساله ی محیطیه، تألیف: غیاث الدین جمشید مسعود طیب کاشانی،
کتاب خانه ی آیت الله مرعشی نجفی.

ب) بسط دو جمله ای

از جدول های شماره ی ۲، ۳ و ۴ نکات دیگری نیز حاصل
می شود که از این قرارند:

۱. اعدادی که در جدول ۲ قرار گرفته اند، ضرایب بسط
دو جمله ای هستند. به طور مثال اعدادی که در ستون توان هشتم
قرار دارند یعنی: ۸، ۲۸، ۵۶، ۷۰، ۵۶، ۲۸، ۸، ضرایب
بسط دو جمله ای $(a+b)^8$ هستند که به صورت زیر است:

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

۲. اگر در جدول شماره ی ۴، دو عدد صحیح غیر متوالی را
a و b بنامیم، حاصل این جدول به صورت زیر است:

$$(a+b)^5 - a^5 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

و از آن جا

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

زبان

به عنوان یکی از اصول آموزش ریاضی

لیلا احمدلو (دبیر ریاضی منطقه ی درودزن شیراز)
مریم استادی (دبیر ریاضی منطقه جی اصفهان)
افسانه حیدری ارجلو (دبیر ریاضی ناحیه ۱ اهواز)
زهرا صباغ زاده فیروزآبادی (دبیر ریاضی میبد یزد)
نرگس عقیلی (دبیر ریاضی ناحیه ۲ قم)
دانشجویان کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه
تربیت دبیر شهید رجایی

مقدمه

و نمادهای به کار رفته در زبان های غربی، خود یک مؤلفه ی اساسی در زمینه ی رواج یک فرهنگ بیگانه در یک جامعه است، اما متأسفانه امروزه دانش آموزان در کشورهای در حال توسعه مجبورند که در کلاس های ریاضی، مفاهیم را به سبک غربی آموزش ببینند. در حالی که تفاوت های این گونه برنامه ها با برنامه های کشورهای در حال توسعه بسیار بیش تر از شباهت های آن هاست.

در برنامه های درسی ریاضی، باید به مواردی مانند مخاطبان برنامه، موضوعات انتخاب شده، روش های یادگیری و تدریس مطلب و نحوه ی ارزشیابی و بسیاری از موارد مهم دیگر توجه کرد. این ها از جمله اصول آموزش ریاضی هستند که نسبی بوده و در هر جامعه ای متناسب با فرهنگ و ارزش های حاکم بر آن جامعه تغییر می کنند.

نیومن، یک آموزشگر زبان استرالیایی است که شیوه ای نظام وار برای تحلیل خطاهایی که دانش آموزان ممکن است در هنگام پاسخ به سؤالات کتبی با آن برخورد کنند، ارائه کرد. این روش تحلیل با سایر روش ها بسیار متفاوت بود و به همین دلیل، توجه پژوهشگران بین المللی آموزش ریاضی را به خود جلب کرد.

ویژگی منحصر به فرد این نوع تحلیل این بود که توجه خاصی به تأثیر عامل زبان بر یادگیری ریاضی و نامناسب بودن بسیاری از

یکی از چالش های پیش روی محققان آموزش ریاضی این است که پیوندهای بین فرهنگ، زبان و آموزش ریاضی را بیش تر کنند و مطمئن باشند که یافته های آن ها، بر تصمیم گیری های برنامه ی درسی ریاضی تأثیر می گذارد. اما بیش تر ملت ها به این جنبه، توجه کافی نکرده اند، در حالی که نظام های آموزش رسمی نمی توانند جدا از فرهنگی باشند که در آن زندگی می کنند. به طور مثال، سبک یادگیری کودکان، باورها، نظرات شخصی و طرح های شناختی آن ها به بافت فرهنگی که در آن قرار گرفته اند، مربوط می شود.

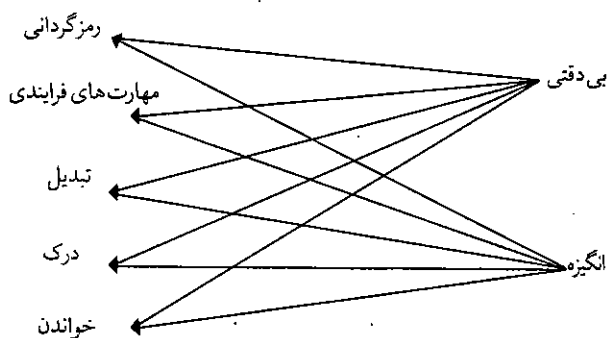
این مسئله به خصوص در کشورهای در حال توسعه باید مورد توجه قرار گیرد، چرا که در این مناطق، از شروع قرن گذشته بیش تر سعی شده است تا از برنامه های درسی کشورهای غربی در تدریس استفاده شود، بدون توجه به این نکته ی مهم که این نوع برنامه ها هیچ گونه هماهنگی با فرهنگ حاکم بر این جوامع ندارند و بدتر این که این نوع برنامه ها حتی از طرف خود غربی ها نیز کنار گذاشته شده اند.

در واقع، تمام زبان ها توانایی بیان تصورات ریاضی غربی و نمادهای به کار رفته در آن را ندارند و از طرف دیگر، تصورات ریاضی افراد در زبان های بومی را نیز نمی توان به راحتی به زبان انگلیسی یا هر زبان مشترک دیگری بیان کرد. باید دقت داشت که یادگیری زبان

زیرا سرچشمه‌ی این مشکلات بیش‌تر در خود مسئله قرار دارد تا در کشمکش بین مسئله حل کن و مسئله.

این تمایز، در شکل ۱ مشخص شده است و در کنار آن، سلسله مراتب پنج مرحله‌ای تحلیل خطای نیومن آورده شده است؛ خطاهایی که در هر مرحله از فرایند حل مسئله می‌تواند رخ دهد. برای مثال، خطای ناشی از بی‌دقتی می‌تواند ناشی از خطای خواندن، خطای بد فهمیدن یا مانند آن باشد.

به همین نحو، یک شخص ممکن است سؤال را به درستی خوانده و درک کرده باشد و حتی یک راهبرد مناسب برای حل آن در نظر داشته باشد، اما در حین فرایند حل مسئله، ممکن است به هر



شکل ۱. سلسله مراتب پنج مرحله‌ای تحلیل خطای نیومن

دلیلی انگیزه‌ی خود را برای ادامه‌ی حل مسئله از دست بدهد و از خود بپرسد که «آیا ارزشی دارد که برای حل چنین سؤالی به زحمت بیفتم؟»

نیومن پیشنهاد کرد که سؤالات زیر در مصاحبه‌هایی استفاده شود که به منظور طبقه‌بندی خطاهای دانش‌آموزان در تکالیف کتبی ریاضی انجام می‌شود:

۱. لطفاً این سؤال را بخوانید (خواندن)؛
 ۲. سؤال از شما می‌خواهد چه کاری انجام دهید (درک)؛
 ۳. روشی را که می‌توانید برای یافتن جواب سؤال استفاده کنید، بگویید (تبدیل)؛
 ۴. چگونه جواب سؤال را حساب کردید؟ توضیح دهید که برای حل آن چه کاری انجام دادید (مهارت‌های فرایندی)؛
 ۵. حالا جواب سؤال را یادداشت کنید (رمزگردانی).
- برای آشنایی با روش که نیومن پیشنهاد کرده، مثال زیر می‌تواند مفید واقع شود.

مثالی از یک مصاحبه‌ی نیومنی

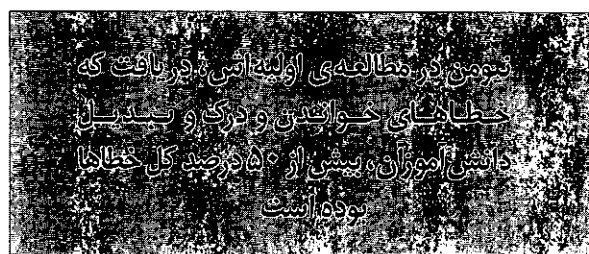
مسئله.

برنامه‌های جبرانی ریاضیات در مدارس داشت. او توجه زیادی به محیط یادگیری ریاضیات داشت و سعی می‌کرد که یک موقعیت عملی مناسب را فراهم کند تا دانش‌آموزان بتوانند تفکر ریاضی‌گونه را تمرین کنند. این تحلیل آن قدر عمیق به عامل زبان در یادگیری ریاضی پرداخته بود که بعضی از پژوهشگران آموزش ریاضی، زبان را یکی از اصول آموزش ریاضی دانستند. برای آشنایی با تحلیلی که نیومن انجام داد، به معرفی اجمالی آن می‌پردازیم.

تحلیل خطای نیومن

طبق نظر نیومن، شخصی که می‌خواهد یک راه حل صحیح برای مسائل کلامی به دست آورد، سرانجام باید طبق سلسله مراتب زیر اقدام کند:

۱. مسئله را بخواند؛
۲. آن چه را خوانده است درک کند؛
۳. تبدیل‌های ذهنی از واژگان کلیدی را برای انتخاب راهبرد ریاضی مناسب انجام دهد؛
۴. مهارت‌های فرایندی موردنیاز را برای راهبردهای انتخابی به کار گیرد؛
۵. جواب را به یک شکل نوشته شده‌ی قابل قبول، بنویسد.



نیومن از واژه‌ی «سلسله مراتب» استفاده کرد زیرا شکست در هر سطحی از دنباله‌ی بالا، حل‌کننده‌ی مسئله را از پیشرفت رضایت بخش باز می‌دارد (مگر این که به طور شانس و با دلایل ناقص به جواب برسد). کیسی (۱۹۸۷)، (نقل شده در کلمنتس و الرتن، ۱۹۹۶) نقل می‌کند که حل‌کننده‌ی مسئله اغلب در هنگام حل مسئله، به مراحل قبلی سلسله مراتب برمی‌گردد (برای مثال در وسط محاسبات پیچیده، شخص ممکن است تصمیم بگیرد که دوباره سؤال را بخواند و کنترل کند که آیا همه‌ی داده‌های مربوط را به کار گرفته است یا خیر؟) به هر حال، حتی اگر بعضی از مراحل در طول حل مسئله بازبینی شود، باز هم سلسله مراتب نیومن، برای توالی مراحل، اساسی است.

کلمنتس و الرتن، (۱۹۹۶) تکنیک تحلیل خطای نیومن را با خطاهای نوع دیگری که در نمودار نمایش داده شده، توضیح داده‌اند. به عقیده‌ی آن‌ها، خطاهای ناشی از صورت مسئله، با خطاهای دیگری مانند «بی‌دقتی» و «انگیزه» تفاوت اساسی دارند،

برادرم $\frac{2}{3}$ آن را خورد. ما روی هم چقدر پیتزا خورده ایم؟

مصاحبه گر از دانش آموزان خواست تا مسئله را دقیق بخوانند و با سؤالات زیر، آن ها را هدایت کرد.

مصاحبه گر: سؤال از شما چه می خواهد؟

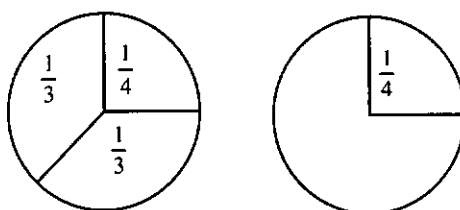
دانش آموز: هوم... از ما خواسته شده که بگویم جمعاً چقدر پیتزا خورده ایم.

مصاحبه گر: چطور آن را حل کردی؟

دانش آموز: شکل یک پیتزا را کشیدم و $\frac{1}{4}$ آن را مشخص کردم

و سپس $\frac{2}{3}$ آن را مشخص کردم.

مصاحبه گر: چگونه آن ها را روی هم حساب کردی؟



دانش آموز: این یک مسئله ی جمع است!

مصاحبه گر: جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم است؟

دانش آموز: جمع.

مصاحبه گر: می توانی نشان دهی که چگونه آن را حل کردی؟ با توجه به این که گفتی شکل رسم کرده ای، می توانی بگویی چگونه این کار را انجام دادی؟

دانش آموز: (شکل را رسم می کند) و می گوید: من $\frac{1}{4}$ پیتزا خوردم.

(و آن را روی شکل نشان می دهد.)

مصاحبه گر: از کجا می دانی که $\frac{1}{4}$ درست است؟

دانش آموز: چون این یک قسمت از چهار قسمت است. سپس

من $\frac{2}{3}$ پیتزا را که برادرم خورده بود، مشخص کردم.

مصاحبه گر: آیا هر کدام از این قسمت ها $\frac{1}{3}$ است؟ چگونه

می دانی که $\frac{1}{3}$ است؟

دانش آموز: زیرا این پیتزا ۳ قسمت است.

و مصاحبه هم چنان ادامه پیدا می کند.

در این مثال، دانش آموز سؤال را درک کرده است ولی

نمی تواند راهبرد مناسب را ادامه دهد. مصاحبه بر طبق روش تحلیل خطای نیومن انجام شد و مصاحبه کننده موفق شد برخی از مشکلات دانش آموز را درک کند، بدون این که او را مجبور به انتخاب راه حل دیگری نماید.

نیومن در مطالعه ی اولیه اش، دریافت که خطاهای خواندن و درک و تبدیل دانش آموزان، بیش از ۵۰ درصد کل خطاها بوده است. بنابراین، بیش از نیمی از خطاها قبل از کاربرد مهارت های فرایندی اتفاق افتاده و کمتر از ۱۰ درصد خطاها مربوط به مهارت های فرایندی است.

در مطالعات انجام شده روی دانش آموزان مقاطع پایین تر از دبیرستان که توسط کلمنتس (۱۹۸۰)، واتسون (۱۹۸۰) و کلارکسون (۱۹۸۳) [نقل شده در کلمنتس و التون، ۱۹۹۶] انجام شد، نتایج مشابهی به دست آمد که با نتایج به دست آمده توسط نیومن سازگاری داشت و آن را تأیید می کرد. این نتایج، توجه را به اهمیت عامل زبان در یادگیری ریاضی جلب می کند. بنابراین، اگر حدود نیمی از خطاهای ایجاد شده در تکلیف های ریاضی کتبی، قبل از کاربرد مهارت های فرایندی اتفاق می افتد، به نظر منطقی می رسد که برنامه های ریاضی جبرانی (که در همه کشورهای آسیا و اقیانوسیه به طور گسترده ای در دسترس است)، نیازمند توجه بیش تری به این دو سؤال است که «آیا دانش آموزان قادرند زبانی را که در مسائل کلامی ریاضی نهفته شده است بخوانند و درک کنند؟» و «آیا قادرند روش های مناسبی را برای تنظیم مسائلی که می خواهند حل کنند، تدبیر کنند؟»

تفاوت مطالعات اخیر با تحقیق اصلی نیومن این است که جواب های درست هم علاوه بر جواب های نادرست، تجزیه و تحلیل می شوند. بسیاری از جواب های درست را دانش آموزانی می دهند که واقعاً مفهوم سؤال را نفهمیده اند. بدین سبب، معلمان و نویسندگان کتاب های درسی، باید نسبت به انواع خطاهای دانش آموزان که در انواع متفاوتی از تکالیف رخ می دهند، بیش تر آگاهی یابند. این یافته ها که توسط داده های به دست آمده در مدارس کشورهای آسیا و اقیانوسیه حاصل شده است، می تواند یکی از مهم ترین یافته های تحقیق آموزش ریاضی در زمان حال باشد. با این حال، یافته های تحقیق در میان سیاستمداران، تصمیم گیرندگان سیاست های آموزشی، والدین و حتی معلمان ریاضی، خوب شناخته نشده اند.^۵

پی نوشت ها

^۵ این نوشته، تلخیصی از بخش تجزیه و تحلیل خطای نیومن در کتاب «تحقیقات آموزش ریاضی: گذشته، حال و آینده» است که در سال ۱۹۹۶، توسط کلمنتس و التون، به درخواست یونسکو نوشته شد.

شمارش بار رابطه‌ی

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n!$$

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی مرکز شهید بهشتی سمنان

مقدمه

تجربه‌ی کار در کلاس هنر حل مسئله، این نتیجه را برایم به ارمغان آورد که دریافتم دانش آموزان معمولاً در مسائل شمارشی به گونه‌ای غیر از آن چه معلمان می‌خواهند و عمل می‌کنند، رفتار می‌کنند (البته این امر در هر موضوعی می‌تواند درست باشد). در مسائل مختلفی که مطرح می‌شود، دانش آموزان با روش‌های گوناگونی به حل مسئله می‌پردازند که ما به عنوان معلم شاید توقع آن را نداشته باشیم. اما در بسیاری از موارد، راه‌حل‌ها به الگوی $1 + 2 + 3 + \dots + n$ می‌رسند که معمولاً حاصل آن را نیز می‌دانند، لذا به آسانی جواب را به دست می‌آورند. این موضوع مرا بر آن داشت تا این رابطه را به عنوان پیش فرض قبول کرده و بررسی کنم که چه نتایجی را به دنبال خواهد داشت. به عبارتی این مقاله، حاصل مشاهدات و دسته‌بندی کار دانش آموزان در چندین جلسه از یک کلاس است. لذا چنین فرض می‌کنیم: $1 + 2 + \dots + n = n!$ و برقراری این رابطه را در چند مسئله بررسی می‌کنیم.

مسائل

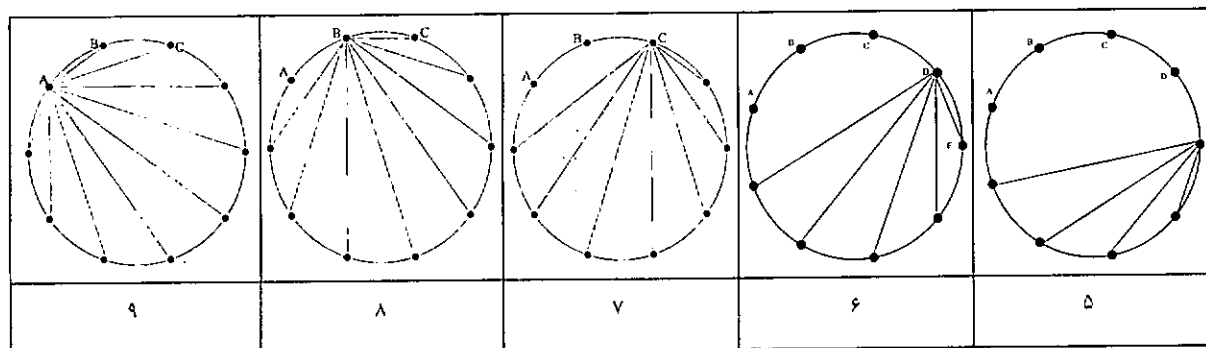
اولین مسئله‌ای که مطرح می‌شود این است که «۱۰ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارد. چند پاره خط وجود دارد که ابتدا و انتهای آن‌ها از این نقاط باشد.»

ما معلم‌ها، معمولاً برای حل مسئله، چنین استدلال می‌کنیم:

برای رسم یک پاره خط دو نقطه انتخاب می‌شود، برای انتخاب نقطه‌ی اول ۱۰ و برای انتخاب نقطه‌ی دوم ۹ حالت وجود دارد. لذا در کل $10 \times 9 = 90$ حالت داریم و چون در این روش، هر پاره خط دو بار شمرده می‌شود، پس در کل $90 \div 2 = 45$ پاره خط خواهیم داشت.

اما به ندرت اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزی که برای اولین بار به این مسئله بر می‌خورد این روش را انتخاب کند. در بیش تر موارد، روش زیر مشاهده می‌شود:

نقطه‌ی A را به سایر نقاط وصل کرده، تعداد پاره‌خط‌هایی که سر آن‌ها A است را می‌شماریم؛ تعداد آن‌ها ۹ تا است.

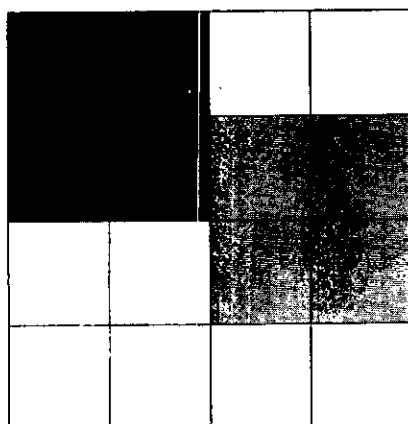


شکل (۱)

سپس نقطه‌ی B را به سایر نقاط وصل کرده، تعداد پاره‌خط‌های حاصل را می‌شماریم؛ که تعداد آن‌ها ۸ تا است؛ چرا که پاره‌خط AB قبلاً شمرده شده است. به همین ترتیب، نقطه‌ی C را به سایر نقاط وصل کرده و تعداد پاره‌خط‌های جدید را می‌شماریم که تعداد آن‌ها ۷ تا است. این کار را ادامه می‌دهیم. در هر مرحله، از تعداد پاره‌خط‌ها یکی کم می‌شود. به آخرین نقطه که بررسییم، همه پاره‌خط‌هایی که با این نقطه آغاز می‌شوند را قبلاً شمرده‌ایم. بنابراین تعداد کل پاره‌خط‌ها $۱+۲+۳+\dots+۹$ است و در صورتی که n نقطه داشته باشیم، تعداد آن‌ها $۱+۲+۳+\dots+(n-1) = (n-1)I$ است.

مسئله‌ی دوم، شمارش تعداد پاره‌خط‌های موجود در یک پاره‌خطی است که به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده است. با روشی مشابه روش بالا، تعداد همه‌ی پاره‌خط‌های مختلف، $۱+۲+\dots+۱۰ = ۱۰I$ است و در صورتی که پاره‌خط اصلی، به n قسمت تقسیم شده باشد، این تعداد nI است.

مسئله‌ی سوم، شمارش تعداد مستطیل‌ها در یک صفحه‌ی شطرنجی ۴×۴ است.



شکل (۲)

در محاسبه‌ی تعداد این مستطیل‌ها معمولاً مشکلی وجود ندارد و دانش‌آموزان تعداد مستطیل‌ها را به راحتی به دست می‌آورند (البته بعد از کمی بحث بر سر این که مستطیل‌ها می‌توانند همدیگر را قطع کنند و برهم، هم‌پوشانی داشته باشند یا خیر و...). اما وقتی که از آن‌ها خواسته می‌شود که با منظم کردن داده‌ها، الگوی موجود در راه‌حل این مسئله را بیابند، برخی از آن‌ها به صورت زیر عمل می‌کنند:

	۱	۲	۳	۴
۱	۱۶	۱۲	۸	۴
۲	۱۲	۹	۶	۳
۳	۸	۶	۴	۲
۴	۴	۳	۲	۱

یعنی در سطر i و ستون j ، تعداد مستطیل‌های نوع $i \times j$ را می‌نویسند که با کمی دقت می‌بینیم که این اعداد، همان اعداد یک جدول ضرب 4×4 است که بعد از فاکتورگیری از مجموع همه‌ی آن‌ها، عبارتی به شکل

$$(1+2+3+4)(1+2+3+4) = 4!4!$$

به دست می‌آید. البته برخی هم بدون تشکیل جدول بالا به

این نتیجه می‌رسند. لذا برای حالت کلی در صفحه‌ی شطرنجی $n \times n$ ، تعداد مستطیل‌ها $(nI)(nI)$ است و اگر صفحه‌ی شطرنجی $m \times n$ باشد، تعداد مستطیل‌ها $(mI)(nI)$ خواهد بود.

البته اگر به این توجه کنیم که هر مستطیل با یک پاره‌خط افقی و یک پاره‌خط عمودی شکل می‌گیرد، رابطه‌ی فوق با کمک مسئله‌ی ۲ به راحتی به دست می‌آید. بنابراین به همین روش تعداد مکعب مستطیل‌های یک مکعب مشبک $n \times n \times n$ ، $(nI)(nI)(nI)$ به دست می‌آید و یک مکعب مشبک $m \times n \times p$ ، $(mI)(nI)(pI)$ تا مکعب را شامل می‌شود.

چهارمین مسئله، پیدا کردن حداکثر ناحیه‌هایی است که n وتر در یک دایره به وجود می‌آورند. با دقت در اعداد جدول فوق مشاهده می‌شود که بین اعداد دو ردیف، رابطه‌ای به شکل زیر وجود دارد:

$$\begin{aligned} 11 &= 7+4, \quad 7 = 4+3, \quad 4 = 2+2, \quad 2 = 1+1 \\ \Rightarrow 11 &= (4+3) + (2+2) \\ \Rightarrow 11 &= 4+3+2+(1+1) \\ \Rightarrow 11 &= (4+3+2+1) + 1 \end{aligned}$$

با توجه به رابطه‌ی بالا حدس می‌زنیم که اگر حداکثر تعداد نواحی ایجاد شده با n وتر در یک دایره را p_n در نظر بگیریم، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

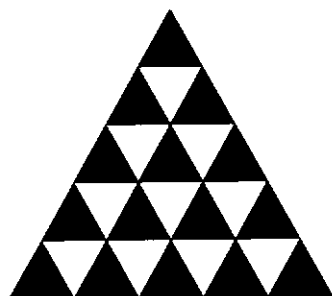
$$p_n = nI + 1$$

اگر ثابت کنیم که $p_n = n + p_{n-1}$ ، رابطه‌ی مادرست خواهد بود. یعنی حداکثر نواحی در مرحله‌ی n وتر، برابر است با تعداد نواحی مرحله‌ی قبل به علاوه‌ی n . اما رابطه‌ی اخیر به این دلیل درست است که در هر مرحله، آخرین وتر را طوری رسم می‌کنیم که با هیچ کدام از وترهای قبل موازی نباشد و از محل تقاطع وترها هم عبور نکند. با این روش، نواحی قبل باقی می‌مانند و با قطع هر وتر، یک ناحیه‌ی جدید نیز به وجود می‌آید و در برخورد با دایره هم یک ناحیه حاصل می‌شود. پس n ناحیه‌ی جدید ایجاد می‌شود.

در این حل از مسئله‌ی بالا، نکته‌ی جالبی وجود دارد که محل خوبی برای شروع بحث «استقرای ریاضی» است. چرا که معمولاً دانش آموزان الگو را پیدا می‌کنند اما دلیلی برای درستی آن ندارند. لذا وقتی که نیاز به آن پیدا می‌کنند، بحث استقرای ریاضی ضروری می‌شود.

تعداد وترها	نمودار	تعداد نواحی
۰		۱
۱		$2 = 1+1$
۲		$4 = 2+2$
۳		$7 = 3+4$
۴		$11 = 4+7$

پنجمین مسئله، شمارش تعداد مثلث‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع مشبک است (شکل ۳).
تعداد مثلث از هر نوع را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:



شکل (۳)

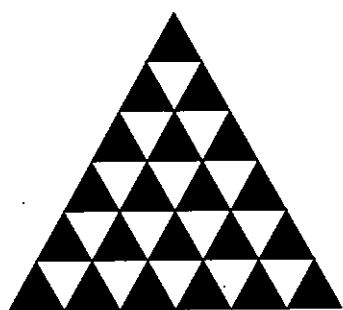
تعداد	طول ضلع
$1+2+3+4+5=5I$	۱ روبه بالا
$1+2+3+4=4I$	۲ روبه بالا
$1+2+3=3I$	۳ روبه بالا
$1+2=2I$	۴ روبه بالا
$1=1I$	۵ روبه بالا
$1+2+3+4=4I$	۱ روبه پایین
$1+2=2I$	۲ روبه پایین

لذا تعداد مثلث‌ها برابر است با

$$\sum_{n=1}^5 ni + \sum_{n=1}^4 (2n)I$$

حال تعداد مثلث‌های شکل ۴ را می‌شماریم.

برای این کار، اطلاعات زیر را در جدول خلاصه می‌کنیم.



شکل (۴)

تعداد	طول ضلع
$1+2+3+4+5+6=6I$	۱ روبه بالا
$1+2+3+4+5=5I$	۲ روبه بالا
$1+2+3+4=4I$	۳ روبه بالا
$1+2+3=3I$	۴ روبه بالا
$1+2=2I$	۵ روبه بالا
$1=1I$	۶ روبه بالا
$1+2+3+4+5=5I$	۱ روبه پایین
$1+2+3=3I$	۲ روبه پایین
$1=1I$	۳ روبه پایین

لذا تعداد مثلث‌ها برابر است با

$$\sum_{n=1}^6 ni + \sum_{n=1}^3 (2n-1)I$$

مهم‌ترین نتیجه‌ای که از این تجربه می‌توان گرفت چیست؟ آیا چیزی غیر از لزوم بازنگری در کتب درسی و شیوه‌های تدریس است؛ خصوصاً تغییر در شیوه‌های تدریس.

X	Y	P	P	Δ	Δ	Δ	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
Y	.	.	1	.	1	T	.	1	T	T	.	1	T	T	F	.	1	T	T	F	Δ	.	1	T	T	F	F	Δ	P			
Z	.	1	.	T	1	.	T	T	1	.	F	T	T	1	.	Δ	F	T	T	1	.	P	Δ	F	T	T	Y	1	.			

X	0	.	.	.	.	.	.
Y	T	P	Δ	F	T	T	1
Z	.	1	T	T	F	Δ	P

t	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
تعداد جواب $x+y+z=۷-t$	۸۱	۷۱	۶۱	۵۱	۴۱	۳۱	۲۱	۱۱

البته مسئله‌ی بالا به این شکل جالب نیست و بهتر است که از صورت‌های دیگر آن استفاده شود. مثلاً به شکل زیر که در کتاب ریاضیات گسسته نیز مطرح شده است.

«گل فروشی در مغازه‌ی خود فقط سه نوع گل دارد و می‌خواهد دسته گل‌هایی با ۸ شاخه گل درست کند و در انتخاب نوع گل‌ها کاملاً آزاد است. چند نوع دسته گل می‌تواند درست کند؟»

اینک مسئله به آسانی قابل تعمیم است.

نوع	مثلت هایی که از AB می گذرند	مثلت هایی که از AC می گذرند	مثلت هایی که از AD می گذرند	مثلت هایی که از AE می گذرند
نمودار				
تعداد	۷	۶	۵	۴

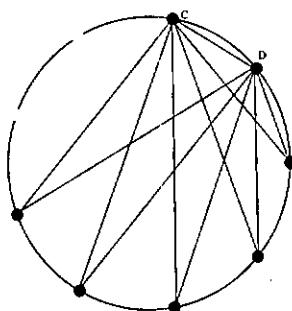
شماره ۱
تیرماه ۱۳۸۸

اگر به همین روش ادامه دهیم، تعداد آن‌ها VI به دست می‌آید. در مرحله‌ی بعد، A را حذف کرده و روش بالا را با نقطه‌ی B تکرار می‌کنیم:

نوع	مثلث‌هایی که از BC می‌گذرند	مثلث‌هایی که از BD می‌گذرند	مثلث‌هایی که از BE می‌گذرند	مثلث‌هایی که از BF می‌گذرند
نمودار				
تعداد	۶	۵	۴	۳

شکل (۶)

با توجه به جدول، تعداد مثلث‌ها ۶I به دست می‌آید. حال با نقطه‌ی C شمارش را تکرار می‌کنیم:



شکل (۷)

با تکرار شمارش بالا، تعداد آن‌ها ۵I به دست می‌آید و در نتیجه کلاً تعداد مثلث‌های حاصل، $8I + 7I + 6I + 5I + 4I + 3I + 2I + 1I$ است. شاید برخی روش بالا را نپسندند؛ ولی باید توجه کرد که این روش توسط دانش آموزانی ارائه شده است که هنوز با ترکیبات آشنا نیستند.

نتیجه‌گیری

مهم‌ترین نتیجه‌ای که از این تجربه می‌توان گرفت چیست؟ آیا چیزی غیر از لزوم بازنگری در کتب درسی و شیوه‌های تدریس است؛ خصوصاً تغییر در شیوه‌های تدریس. چرا که معمولاً مشاهده می‌شود که کتاب‌ها تغییر می‌کنند ولی شیوه‌های تدریس در مدارس و کلاس‌ها، تغییر نمی‌کند. البته دلایل مختلفی بر این امر وارد است؛ از جمله شلوغی کلاس‌ها، ساعت زیاد تدریس معلمان و خستگی ناشی از آن که برای معلم جایی برای برنامه‌ریزی و... باقی نمی‌گذارد، بررسی این عوامل، از حیطه‌ی کار ما خارج است. به هر حال ماده‌ی اولیه این مقاله، که همان راه‌حل‌های زیبای دانش‌آموزان بود حاصل کار دانش‌آموزان سال اول دبیرستان است که این امکان را پیدا کرده‌اند که در حل مسئله تقلید نکنند و آزادانه فکر کنند. لازم به ذکر است که این تجربه، در کلاس‌های مختلف در سال‌های مختلف، در مدارس خاص و معمولی اجرا شده و نتیجه داده است.

تدریس شهودی

واثر آن بر یادگیری

علیرضا کردیانی / معلم مدارس ابتدایی باخزر

با بچه‌ها خوش و بشی کردم و پس از تبریک سال نو، شکلات‌ها را به آن‌ها تعارف کردم. با خوشحالی فراوان به باز کردن و خوردن آن‌ها مشغول شدند. بقیه را هم روی میز گذاشتم تا در آخر ساعت به آن‌ها بدهم تا زنگ تفریح را مشغول باشند. مشغول صحبت شدیم و هر یک از آن‌ها از موضوع‌های جالبی که در تعطیلات برایش پیش آمده بود و یا بازی‌ها و مشغولیت‌هایی که هر یک داشتند، تعریف کردند. اواخر زنگ بود که پرسیدم: «راستی بچه‌ها، به پیک‌های نوروزی هم سر زدید یا آن‌ها را به گوشه‌ای انداختید و همه‌ی تعطیلات را مشغول بازی شدید؟!» بچه‌ها خندیدند و اطمینان دادند که بیش‌تر قسمت‌های پیک را حل کرده‌اند. در میان حرف‌های بقیه، ناگهان یکی از بچه‌ها به میان صحبت دیگران دوید و با صدای بلند گفت: «آقا معلم اجازه! ما همه رو حل کردیم جز همون تقسیم‌ها. من تقسیم‌ها رو یاد ندارم و از تقسیم بدم میاد.» بقیه‌ی بچه‌ها هم مثل این که با او هم‌درد بودند، گفتند: «آقا تقسیم سخته، ما تقسیم‌ها رو بلد نیستیم و نمی‌فهمیم.» گفتم: «چه طور؟ شماها که جدول ضربو خوب بلدید. هر کس جدول ضربو بلد باشه، تقسیم براش راحت میشه.» اما بچه‌ها معتقد بودند که تقسیم سخت است و نمی‌شود آن را به راحتی یاد گرفت. بلند شدم و تقسیم $4 \overline{) 7}$ را پای تخته

نوشتیم و گفتم: «این چه جور ی حل میشه؟» توقع داشتم بچه‌ها بتوانند این تقسیم ساده را به راحتی حل کنند و ضعف آن‌ها را ناشی از کمبود اعتماد به نفس آن‌ها می‌دانستم. اما وقتی دیدم برای حل آن، احتیاج به کمک و هم‌فکری و راهنمایی کامل من دارند، متوجه شدم که مشکل آن‌ها، جدی است. آن را با ارائه‌ی توضیح حل کردم و تقسیم $3 \overline{) 11}$ را نوشتم. اما باز هم بچه‌ها آن مهارتی که

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

چهاردهم نوروز بود و همان‌طور که عادت بسیاری از بچه‌های ایرانی است، غرق در زیبایی‌های بهار گشته و تعداد زیادی از آن‌ها به مدرسه نیامده بودند. البته قبلاً پیش‌بینی این موضوع را کرده و کارهایم را انجام داده بودم و از جهت عقب ماندن کلاس یا باقی ماندن تمرین‌ها، نگرانی نداشتم.

چهار نفر از دانش‌آموزانم به مدرسه آمده بودند. به سفارش مدیر به کلاس رفتم تا سر آن‌ها را گرم کنم. چند شکلات روی میز مدیر بود که با اجازه‌ی وی آن‌ها را با خود به کلاس بردم تا بچه‌ها دهان خود را شیرین کنند و نیز هدیه‌ای کوچک باشد به پاداش انضباط آن‌ها.



اگرچه می توان عکس ۱۸ شکلات را در کتاب چاپ کرد و از دانش آموزان خواست که آن را بین ۵ نفر قسمت کنند، اما این کار با نشان دادن ۱۸ شکلات واقعی و تقسیم واقعی آن بین دانش آموزان تفاوت زیادی دارد

یک شکلات رسید و ۳ تا باقی ماند؟ « برقی از چشمان بچه ها پرید و گفتند: «بله آقا!» گفتم: «اگر ۱۱ شکلات را بین ۳ نفر تقسیم کنیم چی؟ سهم هر یک چند تا میشه؟» بچه ها با هیجان و علاقه گفتند: «۳ تا آقا و ۲ هم باقی می مونه.» گفتم: «و ۱۸ شکلات بین ۵ نفر چی؟» و فوراً پای تخته نوشتم: $18 \div 5$. اما

بچه ها خیلی زودتر از من، قبل از این که آن تقسیم را بنویسم، پاسخ تقسیم و باقی مانده ی آن را هم گفته بودند. آن گاه بود که دانستم اگرچه می توان عکس ۱۸ شکلات را در کتاب چاپ کرد و از دانش آموزان خواست که آن را بین ۵ نفر قسمت کنند، اما این کار با نشان دادن ۱۸ شکلات واقعی و تقسیم واقعی آن بین دانش آموزان تفاوت زیادی دارد.

دو سه روز بعد وقتی همه ی دانش آموزان که ۱۷ نفر بودند به کلاس آمدند، اگرچه تقسیم را با همان روش و با دیدن سنگریزه هایی که آن ها را به طرق مختلف بین دانش آموزان تقسیم می کردیم یاد گرفتند، اما همه می دانیم که طعم شیرین شکلات های آقای مدیر را فقط همان ۴ نفر دانش آموز منضبط چشیدند!

توقع داشتم، به دست نیاورند. ناگهان فکری به خاطرم رسید. شکلات های روی میز را جلوی بچه ها شمردم و دیدم که ۱۵ تا است. گفتم: «هرکس بیاد و سهم خودشو برداره.»

بچه ها بلند شدند و هر یک ۳ شکلات برداشتند و ۳ تا اضافی ماند. گفتم: «کاشکی بیش تر بود تا همه ی شکلات ها تقسیم می شدند. چند تا کم داریم؟» همگی گفتند: «فقط یکی آقا» گفتم: «اونجوری به هر نفر چند تا می رسید؟» گفتند: «۴ تا آقا.» گفتم: «شکلات ها رو روی میز من بریزید.» آن ها بی درنگ این کار را کردند و من ۷ تا از شکلات ها را برداشتم و بقیه را جلوی آن ها شمردم و گفتم: «حالا هرکس بیاد و سهم خودشو برداره.» هرکس آمد و ۲ تا شکلات برداشت و سر جای خودش نشست. پرسیدم: «بچه ها اگر باز هم شکلات رو روی میز بریزید و من یکی بردارم چه جووری میشه؟» بچه ها جواد دادند: «آن وقت به هرکس یکی میرسه و باز ۳ تا اضافی می مونه.» گفتم: «پس می بینم که کار سختی نیست که چند شکلات را بین چند نفر تقسیم کنیم و تعداد شکلات هایی را که اضافه می ماند تشخیص بدهیم.» خندیدند و گفتند: «نه آقا!» گفتم: «به نظر شما آیا ۷ شکلات را بین ۴ نفر تقسیم کردن همان تقسیم $7 \div 4$ نیست که به هر نفر

استفاده از ICT در آموزش ریاضیات

سیده زهرا ابوالحسنی
کارشناس ارشد آموزش
ریاضی

چکیده

و پرورش استعداد های آن ها، به آموزش مدرسه ای یاری رسانده و آن را دچار تحول کرده اند. در واقع، همان طور که فتحیان (۱۳۸۳) اشاره کرده، پیشرفت فناوری شبکه و بسترهای مخابراتی نظیر انتقال متن، صوت و تصویر، نوع جدیدی از آموزش به نام «آموزش الکترونیکی» را پدید آورده است.

آموزش الکترونیکی، آموزش مبتنی بر فناوری اطلاعات است که گستره ی وسیعی از کاربردها، از جمله آموزش مبتنی بر وب، آموزش مبتنی بر کامپیوتر و کلاس های مجازی را در بر می گیرد (روزنبرگ^۱، ۲۰۰۰).

فولر^۲ (۲۰۰۳) توضیح می دهد که چگونه محیط های آموزشی مجازی، طیف وسیعی از تسهیلات لازم را برای ارائه ی پیمانه های روی خط^۳ ایجاد کرده اند تا تکمیل کننده یا جایگزین مدل های سنتی شوند. از نظر وی، یک محیط آموزشی مجازی عموماً به طراحی برنامه ی آموزشی می پردازد و پیمانه ها را به منابع آموزشی ارتباط می دهد. این کار باعث آسان شدن ارتباطات الکترونیکی بین دانش آموزان و بین دانش آموزان با معلمان می شود، علاوه بر این که حضور و عملکرد دانش آموزان را طی یک دوره، پی گیری و بررسی می کند، نقش یک حامی آموزشی را برای آنان ایفا می نماید و در نهایت، ارزیابی «روی خط» را تسهیل می کند. به همین دلیل، آموزش از طریق رایانه که لازمه ی هر نوع آموزش الکترونیکی است، به عنوان یکی از مباحث اصلی برنامه ریزی درسی در بسیاری از کشورهای جهان شناخته شده است و سرمایه گذاری های فراوانی در زمینه ی ابعاد گوناگون طراحی، اجرا و ارزیابی آن انجام شده است. (دبرا^۴، ۲۰۰۱)

با عنایت به توجه روزافزون استفاده از ICT در آموزش مدرسه ای و به خصوص درس ریاضی، تحقیقات انجام شده در این حوزه مورد مطالعه قرار گرفت تا مزیت ها و محدودیت های استفاده از ICT مشخص شود. پس از آن، تجربه ی تلخیص شده گزارش آفستد که در سال ۲۰۰۴ در انگلستان تدوین شده بود و در آن، به معرفی ابزارهای ICT پرداخته شده بود، ارایه می شود تا علاقه مندان به استفاده از ICT در کلاس درس ریاضی، با تنوع ابزارهای آن آشنا شوند و بتوانند در صورت لزوم، از آن ها استفاده کنند.

مقدمه

دانش و دانایی از دیرباز، مورد جستجوی اقوام و ملل بوده است. اما امروزه در نخستین دهه از هزاره ی سوم میلادی، دانش، عاملی راهبردی برای موفقیت فرد، سازمان و جامعه به شمار می رود و تنها منبعی است که ارزش آن در کاربرد آن است (شیخ زاده، مهرمحمدی، ۱۳۸۳). از این رو، ساختن دانش و تولید و مصرف آن، محور توسعه ی انسانی، توسعه ی پایدار و جامعه ی دانش - محور قرار گرفته است.

فناوری اطلاعات در جهان امروز، چشم اندازهایی را برای جهانیان به ارمغان آورده است که بر تمام ابعاد زندگی سیاسی، نظامی، اقتصادی، اجتماعی و آموزشی انسان قرن بیست و یکم تأثیر گذاشته است، به گونه ای که بیش تر یادگیرندگان را به سمت رایانه ها و آموزش کار با آن ها سوق داده است. رایانه ها با فراهم کردن فرصت لازم برای تمرین و کسب دانش توسط دانش آموزان

است. پیشرفت های چشم گیر در عرصه ی ارتباطات، با راه یافتن ماهواره ها به منازل و ترکیب رایانه ها با مودم و خط تلفن، انقلابی را در جهان رقم زده است که دانشمندان از آن به عنوان «انقلاب دیجیتال» یا «انفجار اطلاعات» نام می برند. این انقلاب با ایجاد شبکه های جهانی اطلاعات و ارتباطات و شاهراه جهانی اینترنت تکامل یافته و هم اکنون شاهد تأثیرات شگرف آن در عرصه های علمی، سیاسی، اجتماعی، اقتصادی و فرهنگی زندگی بشری در سطوح جهانی هستیم (اکبری، ۱۳۸۴)^۸. بنابراین، در شرایط موجود، ایجاد بسترهای مناسب برای استفاده از فناوری اطلاعات و ارتباطات در مدارس به طور عام و در برنامه درسی ریاضی و تدریس و یادگیری آن به طور خاص، یک ضرورت محسوب می شود.

در حال حاضر، نظام های آموزشی، مسئولیت خطیری برای به کارگیری، راهنمایی و هدایت تحولات فناوری اطلاعات از جمله تولید، توزیع و تبادل اطلاعات، برعهده دارند. هم چنین، همه ی عوامل آموزش و پرورش در تلاش برای فهمیدن و سازگار کردن ICT در نظام های آموزشی و کاربرد صریح و صحیح آن ها هستند. جامعه ی امروزی به شهروندانی نیاز دارد که بتوانند با بهره گیری مناسب از فناوری های اطلاعات و ارتباطات و با تفکر انتقادی و اتخاذ شیوه های راهبردی، به حل و فصل مسائل واقعی خود و جامعه ی خود بپردازند (شریفی، شهرزاد و رقابی، فنروش، ۱۳۸۳).

بدین سبب، تحقیقات متعددی در ایران و جهان انجام شده تا به ایجاد چنین بسترهایی کمک نمایند و هر یک از این تحقیقات، به جنبه ی خاصی از تلفیق ICT با موضوعات مدرسه ای از جمله ریاضی پرداخته اند. از آن جمله، تحلیل این یافته های تحقیقی، تلفیق ICT را با درس ریاضی مدرسه ای تأکید می کنند و توصیه هایی برای چگونگی انجام این کار دارند.

در گزارش آفستد^۹ «ریاضیات در مدارس دبیرستان» (۲۰۰۴)، تحقیقاتی را که در سال های ۲۰۰۲-۲۰۰۳ در مدارس انگلستان انجام داده است، را به صورت طرحی برای چگونگی استفاده از ICT ارایه نمود که با وجود گذشت یک دهه از آن، هنوز بخش های عمده ای از این طرح، می تواند مورد استفاده معنادار در ایران قرار نگرفته است. در نتیجه، با عنایت به یافته های تحقیقی که بر تلفیق ICT با درس ریاضی در هزاره ی جدید تأکید دارند، ترجمه ی تلخیص شده این گزارش به معلمان ریاضی ایران تقدیم می گردد تا در صورت لزوم، بتوانند برای ارتقای یاددهی-یادگیری ریاضی در کلاس های درس خود،

به گفته ی ریوز^۶ (۱۹۹۴) از جمله ویژگی های برتر آموزش به کمک رایانه، امکان پردازش اطلاعات، سرعت در پاسخ گویی، تنوع بخشی، یادگیری گروهی و ایجاد زمینه های تفکر را می توان نام برد. در سال های اخیر، آموزش به کمک رایانه از طرف ساخت و سازگرایان نیز مورد توجه واقع شده است، زیرا اساس چنین آموزشی، ایجاد فرصت های فراوان و دسترسی زیاد برای یادگیران در تولید و ساخت دانش است، به طوری که یادگیرندگان بتوانند در یک محیط فردی و گروهی، به آفرینش اندیشه های جدید بپردازند. در رویکرد ساخت و سازگرایانه، از رایانه به عنوان ابزار گردآوری و سازمان دهی اطلاعات استفاده می شود تا آن چه را که یادگیرندگان آموخته اند، به نمایش بگذارد. در این بخش، یادگیرنده در حکم جستجوگر فعال، اطلاعات خود را از طریق فرایند گردآوری اطلاعات جدید، اصلاح و به روز می کند (شیخ زاده، مهر محمدی، ۱۳۸۳).

در هر صورت، امروزه فناوری اطلاعات به مدد فناوری ارتباطات فراگیر شده و جهان را دگرگون ساخته است. مهم ترین تغییراتی که این فناوری در جهان به وجود آورده، به وسیله ی مک لوهان^۷ (۱۹۶۴) در یک عبارت خلاصه شده است و آن «تبدیل جهان به یک دهکده ی جهانی» است، بدین معنا که مردم نقاط مختلف در کشورهای سراسر کره زمین، به مثابه ساکنان یک دهکده، امکان برقراری ارتباط با یکدیگر و اطلاع از اخبار و رویدادهای جهانی را دارند. به گفته ی وی، نزدیکی روزافزون شهروندان دهکده ی جهانی به یکدیگر، تبادل فرهنگ ها، تعامل اندیشه ها، ارتقای بینش سیاسی و اجتماعی مردم و دسترسی سریع به اطلاعات تولیدی در جهان، همگی از دستاوردهای با ارزش فناوری ارتباطات اند، از سوی دیگر، فناوری اطلاعات ابزار قدرتمندی است که در کمترین زمان ممکن، می تواند بین مردم جهان ارتباط برقرار سازد و این ابزار ارتباطی قدرتمند، با اطلاعات سروکار دارد.

به همین جهت، کاربرد فناوری های جدید اطلاعاتی و تغییرات سریع آن، موجب بروز تحولات بسیار در کلیه جنبه های یادگیری و آموزش شده است. شبکه های ارتباطی و اطلاعاتی به ویژه اینترنت، چهره آموزش سنتی و چگونگی تعامل بین معلم و دانش آموز را در تمام سطوح-از پیش دبستانی تا دانشگاهی- دگرگون کرده اند. پیشرفت های پرشتاب علمی و تکنولوژیک در دهه های آخر قرن بیستم، جهان را وارد عرصه جدیدی کرده است که تقریباً همه ی امور زندگی بشری را تحت تأثیر خود قرار داده

توصیه های آن را به کار گیرند.

در سال های اخیر، آموزش به کمک رایانه از طرف ساخت و سازگرایان نیز مورد توجه واقع شده است، زیرا اساس چنین آموزشی، ایجاد فرصت های فراوان و دسترسی زیاد برای یادگیران در تولید و ساخت دانش است، به طوری که یادگیرندگان بتوانند در یک محیط فردی و گروهی، به آفرینش اندیشه های جدید بپردازند

دوربین فیلمبرداری؛

- پروژکتور اطلاعات - متحرک یا ثابت و اغلب بی سیم؛
- پروژکتور (Over Head Projector) یا نمایشگر (LCD)؛
- دستگاه تعاملی برای تبدیل سیگنال های ورودی به خروجی استاندارد مانند ویدئو پال؛
- دوربین نمایش مدارک؛
- تخته سفید معمولی برای استفاده با مازیک های تخته وایت برد؛
- یک یا چند صفحه بزرگ مانند مانیتورهای نمایش، دستگاه های تلویزیون، نمایشگرهای پلاسما و غیره.

استفاده های شخصی یا گروهی از ICT

در تعداد کمی از مدارس، کلاس های درس ریاضی وجود دارند که با کامپیوترهای شبکه ای مجهز شده اند و پایه ی مناسبی از برنامه های نرم افزاری را فراهم می کنند. در چنین شرایطی، طبیعی است که تعداد کامپیوترها در کلاس های درس تعدیل شود. یعنی هر کلاس می تواند دسترسی لازم به کامپیوتر را در زمان های مناسب داشته باشد.

به صورت ایده آل، می توان مراحل زیر را فراهم کرد:

- نمایشگری برای تمام کلاس که توسط تمام دانش آموزان قابل رؤیت باشد؛
- افزایش تعامل شفاهی و دیداری بین معلم و دانش آموزان چه در شرایط یک نفره و چه گروهی؛
- استفاده از دامنه ای از نرم افزارها که برای یادگیری ریاضی مناسب ترند؛
- با وجود دسترسی به هر نوع از این ابزارها، لازم است که به دقت، برای فعالیت های گروهی برنامه ریزی شده و به سوال های زیر پاسخ داده شوند:
- چگونه فعالیت ها و کارهای دانش آموزان برای دسترسی های

چگونگی استفاده ی مؤثر از ICT در یاددهی و یادگیری ریاضی

ICT، منبع قدرتمند دیگری برای معلمان ریاضی است که برای والدین ریاضی دانش آموزان در داخل و خارج از کلاس درس، کاربرد دارد. در دنیای جدید، والدین، دانش آموزان و معلمان انتظار دارند که بتوان در آموزش تمامی دروس، به بهترین نوع از ICT استفاده کرد و انتخاب و به کارگیری منابع ICT به گونه ای که منجر به یادگیری بهتر دانش آموزان شود، نیازمند تحقیقات جدی است.

البته پیشرفت هایی که در ICT انجام گرفته اند بسیار سریع بوده اند و هزینه های عمومی به میزان قابل توجهی کاهش داشته اند. به این دلیل، اکنون در بسیاری از منازل، منابع فراوانی از ICT موجود می باشند و در اختیار بسیاری از معلمان ریاضی در مدارس و دانشگاه ها قرار دارند، اما با توجه به این که اکثر ابزارهای ICT برای استفاده های شخصی ایجاد شده اند، به کارگیری این ابزارها در محیط های آموزشی، نیازمند دقت فراوان است.

۱) روش های به کارگیری ICT در آموزش

در سال های اخیر، آموزش ریاضی شاهد نوآوری هایی در رویکردهای آموزشی در کلاس درس بوده است. بنابراین لازم است بدانیم که کدام نوع از منابع ICT برای دربرگیری موضوع مورد نظر، در دسترس هستند. در بسیاری موارد، لازم است بخواهید دانش آموزان، خود به منابع ICT دسترسی پیدا کنند. این کار باید از طریق دسترسی های فردی یا کار گروهی یا دو نفره انجام گیرد. یافتن راه حل برای در دسترس بودن منابع ICT در ریاضیات در کلاس های درس و در دانشکده ها، موضوعی است که باید نسبت به آن، توجه ویژه شود.

کار کردن همه ی کلاس با ICT

تمام کلاس از راه های زیر می تواند از ICT به صورت نمایش تصویری بهره مند شوند:

- یک کامپیوتر معمولی یا Laptop؛
- تکنولوژی دستی مانند ماشین حساب مخصوص نمایش عمومی برای معلمان؛
- سایر ابزار ICT، مانند دوربین دیجیتال، دستگاه DVD یا

دسترسی دانش آموزان ما به منابعی است یادگیری آن‌ها را تسهیل و تعمیق کند.

در سال ۱۹۹۵ شورای ملی برای تکنولوژی آموزشی، شش موقعیت زیر را فهرست کرد که از طریق آن‌ها، ICT می‌تواند فرصت‌هایی را برای یادگیری ریاضی دانش آموزان ایجاد کند:

❖ یادگیری از طریق بازخورد: کامپیوتر اغلب بازخورد سریع و قابل اعتمادی می‌دهد که بی‌طرف و غیرجانبدارانه است. این مطلب می‌تواند دانش آموزان را به حدس زدن و آزمایش ایده‌های خود تشویق کند.

❖ مشاهده الگوها: سرعت کامپیوترها و ماشین حساب‌ها دانش آموزان را قادر به تولید مثال‌های زیادی در زمان حل یا کشف مسئله‌های ریاضی می‌کند که این کار، مستلزم مشاهده الگوها و توجیه تعمیم‌هاست.

❖ دیدن ارتباطات: کامپیوتر کمک می‌کند تا فرمول‌ها، نمودارها، جدول‌ها و عکس‌ها به هم مرتبط شوند تغییر یک متغیر و مشاهده تغییرات در سایر متغیرها، به دانش آموزان کمک می‌کند تا رابطه‌ی بین آن‌ها را بهتر بفهمند.

❖ کار با تصاویر پویا: دانش آموزان می‌توانند از کامپیوتر برای تهیه نمودارهای پویا استفاده کنند. این مطلب به آن‌ها کمک می‌کند تا هندسه را توسط اشکال ذهنی خود مجسم نمایند.

❖ توصیف داده‌ها: کامپیوتر به دانش آموزان کمک می‌کند تا با داده‌های واقعی کار کنند و این داده‌ها، می‌توانند به راه‌های متفاوت ظاهر شوند. داده‌های واقعی کمک می‌کنند تا دانش آموزان، تفسیر و تجزیه و تحلیل داده‌ها را یاد بگیرند.

❖ آموزش کامپیوتری: وقتی که دانش آموزان با کامپیوتر، یک الگوریتم را برای رسیدن به یک نتیجه طراحی می‌کنند، انجام دستورات ریاضی را به صورت شفاف و مرتب یاد می‌گیرند.

۳) تأثیر بر برنامه‌ی درسی

بررسی تاریخی نشان می‌دهد که زمان طولانی لازم است تا برنامه‌های درسی ریاضی، نسبت به تغییرات تکنولوژی مانند پیشرفت ماشین حساب‌های الکترونیکی واکنش نشان دهند و از آن‌ها استفاده کنند. اما در هر صورت، اکنون ICT در تمام شاخه‌های صنعتی، تجاری و تحقیقاتی ریاضی و آمار، به عنوان ابزار حل مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اکثر ماشین حساب‌های گرافیکی می‌توانند عملکردهای ریاضیاتی استاندارد مانند تغییر ماتریس‌ها یا ضرب‌های پیچیده

بعدی ذخیره خواهد شد؟

● آیا دسترسی به نسخه‌های مکتوب فعالیت‌ها ضروری است یا خیر؟

● آیا امکان نمایش کارهای فردی هر دانش آموز به تمام کلاس وجود دارد یا خیر؟

کار گروهی با ICT

امکان دارد که تنها چند کامپیوتر در کلاس‌های درس ریاضی داشته باشیم که می‌توان برای کار در گروه‌های کوچک مثلاً ۳ تا ۴ نفره به کار برد. اگر تعداد این کامپیوترها برای تمام کلاس کافی نباشد، می‌توان از سیستم گروهی گردشی استفاده کرد که وقتی تعدادی از دانش آموزان از کامپیوتر استفاده می‌کنند، گروه‌های دیگر به فعالیت دیگری مشغول بوده و در جلسه‌ی بعدی یا درس بعد، از کامپیوتر استفاده کنند.

در هر صورت، امروزه فناوری اطلاعات به مدد فناوری ارتباطات فراگیر شده و جهان را دگرگون ساخته است. مهم‌ترین تغییراتی که این فناوری در جهان به وجود آورده، به وسیله‌ی مک‌لوهان (۱۹۶۴) در یک عبارت خلاصه شده است و آن «تبدیل جهان به یک دهکده‌ی جهانی» است، بدین معنا که مردم نقاط مختلف در کشورهای سراسر کره زمین، به مثابه ساکنان یک دهکده، امکان برقراری ارتباط با یکدیگر و اطلاع از اخبار و رویدادهای جهانی را دارند.

در هر صورت، نوع فعالیتی که با کامپیوتر انجام می‌شود نیاز به برنامه‌ریزی دقیق دارد و به صورت ایده‌آل، مستلزم کار گروهی دانش آموزان است تا فعالیت بعدی با کامپیوتر را برنامه‌ریزی نمایند. به عنوان مثال، می‌توان فعالیتی به صورت شرکت در یک بازی ماجراجویانه، حل مسئله یا مدل‌سازی کامپیوتری طراحی کرد.

۲) تغییر در رویکردهای آموزشی

استفاده از ICT در درس‌های ریاضی به صورتی که شیوه‌ی تدریس را زیر سؤال نبرد، امکان‌پذیر است، زیرا هدف ICT، محدود کردن دانش آموزان نیست و در عوض، هدف آن، افزایش

پیشرفت معلمان و دانش آموزان و چگونگی استفاده‌ی کارآمد از ICT، نقش مهمی ایفا کند.

۶) ارزیابی تأثیر استفاده از ICT

ارزیابی در تمامی سطوح اتفاق می‌افتد مثلاً در استفاده از ICT در بخش‌هایی از درس‌ها، لازم است. چگونگی استفاده از ابزارهای ICT مورد ارزیابی قرار گیرند و نوع تأثیر این ابزار در یادگیری ریاضی دانش آموزان، مورد مطالعه قرار گیرد.

ابزار ICT و ارتباطات ویژه‌ی آن‌ها با آموزش ریاضی

به گزارش آفستد (۲۰۰۴)، طی سال ۱۹۹۰، بکتا^{۱۴} سمینارها و کنفرانس‌هایی را برای بررسی پایه‌های نرم‌افزاری مرتبط با موضوعات مختلف درسی در برنامه آموزشی مدارس آموزش

در شرایط موجود، ایجاد بسترهای مناسب برای استفاده از فناوری اطلاعات و ارتباطات در مدارس به طور عام و در برنامه درسی ریاضی و تدریس و یادگیری آن به طور خاص، یک ضرورت محسوب می‌شود

متوسطه برگزار کرد. بکتا (۱۹۹۹) توضیح داد که ICT از انتخاب گستره‌ی وسیعی برخوردار است که با وجودی که تعداد آن‌ها زیاد نیست، اما در تمام برنامه‌های درسی ریاضیات مدرسه‌ای به خصوص در پایه‌های متوسطه، کاربرد وسیعی دارند. بکتا به معلمان یادآور شد که «به این ترتیب، زمانی که صرف آموزش می‌کنید تا ابزاری را به کار ببرید، به سادگی از طریق ذخیره‌ی زمان یادگیری، جبران می‌شود.»

مهم‌ترین ابزارهایی را که در کلاس‌های درس ریاضی در انگلستان مورد استفاده قرار می‌گیرند، نمایش‌گرهایی برای نشان دادن به همه‌ی کلاس، ماشین حساب‌های گرافیکی و رویدادنگاری اطلاعات، برنامه‌های کوچک، زبان‌های برنامه‌نویسی، نرم‌افزارهای چندمنظوره، نرم‌افزار آموزش ریاضی می‌باشند (بکتا، ۱۹۹۹).

نتیجه‌گیری

با جمع‌بندی این یافته‌ها، مزایا و محدودیت‌های استفاده از ICT را می‌توان به شرح زیر بیان کرد:

را انجام دهند. به طور مثال، با استفاده از این ماشین حساب‌ها، می‌توان بر شناخت این که چه ماتریس‌ها یا توابع مختلفی وجود دارند و به چه منظوری به کار می‌روند بدون نیاز به انجام کارهای معمولی و طولانی، اهتمام ورزید. با استفاده‌ی گسترده از ماتریس‌ها و اعداد مختلط در مهندسی، علوم و سایر شاخه‌های ریاضی، استفاده از ICT برای کمک به درک بهتر علوم توسط دانش آموزان، توصیه می‌شود.

۴) استفاده از کامپیوتر به منظور ایجاد فعالیت‌های ارزشمند در آموزش

سه واژه وجود دارند که با مفهوم ارزشمند رابطه نزدیکی دارند، در حالی که سایر واژه‌ها به صورت کامل، نمی‌توانند مفهوم ارزشمند را بیان کنند.

● شتاب^{۱۱}: دانش آموزان را به حوزه‌هایی از برنامه‌ی درسی می‌برد که معمولاً دانش آموزان سال‌های بالاتر، بر آن تسلط دارند.
● گسترش^{۱۲}: شامل معرفی و کارکردن با موضوع‌هایی فراتر از سرفصل‌های تعیین شده و مطالبی از ریاضی است که معمولاً در برنامه‌های درسی عادی، مطرح نمی‌شود. ریاضیات، مسائلی را به دانش آموزان ارائه می‌دهد که برای حل آن‌ها، نیاز است دانش آموزان از مهارت‌های ریاضی خود، در زمینه‌های غیررسمی استفاده کنند.

● غنی‌سازی^{۱۳}: توسعه‌ی درک دانش آموزان از ایده‌های ریاضی است که آن‌ها قبلاً در مسائل و موقعیت‌های دیگر، آن‌ها را به کار برده‌اند. هدف از غنی‌سازی، افزایش سطوح حل مسئله و فون ارتباطی می‌باشد و به این ترتیب، استفاده و کاربرد ریاضی افزایش می‌یابد. هدف این کار، پرورش کسانی است که بتوانند ریاضی را در مسائل روزمره‌ی زندگی خود به کار گیرند. غنی‌سازی هم چنین شامل رویکردهای آموزشی می‌باشد که بحث‌ها و ارتباطهای ریاضی را گسترش می‌دهد.

۵) نتایج مدیریت

به ناچار، معلمان در نظام آموزشی با مدیریت مدرسه در ارتباط خواهند بود. در ضمن، آن‌ها باید در کلاس درس مدیریت یادگیری دانش آموزان را به عهده گیرند.

هم چنین، مدیران مدرسه فعالیت‌های معلمان را مورد ارزیابی قرار می‌دهند و نیازهای آموزشی را برآورده می‌سازند. مدیران مدرسه‌ها دارای جایگاه بنیادینی هستند که می‌توان در

جمع بندی

۱. تغییرات عمده ای در ابعاد گوناگون به وقوع پیوسته است که همگی دلالت بر ضرورت تغییر برنامه ی درسی، محتوا، روش تدریس و ارزشیابی ریاضی می کنند. مهم ترین تغییرات عبارت است از: تغییرات دیدگاه در علم ریاضی و چگونگی کاربرد آن، تغییرات در نقش تکنولوژی به خصوص ماشین حساب و کامپیوتر، تغییرات در جامعه ی ایران، تغییرات در درک بهتر انواع یادگیری دانش آموزان و بالاخره تغییرات در چگونگی رقابت های بین المللی در نتیجه با توجه به کلیه ی نیازها و شرایط و با در نظر گرفتن تغییرات مذکور، باید به تهیه ی برنامه ی درسی ریاضی پرداخت (گویا، ۱۳۸۰). لذا لازم به ذکر است در زمینه ی تلفیق برنامه ی درسی آموزشی ریاضی با ICT، تمهیدات لازم انجام پذیرد.

جامعه ی امروزی به شهروندانی نیاز دارد که بتوانند با بهره گیری مناسب از فناوری های اطلاعات و ارتباطات و با تفکر انتقادی و اتخاذ شیوه های راهبردی، به حل و فصل مسائل واقعی خود و جامعه ی خود بپردازند

۲. نرم افزارهای آموزشی هندسی پویا و زبان برنامه نویسی لوگو، در آموزش هندسه در ترسیم اشکال و تبدیلات هندسی در دوره های تحصیلی راهنمایی و دبیرستان به کار گرفته شود.
۳. تخته سفید تعاملی (IWB) که برای استفاده با مدادهای ویژه طراحی شده اند و ماشین حساب گرافیکی، برای استفاده در کلاس های درس، خریداری و در اختیار مدارس قرار گیرد.
۴. دلیل اصلی شکست تلفیق فناوری در نظام آموزشی ایالات متحده امریکا این است که اگرچه دست یابی به فناوری بهبود یافته است، ولی معلمان در تلاش هایشان برای استفاده و تلفیق فناوری در کلاس خود مورد حمایت کمتری قرار گرفته اند (آتا، ۱۹۹۵). لذا حمایت مدیران از معلمان ریاضی که از ICT در کلاس درس خود استفاده می نمایند، ضروری می باشد.
۵. زیر ساخت های مخابراتی لازم جهت استفاده از اینترنت در سطح کشور، فراهم شود؛
۶. شبکه اینترنت برای کلیه مدارس سطح کشور، ایجاد شود؛
۷. مدارس مجازی به عنوان ابزاری برای ایجاد محیط یادگیری

مزایای استفاده از ICT شامل:

- ✓ ایجاد انگیزه و علاقه در دانش آموزان برای یادگیری؛
 - ✓ ایجاد رغبت معلمان در تدریس منابع درسی؛
 - ✓ امکان یادگیری، برای هر ردی در هر زمان و هر مکانی؛
 - ✓ در دسترس بودن منابع اطلاعاتی در تمام بخش های ریاضی و امکان برقراری ارتباط لازم بین ریاضی و سایر موضوع ها در حداقل زمان؛
 - ✓ جایگزینی پداگوژی جدید و هوشمند به جای پداگوژی سنتی؛
 - ✓ تعامل دانش آموزان با یکدیگر با استفاده از تشکیل گروه های کاری اینترنتی در وبلاگ؛
 - ✓ برطرف شدن مشکلاتی نظیر کمبود استادان مجرب و فضای آموزشی مناسب؛
 - ✓ ذخیره شدن مطالب درسی در حافظه کامپیوتر برای استفاده های بعدی؛
 - ✓ تنوع روش های یادگیری در زمینه استفاده از ICT، توسط دانش آموزان؛
 - ✓ صرفه جویی در وقت و هزینه به دلیل استفاده از کتاب خانه های دیجیتال و جست و جو در سایت های مختلف در حین مطالعه؛
 - ✓ یاددهی با استفاده از قابلیت افزودن تصاویر گرافیکی، صوت یا تصویر به طور عینی؛
 - ✓ تبادل اطلاعات و سؤالات معلم با سایر معلمان در زمینه ی ایجاد بانک سؤالات غنی؛
 - ✓ کاهش یافتن فاصله بیش از حد نیازهای جامعه و آنچه که نظام آموزشی کنونی عرضه می کند.
- محدودیت های استفاده از ICT:**
- ✓ نبود استانداردهای لازم جهت تبدیل برنامه های درسی فعلی به برنامه ی درسی تلفیق شده با ICT؛
 - ✓ مشکلات ارزیابی دانش آموزان به صورت Online؛
 - ✓ ناکافی بودن آموزش های لازم برای معلمان ریاضی در خصوص تلفیق ICT با ریاضی؛
 - ✓ ناکافی بودن امکانات نرم افزاری و سخت افزاری و نامناسب بودن زیر ساخت های مخابراتی از نظر محدودیت در پهنای باند؛
 - ✓ عدم دسترسی به اینترنت در همه ی مدارس در سطح کشور؛
 - ✓ انگلیسی بودن زبان اکثر نرم افزارها و ضعف دانش انگلیسی دانش آموزان ایرانی.

۸. گویا، زهرا، رفیع پور، ابوالفضل و خلیفه، زهرا (۱۳۸۳). چارچوبی برای تلفیق ICT در آموزش ریاضی، مجموعه مقالات دومین همایش آموزش الکترونیکی.
 ۹. گویا، زهرا و رفیع پور، ابوالفضل (۱۳۸۳). نقش فن آوری اطلاعات و ارتباطات (ICT) در آموزش ریاضی، گزیده مقالات هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران.
 ۱۰. میرشفیعی، سیدعلی (۱۳۸۴). فن آوری اطلاعات و ارتباطات.
<http://www.naftepars.ir/official/2961/view.asp?ID=279977>

بخش انگلیسی

- [1] Becta, Dynamic geometry:
<http://www.curriculum.heckta.org.uk/docserver.php?docid=1937>
- [2] Becta (2000). Secondary Mathematics with ICT.
<http://www.vtc.ngfl.gov.uk>
- [3] Becta (2002). Using web-based resources in the daily mathematics lesson. <http://www.ictadvice.org.uk>
- [4] Becta (2004). 'Getting the most from your interactive whiteboard'
<http://www.ferl.becta.org.uk/display.cfm?resID=7674>
- [5] Casey, John A. (1995). Developmental issues for school counsel using Technology, Elementary school Guidance & Counseling, V.30, and No.1.
- [6] Clark G., Redden, E., Geometrical investigations: a Companion to Cabri II, AAMT <http://www.aamt.edu.au>
- [7] Green, D., Armstrong, A. & Bridges, R. (1993), Spreadsheets: Exploring their Potential in Secondary Mathematics, MA.
- [8] Jones, K. (2004), 'Using Interactive Whiteboards in the Teaching and Learning of Mathematics: a research bibliography', Micromath 20/2 Summer 2004.
- [9] Kalinowski, Michael F (2001). "The Current status of technology in education: lightspeed ahead with 'Mild turbulence'". Information Technology in childhood Education Annual (ITCE) V. 2001, issue1.
- [10] Kington (2002). Innovative Classroom Practices using ICT in ENGLAND and Alison & Harris, Sue Implications for Schools. National Foundation for Education Research.
- [12] Mathematics with ICT in key stage3. Geometry Lessons,
<http://www.standards.dfes.gov.pdf>
- [13] Myrick, Robert Dand Russell A. Sabella (1995). Cyberspace: New Place For counselor supervision, Elementary School Guidance & Counseling, V.30, No.1.
- [14] Oldknow, A. & Flower, J. (1996), Symbolic Manipulation by Computers and Calculators MA,
<http://www.m-a.org.uk/resources/publications/books/books/>
- [15] OTA, (1995). Teachers and technology: Making the connection. (Publication No. OTA-HER-616). Washington, DC; U.S. Government Printing Office.
- [16] Ofsted (2002) ICT in schools, HMI 423 <http://www.ofsted.gov.uk>
- [17] Ofsted report: ICT in Schools 2004 (HMI 2050)
<http://www.ofsted.gov.uk/publications/index.cfm?fuseaction=pubs.summary&id=3652>
- [18] Ofsted (2006): Evaluating mathematics Provision for 14-19-year-olds, <http://www.ofsted.gov.uk/ofsted-home/publications-and-research/Brows-all-by/Education/curriculum/Mathematics/secondary/Evaluating-mathematics-provision-for-14-19-year-olds>
- [19] Royal Society/JMC (2001), Teaching and Learning Geometry 11-19 <http://www.royalsoc.ac.uk/policy/index.html>

آموزش الکترونیکی، آموزش مبتنی بر فناوری اطلاعات است که گسترده‌ی وسیعی از کاربردها، از جمله آموزش مبتنی بر وب، آموزش مبتنی بر کامپیوتر و کلاس‌های مجازی را دربر می‌گیرد

مبتنی بر فناوری اطلاعات و ارتباطات تأسیس می‌شود؛

۸. در مقاله‌ی قوانین ارزشیابی ریاضیات برای سنین ۱۹-۱۴ سالگی^{۱۷} در گزارش آفتسد (۲۰۰۶)، نیز به استفاده از ICT در افزایش یادگیری و توسعه‌ی مهارت‌های عملیاتی توصیه می‌شود.

پی‌نوشت‌ها

1. Rosenberg
2. Fuller
3. Module
4. On line
5. Deborah
6. Reeves
7. Herbert Marshall McLuhan
8. <http://malardmath.persianblog.ir>
9. Ofised (office for standards in education)
10. Camera Documetr
11. Acceleration
12. Extension
13. Enrichment
14. British Education and Communication Technology Agency
15. Hand-holding
16. OTA
17. Evaluating mathematics provision for 14-19-year-olds

منابع

بخش فارسی

۱. برزگر، سمیه (۱۳۸۴). روش‌های ارزیابی کلاس‌های آموزشی در آموزش مبتنی بر وب، سایت اینترنت بانک صنعت و معدن.
۲. بهشتی، زهرا (۱۳۸۳). بررسی نقش آموزش الکترونیکی در حل مشکلات آموزش‌های سنتی و استفاده از آن برای همگانی کردن امر تعلیم و تربیت در ایران، مجموعه مقالات دومین همایش آموزش الکترونیکی
۳. حج فروش، احمد و اورنگی، عبدالمجید (۱۳۸۳). بررسی نتایج کاربرد فناوری اطلاعات و ارتباطات در دبیرستان‌های شهر تهران، نوآوری‌های آموزشی، سال سوم، شماره ۹.
۴. خوشدل، مهران (۱۳۸۳). ارائه سیستم آموزشی مطلوب و متناسب با اهداف بانک صنعت و معدن، گزارش نهایی پروژه کارورزی به راهنمایی دکتر احمد شربت‌اوغلی.
۵. شریفی، شهرزاد و رفایی، فرنوش (۱۳۸۳). طرح پیشنهادی بررسی نیازهای مطالعاتی دانش‌آموزان مقطع راهنمایی شهر تهران با توجه به تحولات فناوری آینده، مجله الکترونیکی مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران، دوره سوم، شماره سوم.
۶. شیخ‌زاده، مصطفی و مهرمحمدی، محمود (۱۳۸۳). نرم‌افزار آموزش ریاضی ابتدایی بر اساس رویکرد سازنده‌گرایی و سنجش میزان اثربخشی آن، نوآوری‌های آموزشی، سال سوم، شماره ۹.
۷. عالی، مریم (۱۳۸۴). بررسی نگرش دانش‌آموزان نسبت به درس هندسه، رشد آموزش ریاضی، سال بیست و دوم، شماره ۷۹.

جایگاه تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه ی فضایی

نورالدین بهین آیین

دانشگاه آزاد واحد علوم و تحقیقات فارس

مریم غلامی

دبیر ریاضی بوشهر و کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده

تکراری را خاتمه داده و آموزش را بهبود ببخشد. ولی سؤال اینجاست که چرا دبیران ریاضی، علاقه ی چندانی به استفاده از فناوری آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری از خود نشان نمی دهند؟ آیا استفاده از فناوری آموزشی را غیر مفید می دانند یا دلایل دیگری برای این کار وجود دارد؟ دبیران ریاضی چه اقداماتی را برای راه های بهبود جایگاه تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری مؤثر می دانند؟ تحقیق حاضر، پاسخ این سؤالات را در مورد موضوع «هندسه ی فضایی» بررسی می کند.

کلیدواژه ها: آموزش، یادگیری، هندسه ی فضایی، تکنولوژی آموزشی

مقدمه

با پیشرفت علوم و فنون و پیچیده تر شدن جوامع، کسب علوم و فنون جدید در سایه ی راهبردهای آموزشی ساده ی سنتی امکان پذیر نیست. به این سبب، مسئولیت معلم امروز نسبت به گذشته سنگین تر و پیچیده تر شده است. دیگر نمی توان با روش های سنتی، جامعه و افراد آن را به سوی یک تحول پیشرفته سوق داد. در دنیای امروز، هیچ کس بی نیاز از تعلیم و تربیت و یادگیری نیست و به جرأت می توان گفت که آموزش، جزء اصلی زندگی انسان ها شده است و در این میان، این معلم است که باید سعی کند موقعیت مطلوب یادگیری را فراهم سازد.

یکی از روش های بسیار معمول مورد استفاده ی معلمان در سراسر جهان که براون^۱ و اتکینس^۲ (۱۹۹۱) سابقه ی آن را به پنج

فرایند یاددهی-یادگیری اثربخش، محصول طراحی و سازمان دهی دقیق و توجه به تنوع راهبردهای یاددهی-یادگیری و به کارگیری کارآمدترین ابزار است. تکنولوژی، رشته ای علمی-کاربردی است که برای افزایش کارایی آموزش، از طریق کنترل عوامل، به کار برده می شود و هدف آن ایجاد شرایطی است که یادگیری را اثربخش نماید. انفجار اطلاعات و رشد سریع تکنولوژی، تأثیرات بنیادین بر همه ی عرصه ها از جمله آموزش و پرورش گذاشته است. بر این اساس، نیازها و علائق دانش آموزان با نسل گذشته متفاوت است. در نتیجه، چگونگی آموزش آن ها نیز تغییر کرده است (مارتین^۱، ۱۹۹۶). لذا در هزاره ی جدید، نمی توانیم با قانون مندی های سده ی قبل، برای نظام آموزشی، استراتژی [برنامه] تعیین کنیم و جای نگرانی است که ما این دوران را جدی نگرفته ایم (گویا، ۱۳۸۱).

درس ریاضی با وجود اهمیت آن به عنوان پایه ی یادگیری دروس دیگر، همواره به عنوان درسی مشکل و هراس انگیز در میان دانش آموزان مطرح بوده و فرایند یاددهی-یادگیری آن با مشکلاتی روبه روست. تا آن جا که گاهی دانش آموزان به جای یادگیری معنادار، به حفظ و به خاطر سپاری آن اکتفا کرده و تنها به کسب نمره ای در حد عبور از یک مرحله ی تحصیلی راضی می شوند. اینجاست که ضرورت بهبود فرایند یاددهی-یادگیری، بیش تر مورد توجه قرار می گیرد.

متأسفانه در کلاس های ریاضی، بیش تر از روش سخن رانی و تنها گاهی از پرسش و پاسخ استفاده می شود. در صورتی که در عصر حاضر، فناوری می تواند به یاری آموزش شتافته و این روند

می دهند. بنابراین هندسه در واقع زمینه ی همه ی علوم طبیعی، و به نوعی زبان همه ی علوم است.

شاریگین و پروتاسف^۵ (۲۰۰۴) ابراز کرده اند که برخی افراد تمایل دارند هندسه از برنامه ی درسی ریاضی مدرسه ای حذف شود و برخی نیز تمایل دارند که حجم هندسه در برنامه ی درسی کاهش یابد. به گفته ی آن ها، این تمایل بیش تر در بین افرادی دیده می شود که در فهم و یادگیری هندسه دچار مشکل هستند و این مسئله، حتی در بین افراد حرفه ای در حوزه ی ریاضی نیز دیده می شود (نقل شده در رفیع پور، ۱۳۸۵). پس راه حل مناسب برای یادگیری هندسه، نمی تواند حذف آن از فهرست دروس دبیرستانی باشد.

از طرف دیگر، تکنولوژی آموزشی قابلیت و توانایی آن را دارد

درس ریاضی با وجود اهمیت آن به عنوان پایه ی یادگیری دروس دیگر، همواره به عنوان درسی مشکل و هراس انگیز در میان دانش آموزان مطرح بوده و فرایند یاددهی-یادگیری آن با مشکلاتی روبه روست

که فرایند یادگیری را تصریح، تسریع و تسهیل کند و به آموخته ها عمق و معنای بیش تری ببخشد. تکنولوژی آموزشی از روش ها، فنون، ابزار و امکاناتی برخوردار است که با به کارگیری و اعمال درست، به جا و به موقع آن ها، می توان سطح یادگیری و بازدهی آموزش را به گونه ی شگفت انگیزی به حداکثر ممکن و مطلوب رساند.

مثلاً در درس هندسه، تصاویر گرافیکی می توانند مورد توجه قرار گیرند که به دو صورت تصاویر بیت نگاشتی و تصاویر شیء-گرا وجود دارند. تصاویر بیت نگاشتی دربرگیرنده ی نقاط خیلی کوچکی به نام پیکسل هستند که براساس ماتریسی از خطوط نازک غیر چاپی تنظیم شده اند. فایل های تصویری شیء-گرا (که تصاویر برداری نیز نامیده می شوند)، با تصاویر بیت نگاشتی متفاوتند زیرا ترکیبی از اشکال هندسی هستند که می توان آن ها را انتخاب کرد، حرکت داد، لایه بندی کرد و حتی دست کاری نمود. برای این که نمایش یک محصول چندرسانه ای بتواند ارتباط متقابلی با کاربر برقرار سازد، می توان کل پروژه را به صورت فیلم ساخته و به صورت تصویر متحرک نمایش داد. به طور مثال، انیمیشن

قرن پیش از میلاد نسبت داده اند، روش سخن رانی است. اما آموزش صرفاً به ارائه ی یک سخن رانی محدود نمی شود. وولفولک (۱۹۹۵) معتقد است که «هیچ کس نمی تواند به جای دیگری یاد بگیرد. یادگیرندگان، دانش ها و مهارت های خودشان را خلق می کنند. نقش معلم، تدارک دیدن و هماهنگ کردن مواد، تکالیف، موقعیت ها، گفت و گوها و کاوش هایی است که از یادگیری و استقلال یادگیرندگان حمایت می کند» (سیف، ۱۳۸۵). اما این که جزئیات این ارائه ی نقش چیست و چه موادی و چه موقعیت هایی مورد نظر است، همواره مورد توجه روان شناسان تربیتی و محققان بوده است.

روان شناسان، مطالعات گسترده ای را در جهت بهبود آموزش آغاز کردند و روش های دیگری چون روش اکتشافی، اکتشافی هدایت شده، آموزش برنامه ای و نظایر آن را پیشنهاد و مورد مطالعه قرار دادند که دقت در سیر تکاملی آن ها، نشان می دهد که در آن ها، بیش تر نقش و فعالیت دانش آموز و تعامل بین معلم و یادگیرنده و دوری از محوریت معلم در آموزش مورد توجه است. به مرور زمان، استفاده از تکنولوژی آموزشی در آموزش به کمک معلمان آمد و باعث بهبود فرایند یاددهی-یادگیری شد. دروس ریاضی، به ویژه هندسه نیز از این بهبود بی بهره نماندند. رفیع پور (۱۳۸۵) به نقل از هاوسون و ویلسون (۱۹۸۶) بیان می کند که هیچ زمینه ی ویژه ای در برنامه ی درسی ریاضی مدرسه ای به اندازه ی هندسه که آموزش آن طی سی سال اخیر

متأسفانه در کلاس های ریاضی، بیش تر از روش سخن رانی و تنها گاهی از پرسش و پاسخ استفاده می شود، در صورتی که در عصر حاضر، فناوری می تواند به یاری آموزش شتافته و این روند تکراری را خاتمه داده و آموزش را بهبود بخشد

دچار تحول کلی شده، توجه ی ریاضی دانان را برنمی انگیزد. بدین جهت، توسعه ی سطوح تفکر هندسی دانش آموزان، یکی از اهداف اساسی آموزش ریاضیات می باشد. زیرا هندسه در بسیاری از حوزه های علمی، تکنیکی و شغلی نیز به همان اندازه ی ریاضیات مهم است (الکان سیناپلو، دریاکولو^۴، ترجمه پیروانی نیا، ۱۳۸۶). علاوه بر این، هندسه به طور تاریخی، علم فضا و اشکال است و تمام پدیده های طبیعی در فضا رخ

استفاده از کامپیوتر در آموزش هندسه بود. نرم افزارها، فضای جدیدی را در آموزش ایجاد کردند تا به معلمان کمک کنند با بهره گیری از این ابزارها، بستری فراهم سازند که مفاهیم ریاضی به صورت پویا (در حال حرکت) معرفی شده و درک عمیق تری برای دانش آموزان ایجاد کنند.

ساختار فن هیلی هم اساس تحقیق در هندسه ی ایستا و هم پایه ی حداقل دو برنامه ی درسی در هندسه ی پویا است (باتیستا، ۱۹۹۸). مرحله ی ۱ تا ۳ در مدل فن هیلی، استفاده ی دانش آموزان را از زبان هنگام مشاهده ی اشکال هندسی ثابت توصیف می کند. مثلاً، آیا هریک از این سه مرحله در حیطه ی هندسه ی پویا نیز همان گونه باقی می ماند؟ همان گونه که دانش آموزی در مرحله ی اول مدل مستطیل را به در تشبیه می کند، در هندسه ی پویا نیز از تشبیه هایی این چنین استفاده می کند و علاوه بر دسته بندی اشکال، آن ها را براساس حرکتشان روی صفحه ی مانیتور نیز، شرح می دهد (امین الرعایا، ۱۳۸۶).

مطالعه ی هارولد ونگ لینسکی^۷ (۱۹۹۸) درباره ی تأثیر استفاده از تکنولوژی در تدریس ریاضی، نشان داد که تکنولوژی می تواند اثرات و فواید مثبتی بر آموزش ریاضی داشته باشد. البته فواید ذکر شده به چگونگی استفاده از تکنولوژی بستگی دارند. نوروزی (۱۳۷۹) به نقل از ماندی^۸ و همکاران، (۲۰۰۰) بیان می دارد که دانش آموزان، معمولاً یک گرایش خیلی قوی به طرف تفکر جبری دارند. آن ها معتقدند که بسیاری از مشکلات در یادگیری ریاضی را می توان با سوق دادن دانش آموزان به مسیری که بتوانند مفاهیم اولیه ی ریاضی را مشاهده و تجسم و سپس تجزیه و تحلیل نمایند، کاهش داد.

پژوهش انجام شده در بوشهر

در بررسی «جایگاه تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه ی فضایی از نظر دبیران ریاضی و بررسی راه های بهبود آن»، جامعه ی مورد مطالعه، دبیران ریاضی شهرستان بوشهر شاغل به تدریس در دوره ی متوسطه بودند. برای جمع آوری داده ها، از پرسش نامه ی محقق ساخته استفاده گردید و روایی آن، طی چند مراجعه به استادان مرتبط و انجام اصلاحات لازم تأیید شد. پایایی پرسش نامه نیز با استفاده از ضریب آلفای کرونباخ ۰/۸۵ محاسبه گردید.

این پرسش نامه شامل ۲۰ سؤال بود که با مقیاس لیکرت در یک طیف ۵ گزینه ای کاملاً موافقم با ارزش ۵، تا حدی موافقم

می تواند صفحه ی رابط کاربر را به محیطی پویا و زنده تبدیل کند.

اثربخشی آموزش با کامپیوتر

ورود کامپیوتر به آموزش، پی آمدهایی در بر داشته است که از آن جمله می توان به موارد زیر اشاره کرد:

- تغییر کار و وظیفه ی معلم؛
- ضرورت کار گروهی و از بین رفتن موانع روانی یادگیرندگان؛
- توجه به کامپیوتر به عنوان استاد همیشه در دسترس (ساوجی، ۱۳۷۶).

در مورد استفاده از کامپیوتر در آموزش هندسه، به طور کلی چهار سطح را می توان در نظر گرفت:

۱. هندسه ی ترسیمی

در مرحله ی اول از کامپیوترها برای آموزش هندسه، استفاده های عمومی و معمول صورت می پذیرد. برای مثال، شکل های هندسی دقیق تر ترسیم می شوند و نرم افزارهای ویژه ای برای این منظور طراحی می شوند.

۲. دست یار آموزشی

مطالب آموزشی به کمک ابزارهای کامپیوتری دسته بندی شده و با شیوه ی آموزش برنامه ای به صورت مرحله به مرحله به یادگیرندگان منتقل می شوند. در این مرحله، تفاوت عمده ای بین استفاده از رایانه در هندسه و سایر دروس مشاهده نمی شود. ارائه ی محتوای آموزشی توسط پاورپوینت، از آن جمله است.

۳. نرم افزار هندسه ی لوگو

لوگو یک نرم افزار برنامه نویسی ویژه است که برای استفاده های آموزشی طراحی شده است. لوگو توسط سیمور پاپرت^۹ (۱۹۸۹) استاد انستیتوی تکنولوژی ماساچوست (MIT) که با پیاز به مطالعاتی در زمینه ی آموزش پرداخت، طراحی و اجرا شد و به عنوان چارچوبی برای فهم و درک دانش ترسیمی و حل مسئله ی ریاضی مورد استفاده قرار گرفت. کلمه ی لوگو نام لاک پشتی در برنامه است که توسط دستورات خاص کاربر، ترسیمات هندسی را انجام می دهد.

۴. هندسه ی پویا

ظهور نرم افزارهای هندسه ی پویا، آغاز مرحله ی تازه ای برای

روان‌شناسان، مطالعات گسترده‌ای را در جهت بهبود آموزش آغاز کردند و روش‌های دیگری چون روش اکتشافی، اکتشافی هدایت‌شده، آموزش برنامه‌ای و نظایر آن را پیشنهاد و مورد مطالعه قرار دادند که دقت در سیر تکاملی آن‌ها، نشان می‌دهد که در آن‌ها، بیش تر نقش و فعالیت دانش آموز و تعامل بین معلم و یادگیرنده و دوری از محوریت معلم در آموزش مورد توجه است. به مرور زمان، استفاده از تکنولوژی آموزشی در آموزش به کمک معلمان آمد و باعث بهبود فرایند یاددهی-یادگیری شد

جالب است که از نظر دبیرانی که مورد پرسش قرار گرفتند، کمبود کامپیوتر در مدارس، کمبود نرم‌افزارهای آموزشی و نگرانی از اشکال‌های فنی نرم‌افزارهای مورد استفاده، مانع بهره‌گیری آن‌ها از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی نمی‌شود. در نتیجه، برای رفع موانع ذکر شده، می‌توان به برگزاری کلاس‌های ضمن خدمت، تهیه‌ی نرم‌افزار به زبان فارسی و معرفی به موقع و به روز نرم‌افزارهای آموزشی به عنوان راه‌های مورد تأیید دبیران ریاضی برای بهبود جایگاه تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی اشاره کرد.

پیشنهادهای آموزشی

چون کامپیوتر بر تمام ابعاد زندگی سایه انداخته و استفاده از آن بر طبق این پژوهش و پژوهش‌های مشابه، بر فرایند یاددهی یادگیری تأثیر مثبت دارد و باعث افزایش یادگیری می‌شود، به دست‌اندرکاران و برنامه‌ریزان آموزشی توصیه می‌شود:

۱. زمینه‌ی استفاده از تکنولوژی آموزشی را در تدریس ریاضی مدرسه‌ای فراهم آورند؛
۲. با برگزاری کلاس‌های ضمن خدمت، معلمان را با نحوه‌ی استفاده از کامپیوتر در کلاس درس ریاضی آشنا سازند؛
۳. با حمایت از معلمان طراح نرم‌افزارهای آموزشی، آن‌ها را به فعالیت در این زمینه ترغیب کنند؛

با نمره‌ی ۴، نظری ندارم با ارزش ۳ و تا حدی مخالفم و کاملاً مخالفم به ترتیب با ارزش‌های ۲ و ۱، تنظیم شد.

پس از اجرای پرسش‌نامه و بررسی نتایج حاصل، مشخص شد که ۶۰ درصد دبیران مرد و ۱۰۰ درصد دبیران زن ریاضی (در مجموع ۹۰ درصد دبیران ریاضی) معتقد بودند که استفاده از تکنولوژی آموزشی فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی را بهبود می‌بخشد. در ضمن، اکثر دبیران معتقد بودند که از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی به طور مطلوب استفاده نمی‌شود. در راستای بررسی دلایل عدم استفاده از فناوری آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی، کمبود وقت، عدم حمایت مدیران مدارس و عدم آشنایی معلمان با نرم‌افزارهای آموزشی، بیش تر از سایرین مورد موافقت قرار گرفته بودند. اما کمبود کامپیوتر در مدارس و کمبود نرم‌افزارهای مناسب مورد تأیید قرار نگرفت.

برخی از دبیران ریاضی، در انتهای پرسش‌نامه، موضوع عدم تسلط به زبان انگلیسی را مطرح ساخته بودند که از دید پژوهشگر به دور مانده بود.

مطالعه‌ی نظر دبیران ریاضی نشان داد که از نظر آن‌ها، استفاده از تکنولوژی آموزشی، فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی را بهبود می‌بخشد. اما به دلایل زیر، از این تکنولوژی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی به طور مطلوب استفاده نمی‌شود.

- ③ عدم برنامه‌ریزی مناسب؛
- ④ نحوه‌ی مرسوم ارزشیابی از عملکرد دبیران؛
- ⑤ کمبود وقت؛
- ⑥ عدم آشنایی معلمان ریاضی با نرم‌افزارهای موجود؛
- ⑦ عدم تسلط معلمان ریاضی بر نرم‌افزارهای موجود آموزش هندسه‌ی فضایی؛
- ⑧ فقدان برنامه‌ریزی بلندمدت؛
- ⑨ عدم حمایت مدیران مدارس از معلمان علاقه‌مند به استفاده از تکنولوژی؛
- ⑩ عدم تسلط معلمان به زبان انگلیسی؛
- ⑪ نگرانی معلمان از تسلط بیش تر دانش‌آموزان بر نرم‌افزارها نسبت به آن‌ها؛
- ⑫ نگرانی از پایین آمدن سطح قدرشناسی و قدردانی دانش‌آموزان از معلمان؛
- ⑬ نبود نرم‌افزارهای تهیه‌شده به زبان فارسی..

3. Atkins
4. Olkun & Sinnoplu & Deryakulu
5. Sharygin & Protasov
6. Seymour Papert
7. Harold Wenglinisky
8. Mundy

در هزاره‌ی جدید نمی‌توانیم با قانونمندی‌های
سده‌ی قبل، برای نظام آموزشی استراتژی
(برنامه) تعیین کنیم و جای نگرانی است که ما
این دوران را جدی نگرفته‌ایم

منابع

۱. احدیان، م. (۱۳۷۴). اصول مقدمات و تکنولوژی آموزشی، شهر تهران، نشر و تبلیغ بشری.
۲. افشین منش، م.، کجویی، ا. (۱۳۸۶). هندسه‌ی پویا، تلفیق موفق ICT، با برنامه‌ی درسی. گزارش نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، زاهدان.
۳. رفیع پور، ا. (۱۳۸۵). چرایی و چگونگی آموزش هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای. گزارش هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران. شهرکرد.
۴. پیروانی‌نیا، پ. یادگیری اکتشافی هندسه با استفاده از ابزارهای هندسه‌ی پویا بر اساس سطوح ون‌هیل، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۸۸، صص ۴۵-۵۵. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۵. ساوجی، م. (۱۳۷۶). یادگیری و آموزش مبتنی بر کامپیوتر. مجله‌ی رشد تکنولوژی آموزشی. سال دوازدهم. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۶. سیف، ع. (۱۳۸۵). روان‌شناسی پرورشی. تهران: آگاه.
۷. گوپا، ز. (۱۳۸۱). فرایند یاددهی-یادگیری در قرن جدید. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۷۰، صص ۱۲-۴. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۸. نوروزی، م. (۱۳۷۹). مشاهده و تجسم و نقش آن در آموزش و یادگیری ریاضیات. گزارش پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، مشهد، بهمن ۱۳۷۹.
9. Battista, M. T. (2001). Research-Based Perspective on Teaching School Geometry. In Jere Brophy (Ed.). *Subject-Specific Instruction Methods and Activities*. Vol 8. *Advances in Research on Teaching Series*. New York: JAI Press, Elsevire Science.
10. Clements, D. H. and Meredith H. J. S. (1993). My Turn: A Talk With the Logo Turtle. *Arithmetic Teacher*. 41, 189-191.
11. www.geogebra.org/en/wiki/index.php/persian.
12. Olkun, N. B. Sinnoplu, D. D. (?). Geometric Explorations with Dynamic Geometry Applications Based on Van Hiele Levels. *International Journal for mathematics Teaching and Learning* Retrived at: // www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm.
13. Papert, S. A. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*, Second Edition, Basic Books, New York, pp 31-32.

۴. با انتشار نشریه‌هایی در زمینه‌ی معرفی نرم افزارهای جدید آموزشی، معلمان را با جدیدترین تولیدات در این زمینه آشنا سازند؛
۵. کمبود نرم افزارهای فارسی زبان در زمینه‌ی هندسه‌ی فضایی وجود دارد. حمایت از چنین تولیداتی می‌تواند کمک شایانی به آموزش ریاضی کشور کند.

پیشنهادهای پژوهشی

به پژوهشگران توصیه می‌شود که:

۱. با توجه به این که پژوهش حاضر بر روی دانش آموزان دختر انجام شده است، پژوهش مشابهی بر روی دانش آموزان پسر انجام گیرد؛
۲. از آن جا که پژوهش حاضر با استفاده از نرم افزار CABRI.3D انجام شده است و نرم افزارهای دیگری هم چون Mathematica و Maple و غیره در دسترس می‌باشد، پژوهش مشابهی با سایر نرم افزارها انجام شود؛
۳. چنین پژوهشی در سایر نقاط کشور انجام شود؛
۴. از آن جا که نتایج چنین پژوهش‌هایی می‌تواند برای برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی مورد استفاده قرار گیرد، پژوهش مشابهی در سطح کل کشور انجام گیرد؛
۵. چنین پژوهشی برای سایر مباحث و دروس انجام پذیرد؛
۶. از آن جا که ممکن است بعضی موانع استفاده از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی از دید محقق به دور مانده باشد، سایر موانع طی پژوهش‌های دیگر بررسی شود.

پی‌نوشت‌ها

1. Martin
2. Brown

پیوست: نمونه‌ی پرسش‌نامه‌ی استفاده‌شده در تحقیق

استاد ارجمند، همکار گرامی

سؤالاتی که در اینجا به نظر شما رسیده، گامی است در مسیر حرکتی نو آغاز، در مسیر پرشتاب تکنولوژی آموزشی در ایران در آموزش هندسه‌ی فضایی. تقاضا دارم با نظر لطف خود، من را در برداشتن این گام یاری نمائید. نیازی به قید نام و مشخصات نمی‌باشد. نظرات شما صرفاً مورد مطالعه‌ی علمی قرار می‌گیرد و هیچ گونه مسئولیتی برای شما ایجاد نخواهد کرد.

سطح موافقت‌ها				شرح
کاملاً موافقم	تا حدی موافقم	تا حدی نظری ندارم	کاملاً مخالفم	
				۱. استفاده از تکنولوژی آموزشی، فرایند یاددهی، یادگیری هندسه‌ی فضایی را بهبود می‌بخشد.
				۲. از تکنولوژی آموزشی در آموزش هندسه‌ی فضایی به طور مناسب استفاده نمی‌شود.
				۳. عدم فرهنگ سازی مانع استفاده از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه است.
				۴. عدم برنامه ریزی مناسب مانع استفاده از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی است.
				۵. در نحوه‌ی ارزشیابی از عملکرد دبیران، جایگاه تلاش، انگیزه و رغبت آن‌ها در استفاده از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری مشخص و روشن نیست.
				۶. نحوه‌ی ارزشیابی از عملکرد دبیران، مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه نمی‌شود.
				۷. کمبود وقت مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی است.
				۸. کمبود کامپیوتر در مدارس مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی است.
				۹. کمبود نرم افزارها مانعی برای بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی است.
				۱۰. عدم آشنایی معلمان ریاضی با نرم افزارهای موجود، مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی است.
				۱۱. عدم تسلط معلمان ریاضی بر نرم افزارهای موجود آموزش هندسه‌ی فضایی، مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در آموزش هندسه‌ی فضایی است.
				۱۲. با آموزش دبیران و آشنا کردن آن‌ها با نرم افزارهای آموزش هندسه‌ی فضایی، می‌توان این تکنولوژی را به آموزش مدرسه‌ای وارد کرد.
				۱۳. نگرانی از اشکال فنی نرم افزار مورد استفاده، مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی است.
				۱۴. کلاس‌های آموزش ضمن خدمت (به طور هفتگی یا ماهانه) و رفع اشکالات و مسائل آنان در استفاده از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی نقش سازنده و مؤثری دارد.
				۱۵. نگرانی از تسلط بیش تر دانش آموزان بر نرم افزارها نسبت به معلمان، مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی است.
				۱۶. سطح قدرشناسی و قدردانی دانش آموزان از دبیران، در میزان استفاده‌ی دبیران از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی تأثیر می‌گذارد.
				۱۷. چون بین کسانی که از نرم افزار استفاده می‌کنند و سایرین تفاوتی وجود ندارد، دبیران ریاضی از این فناوری در تدریس هندسه‌ی فضایی استفاده نمی‌کنند.
				۱۸. فقدان برنامه ریزی بلندمدت، مانع بهره‌گیری از تکنولوژی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی است.
				۱۹. عدم حمایت مدیران مدارس مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی است.
				۲۰. برقراری مشوق‌ها و امتیازهای حرفه‌ای، عامل مؤثری در ایجاد انگیزه‌ی مناسب برای پویایی دبیران ریاضی در تسلط علمی و عملی به تکنولوژی آموزشی و استفاده از آن در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی است.

خوشحال خواهیم شد چنانچه بتوانیم از سایر نظرها و پیشنهادهای شما استفاده نمایم.

حل کنند و نتایج به دست آمده را با دیگران در میان بگذارند و با آن‌ها ارتباط برقرار کنند.

حضور گسترده‌ی ICT در کلاس‌های درس ریاضی لزوماً به معنای به زیر سؤال بردن ویژگی‌ها و نادیده گرفتن جنبه‌های قدیمی و مرتبط حاضر در برنامه‌ی درسی ریاضیات نیست. ... شاید این موضوعات به دلیل پیچیدگی‌ها و دشواری‌های یاددهی - یادگیری با تکنیک‌های ساده، تاکنون در برنامه‌ی درسی دیده نشده‌اند. اما ابزارهای ICT نیاز به این تکنیک‌های ساده را مرتفع می‌سازند. برای مثال، بسیاری از ماشین حساب‌های رسم با ماتریس‌ها و عبارات‌هایی که اعداد مختلط دارند، به راحتی کار می‌کنند. لذا ICT دانش‌آموزان را قادر می‌سازد تا بر ابعاد و جنبه‌های مهم‌تر و جالب‌تر محتوا تمرکز کنند. با وجود جبر و سکون برنامه‌ی درسی رسمی، معلمان باید اساس و پایه‌ی یادگیری

دانش، درک و فهم و مهارت‌های موجود در برنامه‌ی درسی را نقادانه بررسی کنند.

موضوعی که وضوح کم‌تر و اهمیت بیش‌تری دارد، این است که شهروندان جامعه‌ای که با انواع گوناگون فناوری سروکار دارند باید به توانایی‌ها و محدودیت‌های کامپیوتر دیدی آگاهانه داشته

باشند. بسیاری از مواقع شنیده‌ایم که: «کامپیوتر به ما اجازه‌ی چنین کاری را نمی‌دهد»، گویی کامپیوتر موجودی زنده، یک دنده و لجوج است. در موضوعات بسیاری چون جغرافی، شیمی و اقتصاد از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری استفاده می‌کنند. ما می‌دانیم و دانش‌آموزانمان نیز باید بدانند که این موارد خالی از اشتباه نیست، این یک مدل ریاضی از وضعیت موجود است که باید محدودیت‌ها و نواقص آن را شناخت. در حال حاضر، مدل‌سازی و اعتباربخشی از جنبه‌های مهم ریاضیات است که دانش‌آموزان دبیرستان باید آن‌ها را تجربه کنند. این کتاب با هدف پشتیبانی و تلفیق ICT با آموزش ریاضی در دوره‌ی دبیرستان تهیه شده است. «در اجرای این هدف، فصل اول که مشتمل بر ۸۰ صفحه

مانی رضائی

دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

عنوان: آموزش ریاضیات به کمک I.C.T

نویسنده: آدرین الدنو و ران تیلور

مترجم: شهرناز بخشعلی‌زاده

ناشر: انتشارات مدرسه - تهران

چاپ اول: ۱۳۸۷

شمارگان: ۲۲۰۰

بهاء: ۳۵۰۰۰ ریال

در حال حاضر واژه‌ی ICT (فناوری اطلاعات و ارتباطات) به سرعت جایگزین واژه‌ی IT (فناوری اطلاعات) شده است. سخت‌افزارها و نرم‌افزارهای متعددی را می‌توان به عنوان تجهیزات ICT معرفی کرد، اما چگونگی به کارگیری آن در کلاس درس و کمک آن به برنامه‌ی درسی، یکی از سؤال‌های محوری است. کتاب «آموزش ریاضیات به کمک I.C.T» که توسط انتشارات مدرسه منتشر شد، تلاشی برای پاسخ‌گویی به این سؤال است. این کتاب که در سال ۲۰۰۰ توسط آدرین الدنو و ران تیلور نگارش شده، در پنج فصل به شرح زیر تنظیم شده است: فصل اول: منابع موجود کدام‌اند و چه منابعی در دسترس خواهد بود؟

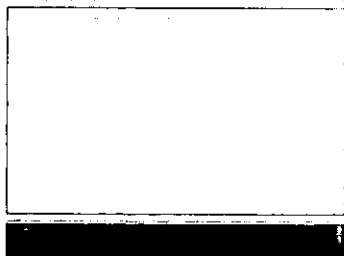
فصل دوم: ICT و برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای

فصل سوم: چگونه برای استفاده‌ی مؤثر و کارآمد ICT برنامه‌ریزی و طراحی کنیم؟

فصل چهارم: چرا باید ICT را با آموزش ریاضی تلفیق کنیم؟

فصل پنجم: به کجا می‌رویم؟

در مقدمه‌ی کتاب آمده است: «در این جا و در تمام کتاب باید تأکید کنیم که در خصوص آموزش و پرورش و تعلیم و تربیت مبتنی بر ICT، ریاضیات با بسیاری موضوعات دیگر تفاوت دارد. ما به این اصل اعتقاد داریم که یکی از دلایل اصلی وجود ریاضیات در دوره‌ی متوسطه در حکم درسی اجباری، کاربردهای وسیع آن در خارج از مدرسه است و این بدان معناست که دانش‌آموزان باید قادر باشند با کمک ابزار ICT مسائل ریاضی را



در فصل دوم به معرفی چگونگی استفاده از ICT برای آشنایی دانش آموزان با مفاهیم اختصاص یافته است.

فصل سوم کاربردهای دیگر از ICT را بر مبنای تجارب عملی فصل های اول و دوم در تکمیل و توسعه ی یک ساختار تحلیلی برای طراحی، اجرا و ارزیابی به کارگیری ICT در یاددهی-یادگیری معرفی می کند. در این فصل بررسی های موردی و مثال هایی از ICT که برای بهبود یاددهی-یادگیری ریاضیات استفاده شده بررسی می شود. هر یک از مثال ها با بررسی های موردی تحلیل شده تا چگونگی استفاده از ICT برای دست یابی به اهداف و انتظارات سند «کاربرد ICT در ریاضیات دبیرستانی» نشان داده شود. نویسندگان کتاب سه جنبه ی اصلی به کارگیری ICT را مورد توجه قرار داده اند:

- تعلیم و تربیتی. آیا می توان از آن برای تدریس و توسعه ی محتوا، افزایش دانش، بهبود درک و تمرین و تقویت مهارت ها استفاده کرد؟

- ریاضیات. آیا می توان از آن در محاسبات، کسب نتایج، درست کردن جدول ها، رسم نمودارها، حل مسائل، کار کردن با عبارت ها و محاسبه های آماری و غیره استفاده کرد؟

- سازمان دهی. آیا می توان از آن برای تولید مواد آموزشی، ثبت اطلاعات، مدیریت زمان، برقراری ارتباط با دیگران، پیدا کردن منابع و غیره کمک گرفت؟

برای پاسخ به این سؤال ها، ابتدا چک لیست «حقوق دانش آموزان در ICT» ارائه شده است و سپس مثال های موردی بررسی شده است.

در پایان کتاب برای پاسخ به سؤال «چرا باید ICT را با آموزش ریاضی تلفیق کنیم؟» سه دلیل ممکن ارائه شده است:

۱. مطلوب و پسندیده بودند؛
۲. حتمی و اجتناب ناپذیر بودند؛
۳. سیاست گذاری و خط مشی دولت (که به طور خاص خط مشی دولت انگلستان در سال های ۱۹۷۹ تا ۲۰۰۰ مورد توجه قرار گرفته است).

در برخی موارد جزئی، وجود واژگان تخصصی موجب شده مرز بین متن اصلی و ترجمه مخدوش شود و در پاره ای موارد حروف لاتین در جمله پیش از حروف فارسی باشد. با این حال ترجمه ی خانم بخشعلی زاده، روان و ساده است و در مجموع کتابی مناسب برای آشنایی با ICT و به کارگیری آن در آموزش ریاضیات آماده سازی و در اختیار خواننده ی فارسی زبان گذاشته شده است.

است، انواع تجهیزات و ادوات ICT را برمی شمارد و مجموعه ای از نرم افزارهای موجود برای آموزش ریاضی نیز در این فصل معرفی می شود. نرم افزارها در چند دسته قرار می گیرند:

- نرم افزارهای کوچک، برنامه هایی که به محتوای خاص از برنامه ی درسی توجه دارد؛

- زبان های برنامه نویسی مانند لوگو، بیسیک؛

- نرم افزارهای عمومی؛ به طور خاص صفحه ی گسترده [web]، و البته پایگاه های اطلاعاتی؛

- بدون محتوا و موضوع خاص چون نرم افزارهای رسم نمودار (GPS)؛

- سیستم کامپیوتری جبر (CAS)، نرم افزار هندسه پویا (DGS)؛

- نرم افزار داده گردانی و کار با داده ها (DHS)؛

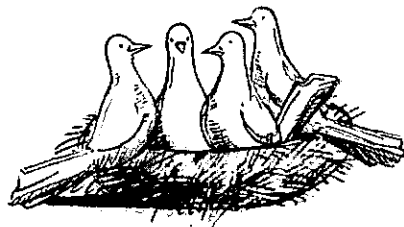
- درس افزار، مواد آموزشی ساختار یافته در برنامه ی درسی که از نرم افزار استفاده می کنند،

- ماشین حساب های رسام (GC)؛

- CD-ROM و اینترنت، به عنوان منابع اطلاعاتی.

فصل اول کتاب به بررسی مثال هایی از هر یک از این دسته ها پرداخته است. در پایان فصل، تلاش شده است با ارائه مثال های موردی، ویژگی های برخی از انواع اصلی ابزار ICT را که معلمان می توانند استفاده کنند، معرفی شود.

فصل دوم به تنوع نقش ICT در برنامه ی درسی اختصاص یافته است. نویسنده تأکید می کند، «آگاه باشید ایده های بسیاری در این فصل آورده شده اند. لذا احتمالاً بهتر است چند تا از آن ها را در ابتدا برای بررسی انتخاب و زمانی که آن ها را خوب تحلیل کردید، بررسی ایده های دیگر را شروع کنید.» در ادامه، فصل دوم کتاب به موضوع های درسی می پردازد: اعداد و جبر؛ هندسه و مثلثات؛ آمار و مدل سازی؛ ریاضیات پیشرفته و در نهایت فعالیت هایی که با برنامه ها و دروس دیگر ارتباط پیدا می کنند. هر یک از این موضوع های درسی به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است و با ارائه ی مثال های دقیق در هر یک از موضوع ها، به چگونگی استفاده از ابزارهای ICT برای کسب نتایج پرداخته شده است. برای مثال، در اعداد به مباحثی مانند عدد، ارزش مکانی و فعالیت هایی برای استفاده از ICT برای آشنایی با آن ها ارائه شده است که ویژگی های عدد از قبیل عامل (مقسوم علیه) عدد، مضرب و مقسوم علیه های مشترک و اعداد اول، مربع کامل، ... نیز مورد بررسی قرار گرفته است. بدین ترتیب بخش اصلی کتاب،



مثال هایی برای اصل لانه کبوتری

محمدحسین کریمیان و مجتبی قویدل
از شاهرود

حل. اگر در دسته بندی زیر هر دسته را به عنوان یک لانه در نظر بگیریم.

$\{(1, 8), (2, 9), (3, 10), (4, 11), (5, 12), (6, 13), (7, 14), (15), (16), (17), (18), (19), (20)\}$

در واقع ۱۴ کبوتر و ۱۳ لانه داریم.

یک راه حل ابتکاری. فرض کنیم: $x_1 < x_2 < \dots < x_{14}$ اعداد انتخابی باشند. در این صورت

$$x_1 + 7 < x_2 + 7 < \dots < x_{14} + 7$$

که چون $x_{14} \leq 20$ پس $x_{14} + 7 \leq 27$. بنابراین ۲۸ عدد متعلق به $\{1, 2, \dots, 27\}$ داریم که به وضوح باید دوتای آن ها یکسان باشند. چون هیچ کدام از x_i ها با هم و هیچ کدام از $x_i + 7$ ها با هم برابر نیستند، پس باید x_i از دسته ی اول با $x_j + 7$ از دسته ی دوم یکی باشد. در نتیجه $x_i = x_j + 7$ یعنی: $x_i - x_j = 7$.

مثال ۲. یک داور و ۲۶ شرکت کننده هر یک جدولی 1×26 در اختیار دارند و هر کدام از ۲۷ نفر در جدول خود، جایگشتی از ۲۶ حروف الفبای انگلیسی را می نویسد. داور جدول خود را

جمله ی «وقتی سه تا کبوتر بخوانند توی دو تا لانه بروند، باید حداقل دوتاشان در یک لانه باشند» را هر عقل سلیمی می فهمد و البته با همین یک جمله هم می توان شگفتی آفرید!

مضمون جمله ی بالا را می شود در قالب یک اصل ساده به نام «اصل لانه کبوتری» به صورت کلی تری بیان کرد:

اگر m کبوتر داخل n لانه قرار داشته باشند و $m > n$ آن گاه یک لانه هست که در آن حداقل دو کبوتر وجود دارد.

این اصل به نام های اصل دیریکله یا اصل حجره ها نیز بیان شده است.

درست است که این اصل صورتی واضح دارد، اما کلید حل بسیاری از مسائل است که البته باید به صورت صحیح از آن استفاده کرد و بیش تر در جاهایی استفاده می شود که بخواهیم وجود دو یا چند شیء را که دارای ویژگی مشترک هستند اثبات کنیم. برای این منظور، باید اشیای مورد نظر را طوری دسته بندی کنیم که اگر چند شیء در یک دسته قرار گرفتند، همه ی این چند شیء دارای ویژگی مشترک مورد نظر باشند.

مثال هایی برای اصل لانه کبوتری

مثال ۱. ۱۴ عدد از مجموعه ی $\{1, 2, \dots, 20\}$ انتخاب می کنیم. ثابت کنید تفاضل حداقل دو تای آن ها ۷ است.

هیچ هفته‌ای بیش‌تر از ۱۲ بار بازی نمی‌کند. ثابت کنید چند روز متوالی وجود دارد که شطرنج باز طی آن‌ها دقیقاً ۲۰ بار بازی کرده است.

حل. اگر k ، تعداد روزها ($k = ۷۷$) و S_k تعداد بازی‌ها از روز اول تا k امین روز باشد؛ بنابراین $۱۳۲ = ۱۲ \times ۱۱ \leq S_w$ و در نتیجه داریم:

$$1 \leq S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_w \leq 132$$

$$S_1 + 20 < S_2 + 20 < \dots < S_w + 20 \leq 152$$

پس ۱۵۴ تا عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 152\}$ داریم. در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری، باید یک عدد در دسته‌ی اول با عددی در دسته‌ی دوم یکی باشد؛ یعنی $S_i = S_j + 20$. پس $S_i - S_j = 20$ و این رابطه یعنی شطرنج باز از روز $j+1$ تا روز i دقیقاً ۲۰ بازی داشته است.

مثال ۵. ۴ عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16\}$ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید که حاصل ضرب دوتا از این اعداد، مربع کامل است.

حل. دسته‌بندی $\{2, 8\}$ ، $\{3, 12\}$ ، $\{4, 16\}$ برای اعضای این مجموعه را به عنوان سه لانه و چهار عدد انتخاب شده از مجموعه را به عنوان چهار کبوتر در نظر می‌گیریم. بنابراین حداقل یک لانه است که در آن بیش از یک کبوتر قرار دارد. پس حداقل دوتای آن‌ها هستند که حاصل ضربشان مربع کامل است.

تعمیم اصل لانه کبوتری

اگر m کبوتر دزون n لانه قرار داشته باشند و $m > nk$ ، آن‌گاه لانه‌ای وجود دارد که در آن حداقل $k+1$ کبوتر قرار دارد.

مثال‌هایی برای تعمیم اصل لانه کبوتری

مثال ۶. ثابت کنید در یک گروه ۶ نفری، همواره می‌توان ۳ نفر یافت که با یکدیگر دو به دو آشنایند یا دو به دو با یکدیگر ناآشنایند.

حل. فرض کنیم A یکی از این ۶ نفر باشد، دو لانه، یکی برای افراد آشنا با A و دیگری برای افرادی که A را نمی‌شناسند در نظر می‌گیریم. چون می‌خواهیم ۵ نفر را در این دو لانه قرار دهیم و $۱ + ۲ \times ۲ \geq ۵$ پس در یکی از لانه‌ها حداقل ۳ نفر قرار می‌گیرند یعنی یا حداقل ۳ نفر هستند که با A آشنایند یا حداقل ۳ نفر هستند

با هر یک از شرکت‌کننده‌ها مقایسه می‌کند و به ازای هر خانه از جدول اگر حرف داخل آن خانه در جدول داور با شرکت‌کننده یکی باشد، امتیاز ۱ و در غیر این صورت صفر می‌گیرد. بنابراین امتیاز هر شرکت‌کننده، عددی بین ۰ و ۲۶ است. اگر امتیاز هیچ دو شرکت‌کننده‌ای یکسان نباشد، ثابت کنید شرکت‌کننده‌ای وجود دارد که جدول او دقیقاً مشابه جدول داور است.

حل. با توجه به این که تعداد حروف الفبای انگلیسی ۲۶ است، امتیاز هیچ شخصی نمی‌تواند ۲۵ باشد (زیرا در این صورت تعداد خانه‌هایی که حروف داخل آن‌ها برای آن شرکت‌کننده مشابه حروف داخل خانه‌های متناظر در جدول داور است، برابر ۲۵ می‌شود و چون ۲۶ حرف الفبا داریم، به ناچار باید خانه بیست و ششم نیز برای هر دو یکسان باشد). حال چنان‌چه هیچ شخصی نباشد که جدول او دقیقاً مشابه جدول داور باشد، امتیاز ۲۶ نیز منتفی است و در نتیجه امتیاز هر شخص، عددی از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, 24\}$ است. بنابراین ۲۶ شرکت‌کننده (به عنوان کبوتر) و ۲۵ امتیاز (به عنوان لانه) داریم و در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ نفر امتیاز یکسان دارند و این با فرض مسئله در تناقض است.

مثال ۳. اگر S ، زیر مجموعه‌ای ۷ عضوی از $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$ باشد، ثابت کنید دو زیر مجموعه‌ی متمایز از S مانند A و B وجود دارند به طوری که مجموع اعضای A با مجموع اعضای B برابر است.

حل. حداقل مجموع اعضای زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی S فوق ۰ و حداکثر آن $15 + 20 + \dots + 12 = 126$ است. یعنی مجموع اعضای زیر مجموعه‌های S یکی از ۱۲۷ حالت $\{0, 1, 2, \dots, 126\}$ است. چون S یک مجموعه‌ی ۷ عضوی می‌باشد، $128 = 2^7$ زیر مجموعه دارد که آن‌ها را به عنوان ۱۲۸ کبوتر و $\{0, 1, 2, \dots, 126\}$ را به عنوان ۱۲۷ لانه در نظر می‌گیریم. پس طبق اصل لانه کبوتری، مجموع اعضای دوتا از این زیر مجموعه‌ها باید یکی باشد.

مثال ۴. شطرنج بازی ۱۱ هفته فرصت دارد خود را برای شرکت در مسابقه‌ای آماده کند. برای این منظور، تصمیم می‌گیرد حداقل روزی یک بازی داشته باشد. ولی برای آن که خسته نشود، در

که A را نمی شناسند. مسئله را در این دو حالت حل می کنیم.
حالت اول: حداقل ۳ نفر باشند که A را می شناسند:
در این حالت اگر در بین ۳ نفری که A را می شناسند حداقل دو نفر باشند که یکدیگر را می شناسند، مسئله حل شده است (زیرا همان دو نفر و A، ۳ نفری هستند که یکدیگر را می شناسند) و اگر در بین این ۳ نفر هیچ کدام یکدیگر را نشناسند، باز هم مسئله حل شده است.

حالت دوم: حداقل سه نفر باشند که A را نمی شناسند:
در این حالت اگر در بین ۳ نفری که A را نمی شناسند حداقل دو نفر باشند که یکدیگر را نمی شناسند، مسئله حل شده است (زیرا همان ۲ نفر و A، سه نفری هستند که یکدیگر را نمی شناسند) و اگر این سه نفر دو به دو یکدیگر را بشناسند، باز هم مسئله حل شده است.

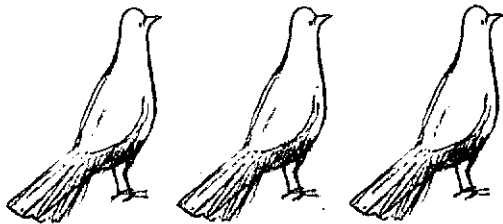
مثال ۷. از ۲۰۰۰ شرکت کننده در یک کنفرانس، هیچ فردی بیش از ۵ زبان نمی داند. در هر جمع سه نفری، حداقل ۲ نفر می توانند به یک زبان مشترک صحبت کنند. ثابت کنید دست کم ۲۰۱ نفر می توانند به یک زبان مشترک صحبت کنند.
حل. در صورتی که تمام افراد بتوانند به یک زبان مشترک صحبت کنند، مسئله حل شده است. در غیر این صورت حداقل ۲ نفر مانند A و B در بین افراد یافت می شوند که هیچ زبان مشترکی ندارند.
حال ۲ لانه، یکی را برای افرادی که با A حداقل یک زبان مشترک دارند و دیگری را برای افرادی که با B حداقل یک زبان مشترک دارند در نظر می گیریم و هریک از ۱۹۹۸ نفر دیگر را در این ۲ لانه قرار می دهیم.

هر فرد از بین ۱۹۹۸ نفر دیگر را که در نظر بگیریم همراه با A و B یک جمع ۳ نفری تشکیل می دهند. لذا بنابر فرض مسئله، حداقل ۲ نفر از آن ها می توانند به زبان مشترکی صحبت کنند. در واقع این افراد یا با A یک زبان مشترک دارد یا با B.

چون $1 + 2 \times 1998 \geq 1998$ ، بنابراین در یکی از لانه های گفته شده حداقل ۹۹۹ نفر قرار می گیرند. به عبارتی، یا حداقل ۹۹۹ نفر وجود دارند که با A یک زبان مشترک دارند یا حداقل ۹۹۹ نفر وجود دارند که با B یک زبان مشترک دارند.

حالتی را در نظر می گیریم که ۹۹۹ نفر باشند که با A یک زبان مشترک دارند. توجه داریم که A حداکثر ۵ زبان می داند. اگر ۵ لانه برای این زبان ها در نظر بگیریم، چون

$1 + (5 \times 199) \geq 999$ پس در یکی از این لانه ها حداقل ۲۰۰ نفر قرار می گیرند، یعنی حداقل ۲۰۰ نفر وجود دارد که در یک زبان با A مشترکند. این ۲۰۰ نفر به همراه A، همان ۲۰۱ نفری هستند که در یک زبان مشترکند. در حالت دیگر نیز مسئله به طور مشابه حل می شود.

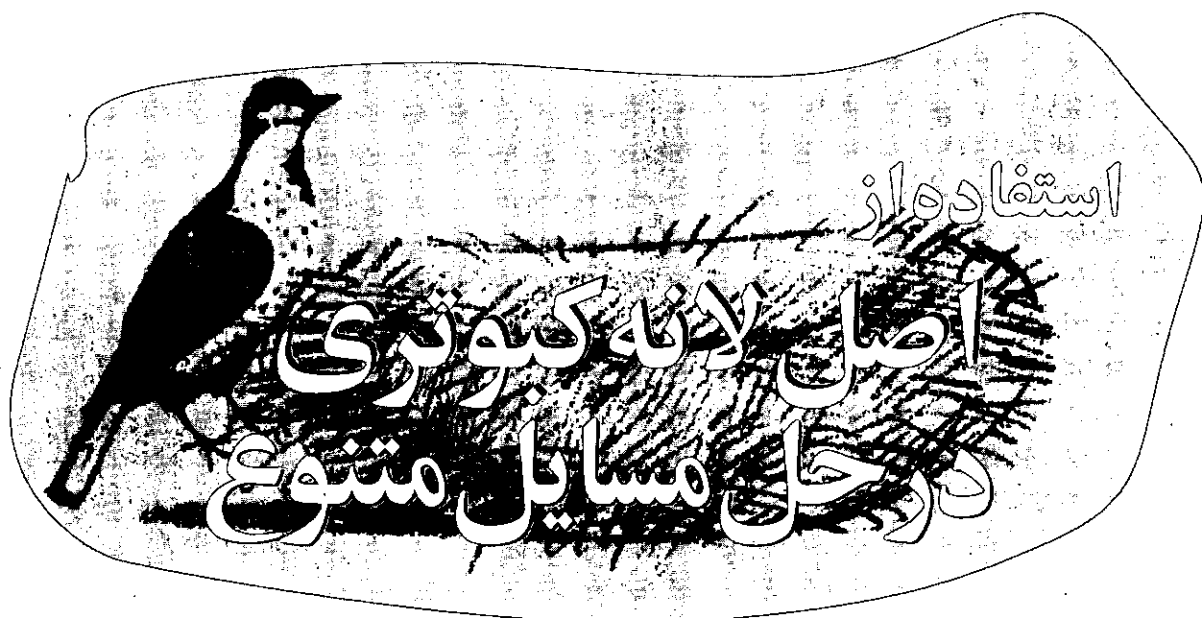


تمرین ها

۱. ۶ عدد از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ انتخاب می کنیم. ثابت کنید حداقل یکی از این عددها بر دیگری بخش پذیر است.
۲. ۱۱ عدد از مجموعه $\{1, 2, \dots, 20\}$ انتخاب می کنیم. ثابت کنید مجموع دو تا از این اعداد، عددی اول است.
۳. در یک مسابقه، هر نفر ۱۰ تیر شلیک می کند و امتیاز هر شلیک ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ است. حداقل چند نفر در این مسابقه شرکت کنند تا مطمئن شویم در پایان، دو نفر امتیاز یکسان می آورند؟
۴. از مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ ، ۷ عدد انتخاب می کنیم ثابت کنید مجموع ۳ تای آن ها ۱۵ است.
۵. مجموعه ای از اعداد ۲ رقمی با ۱۰ عضو متمایز مفروض است. ثابت کنید که همیشه می توان دو زیر مجموعه ای متمایز از این مجموعه انتخاب کرد به نحوی که مجموع اعضای آن ها با هم برابر باشد.
۶. ۳۳ عدد طبیعی متمایز مفروض است که در تجزیه ی آن ها به عوامل اول، فقط اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ ظاهر شده است. ثابت کنید حداقل دو عدد در بین آن ها وجود دارد که حاصل ضرب آن ها مربع کامل است.
۷. $(n+1)$ عدد از مجموعه $\{1, 2, \dots, 2n\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید یکی از این اعداد بر عدد دیگری از آن ها بخش پذیر است.

منابع

۱. علی پور، علیرضا. (۱۳۸۲). ترکیبات، جلد اول. انتشارات فاطمی، چاپ دوم.
۲. آموزش هنر حل مسئله، دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی.



الکساندر بوروویک و الینا بسوونا

ترجمه: فرشته رنگی

دبیر ریاضی شهرستان گناباد

مثال ۲. یک گروه ۳۰ نفری از دانش آموزان دیکته نوشتند. آرش ۱۳ اشتباه داشت و دیگر دانش آموزان هر یک کمتر از این عدد اشتباه داشتند. ثابت کنید که حداقل ۳ نفر به طور مساوی اشتباه دارند.

حل. روش کاهش را برای تناقض به کار می‌بریم. فرض کنید که هیچ ۳ دانش آموزی به طور یکسان اشتباه نداشتند. این بدان معنی است که هر یک از ۱۳ لانه (۰ تا ۱۲) شامل کمتر از ۳ دانش آموز است. بنابراین تمام این لانه‌ها روی هم دارای حداکثر $13 \times 2 = 26$ دانش آموز است. آرش را به این عدد اضافه می‌کنیم در این صورت، حداکثر ۲۷ دانش خواهیم داشت و نه طبق صورت مسئله ۳۰ دانش آموز. به نقطه‌ی تناقض رسیدیم.

اولین تمرین‌ها

(# نشان دهنده‌ی مسائل مشکل‌تر است.)

۱. جمعیت منچستر بزرگ، بیش از ۶۰۰۰۰۰ نفر است و هیچ کسی بیش از ۱۰۰۰۰۰ موروی سرش ندارد. ثابت کنید که ۵۹ نفر از ساکنان منچستر بزرگ، تعداد یکسانی مو دارد. راهنمایی: ۱۰۰۰۰۱ لانه با شماره‌های ۰ و ۱ و ۲ و ... و موهای روی سر افرادی است که در آن نشسته‌اند.
۲. در مدرسه‌ای ۳۰ کلاس و ۱۰۰۰ دانش آموز وجود دارد.

اگر شش کبوتر را در پنج لانه قرار دهید، در این صورت حداقل یک لانه، بیش از یک کبوتر خواهد داشت. استدلال‌هایی از این دست در حل بسیاری از مسائل ریاضی به کار می‌روند و چندین قضیه‌ی جالب به کمک آن‌ها اثبات شده‌اند. تمامی این استدلال‌ها در نام اصل لانه کبوتری مشترکند. بیش‌تر مسائل زیر، برای دانش آموزان دبیرستانی قابل طرح هستند.

اولین مثال‌های ساده

مثال ۱. ۱۵ دانش آموز دیکته نوشتند. آرش ۱۳ اشتباه داشت و دیگر دانش آموزان هر یک کمتر از این تعداد اشتباه داشتند. ثابت کنید که حداقل دو دانش آموز وجود دارد که تعداد اشتباهات یکسانی دارند.

حل. فرض کنیم این دانش آموزان (کبوترها) هستند و آن‌ها را در ۱۴ (لانه)، که از صفر تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند، بر اساس تعداد اشتباهاتشان قرار می‌دهیم. در لانه‌ی صفر، دانش آموزانی را قرار می‌دهیم که هیچ اشتباهی نداشتند، در لانه‌ی ۱ دانش آموزانی را قرار می‌دهیم که دقیقاً یک اشتباه دارند، در لانه‌ی ۲ دانش آموزانی را قرار می‌دهیم که ۲ اشتباه دارند و همین‌طور تا آخر. مطمئناً لانه‌ی ۱۳ صرفاً توسط آرش اشغال خواهد شد. حال اصل لانه کبوتری را اعمال می‌کنیم تا نتیجه حاصل شود.

ثابت کنید که حداقل یک کلاس، دارای ۳۴ دانش آموز است.
 ۳. درون جعبه‌ای تعدادی مداد وجود دارد: ۱۰ قرمز، ۸ آبی، ۸ سبز و ۴ زرد. با چشم بسته، تعدادی مداد را از جعبه برمی داریم. برای این که مطمئن باشیم حداقل ۴ مداد یک رنگ داریم، حداقل چند مداد را باید برداریم؟
 راهنمایی: ۴ لانه در نظر بگیرید، یکی برای مدادهای قرمز، دومی برای مدادهای آبی، سومی برای مدادهای سبز، چهارمی برای مدادهای زرد.

۴. ۵۰۰ جعبه سیب داریم که تعداد سیب‌های موجود در هیچ یک، بیش تر از x نیست. بیش ترین مقدار x را بیابید به طوری که بتوان سه جعبه با تعداد مساوی سیب یافت.

اصل لانه کبوتری در مسائل نسبت

فرض کنید رابطه‌ی «آشنایی» متقارن است: اگر حسن با رضا آشنا باشد، در این صورت رضا با حسن آشناست.

مثال ۳. ۵۰ نفر در اتاق هستند که بعضی از آن‌ها با یکدیگر آشنا می‌باشند. ثابت کنید در این اتاق دو نفر هستند که تعداد آشنایان یکسانی دارند.

حل. اگر در این اتاق یک نفر باشد که اصلاً هیچ آشنایی نداشته باشد، در این صورت هر یک از سایر افراد حاضر در اتاق ممکن است ۴۸، ۴۷، ...، ۲، ۱ آشنا داشته باشد یا هیچ آشنایی نداشته باشد. بنابراین، ۴۹ لانه با شماره‌های ۰، ۱، ۲، ...، ۴۸ داریم که باید بین ۵۰ نفر تقسیم کنیم.

بقیه‌ی تمرین‌ها

۵. فرض کنید در اتاقی $n < ۱$ نفر حضور دارند. ثابت کنید حداقل دو نفر از آن‌ها تعداد آشنایان مساوی دارند. (اثبات مثال ۳ را کامل کنید.)

۶. ده تیم فوتبال در یک بازی رودرو شدند. ثابت کنید هم‌زمان، دو تیمی که تعداد بازی یکسان داشته‌اند، مقابل هم خواهند بود.

راهنمایی: غیرممکن است که تیمی اصلاً بازی نداشته باشد در حالی که تیم دیگری با تمام تیم‌ها بازی کرده باشد.

اصل لانه کبوتری و بخش پذیری

مثال ۴. ثابت کنید از بین ۱۲ عدد عدد طبیعی دلخواه، می‌توانیم دو عدد را طوری انتخاب کنیم که اختلافشان بر ۱۱

بخش پذیر باشد.

حل: با تقسیم بر ۱۱، ۱۱ باقیمانده ممکن است: ۰، ۱، ۲، ...، ۱۰. اما ما ۱۲ عدد داریم. اگر باقیمانده‌ها را «لانه» و اعداد را «کبوتر» در نظر بگیریم، در این صورت براساس اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر لانه‌ی یکسان دارند، یعنی دو عدد با باقیمانده‌ی یکسان وجود دارند و لذا اختلاف این دو عدد بر ۱۱، بخش پذیر است.

تذکر: از این خاصیت اعداد استفاده کرده‌ایم: اگر باقیمانده تقسیم دو عدد a بر b یک عدد باشد، در این صورت $a-b$ بر c بخش پذیر است.

مثال ۵. ثابت کنید عدد ۱۹۹۷ مضربی دارد که ارقام آن فقط ۰ و ۱ است؟

حل. این ۱۹۹۸ عدد را در نظر بگیرید:

۱۱۱...۱۱۱، ...، ۱۱۱ و ۱ و ۰

در تقسیم این اعداد بر ۱۹۹۷ یکی از ۱۹۹۷ باقیمانده‌ی زیر حاصل می‌شود:

۱۹۹۶، ۳، ۲، ۱ و ۰

ما ۱۹۹۸ عدد و ۱۹۹۷ باقیمانده داریم براساس اصل لانه کبوتری دو عدد باقیمانده‌ی یکسانی دارند. اختلاف این دو عدد بر ۱۹۹۷ بخش پذیر است. واضح است که این اختلاف به شکل عددی خواهد بود که رقم‌های آن تنها ۰ و ۱ می‌باشد.

تذکر: مطمئناً شما متوجه نارسایی راه حل ما شده‌اید: ما وجود یک عدد طبیعی را که تنها با ۰ و ۱ نوشته می‌شود و بر ۱۹۹۷ بخش پذیر است ثابت کرده‌ایم. تنها چیزی که می‌دانیم این است که عدد ما بیش تر از ۱۹۹۸ رقم ندارد و می‌تواند به شکل (رقم n) ۱۱...۱۱ - (رقم m) ۱۱...۱۱ = ۰۰...۰۰۱۱...۱۱ نوشته شود.

متأسفانه روش ما بیش از این چیزی ارائه نمی‌دهد. در مسائل بعدی با همین مشکل مواجه خواهیم شد. در این مسائل، لازم است تنها وجود اعداد یا جمع خاص را بدون نشان دادن هیچ عدد یا جمع خاصی ثابت کنیم.

۷. ثابت کنید از میان هر سه عدد طبیعی، می‌توانیم دو تا از آن‌ها را با حاصل جمع زوج انتخاب کنیم.

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{1}{5}$$

است. لذا، اگر دایره‌ای به مرکز محل تلاقی قطرهای مربعی

که شامل حداقل سه نقطه است و به شعاع $\frac{1}{5}$ رسم کنیم، حتماً ۳

نقطه را شامل می‌شود.

سایر تمرین‌ها

۱۵. هفت خط روی صفحه داده شده است که هیچ دو تای آن‌ها با هم موازی نیستند. ثابت کنید دو خط وجود دارد که زاویه‌ی بینشان کمتر از ۲۶ درجه است. آیا می‌توانیم همین ادعا را درباره ۲۵ درجه نیز داشته باشیم؟

۱۶. پنج نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۱ قرار داده شده‌اند. ثابت کنید دو نقطه از آن‌ها در فاصله‌ی کمتر از $\frac{1}{5}$ از یک دیگر قرار دارند.

راهنمایی: سه میانه‌ی این مثلث را رسم کنید. این میانه‌ها مثلث را به چهار مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر تقسیم می‌کنند.

۱۷. نقاط یک شبکه‌ی مستطیل شکل به دو رنگ، رنگ آمیزی شده‌اند. ثابت کند دو خط عمودی و دو خط افقی در این شبکه هستند که نقاط تقاطع شان دارای یک رنگ است.

راهنمایی: ۳ خط عمودی و ۹ خط افقی و تمام رنگ‌آمیزی‌های ممکن برای تقاطع شان را در نظر بگیرید.

و این هم یک مسئله‌ی واقعاً سخت

چنانچه مسائل قبلی را حل کرده باشید چندان هم مشکل نیست!

۱۸. ثابت کنید یکی از توان‌های ۲ هست که با ارقام ۱۹۹۹

شروع می‌شود: $2^n = 1999\dots$

راهنمایی: $\log_2 10$ عددی اصم است (گویا نیست).

پی‌نوشت

۱. برای روان‌تر شدن متن، به جای «جان‌بول» و اسامی دیگر که در مقاله‌ی اصلی آمده، از اسامی ایرانی که برای خواننده‌ی فارسی زبان مانوس‌تر است، استفاده شد.

منبع اصلی:

Alexandre V. Borovik, Elena V. Bessonova, what is The Pigeon-Hole Principle?

www.maths.manchester.ac.uk/~avb/pigeon.html

۸. پنج عدد طبیعی دلخواه $a_1, \dots, a_5$ داریم. ثابت کنید یا یکی از این‌ها بر ۵ بخش پذیر است یا مجموع چند تا از آن‌ها بر ۵ بخش پذیر است.

راهنمایی: پنج جمع زیر را در نظر بگیرید:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_5 \text{ و } a_1 + a_2 + a_3 \text{ و } a_1 + a_2 \text{ و } a_1$$

۹. ثابت کنید از هر ۱۰۰ عدد طبیعی، یک عدد یا جمع چند عدد هست که بر ۱۰۰ بخش پذیر است.

۱۰. ثابت کنید عددی به شکل $199700\dots00$ وجود دارد که بر ۱۹۹۸ بخش پذیر است.

۱۱. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n عددی وجود دارد که تنها با ۵ و ۰ نوشته می‌شود و بر n بخش پذیر است. راهنمایی: n عدد ۵، ۵۵۵ و... را در نظر بگیرید.

۱۲. ثابت کنید از هر ۵۲ عدد طبیعی، دو عدد m و n را به گونه‌ای می‌توان یافت که حاصل جمع آن‌ها $(m+n)$ و یا اختلاف آن دو $(m-n)$ بر ۱۰۰ بخش پذیر باشد. آیا همین گفته، در مورد ۵۱ عدد طبیعی دلخواه نیز صادق است؟

۱۳. با داشتن n عدد، ثابت کنید بعضی از آن‌ها (شاید یکی) هستند که حاصل جمع شان بر n بخش پذیر است؟

۱۴. ثابت کنید یک عدد طبیعی به شکل $19971997\dots1997$ وجود دارد که بر ۱۹۹۹ بخش پذیر است.

اصل لانه کبوتری و هندسه

مثال ۶. ۵۱ نقطه به دلخواه داخل مربعی به طول ضلع ۱ قرار داده شدند. ثابت کنید که ۳ تا از آن‌ها را می‌توان با دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{5}$ پوشش داد.

حل. مربع را به ۲۵ مربع کوچک هر یک به طول ضلع $\frac{1}{5}$

تقسیم کنید. در این صورت حداقل یکی از این مربع‌های کوچک (لانه) دارای حداقل سه نقطه (کبوتر) خواهد بود. در واقع، اگر این صحت نداشته باشد، در این صورت هر مربع کوچک، دارای دو نقطه یا کمتر خواهد بود که در این صورت تعداد کل نقاط، بیش‌تر از $25 \times 2 = 50$ نیست. این متناقض با فرضی است که ۵۱ نقطه داریم. حال، دایره‌ای محیط بر این مربع با سه نقطه در داخل آن نیز شامل این ۳ نقطه خواهد بود که شعاع آن

دورسی که از آموزش ریاضی آموختم!

زهرا صباغ زاده فیروز آبادی
دبیر ریاضی میبد یزد و دانشجوی کارشناسی ارشد
آموزش ریاضی - دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

اشاره

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست‌اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می‌داند. به همین دلیل، بیش‌ترین تلاش اعضای هیأت تحریریه‌ی مجله، جست‌وجو برای پیدا کردن راه‌های مختلف ایجاد چنین تعامل و تبادل نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک آموزشی، تولید و توزیع مجله، نظم بیش‌تری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیش‌تری با مجله‌ی

**دبیران و
آموزشگران باید با
بهبود روش‌های
تدریس و طرز
تفکر خود، به
جامعه‌ی آموزشی
روح ببخشند**

خودشان برقرار کرده‌اند و بیش‌تر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال دارند. به همین دلیل، آرزوی دیرینه‌ی دفتر انتشارات کمک آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی می‌رود تا تحقق یابد. در نتیجه، با نظر هیئت تحریریه‌ی مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً و بدون ویرایش چاپ شوند. در ضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخ‌گو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل نظر را از طریق بازتاب بر آن‌ها، معنادارتر و کارآتر کنند.

البته لازم به توضیح است که دیدگاه‌های مطرح‌شده، الزاماً همسو با سیاست‌ها و دیدگاه‌های دفتر انتشارات کمک آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نیستند.

روزی که برای انتخاب محل خدمت به اداره‌ی کل استان رفته بودم، به دلیل سابقه‌ی درخشان دوران تحصیلم و کسب رتبه‌ی دوم در دانشگاه، مطمئن بودم که شهرستان محل سکونت را می‌توانم برای خدمت انتخاب کنم. بعد از مدتی فرم‌هایی به متقاضیان دادند تا امتیازاتمان را در آن بنویسیم. به فرم نگاه کردم، خیلی از موارد از جمله متأهل بودن، همسر فرهنگی بودن، و... شامل حال من نمی‌شد. به دنبال امتیاز رتبه و معدل بودم که دیدم رتبه‌ی دوم ۰/۵ نمره. چند بار خواندم فکر می‌کردم اشتباه کرده‌ام ولی نه درست بود. با توجه به امتیازات بالا، به عنوان مثال متأهل بودن ۲۰ امتیاز و همسر فرهنگی داشتن ۵ امتیاز، رتبه‌ی دوم

۰/۵ امتیاز برای من که ۸ سال ریاضی را براساس منطق خوانده بودم و همه چیز را می‌خواستم با فرمول و معادله حل کنم و حرفم را با دلیل ثابت کنم، غیر منطقی بود.

چند بار امتیازات را خواندم تا بتوانم رابطه‌ی این امتیازات را به دست آورم، ولی این دفعه برخلاف اکثر مواقع، در حل این مسئله شکست خوردم! باورکردنی نبود. من که همیشه بعد از خواندن نمراتم در مدرسه یا دانشگاه بین هم‌کلاسی‌هایم سر بلند و خوشحال بودم، این بار و شاید برای اولین بار از داشتن چنین رتبه‌ای خوشحال نبودم. امتیازاتمان را به مسئول کارگزینی دادیم. بعد از یک ساعت، به ترتیب امتیاز وارد اتاق می‌شدیم تا شهرستان محل کارمان را مشخص کنند. نوبت به من رسید. وارد اتاق شدم. شهر محل سکونت خواهان یک دبیر ریاضی

هیچ (مانند خود من!!!).

من آموخته بودم که همه‌ی مسائل را می‌توان به صورت ریاضی صورت‌بندی کرده و حل کرد. حال هرچه مسئله بزرگ‌تر و پیچیده‌تر باشد، احتمالاً متغیرهایش بیش‌تر است، ولی می‌شود آن را حل کرد. با این پیشینه وارد آن شهر شدم و به کار تدریس مشغول گشتم. اولین روزی که وارد مدرسه شدم، مدیر مدرسه مرا به جای دانش‌آموز تازه‌واردی اشتباهی گرفت (در آن شهر، اکثر آقوی‌هیکل و درشت‌اندام بودند و من از بیش‌تر دانش‌آموزان، ریز‌اندام‌تر بودم). به هر حال، اولین ساعت تدریس، ریاضی پایه‌ی اول دبیرستان بود. وارد کلاس شدم. اضطراب تمام وجودم را گرفته بود. هنگامی که دانش‌آموزان بنابر عادت دوره‌ی راهنمایی‌شان، سلام و صبح‌بخیر گفتند. سعی کردم چیزهایی که در دانشگاه و در کلاس‌های تمرین دبیری آموخته بودم را اجرا کنم، ولی انگار نمی‌شد حرف‌های استادان را تقلید کرد. از کتاب‌های روان‌شناسی که در اوقات فراغت خوانده بودم کمک گرفتم و کمی خود را آرام کردم. خودم را معرفی کردم و وقتی گفتم دبیر ریاضی هستم، رنگ بعضی از آن‌ها پرید. فکر کنم به یاد نمرات بد ریاضی‌شان، دبیران خشک و سخت‌گیرشان، مثلث بی‌روح و... افتاده بودند. بعد از کمی صحبت با آن‌ها، یکی از دانش‌آموزان گفت که «شما اصلاً شبیه دبیران ریاضی نیستید. با خودم فکر کردم که راستی دبیران ریاضی چه شکلی‌اند؟»

به هر حال، کم‌کم در کار تدریس راه افتادم و سعی کردم تمام آموخته‌هایم را به دانش‌آموزانم منتقل کنم. در موقع تدریس، همه‌گوش می‌دادند و به علامت فهمیدن، بعضی مواقع سر تکان می‌دادند. یک ماه گذشت و از فصل اول که مجموعه‌ها بود امتحان گرفتم. با رضایتی که از دانش‌آموزان داشتم، انتظار نمرات بالایی از کلاس داشتم ولی....

نمره‌ها حاکی از حقیقت تلخی بود. ناامید شده بودم. چون برای فهماندن ریاضی به آن‌ها خیلی تلاش کرده بودم. نمره‌ها را به آن‌ها اعلام کردم و علت را پرسیدم. در عین ناباوری گفتند که شما خیلی خوب توضیح می‌دهید ولی ما زبان شما را نمی‌فهمیم (منظورشان لهجه بود، هر چند من به لهجه‌ی بومی خودم صحبت نمی‌کردم). یکی از دانش‌آموزان زرنگ گفت: «خانم اگر اجازه دهید، من بعد از شما بعضی از چیزها را برای دانش‌آموزان توضیح دهم.» من قبول کردم. خیلی جالب بود، او که توضیح می‌داد، انگار آن‌ها بهتر می‌فهمیدند.

بود که آن هم توسط نفر قبل از من انتخاب شده بود. البته با پرس و جویی که از رئیس گروه ریاضی شهرستان کرده بودم، می‌دانستم شهر ما، بیش‌تر از این‌ها به دبیر ریاضی نیاز دارد ولی به هر دلیل، فقط برای یک نفر درخواست داده بود.

البته می‌دانم که در تمام کشورها، سیاست با آموزش و پرورش عجین شده است. نمی‌دانستم فاصله‌ی چند شهری که باقی مانده بود تا شهر محل سکونت‌م چقدر است؟ مردمش چه فرهنگی دارند؟... به هر حال، شانس یکی از شهرها را انتخاب کردم اما تا چند روز از این مسئله گیج و مبهوت بودم.

بعد از پرس و جو، با کوله‌باری از آموخته‌های ریاضی وارد آن شهر شدم. من دانش‌آموخته‌ی دوره‌ای بودم که بنا به گفته‌ی کلمتس و الرتون (۱۹۹۶، ص ۶۱ و ۶۲)، اجرای برنامه‌های ریاضی جدید در دبیرستان‌ها اجباری شده و در آن نمادها بسیار اهمیت داشتند. یادام می‌آید که چندین بار به خاطر درست نوشتن، از سوی

استادم مورد تمسخر و تنبیه روحی قرار گرفتم. او می‌گفت که معلم ریاضی خودش باید ریاضی و علائم ریاضی را به خوبی بداند تا بتواند به طور دقیق آن‌ها را به یادگیرندگان منتقل کند. تأکید معلم‌ها بیش‌تر روی فرمول‌ها و نام‌گذاری قوانین (مانند جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و...) تا دانش‌اساسی ریاضی «در آن زمان، معلم در مرکز یا جلوی کلاس می‌ایستاد یا می‌نشست» همه به او و چیزی که می‌گفت نگاه می‌کردند (پولیا، ۱۹۶۹). شاید یکی از دلایلی که من رشته‌ی ریاضی را انتخاب کردم این بود که در سه سال دوره‌ی راهنمایی، یک دبیر ریاضی داشتم که مانند برخی از دبیران، عادت نداشت

پشت میز بنشیند و به ما بفهماند که بین او و ما فاصله‌ای عمیق وجود دارد. او در نیمکت کنار ما می‌نشست و من گرمی بدنش را احساس می‌کردم.

در آن زمان رشته‌ی ریاضی برای اقلیتی از دانش‌آموزان بود. اکثر خانواده‌ها بر این عقیده بودند که رشته‌های ریاضی فقط به درد پسرها می‌خورد؛ یا بسیاری معتقد بودند که فقط فرزندان ثروتمندان باید به مدرسه، آن هم رشته‌ی ریاضی بروند. درحقیقت «ریاضی مدرسه‌ای، غربالی برای کسانی بود که توانایی بیش‌تری داشتند» (کلمتس و الرتون، ۱۹۹۶، صص ۴۲ و ۴۳) و به همین دلیل، کسانی که ریاضی می‌خواندند-مخصوصاً دختران-احساس غرور و نخبه بودن در بین اطرافیان خود داشتند. به خصوص اگر شاگرد ممتاز هم بودند که دیگر

**طراحان برنامه‌ی
درسی ریاضی باید
جوانان را صاحب
فکر و اندیشه بدانند
نه جعبه‌های خالی
که توسط دبیران،
بسته‌های اطلاعات
در آن جاسازی
می‌شود**

هر چند او جملات مرا به کار می برد، ولی با گویش و زبان خودش مثلاً به تقسیم بزرگ «تقسیم نردبانی» و به دایره، «گردی» می گفت. حالا با تمام وجود این جمله را درک می کنم که «آموزش، مستقل از فرهنگ و زبان نیست» (کلمنتس و الرتون، ۱۹۹۶، ص ۳۱). البته معلمان در دانشگاه ها چگونگی آموزش و تدریس را فرامی گیرند و همین روش را دقیقاً می خواهند روی تمام دانش آموزان در تمام پایه های تحصیلی و در تمام شهرها و روستاها با فرهنگ های مختلف پیاده کنند. غافل از این که هر دانش آموزی مطابق با سن، محیط و فرهنگ جامعه ای که در آن زندگی می کند، نیازهایی دارد و درحقیقت، «روشی که برای گروهی از یادگیرندگان خوب و مناسب است، برای گروه دیگر چنین نیست» (کلمنتس و الرتون، ۱۹۹۶، ص ۳۴).

به هر حال، اولین امتحان، درس های زیادی به من یاد داد و متوجه حقایقی شدم که قبلاً به آن ها توجه نکرده بودم. در دانشگاه ها، ما به دنبال ایده آل هایی بودیم که در عالم واقعیت وجود ندارند. مثلاً به من آموخته بودند که «دانش آموزان باید خلاقانه فکر کنند، راه و رسم ابتکار در عمل را فراگیرند، مشارکت را یاد بگیرند و برای یکدیگر مفید باشند، یک زندگی عاقلانه را دنبال کنند و جنبه های زیبایی شناختی و هنرمندانه ی طبیعت انسانی خود را پرورش دهند.» اما چگونه؟! به عنوان آموزشگر می گوئیم می خواهیم دانش آموزان مشارکت با یکدیگر را یاد بگیرند ولی از نظام نمره دهی استفاده می کنیم که اساس آن تشویق رقابت است. می گوئیم می خواهیم جوان ها تفکر خلاقانه را یاد بگیرند ولی برای آموزش، فهرستی از هدف های رفتاری در اختیار داریم که جایی برای برداشت های فردی نمی گذارد. آرمان های ما با آن چه که در جست و جوی آن هستیم تا کارایی خودمان را محک بزنیم، سازگار نیستند.

درحقیقت آرزوهای آموزشی که آموزشگران برای دانش آموزان دارند و گاهی به صورت اهدافی باشکوه، در سطح اجرایی اعلام شده و به صورت عبارت هایی با دیدگاه های وسیع منتشر شده اند، به ندرت به طور کامل در مورد دانش آموزان به تحقق رسیده است (آیزنر، ۲۰۰۰).

اوایل کار توقع داشتم که تمام دانش آموزان ریاضی را به خوبی یاد بگیرند، تمام اثبات ها، قضایا و فرمول ها را به خوبی بفهمند چون فکر می کردم در آینده به آن ها نیاز دارند. ولی کم کم فهمیدم که سطح تفکر دانش آموزان متفاوت است. شاید گروهی امروز مطالب را بفهمند و گروهی یک ماه یا یک سال بعد. ضمناً ریاضی که آن ها در آینده لازم

دارند با هم متفاوت است. مهندس، بقال، کارگر، حسابدار، خیاط، استاد دانشگاه و زن خانه دار، همه نباید اطلاعات ریاضی یکسانی داشته باشند. «ریاضیاتی که مورد نیاز (۱) غیر حرفه ای (آماتور)، (۲) ریاضی دان کاربردی، (۳) معلم ریاضی و (۴) ریاضی دان محقق است، آن قدر با هم متفاوتند که هر کدام، نیازمند یک دستور کار متفاوت هستند. حتی زمانی که هر چهار گروه بخواهند بدانند که اصل موضوع چیست، بدون شک هر کدام از آن ها به گونه ای متفاوت به آن می پردازند» (آقاسی، ۱۹۸۰).

آقاسی (۱۹۸۰) در ادامه، بیان می کند که «طراحان برنامه ی درسی ریاضی باید جوانان را صاحب فکر و اندیشه بدانند نه جعبه های خالی که توسط دبیران، بسته های اطلاعات در آن جاسازی می شود. تا کی دبیران ریاضی به خاطر بخش نامه های بی اساس که از تاریخ مصرفشان گذشته، باید مانع استفاده ی دانش آموزان از تکنولوژی جدید شوند؟ ما هنوز طوری جدول ضرب را تدریس می کنیم که انگار ماشین حساب های جیبی وجود ندارند. اما کودکان می دانند که ماشین حساب های جیبی وجود دارند و [به همین دلیل]، حساب استاندارد را فقط یک تنبیه صرف می بینند.»

سؤال من از سیاستمداران آموزشی این است که شما از چه زمانی دبیران و دانش آموزان را کاملاً مسئول و محقق واقعی در نظر می گیرید؟ برنامه های درسی و به خصوص ریاضی طوری باید طراحی شوند که جوانان بتوانند از امکانات به روز آن استفاده کنند. با این تجارب فهمیده ام که تا بیدار شدن سیاستمداران آموزشی، ما دبیران و آموزشگران نیز نباید خودمان را به خواب بزنیم؛ بلکه باید با تغییر در روش های تدریس و طرز تفکر خود، به جامعه ی آموزشی روح ببخشیم. هدف ما از آموزش باید تربیت شهروندان

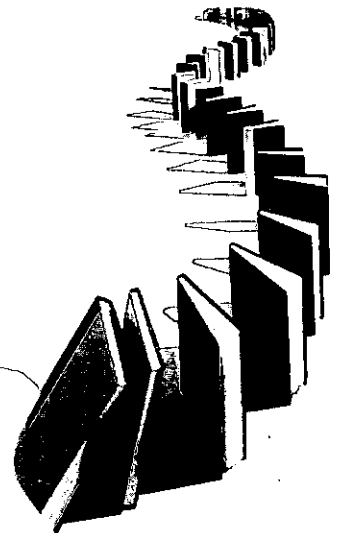
هر دانش آموزی مطابق با سن، محیط و فرهنگ جامعه ای که در آن زندگی می کند، نیازهایی دارد

آموزش ریاضی مستقل از فرهنگ و زبان نیست

مستقل، آزاد و توانا باشد.

منابع

۱. آقاسی، جوزف، (۱۹۸۰)، در باب آموزش ریاضی: انقلاب لاکاتوش. ترجمه ی زهرا گویا و یونس فردین پور کریمی، مجله ی رشد آموزش ریاضی، شماره ی ۷۵، صص ۴-۱۴، دفتر کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۲. آیزنر، الیوت دلیو، (۲۰۰۰) آنان که گذشته را نادیده می گیرند...، چمن آرا، سپیده، گویا، زهرا. مجله ی رشد آموزش ریاضی، شماره ی ۶۹، صص ۴-۱۸، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۳. پولیا، جورج، (۱۹۶۹)، اهداف آموزش ریاضی، طالب زاده، علیرضا، گویا، زهرا. مجله ی رشد آموزش ریاضی، شماره ی ۷۲، صص ۳۵-۴۱، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۴. کلمنتس، الرتون، (۱۹۹۶). تحقیقات آموزش ریاضی، گذشته، حال، آینده. انتشارات یونسکو. (ترجمه در حال آماده شدن برای چاپ است).



حکیده‌های پایان نامه‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

رشد مفهومی در ریاضیات، سبک‌های مختلف آن:

کانون انباشتگی نظریه‌های گوناگون

پژوهشگر: حسین عبدی رکن آبادی

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدائی

استاد مشاور: دکتر زهرا گویا

داوران: دکتر محمدرضا مولایی، دکتر محمود محسنی مقدم

تاریخ دفاع: ۱۳۸۶/۶/۲۹

دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر،

کرمان

چکیده

چیستی و چگونگی فرایند یادگیری ریاضیات و تحول ریاضیاتی افراد، همواره از سؤالات اساسی حوزه‌ی آموزش ریاضی به شمار می‌رود. نظریه‌های تحول شناختی به دو رده‌ی اساسی تقسیم می‌گردند: چارچوب‌های عمومی تحول بلندمدت شناختی در طول دوره‌ی زندگی، و چارچوب‌های موضعی رشد مفهومی.

در بخش نظری این مطالعه ضمن اشاره به برخی چارچوب‌های عمومی رشد شناختی، مانند نظریه‌ی مرحله‌ای پیاژه، چارچوب رشد هندسی فن هیلی و فن هیلی (۱۹۸۶) و مدل SOLO از بیگز و کولیس (۱۹۸۲)، چند چارچوب موضعی تأثیرگذار از جمله اصول رشد مفهومی پیاژه، نظریه‌ی اسفارد (۱۹۸۲) و چرخه‌ی UMR در مدل SOLO ارائه شده است.

قسمت بعدی به تبیین نظریه‌ی جهانی دینسکی و همکاران (۱۹۸۸، ۱۹۹۶، ۲۰۰۱ و...) در مورد رشد مفهومی، تحت عنوان APOS، اختصاص دارد که از مراحل خطی عمل-فرایند-شیء-طرحواره تشکیل شده است. تال و همکاران او (۱۹۹۴، ۲۰۰۴، ۲۰۰۵ و...) به نقد این نظریه پرداخته‌اند. اهم انتقادات تال بر چارچوب دینسکی، در قالب تفکیک سه جهان ریاضیات مجسم-مفهومی، نمادین-فرهومی و صوری-اصل موضوعی، به این نکته مربوط می‌شود که فرایند APOS عمدتاً منحصر به ریاضیات نمادی است و در این حوزه نیز کار دانشجویانی را که با سبک یا دیدگاه‌های شهودی به کار ریاضی می‌پردازند توجیه نمی‌کند (پنتو و تال ۱۹۹۸ و ۲۰۰۲). در ادامه‌ی مطلب، مطالعات وبر و همکاران (۲۰۰۵ و ۲۰۰۶) که در امتداد پژوهش‌های تال به سبک‌های مختلف ساخت و اثبات ریاضی نظر داشته‌اند ارائه شده است.

قسمت اصلی این مطالعه عبارتست از تحلیل مصاحبه‌های دو دانشجوی کارشناسی رشته‌ی ریاضی که از دو دیدگاه متفاوت صوری و غیرصوری برخوردارند. این پژوهش با دو مصاحبه‌ی غیرساختاری با اساتید ریاضیات در مورد نقش سبک‌های مختلف در سه زمینه‌ی کار دانشجویان، تدریس ریاضی و پژوهش ریاضیات تقویت گردیده و ایده‌ای نیز برای تدریس دترمینان در جبر خطی به شیوه‌ی معنایی ارائه شده است.

به طور خلاصه، نظریه‌ی APOS برای تحلیل ساخت و ساز و یادگیری ریاضی، بخصوص در تحلیل سبک‌های متفاوت کار

ریاضی که در زمینه های گوناگونی (مانند یادگیری، تدریس و پژوهش) حضور و نقش دارند، چارچوب کاملی نیست. هم چنین باید در سه محور فوق به تفاوت ها توجه داشته باشیم؛ لکن رده بندی، تعیین و تشخیص ویژگی ها و حدود و نحوه ی توجه به این شیوه ها یا سبک ها به پژوهش های عمیقی نیازمند است.



بررسی بخش آموزش حل مسئله ی کتاب های ریاضی دوره ی راهنمایی تحصیلی در رفتار و دیدگاه معلمان ریاضی و میزان تأثیر این بخش بر توانایی حل مسئله ی دانش آموزان

پژوهشگر: مرضیه مهتابی

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدائی

استاد مشاور: دکتر زهرا گویا

داوران: دکتر مهدی رجبعلی پور، دکتر اسفندیار اسلامی

تاریخ دفاع: ۸۶/۱/۶

دانشگاه محل تحصیل: دانشکده ی علوم ریاضی و کامپیوتر،

دانشگاه شهید باهنر، کرمان.

چکیده

همه ی افراد با توجه های مختلف، نیاز روزافزونی به یادگیری ریاضی دارند و اگر نگوئیم ریاضیات یعنی حل مسئله، اما باید اذعان کنیم که حل مسئله، باید بخش عمده ای از دانش و تجربه ی افراد، در عرصه ی کار ریاضی باشد. پس هر گامی که در جهت بهتر شدن کیفیت حل مسئله ی افراد برداشته شود، تا حد زیادی به بهبود زندگی ایشان کمک خواهد کرد. هدف اصلی این تحقیق، بررسی بخش آموزش حل مسئله ی کتاب های ریاضی دوره ی راهنمایی در رفتار و دیدگاه دبیران ریاضی و میزان تأثیر این بخش بر توانایی حل مسئله ی دانش آموزان بوده است. برای این منظور پس از مطالعه ی دقیق جوانب موضوع،

دانش آموزان و معلمان ناحیه ی ۲ کرمان به عنوان جامعه ی آماری انتخاب شدند. روش تحقیق توصیفی، و ابزار جمع آوری اطلاعات پرسش نامه بوده است. نتایج تحقیق نشان داد که: - بخش آموزش حل مسئله تأثیر چندانی در رفتار حل مسئله ی دانش آموزان نداشته است.

- معلم های ریاضی از روش های تدریس مؤثری برای آموزش حل مسئله استفاده نمی کنند و برخی از آن ها این بخش را اصلاً تدریس نمی کنند.

- معلم های ریاضی نسبت به مبانی نظری حل مسئله دانش کمی دارند؛ هم چنین اگرچه اکثراً وجود آموزش حل مسئله را در برنامه ی درسی مدرسه مفید ارزیابی می کنند ولی با شرایط حاضر آن را بر عملکرد دانش آموزان مؤثر نمی دانند.

- از دیدگاه معلم های ریاضی، محتوای این بخش از کتاب در حدود ۶۰ درصد از معیارهای محتوایی لازم برای یک کتاب درسی را داراست.



درک دانش آموزان از مفهوم تابع

پژوهشگر: بی بی زکیه پرهیزگار

استاد راهنما: دکتر زهرا گویا

استاد مشاور: دکتر امیرحسین اصغری

داوران: دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر احمد شاهورانی

تاریخ دفاع: ۸۷/۸/۶

دانشگاه محل تحصیل: دانشکده ی ریاضی دانشگاه شهید

بهشتی

چکیده

تابع یکی از اساسی ترین مفاهیم ریاضیات است که گوناگونی

رسید که برای یادگیری مفهوم تابع، اتصال، مقایسه و تبدیل از یک حالت بازنمایی به حالت دیگر بازنمایی ضروری است. این فعالیت باعث می شود تا دانش آموزان بتوانند مهارت های نمایش و تشخیص مفهوم تابع را در بازنمایی های مختلف کسب کنند و بین آن ها، اتصال و ارتباط برقرار نمایند.



تصورات و تعاریف از مفهوم تابع

پژوهشگر: مهدی جوادی

استاد راهنما: دکتر احمد شاهورانی

استاد مشاور: دکتر زهرا گویا

داوران: دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر امیرحسین اصغری

تاریخ دفاع: ۸۷/۱۱/۱۲

دانشگاه محل تحصیل: دانشکده ی ریاضی دانشگاه شهید

بهشتی

چکیده

هدف این تحقیق، بررسی چگونگی فهم و درک دانشجویان سال اول دانشگاه از مفهوم تابع بود، که در دوره ی متوسطه در رشته ی ریاضی و فیزیک تحصیل کرده اند و محصول نظام آموزشی موجود هستند. در جهت تحقق این هدف، از مدل مفهومی «تعریف مفهوم» و «تصور مفهوم» که توسط تال و وینر (۱۹۸۱) به طور رسمی به حوزه ی آموزش ریاضی معرفی شده، استفاده شد تا بتوان با کمک آن، با ساختار شناختی دانشجویان و تصورات و تعریف های مفهوم رایج بین آن ها از مفهوم تابع آشنایی عمیق تری پیدا کرد.

به منظور آشکارسازی تصورات و تعریف های مفهوم دانشجویان از مفهوم تابع، با استناد به ادبیات پژوهشی این حوزه، آزمونی حاوی هشت سؤال، طراحی و اجرا شد که یک سؤال برای

تفسیرها و بازنمایی هایش شگفت آور است. سیر تحول توسعه ی مفهوم تابع، تاریخی طولانی و پرفراز و فرود دارد که منجر به ایجاد بازنمایی های مختلف مفهوم تابع شده است. بدین جهت، محققین به این نتیجه رسیده اند که توانایی شناسایی و نمایش یک مفهوم ریاضی از جمله تابع در بازنمایی های مختلف، و انعطاف در حرکت از یک بازنمایی به بازنمایی دیگر، برای یادگیری آن مفاهیم ضروری هستند. این محققان دریافته اند که این فعالیت ها، همان طور که به دانش آموزان اجازه می دهد تا روابط غنی را ببینند، به همان اندازه نیز باعث توسعه ی درک عمیق تر مفاهیم می شود. بدین سبب، تحقیقات بسیاری با هدف شناخت دشواری های دانش آموزان در برخورد با بازنمایی های چندگانه و چگونگی تأثیر آن ها بر تعمیق فهم و درک مفاهیم ریاضی توسط آن ها انجام شده است. در همین راستا نیز، تحقیقی با دو هدف عمده ی زیر طراحی و اجرا شد:

الف) شناخت دشواری ها و پیچیدگی های احتمالی دانش آموزان در برخورد با بازنمایی های چندگانه ی تابع؛

ب) بررسی چگونگی استفاده ی دانش آموزان از ویژگی های تعریف تابع در بازنمایی های مختلف.

شرکت کنندگان در این تحقیق، دانش آموزان متوسطه بودند و جمع آوری داده های این تحقیق، از طریق پرسش نامه و مصاحبه انجام شد و شامل سؤال هایی در مورد بازنمایی های چندگانه ی تابع از جمله مجموعه ی زوج مرتب، نمودار، فرمول و عبارت بود.

تجزیه و تحلیل داده ها نشان داد که دانش آموزان در دیدن ارتباط بین بازنمایی های مختلف تابع، ناتوان بودند. هم چنین، دانش آموزان از تعریف تابع برای نمایش تابع به صورت زوج مرتبی یا به صورت نمودارهای ون که جزو مدل های اولیه ی نمایش تابع هستند، استفاده کردند و در برخورد با دو بازنمایی نموداری و فرمول، بیش تر بر تجارب قبلی تکیه داشتند و عمدتاً با استفاده از تکنیک هایی که می شناختند، به استدلال تشخیص تابع بودن پرداختند.

پژوهشگر با نتیجه گیری از یافته های این تحقیق، بر استفاده از مجموعه ای از مثال های متنوع از تابع های گوناگون برای تقویت تصور دانش آموزان نسبت به مفهوم تابع تأکید می کند. هم چنین، توصیه می شود که برای معرفی یک مفهوم جدید ریاضی، از بازنمایی های چندگانه استفاده شود زیرا این مطالعه نیز به این نتیجه



نقش مثال‌ها در آموزش ریاضی

پژوهشگر: حسین کثیری

استاد راهنما: دکتر امیرحسین اصغری

استاد مشاور: دکتر زهرا گویا

داوران: دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر احمد شاهورانی

تاریخ دفاع: ۸۸/۲/۱۳

دانشگاه محل تحصیل: دانشکده‌ی ریاضی، دانشگاه شهید

بهشتی

چکیده

مثال‌ها نقش مهمی در آموزش ریاضیات ایفا می‌کنند به همین دلیل در این تحقیق برآن شدیم تا ارتباط بین مثال‌ها و فهم ریاضیات را مورد پژوهش قرار دهیم. برای پاسخ به این پرسش، ما سؤالات زیر را مدنظر قرار دادیم:

- مثال‌ها از چه طریقی تولید می‌شوند؟
- آیا چک کردن و چک نکردن مثال‌ها با فهم مطالب در ارتباط است؟
- آیا هنگام تولید مثال و چک کردن مثال به یک جنبه از مفهوم توجه می‌شود یا جنبه‌های مختلف آن؟
- آیا توانایی در تولید مثال‌های بیشتر از یک مفهوم با درک بهتر آن مفهوم ارتباط دارد یا خیر؟

در این تحقیق از روش مصاحبه برای جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها استفاده کردیم. برای انجام این پژوهش دانش‌آموزان مقاطع سوم، چهارم و پنجم ابتدایی انتخاب شدند که به اقتضای سنشان دانش ریاضی اندکی داشتند. در این تحقیق سعی بر آن شد تا با انجام مصاحبه و تعقیب روش فکری دانش‌آموزان از طریق پرسش‌های متوالی و بررسی چک‌نویس‌های دانش‌آموزان مثال‌های تولید شده توسط آن‌ها بررسی شود.

شناخت تعریف‌های مفهوم شخصی، و هفت سؤال بعدی برای کشف تصورات مفهوم دانشجویان برای مفهوم تابع بود. سپس، تجزیه و تحلیل داده‌ها براساس مدل مفهومی مذکور انجام گرفت و تعریف‌های مفهوم و تصورات مفهوم استخراج شده از پاسخ‌ها، دسته‌بندی شدند.

این تحلیل نشان داد که تصور ضابطه داشتن یک تابع - یعنی هر تابع لزوماً دارای یک ضابطه و فرمول مشخصی است - تصوری غالب در بین شرکت‌کنندگان در تحقیق بود که مشخصه‌ی «دلخواه بودن» یک تابع را دربرنمی‌گرفت. در واقع، ضابطه داشتن یک تابع، با دلخواه بودن آن، بدین معنی که مقدار یک تابع در هر نقطه‌ی دلخواه داده شده مستقل از مقدار آن در نقطه‌ی دیگر است، تناقض دارد و این تصور، مانع از درک تعریف رسمی تابع می‌شود. هم‌چنین، مشخصه‌ی «تک ارزشی بودن» که عنصر کلیدی دیگری در تعریف رسمی تابع می‌باشد نیز، در تصورات مفهوم شرکت‌کنندگان نسبت به مفهوم تابع، نقش کم‌رنگی داشت. در واقع، تصورات مفهوم شناسایی شده در این مطالعه، زمینه‌ی مناسبی برای درک دو مشخصه‌ی اساسی از مفهوم تابع یعنی «تک ارزشی بودن» و «دلخواه بودن» را ایجاد نکردند.

این در حالی است که در کتاب حسابان سال سوم متوسطه‌ی رشته‌ی ریاضی و فیزیک، برای ورود به مبحث تابع، تلاش شده تا فرصت‌های متنوعی برای ساختن تصوراتی از مفهوم تابع برای دانش‌آموزان ایجاد شود و سپس تعریف رسمی تابع ارائه گردد. انتظار می‌رفت که چنین ورودی به مطلب بتواند تصور مفهوم دانش‌آموزان را تقویت کند و زمینه‌ی مساعدی برای فهمیدن تعریف مفهوم فراهم آورد. این مطالعه نشان داد که تصوراتی که کتاب حسابان قصد داشته است در دانش‌آموزان ایجاد کند، بیش‌تر در حد یک تمثیل نقش داشته‌اند و می‌توان حدس زد که این امر، بیش‌تر به نوع تدریسی که آن‌ها دریافت کرده‌اند و محدودیت فرصت‌های یادگیری که برای ایشان ایجاد شده است مربوط می‌شود. به بیان دقیق‌تر، این دانش‌آموزان، به اندازه‌ی کافی فرصت درگیر شدن با این تمثیل‌ها و به چالش کشیدن این تصورات را پیدا نکرده‌اند. بدین سبب در آن‌ها، تصوراتی که زیربنای معرفی تعریف رسمی تابع باشد، ساخته نشده است. بررسی چگونگی ایجاد ارتباط بین تصور مفهوم و تعریف مفهوم دانش‌آموزان و نقش تدریس و فرصت‌های یادگیری در تعمق بیش‌تر هر دو، می‌تواند موضوع پژوهش‌های بعدی باشد.



دفتر انتشارات کمک آموزشی

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش آموزی

(به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- **رشد کودک** (برای دانش آموزان آمادگی و پایه‌ی اول دوره‌ی دبستان)
- **رشد نوجوان** (برای دانش آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره‌ی دبستان)
- **رشد دانش آموز** (برای دانش آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره‌ی دبستان)
- **رشد نوجوان** (برای دانش آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)
- **رشد جوان** (برای دانش آموزان دوره‌ی متوسطه و پیش دانشگاهی)

مجله‌های عمومی

(به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد آموزش ابتدایی + رشد آموزش راهنمایی تحصیلی +
- رشد تکنولوژی آموزشی + رشد مدرسه فردا + رشد مدیریت مدرسه + رشد معلم

مجله‌های تخصصی

(به صورت فصلنامه و ۴ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد برهان راهنمایی (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی) + رشد برهان متوسطه (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره‌ی متوسطه) + رشد آموزش قرآن + رشد آموزش معارف اسلامی + رشد آموزش زبان و ادب فارسی + رشد آموزش هنر + رشد مشاور مدرسه + رشد آموزش تربیت بدنی + رشد آموزش علوم اجتماعی + رشد آموزش تاریخ + رشد آموزش جغرافیا + رشد آموزش زبان + رشد آموزش ریاضی + رشد آموزش فیزیک + رشد آموزش شیمی + رشد آموزش زیست شناسی + رشد آموزش زمین شناسی + رشد آموزش فنی و حرفه‌ای + رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی برای آموزگاران، معلمان، مدیران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

- نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره‌ی ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی.
- تلفن و نمابر: ۰۲۱-۸۸۸۳۹۱۸۶



نامه‌ها و مطالب دوستان زیر از آغاز سال ۸۸ تا کنون به دستمان رسیده است.

از همه‌ی آن‌ها سپاسگزاریم و منتظر مطالب شما برای صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی هستیم. مهلت ارسال آثار برای این شماره‌ی ویژه، پایان آذرماه است.

یوسف آذرنگ، از آذربایجان غربی؛

علیرضا زارع کردیانی، از خراسان رضوی؛

ندا مهدوی غروی، از آمل؛

مژگان فریدون نژاد، از اصفهان؛

علی اکبر جاویدمهر، از قم؛

زهره ترازوی، از خراسان رضوی؛

محمد روزدار و معصومه ندائی، از لردگان؛

نقیسه جواهریان، از کرمان؛

نرگس عصارزادگان، از اصفهان؛

مصطفی شیخ زاده، از خراسان رضوی؛

علی غلامیان، از بجنستان؛

فاطمه تکاملی ماسوله، از رشت؛

مریم نقدی، از دورود لرستان؛

سعید چتر آبنوس، از شیراز؛

مریم دهقانپور، از کرمان.



Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Roshd Mathematics 97 Education Journal

Vol. 27 No. 1 2009 ISSN: 1606-9188

2. Editor's Note

4. Learning Calculus & Difficulties With Limit Concept & Formalism

by: Y. Azerang

11. Footprints of Polia on the Proof of Last Ferma's Theorem

by: M. Yazdanfar

19. Kashani's Works & ...

by: I. Hadi & M. Dehghandar

24. Language as one of the Basics of Mathematics Education

by: L. Ahmadloo, M. Ostadi, A. Heidari, Z. Sabagzadeh & N. Agili

27. Counting With $1+2+3+...+n=nI$

by: G.H. Ganbari

33. Teachers' Narrative

by: A. Z. Kordiani

File of ICT:

35. Using ICT in Teaching Mathematics

by: Z. Abolhasani

42. The Role of Educational Technology in Teaching - Learning Process of Teaching Space Geometry

by: N. Behin Ayub & M. Gholami

48. Book Presentation

by: M. Rezaie

50. Examples of Pigeon Hole Principle

by: M. Karimian & M. Ghavidel

53. Using Pigeon Hole Principle in Problem Solving

by: A. Borovick & A. Besovna

trans: F. Rangi

56. View points

by: Z. Sabagzadeh

59. Abstracts of Master Thesis in Mathematics Education

63. Letters

Managing Editor : Mohammad Naseri

Editor : Zahra Gooya

Executive Director : Sepideh Chamanara

Editorial Board :

Esmail Babolian, Mirza Jalili

Sepideh Chamanara, Mehdi Radjabalipour

Mani Rezaie, Shiva Zamani, Bijan Zangeneh

Mohammad Reza Fadaie and Soheila Gholamazad

Graphic Designer : Mahsa Ghabaee

P.O.Box : Tehran 15875 - 6585

E-mail: riazai@roshdmag.ir



پیرنگ اشتراک مجله های رشد

شرایط:

- ۱- پرداخت مبلغ ۵۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله‌ای درخواستی، به صورت علی الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه‌ی سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.
- ۲- ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده‌ی اشتراک باپست سفارشی. (کپی فیش رانزد خودنگه دارید.)

♦ نام مجله های درخواستی :

.....

.....

.....

♦ نام و نام خانوادگی:

.....

♦ تاریخ تولد:

.....

♦ میزان تحصیلات:

.....

♦ تلفن:

.....

♦ نشانی کامل پستی:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

♦ صندوق پستی مرکز بررسی آثار: ۱۵۸۷۵/۶۵۶۷

♦ صندوق پستی امور مشترکین: ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱

♦ نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

♦ پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

♦ شماره امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۳۲۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰

♦ پیام گیر مجله های رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲

♦ یادآوری:

♦ هزینه‌ی برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی و عدم حضور گیرنده، بر عهده‌ی مشترک است.

♦ مبنای شروع اشتراک مجله از زمان دریافت برگ اشتراک است.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



۲۶-۲۹ مرداد ۱۳۸۸ | دانشگاه صنعتی شریف
www.simc40.ir

چهلمین کنفرانس ریاضی کشور

40TH ANNUAL IRANIAN
MATHEMATICS CONFERENCE

17-20 August 2009
Sharif University of Technology
Tehran, Iran

صدمین شماره آغازش ریاضه رشد

در تابستان سال ۱۳۸۹ منتشر می شود.

● مطالب خود را برای این شماره ویژه تا پاییز ۱۳۸۸ ارسال کنید و روی پاکت بنویسید:
«برای صدمین شماره رشد آموزش ریاضی»

