

رشد

# آکادمی دانش ریاضی

سال هفدهم - ۱۵۰ تومان

ISSN 1606-9188





اگر با بزرگداشت گذشتگان می‌خواهیم کاری  
کنیم که جوانان امروز به استخوانهای پوسیده آباء و  
اجدادشان بی‌بالند؛ سخت خطاکاریم و اگر با انجام این  
کار می‌خواهیم امروزیان را تحقیر کنیم و به آنان  
بفهمانیم که نتوانسته‌اند مثل پدرانشان در  
زمینه‌های گوناگون علمی و ادبی و هنری بشکفند؛  
در اشتباهیم، اما اگر می‌خواهیم از این راه آنان را  
بر انگیزیم تا راه آن بزرگان را در پیش گیرند؛  
را همان درست است و باید آنرا دنبال کنیم.



## فهرست:

۲ یادداشت سردبیر

۴ دوباره نگرى به برنامه جبر دبیرستانی /

نویسنده: سهیلا غلام آزاد

۱۳ روش ترکیباتی برای حاصل جمع توانهای اعداد

طبیعی / نویسنده: جواد لالی

۲۰ استاد دکتر محسن هشترودى /

محقق: محمد ابراهيم علانی

۲۸ چه کسی معادله درجه سوم را حل کرد؟ /

نویسنده: تونی اندروز، مترجم: نسرين شهامت نادری

۳۱ روایت معلمان / نویسنده: مریم گویا

۳۴ روش تدریس ریاضی در مدارس /

تهیه کنندگان: ذبیح الله شاهرخیان و محمد حسن پور محمد باقر

۴۹ ارزشیابی در کلاس های ریاضی /

نویسنده: تلماسو، مترجم: سپیده چمن آرا

۵۴ سرگرمی های ریاضی / نویسنده: مارتین گاردنر،

مترجم: حسن تمیرنیا

۵۵ گزارش پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی -

مشهد / گزارشگر: محمد جواد جوامع

مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده

سردبیر: زهرا گویا

مدیر داخلی: سهیلا غلام آزاد

اعضای هیأت تحریریه: اسماعیل بابلیان، عین الله پاشا، میرزا جلیلی، جواد حاجی بابایی، مانی رضایی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام آزاد و علیرضا مدقالچی

طراح گرافیک: فریبرز سیامک نژاد

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵

تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶

تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۱۱۶۱ - ۹ (داخلی ۳۰۲)

چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

دفتر انتشارات کمک آموزشی، مجلات زیر را منتشر می کند:

رشد کودک، برای پیش دبستان و دانش آموزان کلاس اول دبستان

رشد نوآموز، برای دانش آموزان دوم و سوم دبستان

رشد دانش آموز، برای دانش آموزان چهارم و پنجم دبستان

رشد نوجوان، برای دانش آموزان دوره راهنمایی

رشد جوان، برای دانش آموزان دوره متوسطه

مجلات رشد: معلم، تکنولوژی آموزشی، آموزش ابتدایی،

آموزش فیزیک، آموزش شیمی،

آموزش زبان و ادب فارسی، آموزش زبان، آموزش تاریخ،

آموزش راهنمایی تحصیلی، آموزش تربیت بدنی،

آموزش زیست شناسی، آموزش جغرافیا، آموزش معارف اسلامی

برای معلمان، دانشجویان تربیت معلم، مدیران مدارس و کارشناسان آموزش و پرورش

■ مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان مقاطع مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی، موارد زیر رعایت شود:

■ مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.

■ شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه مطلب نیز مشخص شود.

■ نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.

■ اصل مقاله های ترجمه شده به پیوست، ارسال شود.

■ در متهای ارسالی تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.

■ زیرنویسها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره صفحه مورد استفاده باشد.

همچنین:

■ مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.

■ مطالب مندرج در مجله، الزاما مبین نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.

■ مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یارد، بازگشت داده نمی شود.

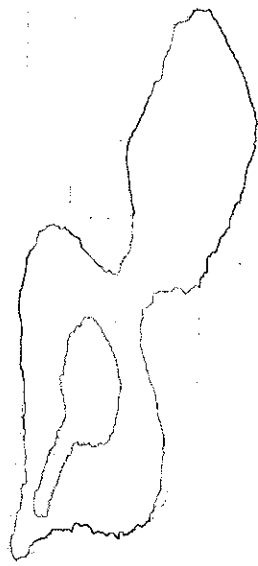
در گذشته، «علم بهتر است یا ثروت» یکی از موضوع‌های همیشگی انشاء در مدارس بود. اغلب دانش‌آموزان تلاش می‌کردند تا شواهدی بیابند و نشان دهند که در نهایت، «علم» از «ثروت» بهتر است. حتی کسانی که در دل به این ادعایی باور بودند، شهامت ابرازش را نداشتند و بالاخره، با هزار و یک دلیل محکم یا بی‌اساس، ثابت می‌کردند که «علم» بهتر از «ثروت» است.

یکی از دلایل اصلی چنین ادعائی، یک باور فرهنگی و اعتقادی عمیق به «علم» و «عالم» در ایران بوده و هست. فرهنگی که قهرمانان واقعی و اسطوره‌های آن، بیش از هر چیز، مجهز به سلاح «علم»، «بصیرت»، «آگاهی» و از همه مهم‌تر، «دانائی» بوده‌اند زیرا همیشه «توانائی» را نتیجه «دانائی» دانسته‌اند. هم چنین، فرهنگ اعتقادی این جامعه بدین گونه شکل گرفته است که در آن، قلم علما از خون شهدا برتر است.<sup>۱</sup> با یک تحلیل ساده و یک استنتاج منطقی، مشاهده می‌شود که عنصر اصلی «دانائی» و وجه غالب «عالم»، مواجه شدن با «چرا»های متعدد و تلاش در جهت یافتن پاسخ به آن «چرا»ها است. «عالم» و «دانا» هیچ حرفی را بدون آن که برای آن دلیل قانع‌کننده بیابند، نمی‌پذیرند. «دانا» و «عالم» به طور عمدی، سوال مطرح می‌کنند و تا رسیدن به پاسخ، آرام و قرار ندارند. چنین «علم» پاسخگوئی، حتماً از «ثروت» بهتر می‌شود، زیرا ثروت را در درون خود دارد. آن سرمایه درونی که همیشه مولد «علم» است، توانائی تولید همه نوع ثروتی را نیز دارد. هدف آموزش عمومی نیز تربیت افراد «دانا» و دوستدار علم است که به برتری «علم» بر «ثروت» مجازی، باور داشته باشند. اما چگونه می‌توان چنین «توانائی» و «باوری» را در دانش‌آموزان و به تبع آن، در جامعه ایجاد کرد؟

حدود  $\frac{1}{3}$  جمعیت ایران را دانش‌آموزان تشکیل می‌دهند و حدود ۵۰ درصد افراد جامعه، زیر ۲۵ سال سن دارند. جوانی جامعه ایرانی، ویژگی منحصر به فرد آن است. اگرچه این جوانی جمعیت، پیچیدگی‌های سیاسی، اقتصادی، اجتماعی و فرهنگی عمده‌ای را برای جامعه ایجاد کرده است، با این حال، گنجی است که با سرمایه‌گذاری‌ها و برنامه‌ریزی‌های اصولی، آینده‌نگر و واقع‌بینانه، می‌تواند توسعه پایدار ایران را در آینده، تضمین کند. اما چگونه؟

جامعه ایرانی در شرایط حاضر، دوران انتقالی سختی را می‌گذراند. در این انتقال، به دلیل تغییر زیرساخت‌های جامعه بومی و جهانی و هم چنین، ترکیب جمعیتی جدید و فاصله‌ای که بین نسل‌های جامعه ایجاد شده است، بحران‌های هویتی جدی بروز کرده است. از یک سو، جوان ایرانی با انگیزه قوی؛ خود را برای تحصیلات عالی و کسب توانائی‌های علمی آماده می‌کند و هر نوع تغییر موقعیت اجتماعی خود را، از مسیر تحصیل امکان‌پذیر می‌بیند. در این مسیر، نسل میانسال نیز مشوق و حامی اوست. از سوئی دیگر، گاهی به سبب بعضی مشکلات اقتصادی، همین نسل میانسال، ناخودآگاه و غیرمسئولانه؛ باور جوانان به علم و علم‌اندوزی را متزلزل می‌کند. این تزلزل، به خصوص وقتی تشدید می‌شود که افراد، با مواردی در جامعه مواجه می‌شوند که «علم» جای خود را به «مدرک» می‌دهد و رسیدن به درجات مختلف و اشتغال مطلوب، به جای آن که بر اساس «شایستگی» باشد، متکی به آن «مدرک» می‌شود. در چنین وضعیتی است که جامعه، از نظر باورهای تحصیلی و علمی، دچار بحران می‌شود. می‌خواهد امیدوار باشد که «علم» به راستی از «ثروت» بهتر است، اما واقعیت‌های زندگی در وجودش تزلزل ایجاد می‌کنند که مبدا «ثروت» بهتر است؟! و گاهی با افراط و تفریط، دامنه‌های این بحران، گسترده‌تر می‌شوند. برای مثال، گاهی دچار «مطلق‌اندیشی» می‌شویم: از یک سو انتظار داریم که «عالم» به جرم توانائی‌هایی

# دانش بهتر است یا ثروت؟



که دارد، در سخت‌ترین شرایط زندگی کند و دم بر نیاورد، چرا که گفته است «علم» بهتر از «ثروت» است. از سوئی دیگر، در تحلیلات خود، هر «ثروتی» را بدون «علم» امکان‌پذیر می‌دانیم و حفظ آن را بدون «علم» برای همیشه میسر می‌بینیم و ممکن است تصور کنیم که چنین ثروتی، هم می‌تواند ابدی و ازلی باشد و هم می‌تواند، رضایت درونی در افراد ایجاد کند.

با این حال، انسان با توجه به پیچیدگی‌ها و ابعاد مختلفی که دارد، «علم» و «ثروت» را با توجه به معانی واقعی هر دو، می‌خواهد و به هر دو، نیازمند است. اگر «علم» با «مدرک» مترادف شود، فاجعه بزرگی جامعه را تهدید خواهد کرد؛ زیرا برای اخذ «مدرک» به عنوان جواز عبور، ممکن است جامعه دچار ناپسامانی‌های زیادی شود و خدای ناکرده، موسسات علمی، تبدیل به مراکز صدور «مدرک» شوند. اما علم به معنای «توانائی»، «دانائی»، و «پاسخگوئی»، نیاز هر جامعه‌ای است. ما می‌توانیم از این باور عمیق اعتقادی-فرهنگی نسبت به «علم» و «عالم»، سرمایه‌های عظیمی بیندوزیم؛ به شرط آن که باور داشته باشیم که به خصوص، در عصر ارتباطی جدید؛ «علم» بدون چون و چرا و غیر پاسخگو، امکان بقا ندارد و حتی موفقیت اقتصادی جامعه و حفظ و افزایش ثروت‌های آن، نیازمند «دانائی» و «توانائی» عالمان جامعه است. در نتیجه؛ نظام آموزشی، مسئولیت خطیر تربیت چنین نسلی را به عهده دارد؛ نسلی که از نظر فردی، دارای تعادل و توازن باشد و خواهان بالندگی؛ و از نظر اجتماعی، پاسخگوی نیازهای جامعه خود بوده و تضمین‌کننده توسعه پایدار آن باشد. نسلی که ثروت را؛ هم «درونی» و «کیفی» و هم «بیرونی» و «کمی» ببیند و راه رسیدن به آن را از طریق «علم»، هموار کند؛ نسلی که «علم» را «دانائی» و «توانائی» بدانند و آن را فقط با «مدرک» مترادف نشمارد. چگونگی تحقق این رسالت بزرگ، می‌تواند یکی از دغدغه‌های اصلی نظام آموزشی ایران باشد.

نظام آموزشی از طریق برنامه‌ریزی‌های آموزشی و درسی و طراحی‌های مناسب فضاهای آموزشی؛ می‌تواند این مسیر را هموار کند، و صد البته که چگونگی هموار کردن این مسیر، سخت است و این چالش بزرگ، می‌تواند آموزش و پرورش را در آستانه آزمون سرنوشت‌سازی قرار دهد. آموزش و پرورشی که از طریق بیش از ۱۸ میلیون دانش‌آموز و خانواده‌های آنها، در واقع با تک‌تک افراد جامعه، تماس مستقیم دارد. در نتیجه، هر تغییر دیدگاهی حتی اندک، در آموزش و پرورش، تأثیر همگانی بر جامعه خواهد داشت. با توجه به این وسعت مخاطب و خطیر بودن مسئولیت، نظام آموزشی نیازمند شناخت عمیق جامعه جوان ایرانی در تمام ابعاد آن است. دانش‌آموز ایرانی

هزاران «چرا» در سر دارد و چیزی را بدون دلیل نمی‌پذیرد و انتظار پاسخ‌های قانع‌کننده‌ای برای «چرا»های خود دارد. دانش‌آموز ایرانی با «دستورالعمل» و «باید» و «نباید» آرام نمی‌گیرد. او به دنبال دلیل است و اگر نیابد، یا سرکش می‌شود یا منفعل؛ و در هر دو صورت، جامعه او را از دست می‌دهد. نسل جدید، حتی در رابطه با درس‌هایی مانند «ریاضی»، هزاران سؤال دارد و مسئولیت پاسخگوئی به آنها، به عهده آموزشگران، برنامه‌ریزان و معلمان ریاضی است.

«ریاضی» یکی از درس‌هایی است که به دلیل ماهیت استنتاجی و تجربی خویش، اغلب جایگاه مطمئنی در برنامه‌های درسی سراسر دنیا داشته و دارد. به طور طبیعی، یکی از ابتدائی‌ترین و اساسی‌ترین سؤال‌های دانش‌آموزان در رابطه با ریاضی و فلسفه وجودی آن، این سؤال است که چرا باید ریاضی را یاد بگیرند؟ زندگی تحصیلی و فردی آنها بدون «ریاضی» چگونه خواهد بود؟ «ریاضی» چه امکاناتی را برای آنها به وجود می‌آورد؟ و دلیل بودن تک‌تک مباحث ریاضی در برنامه‌های درسی چیست؟ یکی از وظایف «آموزش ریاضی» به عنوان یک حوزه معرفتی، تلاش در جهت ارائه پاسخ‌های قانع‌کننده برای چنین سؤالاتی است. نمی‌توانیم به دانش‌آموز بگوئیم «باید ریاضی بخوانی زیرا دیگران تشخیص داده‌اند که به درد آینده‌ات می‌خورد!؟» این پاسخ قانع‌کننده نیست. دانش‌آموز ما باید دلایل مستندتری بیابد تا علاقه‌مند به یادگیری این موضوع درسی شود. این «چرا»ها، با وسعت بیشتری به سایر موضوع‌های درسی که ماهیت اجتماعی و فرهنگی قوی‌تری دارند، تسری پیدا می‌کند. اگر آموزش و پرورش، این «پاسخگوئی» را جدی نگیرد، دانش‌آموزان ناامید از یافتن پاسخ، که به دلیل ذکاوت خود، مصلحت‌اندیش نیز هستند؛ با خود به سازش می‌رسند و برای عبور از سد‌های تحصیلی، ممکن است که به جای تلاش در جهت فهمیدن عمیق مطالب و با استفاده از حافظه خود، آن سد‌ها را در نوردند و با نمره‌های عالی، دنیای مدرسه را هم پشت سر بگذارند. اینجاست که خط مترادف شدن «علم» با «مدرک» دیده می‌شود؛ زیرا «عالم بی‌عمل» به راستی مانند «درخت بی‌ثمر است»! «مدرک» شاید شرط لازم برای عبور از بعضی صافی‌ها باشد، اما شرط کافی نیست و آموزش و پرورش، علاوه بر تأمین «مدرک» و تسهیل ورود دانش‌آموزان به دوره‌های عالی، وظیفه ایجاد توانائی «علمی» و «عملی» را نیز در دانش‌آموزان، داراست. چنین رسالتی خطیر و نیازمند تلاش همگانی است.

زیرنویس

۱ - «قلم العلماء افضل من دماء الشهداء»

# دوباره نگرى به برنامه جبر دبیرستانی

سهیلا غلام آزاد

دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی

## چکیده

یکی از مباحث ریاضی که همواره جایگاه ثابتی در آموزش ریاضی مدرسه ای داشته، جبر است. تجربه نشان می دهد افراد وقتی راجع به جبر فکر می کنند، حل معادلات، تجزیه چند جمله ایها، رسم تابعها و کارهای دیگری را که با  $x$  و  $y$  در کلاس درس انجام می داده اند، به یاد می آورند. برخی دیگر، که شاید از جمله کسانی بوده اند که در درس ریاضی نمرات بالایی می گرفتند، جبر را به عنوان نقطه ای می دیدند که در آن اتصال ریاضی با دنیای واقعی قطع می شود و از این رو تنها با حفظ کردن قواعد و رویه ها سعی در کار کردن با نمادهایی را داشتند که ارتباطشان را با اعداد از دست داده بودند. تحقیق نشان می دهد اغلب دانش آموزان، کار کردن با دستگاه نمادها را یاد می گیرند بدون آنکه درک صحیحی از آن داشته باشند، مانند کودکی که حرف زدن را یاد می گیرد.

امروزه با توسعه برنامه های آموزشی و پیشرفت فن آوری لازم است نگرشی دوباره به برنامه جبر دبیرستانی داشته باشیم و به جای انجام عملیات دستی طولانی و پر زحمت تمرکز آموزش را بر تفکر جبری قرار دهیم. در این مقاله با مروری بر تاریخچه جبر مدرسه ای به بررسی چگونگی توسعه تفکر

جبری با تأکید بر فرآیندهای یاددهی، یادگیری و مجردسازی پرداخته می شود.

## تاریخچه تحقیقات

تحقیقات رسمی در مورد یادگیری جبر از اوایل قرن بیستم شروع شد، حدوداً زمانی که روانشناسان به دنبال توسعه روشهایی برای اندازه گیری هوش، استعداد و موفقیت (پیشرفت تحصیلی) بودند، در آن زمان ریاضیات یک وسیله عمومی برای مطالعه ساختارهایی مانند یادگیری و حافظه بود زیرا جوابهایی که از این طریق به دست می آمد به راحتی قابل رتبه بندی بود؛ و اغلب جبر برای مطالعه یادگیری پیشرفته مورد استفاده قرار می گرفت، زیرا هنوز عده کمی قادر به درک موضوع بودند!

از ۱۹۰۰ تا ۱۹۳۰ تحقیق روی یادگیری جبر به طور مقدماتی به مشکلات حل انواع مختلف معادلات خطی مربوط می شد. در ۱۹۲۳ تورندایک کتاب روانشناسی جبر را منتشر کرد، و در آن نظریه پیوند خودش را در مورد یادگیری جبر به کار برد. هدف تورندایک این بود که هر چیزی را که در آن زمان مربوط به پیشرفت یاددهی جبر بود، نشان دهد. با این وجود بیشتر توصیه های او روی مقدار تمرینی که

دانش آموزان برای کسب مهارت‌های خاص نیاز دارند و چگونگی توزیع آن تمرین‌ها، متمرکز بود.

از ۱۹۳۰ تا ۱۹۴۵ تحقیقات آموزشی به دلیل جنگ جهانی دوم متوقف شد. بعد از جنگ، تحقیق روی جبر به صورت موج جدیدی از طرف روانشناسان رفتاری که برخی از روش‌های اولیه تحقیق مهارت فراگیری را بهبود دادند، از سر گرفته شد.

از دهه ۱۹۷۰ به بعد تأکید آموزشگران ریاضی به صورت قابل ملاحظه‌ای تغییر کرد. برای مثال در دهه ۱۹۶۰ تأکید زیادی روی آنچه که تورندایک به آن، حل (تحلیل) مسئله می‌گفت نبود، بلکه تأکید روی اجزاء ساختمان جبر قرار گرفت. در نتیجه آن برای مثال در برنامه‌های فرانسه، مطالعه موقعیت‌های سستی از بین رفتند و به جای آن تدریس جبری که در آن جبر به عنوان ادامه و تعمیم حساب ظاهر می‌شد، جایگزین شد. ولی برای اکثریت دانش آموزان، ریاضیات جدید نسبتاً غیرقابل دسترس بود و به عنوان واکنشی نسبت به این شرایط در دهه ۱۹۷۰ بازگشتی به عقب صورت گرفت که در آن رویکرد تدریس جبر بر اساس چیزی مشابه آنچه که تورندایک پیشنهاد کرده بود، اما در موقعیت‌های واقعی نیز قرار گرفت. تمرکز تحقیقات روی درک مفهومی قرار گرفت و این کار با تلاش‌های روانشناسان شناختی برای تجزیه و تحلیل فرآیند تفکر در حل مسئله و فراگیری مهارت‌های پیشرفته جبری تکمیل شد.

### یادگیری جبر

در ۲۵ سال گذشته دو دیدگاه نظری، زمینه بیشتر تحقیقات یادگیری جبر بوده‌اند. یکی از آن نظریات، نظریه رشد پیازه است که یک چارچوب نظری برای بیشتر تحقیقات درک مفهومی را تولید کرده است. ابزار نوشتاری، مصاحبه نیمه ساختاری و استفاده از تکالیف غیرعادی، یعنی تکالیفی که با تمرینات نوعی کتاب درسی تفاوت دارند را جهت تجزیه و تحلیل مفاهیم تابع، معادله و متغیر برای دانش آموزان به کار می‌بردند. برخی اوقات تکالیف با استفاده از تکنیک‌هایی که بخشی از آنها ملهم از تحقیقات روش‌شناسی روسی هستند اجرا می‌شوند. مثلاً از هر دانش آموز خواسته می‌شود که در حین کار کردن روی مسئله بلند فکر کند یا

اینکه دانش آموزان به صورت دوتایی روی مسئله کار کنند یا در گروه‌های کوچک روی پاسخ‌های تکالیف طرح شده قبلی کار کنند. سپس محققان با بررسی نوارها و دست‌نوشته‌های جلسات قبلی می‌توانند تفکر دانش آموزان را تجزیه و تحلیل کنند. نظریه دوم پردازش داده‌ها است که یک چارچوب نظری برای بیشتر تحقیقات جاری روی مهارت یادگیری جبر تولید می‌کند.

در اینجا محققان روی داده‌هایی که از فاکتورهای مانند زمان پاسخگویی یا اشتباه‌های عمومی دانش آموزان در جریان تشخیص الگو به دست می‌آیند و همچنین روی فرآیندهای ذهنی دانش آموزان در انجام رویه‌های جبری، مطالعه می‌کنند. بعضی اوقات مدل کامپیوتری فرآیندهای تفکر دانش آموزان صورت‌بندی می‌شود یا برنامه‌های کامپیوتری «معلم خصوصی هوشمند» برای درمان برخی خطاهای دانش آموزان توسعه یافته‌اند.

هر دو تحقیق نظریه رشد شناختی و پردازش داده‌ها می‌تواند به ما در فهم چگونگی یادگیری دانش آموزان کمک کند و در مورد موانعی که در طول راه به آنها برخورد می‌کنیم، هشدار دهد.

بر اساس تحقیق، موانع یادگیری را در سه دسته می‌توان در نظر گرفت:

الف) بعضی ذاتی خود موضوع هستند. (مانند: قراردادهای نمادگذاری‌ها- پیچیدگی مفهوم که ناشی از به کار بردن حروف به عنوان متغیر است.)

ب) بعضی ذاتی یادگیرنده هستند که برمی‌گردد به نقطه ضعف افراد (مانند: میل به تعمیم بیش از اندازه- قضاوت بر اساس مشخصه‌های سطحی)

پ) بعضی نتیجه غیرعمدی روش‌های معمول در تدریس هستند (مانند مثال‌های بسیار ساده و بسیار خاص برای بیان یک موضوع عمومی)

ما باید در نظر داشته باشیم که تشبیه شناختی الزاماً برای دانش آموزان بد نیست. در واقع مهمترین محرک یادگیری است. مسئولیت ما به عنوان معلم آگاهی داشتن از ریشه‌های ممکن تشبیه و آگاه ساختن دانش آموزان از تفاوت‌ها و هم‌منطور تشابهات بین پدیده‌های متنوعی است که مطالعه می‌کنند.

## محتوای جبر

بحث در محتوا را تقسیم می‌کنیم به زبان، مفاهیم، هندسه و قواعد جبر

## زبان جبر

جبر زبانی برای توصیف اعمال روی کمیت‌ها و روابط بین آنها است، و مانند هر زبان، ممکن است در قالب آن زبان یا در ترجمه از یک زبان به زبان دیگر مشکلاتی ایجاد شود. در زبان جبر، بیشتر مشکلات زبانی مربوط به متغیرها و عبارات هستند و بیشتر مشکلات ترجمه‌ای هنگام ترجمه مسائل کلامی به معادلات ایجاد می‌شوند.

## توزیع پذیری

$$a(b + c) = ab + ac$$

مؤثر بوده‌ایم؟ اگر ما گاه مقادیر یکسان برای متغیرهای متفاوت استفاده کنیم، بازتاب آن در دانش آموزان، آموزنده خواهد بود.

## متغیرها

تحقیق نشان می‌دهد که دانش آموزان می‌توانند با متغیرها کار کنند بدون آنکه کاملاً قدرت و انعطاف پذیری نمادهای حرفی را درک کنند.

باید توجه داشت که متغیرها با اعداد تفاوت دارند. برای مثال متغیرها می‌توانند به صورت همزمان نشان دهنده اعداد زیادی باشند، آنها ارزش مکانی ندارند، به صورت اختیاری انتخاب می‌شوند و می‌توانند تغییر کنند بدون آنکه اثری روی مقداری که نشان می‌دهند داشته باشند.

تغییر  $x$  به  $y$  در معادله  $2x + 3 = 15$  اثری ندارد.

## عبارت‌ها

یک عبارت جبری بیان یا توصیف عمل‌هایی است که روی متغیرها انجام می‌شود. مانند:  $3a$ ،  $x + 1$ ،  $x - y$ . چون ما از دو دستگاه نماد متفاوت (حروف و اعداد) با هم در جبر استفاده می‌کنیم و چون این دستگاه‌ها از قوانین متفاوتی پیروی می‌کنند لذا سعی می‌کنیم در علامتگذاری‌ها صرفه‌جویی کنیم که البته اغلب به قیمت سردرگمی دانش آموزان تمام می‌شود. برای مثال بسیاری از دانش آموزان تصور می‌کنند که  $-x$  یک عدد منفی است (مثل اینکه متغیر یک مقدار عددی باشد). در این حالت خاص ما باید به دانش آموزان در خصوص سه مورد استفاده علامت «-» آگاهی بدهیم؛ (عمل تفریق «منها»، علامت عدد صحیح «منفی»، وارون جمعی «قرینه») و به « $-x$ » به عنوان «قرینه  $x$ » به جای «منفی  $x$ » اشاره شود.

معمولی‌ترین نماد میان‌بر در جبر حذف علامت عمل ضرب است. چون متغیرها ارزش مکانی ندارند می‌توانیم ضرب را با کنار هم قرار دادن اعداد و حروف یا پرانتزها نشان دهیم مانند:

$$3\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \times \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad 3a = 3 \times a$$

اگرچه دانش آموزان در حساب، عادت کرده‌اند که به صورت پیاپی آوردن اعداد را به عنوان جمع در نظر

متغیرها را می‌توان به عنوان:

- اعداد یا اشیاء دیگر،
- مجهول‌های گسسته در معادلات،
- مجهول‌های پیوسته در نامعادلات،
- مبهمات در چندجمله‌ای‌ها،
- اعداد عمومی در اتحادها،
- متغیرهای مستقل و وابسته در تابعها و پارامترها در فرمول‌ها

به کار بُرد، و از این رو مفهوم متغیر، یک مفهوم چندوجهی است.

$$ax + bx + ay + by = (a + b)x + (a + b)y \\ = (a + b)(x + y)$$

$$۳\frac{۱}{۳} = ۳ + \frac{۱}{۳} \quad \text{یا} \quad ۳۲ = ۳۰ + ۲$$

اکثر دانش آموزان فقط یک حرف را به عنوان متغیر در نظر می گیرند و این ممکن است تا حدودی نتیجه برنامه درسی جبری باشد که فقط یک حرف را به عنوان مجهول به کار می برد. شاید گاهی استفاده از مجهول هایی مثل  $2n$  یا  $x + 5$  به درک دانش آموزان از تقسیم یک عبارت به واحدهای مجزا کمک کند.

لذا مدتی طول می کشد تا دانش آموزان این قراردادها را درک کنند خصوصاً که در جبر این دو قرارداد به صورت همزمان ظاهر می شوند.

در حساب اگر در  $3a$  به جای  $a$ ، ۲ بگذارید چه به دست می آید؟

فرض کنید  $5(3z - 1) = 10$ ، آنگاه  $\frac{3z - 1}{2} = ?$  چه تعداد از دانش آموزان می توانند بلافاصله به این سؤال جواب دهند؟

در جبر اگر ۲ بگذارید چه به دست می آید؟

### مسائل کلامی

در حل مسایل کلامی باید کلمات کلیدی را پیدا کرده و بر اساس آنها معادله ها یا دستگاه معادلات طراحی شود. یک رهیاب مفید حل مسأله در مسایل کلامی، ترجمه اینگونه مسایل به معادلات است.

مسایل کلامی باید در طول بخش آورده شود و چنان نباشد که در پایان بخش به صورت مجزا مطرح شود.

### مفاهیم جبر

دو تا از مفاهیم جبری که بیشتر مورد بررسی قرار می گیرند، معادلات و توابع هستند. از نظر مفهومی یک جهش از معادلاتی که در آنها متغیر مجرد نوعاً نمایش دهنده یک یا دو مقدار مجهول است، به توابع که در آن دو یا چند متغیری که ظاهر می شوند، بینهایت مقدار نسبت به هم می گیرند وجود دارد. البته نامعادلات هم هستند که از نظر مفهومی بین این دو (یعنی معادله و تابع) قرار می گیرند و در آنها متغیر مجرد نشان دهنده زیرمجموعه های پیوسته ای از اعداد می تواند باشد.

یکی از مفاهیمی که باید از حساب به جبر انتقال یابد ولی به راحتی عملی نمی شود، مفهوم وارون اعمال است. در کلاسهای ابتدایی تأکید زیادی روی رابطه های عکس جمع و تفریق، همچنین ضرب و تقسیم است. در صورتی که این روابط در جبر گم می شوند. برای مثال دانش آموزان می توانند حاصلضرب  $(5x - 6)(3x + 2)$  را به سادگی به دست آورده و بگویند  $15x^2 - 8x - 12$ . اما اگر از آنها بلافاصله بخواهیم  $15x^2 - 8x - 12$  را تجزیه کنند، شاید تعجب آور باشد که فقط تعداد کمی از دانش آموزان تشخیص می دهند که فاکتورها همان عبارتهایی هستند که همین الآن ضرب کرده بودند. پیچیدگی اعمال جبری می تواند ارتباطهای مهم را دشوار کنند و از این رو کافی نیست که فقط به دانش آموزان یادآوری کنیم که ضرب و تجزیه اعمال عکس هم هستند، بلکه لازم است که این استنباط را با مثالهای خاصی نشان دهیم.

مثلاً دانش آموزانی که با ارزش مکانی آشنا می شوند با دسته بندی، هر ده تا را به عنوان یک واحد ده تایی در نظر می گیرند، انتظار داریم دانش آموزان جبر هم که با عبارتهای چند جمله ای کار می کنند، بتوانند این عبارتها را به واحدهای مجزا تقسیم کرده و به هریک از آنها به عنوان متغیر مجرد نگاه کنند. مثل تجزیه به دسته بندی

## معادلات

شاید بهتر باشد مؤلفین کتب درسی بین دو کاربرد علامت تساوی در جبر با استفاده پیوسته از " $\equiv$ " برای نشان دادن عبارتهای هم‌ارز (مثلاً با توجه به ویژگی‌های اصل موضوعی، عبارتهای ساده شده، اتحادهای ضرب کردنی یا تجزیه و معادلات هم‌ارز و غیره) تفاوت بگذارند و " $\equiv$ " برای نشان دادن تساوی‌های محدود شده به یک معادله یا تابع به کار رود.

برای مثال، دانش‌آموزانی که از آنها خواسته شده معادله‌ای را با استفاده از نوشتن معادلات هم‌ارز حل کنند می‌توانند بنویسند

$$7x - 3 = 5x + 5 \equiv 2x - 3 = 5 \equiv 2x = 8 \equiv x = 4$$

شاید تعداد کمی از دانش‌آموزان کاملاً درک کنند که حل یک معادله یافتن مقدار یا مقادیری است که به ازای آنها سمت چپ و سمت راست با هم برابر می‌شوند. رویکردهای عادی مانند استفاده از اتحادهای حسابی برای توسعه مفهوم معادله با استفاده از روشهای ماشین حساب برای تخمین جوابها ممکن است به دانش‌آموزان کمک کند که بیشتر روی جنبه رابطه‌ای یک معادله و کمتر روی الگوریتم حل آن متمرکز شوند. ترغیب دانش‌آموزان به استدلال کردن در حین حل معادله به جای اینکه همیشه از اعمال عکس استفاده کنند نیز می‌تواند مفید باشد.

### حل یک معادله با استدلال

$$\text{معادله } 9 = \frac{15}{7-x} - 14 \text{ را حل کنید.}$$

استدلال:

۱۴ منهای چه عددی می‌شود ۹؟

۱۵ تقسیم بر چه عددی می‌شود ۳؟

۷ منهای چه عددی می‌شود ۴؟

پس جواب  $x = 4$  است.

دانش‌آموزان عموماً خیلی قبل از آنکه وارد آموزش رسمی جبر شوند شروع به حل معادلات ساده می‌کنند. اما تجربه دانش‌آموزان از علامت تساوی در حساب که همیشه به دنبال جواب بودند ممکن است در درک او از معادله و عبارتها اثر بگذارد. آنها عموماً علامت تساوی را به عنوان علامت «جواب را بنویس» در نظر می‌گیرند به جای آنکه مفهوم هم‌ارزی دو عبارت را برای آنها تداعی کند. در جبر علامت تساوی ممکن است معنای ساده کردن یک عبارت را برساند. مثلاً:

$$2x + 5 + 3x - 7 = 5x - 2$$

اما در حل معادلات علامت تساوی دقیقاً علامت یک رابطه است و از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که روی کل رابطه کار کنند تا به یک دنباله از رابطه‌های معادل دست یابند. سردرگمی دانش‌آموزان بین ساده کردن عبارتها و حل معادله‌ها وقتی آشکار می‌شود که دانش‌آموزان به سمت راست یک معادله به عنوان جواب اشاره می‌کنند یا وقتی عبارتی را ساده می‌کنند، به آن به صورت یک معادله نگاه می‌کنند و شروع به حل آن می‌کنند و کنجکاو خواهند بود که ببینند وقتی همه جملات شامل  $x$  حذف شدند، بر سر  $x$  چه می‌آید:

آیا هیچوقت دانش‌آموزان شما اینگونه عمل کرده‌اند؟

ساده کنید:

$$2x + 5 + 3y - 7$$

حل:

$$2x + 5 + 3y - 7 = 0$$

$$5x - 2 = 0$$

$$5x = 2$$

$$x = \frac{2}{5}$$

مربوطه آنها را توصیف کنند.

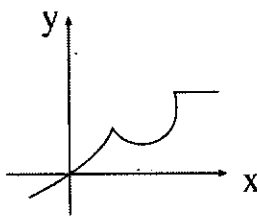
| x | y  |
|---|----|
| ۱ | ۸  |
| ۳ |    |
| ۴ | ۱۱ |
| ۷ | ۱۴ |
| n |    |

وقتی  $x = 3$ ،  $y$  چقدر است؟

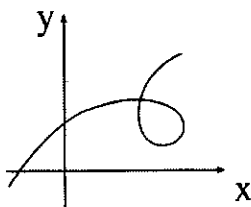
وقتی  $x = n$ ،  $y$  چقدر است؟

از طرف دیگر، نماد رسمی  $f(x)$  اطلاعات زیادی را به صورت خیلی مؤثری خلاصه کرده، اما حتی برای دانش آموزان پیشرفته نیز مشکلاتی ایجاد می کند. تعریف نظریه مجموعه ای تابع که در بسیاری از کتابهای درسی جبر ظاهر شده، غنای مفهوم تابع را از یک راه معنی دار منتقل نمی کند. رویهم رفته شهود دانش آموزان در مورد اینکه چه چیزی تابع را تشکیل می دهند بیشتر به اولین تابعی که دانش آموز با آن برخورد می کند بستگی دارد تا تعریف رسمی تابع. یعنی دانش آموزان معمولاً باور دارند که تابع ها باید خطی بوده یا پیوسته، هموار و قابل تعریف به وسیله یک فرمول باشند. برای کمک به دانش آموزان در درک مفهومی تابع باید مثالهای ساده ای از انواع مختلف تابع های دیگر را به آنها معرفی کنیم.

آیا تابعی وجود دارد که نمودار آن به صورت زیر باشد؟



(الف)



(ب)

این مسأله را در کلاس خود مطرح کنید.

عبارتی بیابید که مقدار آن وقتی  $x = 3$  برابر ۱۷ شود.

جواب ممکن:  $5x + 2$

عبارت دیگری بیابید که وقتی  $x = 3$  مقدار آن ۱۷ شود.

جواب ممکن:  $7x - 4$

حال جواب معادله  $5x + 2 = 7x - 4$  چیست؟

برای حل چه می توانید بگویید؟

چک کردن جواب عددی، در معادله اصلی، خصوصاً برای مسایل کلامی و در گزاره اصلی، باید یک جزء لاینفک از فرآیند جل برای هر نوع معادله ای باشد، نه اینکه فقط برای معادلات گویا یا رادیکالی که ممکن است ریشه های خارجی ظاهر شوند. ممکن است اهمیت چک کردن جوابهای یک معادله مستقیماً برای دانش آموزان آشکار نباشد. باید آنها را متوجه ساخت که توصیه چک کردن جوابها نه تنها برای تحقیق درستی آنها است بلکه برای تحقیق معقول و مناسب بودن جواب و تقویت ارتباط بین معادله اصلی یا موقعیت مساله و جواب نهایی است.

تابع ها

برخی تحقیقات اولیه روی مفاهیم مربوط به تابع ها اشاره دارد که دانش آموزان مفهوم رسمی تابع را در چندین مرحله می سازند که این مراحل با نمادگذاری ضابطه تابع شروع می شود و از طریق لغوی و نمادی، نمایش گرافیکی، اعمال روی تابع ها و ویژگی های درونی تابع هایی خاص توسعه پیدا می کند. بیشتر تحقیقات روی ایده های شهودی تابع ها و انتقال از شهود به نمادهای رسمی متمرکزند.

دانش آموزان راهنمایی به راحتی می توانند ایده های پایه ای تابع را به عنوان قاعده متناظر یا در موقعیت های واقعی یا در جدولهای دوستونی اعداد درک کنند. برای تابع های ساده آنها می توانند الگوها را تشخیص بدهند، مؤلفه های افتاده از دامنه یا برد را پیدا کنند و به صورت شفاهی قواعد

## مدل های هندسی برای تدریس جبر

اگرچه در سالهای اخیر استدلال های نظری زیادی از این باور پشتیبانی کرده است که رویکرد معنی دار به یادگیری جبری با احتمال بیشتری به یک اجرای جبری خوب منجر می شود تا رویکرد ترکیبی محض، ولی این به آن معنا نیست که ساختمان قانونمند جبری بلافاصله می تواند از این رویکرد ناشی شود.

با این وجود مدل های واقعی برای آموزش حل معادلات می تواند بسیار مفید باشد. یکی از این مدل ها، مدل هندسی است.

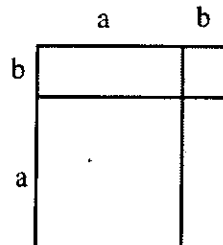
به طور سنتی جبر و هندسه به عنوان موضوعهای مجزا در برنامه درسی دبیرستان در نظر گرفته شده اند که با توجه به توصیه استانداردها سعی شده اتصالی بین آنها ایجاد شود. هندسه ای که در کلاسهای جبر مطرح می شود بیشتر به عنوان نمودار تابع ها است و امروز وجود کامپیوترها و ماشین حساب های گرافیکی این امکان را در اختیار یادگیرنده می گذارد که رویکرد شهودی بیشتری نسبت به جبر داشته باشند.

### مدل مساحت

یونانیان با استفاده از هندسه ایده های جبری را توسعه داده اند. آنان با استفاده از ایده مساحت اتحادهای چندجمله ای را ثابت کرده اند.

### اثبات هندسی اتحاد جبری

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



همان گونه که در کتاب دوم اصول اقلیدس یافت شده است.

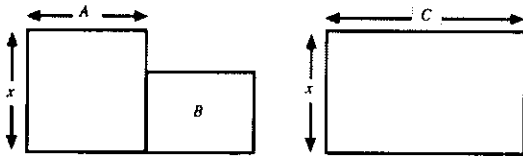
طبق نظریه یادگیری عمومی، نمایش تصویری به همراه مثال های عددی می تواند به درک هم ارزی اتحادهای جبری در شکل نمادین آنها به دانش آموزان کمک کند.

$$25^2 = (20+5)^2 = 20^2 + 2(20)(5) + 5^2 \\ = 400 + 200 + 25 = 625$$

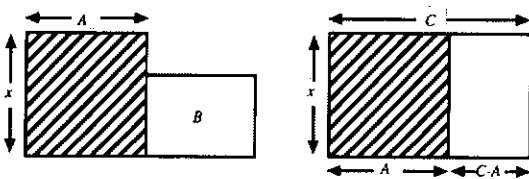
البته تعیین راههای مؤثر ترکیب فعالیت ها با مدل مساحت در کلاس جبر، نیازمند تحقیق است.

برای حل معادله  $Ax + B = Cx$  به طوری که  $A$ ،  $B$  و  $C$  اعداد مثبت و  $C > A$  می توان مدل مساحت را به صورت زیر به کار برد:

مرحله اول: ترجمه معادله به مدل



مرحله دوم: مقایسه مساحتها



مرحله سوم: تولید معادله جدید

$$(C-A)x = B$$

مرحله چهارم: حل معادله جدید  
مرحله پنجم: مدلل سازی حل

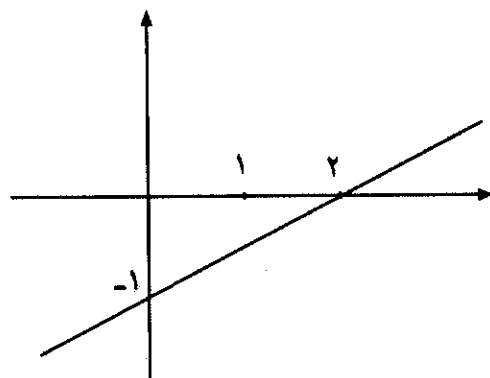
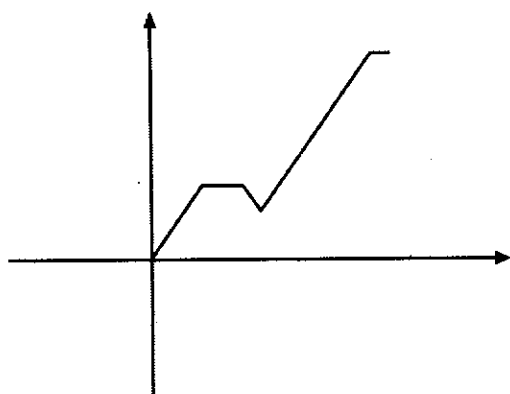
## رسم نمودارها

تعدادی از محققان از دانش آموزان خواستند که برای نمودارهای داده شده داستانی بسازند که عملش با نمودار داده شده تصویر شود. حل این نوع مسایل باز پاسخ یا چند جوابی که توسط استانداردها توصیه شده است می تواند مهارت تفسیر نمودار دانش آموزان را ارتقا بخشد.

مفاهیم نقطه و خط و همچنین نقطه یابی و نامگذاری نقاط روی صفحه مختصات جزء برنامه آموزش عمومی دانش آموزان است، با این وجود شاید به سختی ۵۰٪ دانش آموزان که جبر خوانده اند می توانند، کاری بیش از پیدا کردن نقاط روی صفحه مختصات انجام دهند. حتی دانش آموزانی که می توانند تابع هایی مثل  $y - x = -2$  را رسم کنند ممکن نیست بتوانند با نگاه کردن به نمودار داده شده، جواب معادله نظیر را تشخیص دهند.

### نموداری با چند تعبیر

از دانش آموزان بخواهید داستانی بسازند که با نمودار زیر مطابقت داشته باشد:



برخی از بدفهمی ها خیلی به هندسه بستگی ندارد و ناشی از قاطی کردن تصویر نمودار با پدیده واقعی می باشد. به عنوان مثال برای دانش آموزان تصور اینکه خودروای که سرعتش در نمودار زیر نشان داده شده بتواند در جایی که نمودار سرعت پایین می آید سربالایی برود و برعکس، سخت است.

### قواعد جبر

اغلب تحقیقات انجام شده جبر روی خطاها متمرکز شده اند و سعی شده که بر اساس آنها فرایندهای تفکر توضیح داده شود. خطاهای اشاره شده در ادبیات تحقیق عموماً همان هایی هستند که هر معلم جبری با آن آشنا است. بسیاری از خطاهایی که روی عبارتهای جبری انجام

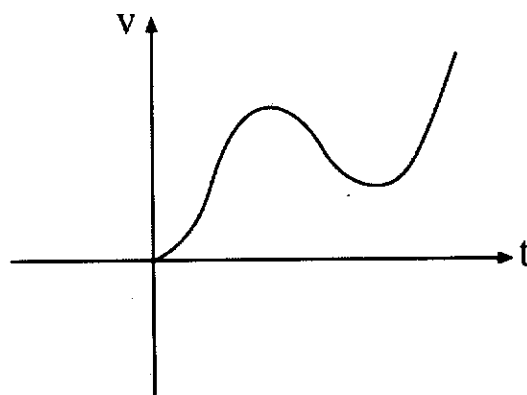
می شود، به نظر می رسد که شامل تعاملی بین

الف) تعمیم بیش از اندازه از طرف دانش آموز

ب) طبیعت مجرد ویژگی های جبری

مخصوصاً قوانین انجمنی و توزیع پذیری است.

به عنوان مثال یکی از عام ترین اشتباه ها، ساده کردن  $4 + 3n$  به صورت  $7n$  است. یک توضیح برای این نوع اشتباه این است که در حساب دانش آموزان آموخته اند که روی اعداد آنقدر عمل کنند تا به یک عدد به عنوان جواب



نمودار سرعت یک خودرو نسبت به زمان

یکی دیگر از مواردی که اهمیت آن از طریق تحقیق برجسته شده، بیان کاربرد جبر از دو دیدگاه است. اول جبر یک راهی برای مدلسازی پدیده‌های دنیای واقعی به ما می‌دهد اما از دیدگاه دیگر مسایل کاربردی به نمادهای مجرد معنا می‌دهد. البته این نیمی از کار است و در نیمه دیگر باید دانش آموزان را با مقدمات ساختمان‌های مجرد آشنا کنیم تا در جبر پیشرفته بتوانند آنها را به کار برند، از این رو باید تعادلی بین این دو برقرار کنیم.

از میان تمام درسهایی که ما از بررسی عملکرد دانش آموزان می‌آموزیم شاید مهمترینش این باشد که باید توجه داشته باشیم که تنها به دلیل اینکه دانش آموزان به خوبی روی جبر کار می‌کنند قانع نشویم که آن را کاملاً فهمیده‌اند. باید در توضیح مسائل «واضح» دقت کنیم و با پرسش‌هایی نشان دهیم که خیلی واضح نیستند؛ و از همه مهمتر اینکه لازم است بشنویم که دانش آموزان چه می‌گویند و چه می‌نویسند.

برسند از این رو در جبر برای آنها پذیرش یک عبارت با علامت یک عمل در جواب نهایی، راحت نیست و عموماً هر عملی که بتوانند انجام می‌دهند تا عبارت را به یک جمله تقلیل دهند. البته در حالت  $4 + 3n \rightarrow 7n$ ، اگر اولین عمل به جای جمع، ضرب بود، ترکیب اعداد می‌توانست با استفاده از قانون انجمنی درست باشد.

$$4(3n) = 4.(3.n) = (4.3).n = 12.n = 12n$$

اشتباه عمومی دیگر ساده کردن یک عبارت مثل  $\frac{x+2}{2}$  به  $x$ ، با حذف ۲ از صورت و مخرج است. باز هم اگر عمل صورت به جای جمع، ضرب بود تقسیم صورت و مخرج بر ۲ صحیح بود:  $\frac{x.2}{2} = x$

در حالت جمع قانون توزیع پذیری نتیجه می‌دهد.

$$\frac{x+2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x+2) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{x}{2} + 1 \neq 2$$

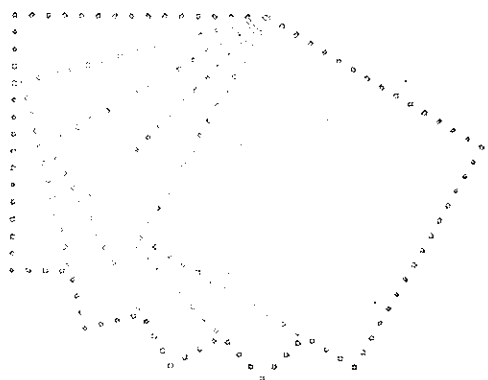
(مگر اینکه  $x = 2$ )

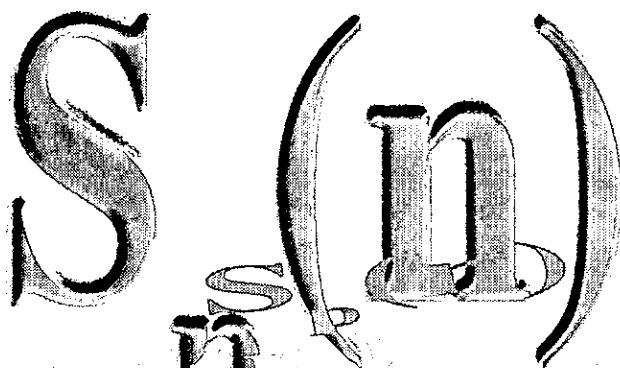
#### مراجع

1. F. Eugenio, S. Rosamund, *Designing Curricula for Teaching and Learning Mathematics-INTERNATIONAL HANDBOOK OF MATHEMATICS EDUCATION*, Editors: Bishop, Clements, Keitel Kilpatrick-laborde, Kluwer Academic Publishers (1996)
2. S. Wagner, S. Parker, *Advancing Algebra, RESEARCH IDEAS FOR THE CLASSROOM, HIGH SCHOOL MATHEMATICS*, Editor: Patricia S. Wilson. National Council of Teachers of Mathematics Research Interpretation Project. 1993.

به عنوان مثال سوم، عبارت  $(x+y)^2$  را اغلب به صورت  $x^2 + y^2$  می‌نویسند که می‌تواند به دلیل دنبال کردن الگوی  $(xy)^2 = x^2 y^2$  باشد.

تحقیق نشان داده که طرح سؤالهای غیرمعمول درک دانش آموزان را عمیق تر می‌کند. یکی از معمول ترین تکنیک ها این است که عکس سؤال های استاندارد را طرح کنیم، مثلاً به دانش آموز یک نمودار بدهیم و بگوییم آن را توصیف کن یا یک معادله بدهیم و بگوییم برای آن یک مسأله کلامی بگو. به دانش آموز یک جواب بدهیم و بگوییم معادله یا دستگاه معادلاتی بساز که جواب آن، این باشد. پرسش های خلاق نه تنها برای معلم یا محقق دیدی نسبت به تفکر دانش آموزان ایجاد می کند، بلکه به دانش آموزان کمک می کند کمتر یک سو به فکر کنند و آن ارتباط های بین سؤال ها و جوابها، مفاهیم و فرآیندهایی که یادگیری را معنی دار می کند را درک نمایند.





# روش ترکیباتی برای حاصل جمع توانهای اعداد طبیعی

جواد لاکلی، عضو گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم

## چکیده

فرض کنید  $S_p(n)$  حاصل جمع قوای  $n$ ام،  $P$  عدد صحیح متوالی ابتدا از یک باشد. می‌خواهیم  $S_p(n)$  را محاسبه کنیم. در اینجا، مجموعه‌ای از بردارها تعریف می‌کنیم که تعداد اعضای آن  $S_p(n)$  باشد. اعضای این مجموعه را به دو طریق به کمک تکنیک ترکیباتی محاسبه می‌کنیم، در نتیجه، فرمولی بر حسب  $n$  به صورت ضرایب دو جمله‌ای برای  $S_p(n)$  به دست می‌آوریم.

## مقدمه

متناظر هر دو عدد طبیعی  $P$  و  $n$ ، این واقعیت که

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p = \sum_{k=1}^n k^p,$$

برای شروع‌کننده این مبحث و اینکه امکان جرقه‌ای در تکنیک محاسبات آن ایجاد شود، می‌بایستی  $S_p(n)$  چند

را بتوان به عنوان چند جمله‌ای بر حسب  $n$  نوشت موضوع پنهانی نیست. این موضوع در بسیاری از مقالات و کتابهای ریاضی، از جمله در [۳] به صورت کامل بحث شده است.



مجموعه‌های متناهی باشند و  $A_1$  دارای  $n_1$  عضو،  $A_2$  دارای  $n_2$  عضو، ...، بالاخره،  $A_k$  دارای  $n_k$  عضو باشد آنگاه مجموعه  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$  دارای  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  عضو است.

(پ) جایگشت‌های  $n$  حرف: جمع دسته‌های متمایز  $n$  حرف، خواه از لحاظ نوع حرف یا از لحاظ نوع ترتیب آنها، که به دنبال یکدیگر قرار می‌گیرند جایگشت‌های  $n$  حرف نامیده می‌شوند و تعداد آن‌ها را با نماد  $P(n)$  نمایش می‌دهند. در جایگشت‌های  $n$  حرف، ترتیب ملحوظ است ولی تکرار جایز نیست. به سادگی ثابت می‌شود که  $p(n) = n!$ . به عنوان مثال، جایگشت‌های سه حرفی  $\{a, b, c\}$  عبارتند از:

abc, bca, cab, acb, bac, cba

(ت) ترکیبات  $n$  حرف  $k$  به  $k$ : یعنی، جمع دسته‌هایی متمایز از لحاظ نوع حروف که از قرار دادن  $k$  حرف از این حروف به دنبال یکدیگر حاصل می‌شوند. در ترکیبات  $n$  حرف  $k$  به  $k$ ، نه ترتیب ملحوظ است و نه تکرار جایز است. به سادگی ثابت می‌شود عدد زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی از مجموعه  $n$  عضوی، که  $k \leq n$ ، برابر  $\binom{n}{k}$  است. (خواستاران اطلاعات بیشتر می‌توانند به [۱] صفحه ۷۳۸ مراجعه کنند.)

**ضرایب دو جمله‌ای:** انتظار می‌رود که خوانندگان با تعریف و خواص مقدماتی ضرایب دو جمله‌ای  $\binom{n}{m}$  آشنا باشند. در اینجا ما سعی می‌کنیم ضرایب دو جمله‌ای را به صورت کلی‌تری تعریف کنیم.

**تعریف:** فرض کنید که  $a_1, \dots, a_m, \dots, a_{m+1}, \dots$  دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. حاصلضرب  $\prod_{i=m}^n a_i$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\prod_{i=m}^n a_i = \begin{cases} a_m & n = m \\ \left( \prod_{i=m}^{n-1} a_i \right) a_n & n > m \\ 1 & n < m \end{cases}$$

حال فرض کنید که  $m$  عدد صحیح و  $\alpha$  عدد حقیقی (یا

جمله‌ای بر حسب  $n$  و از درجه  $P+1$  باشد. در [۳]، برهان‌هایی که برای محاسبه  $S_p(n)$  معتبر است یک عبارت جبری بر حسب  $n$  از چند جمله‌ایها است که اغلب منجر به استفاده از استقراء ریاضی یا دستورهای بازگشتی می‌شود. اگرچه این برهان‌ها به نوبه خود با ارزش است، و بعضی مواقع، تحت انگیزه خاص آموزشی با استقراء ریاضی یا تکنیکهای بازگشتی پوشیده می‌شود، ولی خواننده ممکن است بخاطر احساس نامعلومی که از دسترسی به جوهر موضوع پیدا نمی‌کند، تکنیک آن را رها کند. در این یادداشت، آن قسمت از مباحث ترکیباتی که می‌تواند در مسیر انگیزه ما، برای محاسبه  $S_p(n)$ ، خدمت کند اختیار می‌کنیم و ما به دنبال این هستیم که چگونه بتوانیم  $S_p(n)$  را به عنوان چند جمله‌ای بر حسب  $n$  از درجه  $P+1$  بیان کنیم؟ بررسی ما چنین اجازه‌ای را به ما می‌دهد که بعضی از روشهای عمومی را جهت تعیین ضرایب این چند جمله‌ای بسازیم، و همچنین، تکنیکی برای محاسبه مستقیم این چند جمله‌ای فراهم کنیم. نشان می‌دهیم که محاسبه این چند جمله‌ای نیاز به حل یک دستگاه مثلثی پائین از معادلات خطی  $(p-4) \times (p-4)$  دارد.

## تعریف

(الف) اصل ضرب: فرض کنید  $W_1, W_2, \dots, W_n$  کارهایی باشند. اگر  $W_1$  به  $n_1$  طریق متمایز انجامپذیر باشد و پس از انجام آن  $W_2$  به  $n_2$  طریق متمایز مستقل از اولی انجامپذیر باشد، و بالاخره  $W_k$  به  $n_k$  طریق متمایز مستقل از نتایج قبلی انجامپذیر باشد آنگاه کار  $W_1, W_2, \dots, W_k, \dots, W_n$  به  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  طریق متمایز انجامپذیر است.

(ب) صورت دیگر اصل ضرب: اگر  $A_1, \dots, A_k$

مختلط) باشد. ضریب دو جمله‌ای  $\alpha$  بر  $m$  که با علامت  $\binom{\alpha}{m}$  نمایش داده می‌شود چنین تعریف می‌شود:

$$\binom{\alpha}{m} = \begin{cases} \frac{1}{m!} \prod_{i=0}^{m-1} (\alpha - i) & m \geq 0 \\ 0 & m < 0 \end{cases}$$

به سادگی ثابت می‌شود که

$$\binom{0}{0} = 1, \binom{\alpha}{1} = \alpha, \binom{\alpha}{0} = 1 \quad (1)$$

$$\binom{0}{m} = 0, \quad m \neq 0 \quad \text{اگر}$$

(2) اگر  $m \neq 0$  آنگاه

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha}{m} \binom{\alpha-1}{m-1} = \frac{\alpha-m+1}{m} \binom{\alpha}{m-1}$$

(3) اگر  $0 \leq n < m$  یا  $m < 0$  آنگاه  $\binom{n}{m} = 0$  و اگر

$0 \leq m \leq n$  و  $n$  عددی طبیعی باشد آن گاه

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

(4) همواره داریم

$$\binom{\alpha}{m} = \binom{\alpha-1}{m} + \binom{\alpha-1}{m-1},$$

$$\binom{-\alpha}{m} = (-1)^m \binom{\alpha+m-1}{m}.$$

علاقه‌مندان به برهان احکام فوق و دریافت اطلاعات بیشتر می‌توانند به [۲] صفحه ۲۰۵ مراجعه کنند.

اینک مقدمات لازم جهت بیان مسئله اصلی مهیا شده است.

#### مسئله

فرض کنید که  $n$  و  $p$  اعداد طبیعی دلخواهی باشند و

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p.$$

مطلوب است محاسبه  $S_p(n)$  به صورت دستور صریحی از  $n$  و  $p$ .

#### حل (روش ترکیباتی)

ابتدا، به دنبال مجموعه‌ای از اشیاء با عدد اصلی  $S_p(n)$  هستیم.

برای اینکه بهتر بتوانیم تکنیک ارائه شده، در حالت کلی را، دنبال کنیم یک مثال عددی می‌زنیم. فرض کنید  $n=6$ ،  $p=4$ . به عبارت دیگر، می‌خواهیم حاصلجمع زیر را محاسبه کنیم:

$$S_4(6) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4$$

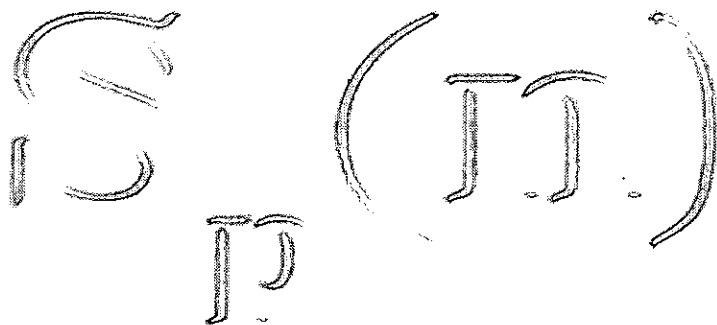
مجموعه‌ای از بردارها یا مؤلفه اعداد طبیعی، مطابق ذیل، تعریف می‌کنیم:

$$A = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \begin{array}{l} x_i < x_1, \quad 2 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq x_i \leq 7, \quad 1 \leq i \leq 5 \end{array} \right\}$$

در اینجا، به دو روش متمایز تعداد اعضای مجموعه  $A$  را، محاسبه می‌کنیم.

**روش اول:** چون  $2 \leq x_1 \leq 7$ ، پس اگر  $x_1 = 2$  آنگاه تنها بردار عضو  $A$ ، بردار  $(1, 1, 1, 1, 2)$  است. در نتیجه، تعداد این نوع بردارها، بنابر اصل ضرب، برابر است با

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1^4 = 1$$



مؤلفه اول را اشغال کند، سه مؤلفه متمایز دیگر با تکرار یکی از آنها چهار مؤلفه دیگر را پر می کند. پس، تعداد چنین بردارهایی برابر است با

$$\binom{7}{4} \binom{3}{1} \frac{4!}{2} = 1260$$

حال تعداد بردارهایی را محاسبه می کنیم که از پنج مؤلفه تنها سه مؤلفه آنها متمایز باشند. اگر بزرگترین عدد صحیح اولین مؤلفه را اشغال کند، دو مؤلفه متمایز دیگر، با تکرار آنها باید چهار مؤلفه دیگر را پر کنند. بنابراین دو دسته متمایز از بردارها حاصل می شود که در یک دسته یکی از اعداد صحیح سه بار تکرار می شود؛ و در دسته دیگر، دو مؤلفه متمایز هر یک دو بار تکرار می شود. بنابراین، در هر دسته بردارهایی از نوع ذیل داریم

$$(x_1, a, a, a, b), (x_1, a, a, b, b)$$

بنابراین، تعداد بردارها از این نوع برابر است با

$$\binom{7}{3} \left[ \binom{2}{1} \frac{4!}{3!} + \binom{2}{2} \frac{4!}{2!2!} \right] = 490$$

بالاخره، آخرین وضعیت این است که از پنج مؤلفه تنها دو مؤلفه آنها متمایز باشد که اگر بزرگترین آنها اولین مؤلفه را اشغال کند، مؤلفه های دیگر، با چهار بار تکرار، چهار مؤلفه دیگر را پر می کنند. تعداد این بردارها برابر است با  $\binom{7}{2} = 21$ . پس، بطور خلاصه، تعداد کل بردارها در این

روش برابر است با

$$540 + 1260 + 490 + 21 = 2275$$

اینک حالت کلی را که  $n$  و  $P$  دو عدد طبیعی دلخواهی هستند، بررسی می کنیم.

اینک، به ازای  $2 \leq i \leq 5$ ، اگر  $x_i < x_1 = 3$ ، آنگاه  $x_i$  دو مقدار ۱ یا ۲ را اختیار می کند؛ بنابراین اصل ضرب، تعداد این نوع بردارها برابر است با

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$$

به همین ترتیب، اگر  $x_1 = 4, 5, 6$  یا  $x_1 = 7$  آنگاه تعداد این نوع بردارها، بنابر اصل ضرب، به ترتیب، برابر است با  $3^4, 4^4, 5^4, 6^4$  است. پس، تعداد اعضای  $A$  برابر است با

$$S_4(6) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 2275$$

**روش دوم:** در این روش توجه خود را به مؤلفه های

متمایز بردارها متمرکز می کنیم. ابتدا، بردارهایی را در نظر می گیریم که هر پنج مؤلفه آنها دو بدو متمایز باشند. جمیع دسته های متمایز از این نوع بردارهایی را محاسبه می کنیم که از قرار گرفتن ۵ عدد از ۷ عدد مفروض تشکیل می شود.

تعداد دسته های این بردارها برابر  $\binom{7}{5}$  است. که اگر بزرگترین عدد صحیح، در هر دسته، مؤلفه اول را اشغال کند، بقیه مؤلفه ها جایگشتی از چهار عدد دیگر می شوند. بنابراین، تعداد چنین بردارهایی برابر است با

$$\binom{7}{5} 4! = 504$$

اینک به دنبال بردارهایی هستیم که از پنج مؤلفه آنها تنها چهار مؤلفه آنها متمایز باشند. اگر بزرگترین عدد صحیح

مجموعه همه بردارهایی به صورت  $(x_1, x_2, \dots, x_{p+1})$  را، که مؤلفه‌های آن اعداد صحیح مثبت است، طوری اختیار می‌کنیم که

$$1 \leq x_i \leq n, \quad i=1, 2, \dots, p+1$$

$$x_i < x_1, \quad i=2, 3, \dots, p+1$$

تکنیک متداولی در ترکیبات است که تعداد عناصر مجموعه‌ای را به دو روش متمایز محاسبه می‌کند و چون پاسخ یکسان است، نتیجه‌های به دست آمده از دو روش، مساوی می‌شوند.

### روش اول تعیین تعداد بردارها:

به ازای هر مقدار  $x_1$  قابل قبول، مثلاً  $x_1 = j$ ، بنابر اصل ضرب  $(j-1)^p$  بردار موجود است که در شرط فوق صدق می‌کند. چون  $x_1$  می‌تواند هر عدد صحیح بین ۲ و  $n+1$  را اختیار کند، بنابراین، بدیهی است که تعداد کل چنین بردارهایی برابر است با

$$\sum_{j=2}^{n+1} (j-1)^p = \sum_{k=1}^n k^p$$

### روش دوم:

روش دیگری برای محاسبه تعداد این بردارها، متمرکز شدن روی تعداد اعداد صحیح متمایز در میان مؤلفه‌های  $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$  است.

**وضعیت اول:** چه تعداد بردارهایی موجود است که تمام  $p+1$  مؤلفه‌های آنها متمایز است؟ تعداد روشهای انتخابی

موجود برابر  $\binom{n+1}{p+1}$  است که اعداد صحیح متمایز،

مؤلفه‌های بردارها را اشغال می‌کنند. چون، در هر روش، تنها لازم است که بزرگترین این اعداد صحیح اولین مؤلفه را اشغال کند، پس اعداد صحیح باقیمانده می‌تواند به صورت  $p!$  از جایگشتها مؤلفه‌های دیگر بردارها را پر کند. در نتیجه،

تعداد چنین بردارهایی برابر  $p! \binom{n+1}{p+1}$  است.

**وضعیت دوم:** تعداد بردارهایی که تنها  $p$  عدد صحیح متمایز در بین مؤلفه‌های آنها توزیع می‌شود برابر

$$\binom{n+1}{p} \binom{p-1}{1} \frac{p!}{2}$$

است. زیرا در هر دسته  $p$  تایی، بزرگترین آن اولین مؤلفه را اشغال می‌کند و  $p-1$  عدد صحیح موجود در میان  $p$  مؤلفه دیگر توزیع می‌شود و برای اینکه  $p+1$  مؤلفه بردار اشغال شود می‌بایستی یکی از مؤلفه‌ها به صورت دو بار تکراری ظاهر شود. از طرفی  $p-1$  عدد صحیح متمایز هر یک دو بار تکرار می‌شود. پس تعداد دسته بردارهایی که یکی از آنها دو بار تکرار می‌شود برابر است با  $\binom{p-1}{1}$ . بنابراین، گردابه

حاصل از بردارها می‌تواند به  $\frac{p!}{2}$  روش جابجا شود.

**وضعیت سوم:** تعداد بردارهایی را محاسبه می‌کنیم که دارای  $p-1$  عدد صحیح متمایز در بین مؤلفه‌های آنهاست. ما باید بین دو حالتی که ممکن است رخ دهد تمایز قائل شویم؛ [چون بزرگترین عدد صحیح در بین مؤلفه‌ها مؤلفه  $x_1$  است پس  $p-2$  عدد صحیح متمایز باید  $p$  مؤلفه باقیمانده را با تکرار آنها اشغال کند] بنابراین، در وضعیت  $p$  مؤلفه قبلی یا یکی از اعداد صحیح سه بار تکرار می‌شود و یا آنکه دو عدد صحیح متمایز هر یک دو بار تکرار می‌شوند. با حفظ چنین تصویری، می‌توانیم تعداد این نوع بردارها را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\binom{n+1}{p-1} \left[ \binom{p-2}{1} \frac{p!}{3!} + \binom{p-2}{2} \frac{p!}{2!2!} \right]$$

در حالت کلی، تنظیم عبارتهایی از طرز بیان دقیق برای تعداد بردارهایی که دارای  $t$  عدد صحیح متمایز بین مؤلفه‌های



$S_p(n)$  همیشه دارای عاملی به صورت  $n(n+1)$  است. اولین نتیجه ما، که از ترکیب دو نکته فوق حاصل می شود، ضرورتاً، نتیجه مأنوس زیر است.

$$S_1(n) = \frac{1}{2} n(n+1)$$

(۳) همواره، ضریب  $n^p$  در  $S_p(n)$  عدد  $\frac{1}{p}$  است. این موضوع را به سادگی می توان با محاسبه این ضریب در

$$\left( \frac{n+1}{p+1} \right)^{p!} + \left( \frac{n+1}{p} \right) \left( \frac{p-1}{1} \right) \frac{p!}{2}$$

به دست آورد.

اینک، به عنوان مثالی،  $S_p(n)$  را محاسبه می کنیم. برای عددی مانند  $C$ ، باید داشته باشیم

$$S_1(n) = \frac{1}{3} n^2 + \frac{1}{2} n^2 + Cn$$

چون  $S_1(1)=1$ ، معادله را نسبت به  $C$  حل می کنیم، درمی یابیم که

$$S_1(n) = \frac{1}{3} n^2 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$$

#### محاسبه مستقیم حالت کلی

بررسی ما امکان محاسبه مستقیم چند جمله ای زیر را می دهد.

$$S_p(n) = \left( \frac{n+1}{p+1} \right)^{p!} + \left( \frac{n+1}{p} \right) \left( \frac{p-1}{1} \right) \frac{p!}{2} + \sum_{t=2}^{p-1} C_t \left( \frac{n+1}{t} \right)$$

مشروط بر اینکه بتوانیم بطور مؤثری اعداد صحیح متغیر  $C_t$  را محاسبه کنیم. بخاطر بیاورید که  $C_t$  تعداد بردارهایی است که دارای  $P$  مؤلفه اند و این زمانی امکانپذیر است که ما اصرار داشته باشیم که از  $t-1$  عدد صحیح انتخاب قبلی

آنها موجود است کاری پس دشوار است. بررسی ها نشان

می دهد که تعداد این نوع بردارها به صورت  $\binom{n+1}{t} C_t$

است، که در آن،  $C_t$  عدد صحیح نامنفی است. بنابراین

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p = \left( \frac{n+1}{p+1} \right)^{p!} + \sum_{t=2}^p C_t \left( \frac{n+1}{t} \right)$$

که در آن،  $C_t$  ها اعداد صحیح هستند. (متناظر  $t=1$

جمله ای در حاصلجمع فوق وجود ندارد. زیرا، بردارهایی محاسبه می شوند که حداقل می بایستی شامل دو عدد صحیح متمایز باشند) توجه کنید که قبلاً مقادیر  $C_p$  و  $C_{p-1}$  را معین کرده بودیم. برای انجام کارمان، همانطوری که دسترسی ما بدان چندان بعید نیست، نتایج زیر را گردآوری می کنیم.

(۱) مشاهده می شود که  $S_p(n)$  عبارتی بر حسب  $n$  است

و  $\binom{n+1}{t}$  چند جمله ای از درجه  $t$  است. بنابراین، ضریب

$n^{p+1}$  در بسط  $\left( \frac{n+1}{p+1} \right)^{p!}$  برابر  $\frac{1}{p+1}$  است. از اینجا نتیجه

می شود که  $S_p(n)$  چند جمله ای بر حسب  $n$ ، از درجه  $p+1$ ، با ضرایب گویا، و ضریب جمله پیشروی  $\frac{1}{p+1}$  است.

(۲) چون، به ازای  $2 \leq t \leq p+1$ ، عبارت  $\binom{n+1}{t}$

شامل جمله  $n(n+1)$  است. پس، مشاهده می کنیم که

استفاده کنیم. در نتیجه، در چنین حالتی، همیشه  $C_p = 1$ . همچنین، پیش از این نشان دادیم که

$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

در حالت کلی، در عبارت  $S_p(n)$ ، بجای  $n$  اعداد متوالی ۲، ۳، ...،  $P-3$  را قرار می دهیم که دستگاهی از معادلات خطی با مجهولات  $C_{p-2}, \dots, C_4, C_3$  حاصل می شود.

چون  $C_1$  ضریب  $\binom{n+1}{1}$  است، پس این دستگاه

$(p-4) \times (p-4)$  به صورت مثلث پائینی با عناصر روی قطر اصلی یک تشکیل می شود. با حل این دستگاه معادلات، بسط چند جمله ای  $S_p(n)$ ، بر حسب  $n$ ، به دست می آید.

$$C_{p-1} = \binom{n+1}{p-1} \left[ \binom{p-2}{1} \frac{p!}{3!} + \binom{p-2}{2} \frac{p!}{2!2!} \right]$$

ما، حالت  $P=6$  را مورد استفاده قرار خواهیم داد و نشان می دهیم که چگونه می توان  $C_1$  های باقیمانده را محاسبه کرد. اینک، فرض کنید که

$$S_6(n) = \sum_{k=1}^n k^6 = \binom{n+1}{7} 6! + \binom{n+1}{6} \left( \binom{5}{1} \frac{6!}{2!} + \binom{n+1}{5} \left[ \binom{4}{1} \frac{6!}{3!} + \binom{4}{2} \frac{6!}{2!2!} \right] + C_4 \binom{n+1}{4} + C_3 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \right)$$

#### مراجع:

- [۱]- غلامحسین مصاحب، آنالیز ریاضی، جلد دوم، انتشارات فرانکلین دی ماه ۱۳۴۸.
- [۲]- غلامحسین مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد، جلد دوم، قسمت اول، انتشارات سروش، ۱۳۵۸.
- [۳]- جواد لالی، حاصل جمع توانهای اعداد صحیح، رشد آموزش ریاضی، سال دهم، شماره مسلسل ۳۷، صفحه ۴۰-۴۷، بهار ۱۳۷۲.
- [4]. George Mackiw, A Combinatorial Approach to sums of Integer powers, Mathematics Magazine, vol 13, no 1, February 2000.

روش جالبی برای پیدا کردن  $C_p$  این است که در معادله فوق بجای  $n$  عدد ۲ را قرار دهیم و از این واقعیت استفاده

کنیم که وقتی که  $b > a$ ، ضریب دو جمله ای  $\binom{a}{b}$  صفر است

$$\text{و } \binom{a}{a} = 1. \text{ نتیجه این می شود که}$$

$$C_3 = S_6(3) - \binom{3}{2} = 1^6 + 2^6 - 3 = 62$$

بطریق مشابه، با قرار دادن  $n=3$ ، خواهیم داشت

$$C_4 = S_6(3) - \binom{4}{3} C_3 - \binom{4}{2} = 540$$

در صورتی که بخواهیم چند جمله ای مطلوب را به دست آوریم، ضرایب دوجمله ایها را بسط می دهیم، و جملات مشابه را جمع می کنیم تا چند جمله ای ذیل حاصل گردد.

### دکارت می گوید:

من می اندیشم، پس هستم.

من می گویم:

من هستم یس می اندیشم.

محسن هشترودی

محقق: محمد ابراهيم علاني

پاریس .

(۱۹۳۳ م)، اخذ لیسانس دوم در رشته ریاضی از دانشگاه سوربن (۲ سال زودتر از موعد).

۱۳۱۵: توفیق به دریافت دکتری دولتی (یا «اتا» که غیر از دکترای انورسیده است، از میان کل ۳۶ نفر دانشجویان اعزامی از ایران که بین سالهای ۱۳۱۲-۱۳۰۷ در دسته‌های ۶ نفری روانه می‌شدند، تنها به همراه محمدعلی مجتهدی) در رشته ریاضی از دانشکده علوم آن دانشگاه به موجب تنظیم رساله<sup>۱</sup> [۱] باراهنمایی «الی کارتان»، مخالفت سفارت ایران برای عزیمت به آلمان برای مطالعه در باب نظریه مجموعه‌ها به صلاح‌دید کارتان (همراه لیش نه روییچ و ظاهراً استوی لف)، تصمیم بازگشت به وطن.

۱۳۱۶: شروع به تدریس ادبیات، فلسفه و ریاضیات (شامل هندسه، حساب و آنالیز) در دانشکدهٔ ادبیات، علوم و دانش سرای عالی (که آن سالها در یک جا جمع بودند) ۱۳۲۰: رسیدن به پایه استادی، عضویت در جامعهٔ لیسانس‌های دانش سرای عالی (به همراه کسانی چون کمال جناب و تقی هورفر).

۱۲۸۶: ۲۲ دی ماه تولد در تبریز، فرزند شیخ اسماعیل مجتهد (مشاور شیخ محمد خیابانی در قیام آن شهر و نماینده مردم در مجلس شورای ملی<sup>۱</sup>).  
۱۳۰۴: اتمام دبیرستان در دارالفنون (پس از دوره دبستانهای اقدسیه و سیروس تهران)، شروع به تحصیل پزشکی.

۱۳۰۷: جزء گروه اول اعزامی به اروپا (شامل تنی چند از قبیل مهدی بازرگان) برای تحصیل در رشته مهندسی از طرف وزارت فوائد عامه.

۱۳۰۸: بازگشت به وطن، ورود به دارالمعلمین مرکزی (که همین سال دانش سرای عالی و بعدها دانشگاه تربیت معلم نامیده شد)، انتخاب رشته ریاضی (همکلاس شدن با اشخاصی چون احمد بیرشک و بهره بردن از استادانی چون غلامحسین رهنما در زمینه ریاضیات).

۱۳۱۱: شاگرد اول دانش سرا، جزء دومین دوره فارغ التحصیلان و گروه پنجم اعزامی به فرانسه (شامل افرادی چون علی افضلی پور).

۱۳۱۲: کسب امتیاز اول در امتحانات آنالیز عالی در

۱۳۲۱: اعطای کرسی مکانیک تحلیلی گروه آموزش ریاضی دانشگاه تهران به وی (دیگر کرسی‌ها عبارت بود از: مکانیک استدلالی، هندسه، هیأت، نجوم، آمار، آنالیز و ریاضی عمومی که به ترتیب بر عهده محمدتقی فاطمی، اسدالله آل بویه، تقی هورفر، عباس ریاضی کرمانی، علی افضل‌پور، ابوالقاسم غفاری و علی نقی وحدتی قرار داشت)، ریاست فرهنگ تهران (اداره تعلیمات متوسطه) (دریافت امتیاز مجله هفتگی نامه کانون ایران در جلسه شورای عالی فرهنگ مورخ ۴/۲۵ با حضور نخست‌وزیر وقت: مصطفی عدل).

۱۳۲۲: جزء گردانندگان اعتصاب دانشگاه تهران جهت استقلال دانشگاه از وزارت معارف (که سال بعد با کوشش دکتر محمد مصدق ضمن تبصره‌ای در مجلس تصویب شد).

۱۳۲۳: ازدواج با «رباب مدیری» که برایش دو دختر و یک پسر به نامهای فرانک، فریبا و رامین را به ثمر می‌آورد.

۱۳۲۴: تنظیم مجموعه [۲] ضمن عرض ادب به غلامحسین رهنما (وزیر فرهنگ وقت).

۱۳۲۵: هدایت یک مجمع فلسفی و پس از چندی استقرار محل آن در منزل خویش (کمتر از ۵ سال با حضور اشخاصی چون امیرحسین آریان‌پور و گهگاه حسین علی راشد).

۱۳۲۶: راهنمایی «الکساندر (سمباد) آبیان» جهت تنظیم رساله‌ای در باب: هندسه ترسیمی فضای چهاربعدی (که به تأیید کارتان هم می‌رسد).

۱۳۲۹: شرکت در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان در دانشگاه هاروارد (۱۹۵۰ م) به عنوان نماینده دانشگاه تهران (همراه ابوالقاسم غفاری) و فعالیت علمی (و تنظیم مجموعه [۳] که به کارتان تقدیم می‌کند) زیر نظر پرفسور «وایل»، عضویت در موسسه مطالعات عالی پرینستون به درخواست ریاست آن موسسه پرفسور «اوپن هایمر» (برای ترم پائیز ۱۹۵۲-۱۹۵۱)، مصاحبت با انیشتین.

۱۳۳۰: مراجعت به میهن و ریاست دانشگاه تبریز (از اسفند ماه به مدت یک سال).

۱۳۳۲: شرکت در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان در آمستردام (۱۹۵۴ م) به عنوان نماینده دانشگاه تهران،

فعالیت علمی (و تنظیم مجموعه [۴]) زیر نظر پرفسور «سخوتن» در مرکز ریاضیات آمستردام.

۱۳۳۵: سخنرانی در کنگره طوسی (دانشگاه تهران، خرداد ماه) [۵]، اقامت چند روزه «زاریسکی» (مقیم آمریکا) در منزلش (تهران)، تجلیل در تالار فرهنگ توسط جامعه لیسانسیه دانشسرای عالی (با ذکر کارنامه علمی وی توسط ابوالقاسم قربانی).

۱۳۳۶: شرکت در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان زبان لاتین در شهر نیس فرانسه (۱۹۵۷ م)، ریاست دانشکده علوم دانشگاه تهران برای یک دوره ۳ ساله<sup>۲</sup> (و متعاقباً رد پیشنهاد کار در موسسه تحقیقاتی «کلژ دو فرانس»)، سخنرانی در انجمن ایرانی فلسفه و علوم انسانی دانشکده معقول و منقول در باب «تجسم و تصویر» (به تقاضای بدیع الزمان فروزانفر نایب رئیس آن انجمن)، تقدیم مجموعه شعر «رؤیا» (چاپ کتابخانه محمدعلی علمی) توسط حسین غیور به ایشان (پس از آشنائی ۱۰ ساله).

۱۳۳۷: شرکت در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان در ادینبورگ انگلستان (۱۹۵۸ م)، مصاحبت با راسل.

۱۳۳۸: عضویت در انجمن ایرانی اتحادیه بین‌المللی فضا (به پیشنهاد ریاست آن انجمن محمود حسابی) راه اندازی دوره فوق لیسانس ریاضی (با معاونت علی نقی وحدتی).

۱۳۳۹: هدایت سازمان صنفی دانشجویان (و کانون فارغ التحصیلان دانشکده علوم تا حدود ۱۰ سال).

۱۳۴۰: ریاست هیأت تحریریه نشریه فرهنگی، علمی، هنری «کتاب هفته» کیهان (به مدت یک سال و همکاری با اشخاصی چون منوچهر آتشی).

۱۳۴۲: شروع حمایت‌های معنوی از «عبدالحسین مصحفی» شاگرد وی، برای تشکیل «یکان، مجله ریاضیات».

۱۳۴۳: دعوت به کنگره بین‌المللی ژئومتری و ژئودزی صوفیه بلغارستان (۱۹۶۴ م)، عضویت در شورای تحقیقات علمی دانشگاه تهران و کمیته ریاضی و فیزیک آن، ایجاد هیاهوی نامزدی وی (به همراه ابوالقاسم غفاری، محمود حسابی، حسینقلی مستعان و محمدعلی جمالزاده) برای دریافت جایزه نوبل (در زمینه مکانیک سماوی) توسط

عبدلہ کریم بھٹا

[illegible]

اسکے ہی رفیق کا یاد دہانی

2000

مجله تهران مصور.

۱۳۴۷: پیشنهاد تشکیل انجمن ریاضی و انجمن  
معلمین ریاضی<sup>۲</sup> (به مفهوم عام) طی نامه‌ای خطاب به مدیر  
مجله بکان (۶ دی ماه).

۱۳۴۸: بازنشتگی بعد از ۳۱ سال خدمت در کسوت استاد تمام وقت دانشکده علوم بنا به تقاضای شخصی، سفر به دانشگاه باکو و مسکو (همراه تیم اعزامی از اساتید دانشگاه)، ریاست کانون قضایی ایران (ریاست هیأت امناء و شورای نویسندگان مجله «فضا»).

۱۳۴۹: شرکت در کنفرانس اول ریاضی کشور، دریافت لوح استادی ممتاز دانشگاه تهران (شهریور ماه)، عضویت هیأت امناء مدرسه عالی علوم اداری و بازرگانی قزوین (وابسته به وزارت علوم و آموزش عالی) برای مدت ۳ سال.

۱۳۵۵: ۱۳ شهریور ماه مرگ در منزل بین ساعات ۱۵ و ۱۶ به دلیل سکنه قلبی، تشییع در ۱۷ شهریور از مسجد

### جناب آقای مدیر محترم مجله یکان

قطعاً جنابعالی مستحضرید که در اغلب کشورهای جهان انجمنی به نام انجمن ریاضی وجود دارد که علاقه مندان این دانش (چه اهل حرفه و چه آماتور) در جلسات آن به غور و بررسی مسائلی می پردازند و غالباً از این تعاطی و مبادله افکار مسائلی مهم طرح و بررسی، و ضمناً برخی گوشه های مخفی دانش ریاضی روشن و آشکار می شود.

تشکیل چنین انجمنی نه تنها برای تقریب اندیشه های علمی مفید است بلکه غالباً در فن آموزش ریاضی مشکلاتی که پیش می آید از طرف مدرّسین عنوان شود و اغلب متفّنین و آماتورها در این مسائل صاحب نظری عملی و مفید می باشند که برای آموزش ریاضی بسیار بهره بخش و عملی است. غرض از نوشتن این نامه پیشنهاد اقدام از طرف مجله یکان برای ایجاد و تأسیس چنین انجمنی است که دوستداران دانش ریاضی و خصوصاً طبقه معلّمین شاید به این امر اقبال و اقدام کنند. همکاری نزدیک بین معلّمین و اهل فن از یکسو و آماتورهای طالب از سوی دیگر امکان غور و بررسی بیشتر و بهتر در مسائل آموزشی ریاضی و حتی دانش های دیگر بوجود می آورد که مقدّمه تحول و تکامل در این امر خواهد بود. وانگهی طرح مسائل کلی در زمینه این دانش و تحلیل طرق آموزش برای دانشجویان و دانش آموزان خود هماهنگی بین معلّمین ایجاد می کند و این همداستانی برای توسعه برنامه های آموزشی خصوصاً در دبیرستان بسیار مفید است. تجربه دبیران با سابقه برای همکاران تازه نفس بسیار ارجمند است و در صورت تشکیل چنین انجمنی به آسانی می توان ضعف و نارسائی بعضی از برنامه های علمی را جبران کرد. خواهمشدم با درج این نامه در مجله یکان برای ایجاد این انجمن مقدم باشید و علاقه مندان را برای تشکیل آن دعوت فرمائید که اگر توجه آنان جلب شد شاید کمبود امکانات توسعه و تکامل برنامه ها و همچنین اكمال اطلاعات دبیران ریاضی با همکاری قاطبه معلّمین تأمین گردد.

با آرزوی توفیق و کامیابی جنابعالی

محسن هشترودی

دانشگاه مادر (تهران) تا بهشت زهرا.<sup>۵</sup>

### دیگر مربیان

برادرش محمد ضیاء<sup>۶</sup> (مدرس ریاضیات، فرانسه [و عربی] و تنها فرزند دیگر خانواده پدری)  
استاد عبدالعظیم قریب  
پروفسور ارژمن (سوربن)  
پروفسور وینوگرا دوف و استاد فینی کف (دانشگاه مسکو)

دکتر علی اکبر سیاسی

### تدریس های دیگر

زیبائی شناسی (دانشکده ادبیات)  
هنرهای دراماتیک و فیزیک صحنه (دانشکده هنرهای

دراماتیک، وابسته به وزارت فرهنگ و هنر)

روش های ریاضی (طرح مسأله مقدماتی از تئوری و تعمیم آن)، آمار ریاضی، نظریه اعداد [و جبر] (دانشگاه تبریز)، معادلات دیفرانسیل، نظریه اعداد، نظریه نسبیت و مکانیک کوانتیک (دانشگاه اصفهان)  
تدریس در دانشگاه ملی  
(یکی از ۲۰۰ استاد بین المللی ریاضی)

### برخی شاگردان

دکتر علی رضا امیر معز (استاد دانشگاه صنعتی تگزاس)  
دکتر محمد هادی شفیعیها (استاد اسبق دانشکده فنی دانشگاه تهران، مرکز نشر دانشگاهی)  
دکتر علی رضا مدقالچی (استاد دانشگاه تربیت معلم)  
دکتر عبدالحمید ریاضی (استاد دانشگاه صنعتی

امیرکبیر)

دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده (استاد دانشگاه اهواز)

دکتر جعفر زعفرانی (استاد دانشگاه اصفهان)

دکتر احمد حقانی (استاد دانشگاه صنعتی اصفهان)

دکتر مگردیچ تومانیان (استاد دانشگاه تبریز)

دکتر محمد جلوداری ممقانی (استاد دانشگاه علامه

طباطبایی)

صفی‌علی شاه، تهران ۱۳۳۶

جدول‌بندی‌های علمی، آرمان هاروطونیان،

کتابفروشی اشراقی، تهران ۱۳۴۴

هسته اتمی، کورسونسکی (ترجمه عباس گرم‌ان)،

چاپ خیام، تهران ۱۳۴۴

بررسی در علوم (از فارغ‌التحصیلان دانشکده علوم

دانشگاه تهران)، انتشارات دهخدا، جلد دوم و سوم، تهران

۱۳۴۶ و ۱۳۴۷

فلسفه: مسائل فلسفی - مکتبهای فلسفی - مبانی علوم،

علی شریعتمداری، انتشارات قائم، اصفهان ۱۳۴۷

هراس (مجموعه شعر)، حسن هنرمندی، کتابفروشی

زوار، تهران ۱۳۴۸

ارابه خدایان، اریک فون دینکن (ترجمه محمدعلی

نجفی)، نشر اندیشه، تهران ۱۳۵۲

درباره رباعیات عمر خیام، حسن دانشفر، نشر اقبال،

تهران ۱۳۵۲ (چاپ دوم و سوم ۱۳۷۳ و ۱۳۵۴)

#### آثار انتشار یافته

[۱] Les Espaces d'Elements a Connexions Projectives Normales, Actualites Scientifiques et Industrielles, No. 565, Hermann, Paris 1937

[۲] Les Espaces Normaux, Universite de Tehran, 1945

[۳] Les Connexions Normales, Affines et Weyliennes, Universite de Tehran 1948 (2eme edition, 1970)

[۴] Sur les Espaces de Riemann, de Weyl et de Schouten, Universite de Tehran, 1956 (2eme edition, 1970)

سایه‌ها (مجموعه شعرهای نو و کهنه)، انتشارات

صفی‌علی شاه، تهران ۱۳۳۵

[۵] رساله شافیه خواجه نصیر پاورقی از تاریخ هندسه،

یادنامه خواجه نصیرالدین طوسی، مجلد اول، تهران ۱۳۳۶

جهان اندیشه - دانش و هنر، انتشارات دهخدا، تهران

۱۳۴۰ (چاپ دوم ۱۳۵۰ با ملحقات جدید)

خیام: ریاضیدان شاعر یا شاعر ریاضیدان، مجله

#### فعالیت‌های دیگر

ریاست جامعه لیسانسیه‌های دانشسرای عالی (۲ دوره)

مشاور فنی بانک ملی و مشاور آماری شرکت بیمه

(حدود ۱۰ سال کمی قبل و بعد از استقلال دانشگاه و ایام

ضعف حقوق استادان)

مقدم السفراء دانشکده علوم

ریاست انجمن نویسندگان و مترجمان (سازمان نشر

فرهنگ انسانی، مطبوعاتی فریدون علمی)

ریاست کانون مخترعین کشور (حدود ۱۳۵۴)

#### آشنایی به زبانهای بیگانه

فرانسه (تا حد سرودن شعر)، عربی، انگلیسی،

روسی، ترکی اسلامی (تا حد سرودن شعر)، آلمانی و

لاتین

#### دعوت به سخنرانی

آکادمی علوم شوروی (مسکو)

آکادمی علوم رومانی (بخارست)

دانشگاه مسکو

مجدداً آکادمی علوم شوروی

کنگره علمی پاکستان (دانشگاه پنجاب)

دانشکده علوم پاریس (مؤسسه هانری پوانکاره)

خطابه‌های فارسی و فرانسوی متعدد در ایران با محتوای

علمی، ادبی، فلسفی، فرهنگی و هنری

#### تقریظ‌ها

شامل مقدمه‌هایی است که بر کتب زیر نوشته:

سفینه غزل، سید ابوالقاسم انجوی شیرازی، انتشارات

problem, Shiing-Shen Chern & Shanyu Ji, Math Ann. 302, 582-600, 1995<sup>11</sup>

(تعریف نوعی التصاق که تعمیمی از هندسه تصویری را بدست می‌داد، رساله دکتری)

- سخنرانی امید علی شهنی کرمزاده تحت عنوان:

The Key Methods and Results in Mathematics

در سی و یکمین کنفرانس ریاضی کشور (دانشگاه تهران) ساعت ۸ مورخ ۱۳۷۹/۶/۷ (روش مگسی، کلاس درس).

### مقالات تحقیقی

- Les Espaces d'Elements a Connexions Affines Normales
- Les Espaces d'Elements a Connexions Weylinne Normale
- Sur une classe d'Espaces de Weyl
- Les Champs Potentiels d'un Espaces de Riemann
- Sur les Espaces de Schouten
- Les Figures Auto-Isomorphes de l'Espaces Ordinaire
- Les Champs Fondamentaux et les Champs Principaux Generalises d'un Espaces de Riemann
- Les Equations Differentielles d'Euler Generalisees
- La Reductibilite des Fonctions Harmoniques et la Transformation de Moutard Generalisee
- Sur les Fractions Continues
- Les Cas d'Integrabilite de l'Equation Riccati
- Espaces de Riemann Admettant un Potentiel de Ricci
- Espaces de Riemann Admettant un Potentiel de Strict Ricci
- Connexions Metriques Conservent les Cercles on les Spheres
- Sur les Figures Auto-Involutives et Quelques Equations Fonctionnelles

دانشکده ادبیات، شماره ۳۹، ۱۳۴۲

اخترهای متناوب، یکان - مجله ریاضیات، تیرماه ۱۳۴۴

بنیان ریاضیات جدید، یکان سال، فروردین ۱۳۴۴  
عدد تربیعی فرما (پاسخ به یک پرسش)، یکان - مجله ریاضیات، تیرماه ۱۳۴۴

تمرینهای ریاضیات مقدماتی - هندسه دوایر در صفحه، انتشارات یکان، تهران ۱۳۴۵

نظریه اعداد، مؤسسه آموزش عالی آمار، تهران ۱۳۴۹<sup>۸</sup>  
سیر اندیشه بشر، انتشارات توکا (آزاده)، تهران ۱۳۵۶  
(چاپ سوم ۱۳۵۷ و سوم ۱۳۶۲)

اندیشه‌هایی درباره دانش و صنعت و هنر آینده و کاربرد ریاضیات در آنها، آشتی با ریاضیات، شماره ۳، پائیز ۱۳۵۶

مقالات کثیری در نشریه «فضا» (این مجله بین سالهای ۱۳۵۷ - ۱۳۴۵ چاپ می‌شده است.)

مصاحبه‌های روزنامه کیهان و اطلاعات و برنامه‌های رادیویی و تلویزیونی

### بررسی برخی ایده‌ها

- Khayyam's Solution of Cubic Equation, A.R. Amir Moez, Mathematics Magazine, 35(5), 1969  
(تعمیم روش خیام در حل معادلات درجه چهارم، تمرین ۱۵۹ کتاب تمرینهای ریاضیات مقدماتی)<sup>۹</sup>
- فضای چهاربعدی دوایر، علی‌رضا امیر معز، یکان، آذر ۱۳۵۵، صفحات ۱۱ و ۲۲۹ و ۲۲۸ (تعریف حاصلضرب عددی دو دایره، کتاب هندسه دوایر در صفحه)<sup>۱۰</sup>
- بررسی مسأله‌ای از استاد هشترودی و تعمیم آن، جعفر آقایی چاوشی، یکان آذر ۱۳۵۵، صفحات ۲۳۱ - ۲۳۰  
(طرح یک کسرمسلسل برای محاسبه مسأله شماره ۱۸۷، کتاب تمرینهای ریاضیات مقدماتی)
- هندسه پوشه‌ها، علی‌رضا امیر معز، آشتی با ریاضیات، شماره ۱، ۱۳۵۷، صفحات ۷ - ۲ (مطالب کلاس درس)
- Projective geometry and Riemann's mapping

- Sur les Transformations de Contact qui Conservent une Congruence et les Courbes Paralleles Generalisees. Sur les Transformation de Contact qui Conervent un Complexe et les Surfaces Paralleles Generralisees
- On the Multivalent Logics
- On the Sign-events of Camp and Semantics
- On the Topological Invariants
- On the Dynamical Trajectories

#### زیر نویس ها

- (۱) در یکی از کتب موجود در مؤسسه مطالعاتی تاریخ معاصر، عکسی از وکلاء ۱۳۲۷ هـ. ق با زیرنویسی منقول از خط تقی زاده وجود دارد که نام «آقا شیخ اسماعیل هشترودی» هم در آن میان دیده می شود.
- (۲) ضمن آن مرکز ژئوفیزیک را راه اندازی کرده و یک رصدخانه خورشیدی در آن برپا می کند، به مرکز اتمی امیرآباد سر و سامان و ساختمان دانشکده را به داخل دانشگاه انتقال می دهد و به راه انداختن مؤسسه آمار که بعدها از دانشکده جدا شده و وابسته به مرکز آمار ایران می گردد. (به روایت معاون او علی نقی وحدتی)
- (۳) زمزمه تشکیل «انجمن ریاضی ایران» در کنفرانس اول ریاضی در دانشگاه پهلوی یا شیراز فعلی در فروردین ۱۳۴۹ و سازمان بندی آن در کنفرانس دوم ریاضی در دانشگاه آریامهر یا شریف امروزی در فروردین ماه ۱۳۵۰ صورت می پذیرد.

(۴) آخرین کلام منظومش که در ذیل می آید<sup>۵</sup>، گواه همه چیز است:

فلک بر جنگ من لشگر بیاراست

زمانه با من بیدل به کین خاست

گل بشکفته ام در هم فرو ریخت

چو اشک من به چنگ و خون در آمیخت

دلَم از رنگ غم یکسر سیه شد

تمام حاصل عمرم تبه شد

به بستان در به پای نونهالی

دلی شادم بدو فرخنده حالی

کنون زنگار غم دل را بپوشید

ز دست زال دوران زهر نوشید

فرانک را به خاک تیره جا کرد  
درون خاطر طوفان به پا کرد  
دلی تاریک تر از دخمه گور  
فرو پوشیده همچون شام دیجور  
نه پروایی ز شب دارد نه از روز  
تمام هستی اش رنجی است پر سوز  
نه دین دارد نه آیین دارد این دل  
مرا همواره غمگین دارد این دل<sup>۵۵</sup>  
ز من پرسد که چونی؟ چونم ای مرگ  
جگر پر درد و دل پر خونم ای مرگ  
شنیدم طالبان را می نوازی  
مگر من زان میان بیرونم ای مرگ

(۵) زنده یاد گفته بود:

اگر سنت جاری اجازه می داد، جسد من در دانشگاه دفن شود... [تا]  
باز خاک نشین رهگذر قدم این جوانان باشم.

(۶) متولد ۱۲۷۶ خورشیدی در نجف، وی تحصیلات ابتدائی و علوم قدیمه را در مکاتب آن زمان انجام داده و در مدارس آلیانس، سن لوتی و دارالفنون آنرا کامل می کند. در ۱۲۹۸ وارد خدمت دولت می شود که تا حدود ۱۰ سال آن در وزارت دارائی و بعداً در وزارت فرهنگ (تدریس در مدرسه متوسطه شاهرزای مشهد و دبیرستان پهلوی) مشغول بوده است. در ۱۳۰۱ اقدام به انتشار روزنامه سیاسی «نامه عمل» (که در هفته ۲ بار چاپ می شده) می نماید که بعد از ۱۰ شماره هم روزنامه اش توقیف می گردد.

از آثار اوست: ترجمه کتاب شارل ژید تحت عنوان «مبادی اقتصاد سیاسی یا اصول علم ثروت ملل» (کتابخانه بروخیم، تهران ۱۳۰۷) و تألیف «منتخب آثار از نویسندگان و شعرای ایران» (حاوی اشعاری از خود او، چاپ کتابخانه بروخیم، تهران ۱۳۴۲) و نگارش مقالات: «ادیب الممالک»، «کلمه ستان»، «خیام و رباعیات او»، «مورخان اسلام»، «مارگیران»، «یادداشتی چند درباره قصیده پهلوی»، «لغت فرس اسدی» و «سوزمانی یعنی چه» (به ترتیب در نشریات: خورشید ۱، یغما ۴، [ترجمه] وفا، دانش ۱ و ۲، یغما ۹، سخن ۳، موسیقی ج ۲ ش ۷ و ۶ و دانش ۱) در باب کارهای ریاضی وی هم به مجله برهان (دبیرستان) شماره پیاپی ۵ (۱)، زمستان ۱۳۷۱، صفحات ۴۷-۴۶ نگاه کنید.

(۷) دو غزل از ایشان که در این کتاب موجود نیست در «سفینه غزل» آورده شده (صفحات ۴۷ و ۶۱) و شعری تحت عنوان «راز» (کیهان ۱۲/۵۶۶، صفحه ۱۱) که برای دختر کوچکش در ۱۳۴۸ سروده و نیز ابیات منسوبی که تنها به یادها مانده است، چون:

منحنی قامتیم تابع ابروی تست

خط مجانب در آن طره گیسوی تست

و:

دل تابع منحنی ابروی تو است

عطفش همگی به خال دلجوی تو است

چون نقطه عطف خارج از منحنی است

این مسأله پیچیده تر از موی تو است

(۸) در سال ۱۳۴۹ قصد تألیف و انتشار دو نمونه زیر را هم داشته که زمانه یاریش نمی کند:

نظریه اعداد، جلد دوم (حاوی نظریه کوئگروانس ها)، مؤسسه آموزش عالی آمار (ر. ک. مقدمه نظریه اعداد)

Les Espaces d'Elements-Plans a Connexions Weylinnes Normales, Universite de Tehran (ر. ک. [۲])

(۹) به علاوه دو مقاله زیر (ناشی از همین ایده)، مندرج در فصلنامه علمی- پژوهشی پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی «فرهنگ»، شماره بهار- زمستان، ۱۳۷۸ (ویژه بزرگداشت خیام):

- خیام و نوموگرافی، احمد شرف الدین، ص ۹۱۵

- Khayyam, Hashtroudi, and Quartic Equation, A.R Amir-Moez, 125-131

(۱۰) به اشاره آقای امیر معز (در همانجا) این ایده قبل از این تاریخ هم توسط مقاله ای به قلم خودشان با عنوان

Matrix Techniques Trigonometry and Analytic Geometry

به انگلیسی زبانان معرفی شده بود.

(۱۱) در این مقاله چرن، هندسه دان معاصر چینی (تبعه آمریکا)، از همدوره ای های تحصیلی هشترو دی نزد کارتان، توانست تعمیمی از قضیه نگاشت ریمان را در ابعاد بالا ثابت کند بدین رو التصاق مورد استفاده خود را Hashtroudi Connection نام نهاد.

## منابع

به غیر از تمام مواردی که در متن به نوعی از آنها یاد شد، عبارتند از: خط هفتم (نشریه کانون صنفی دانشجویان ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد)، دی ماه ۱۳۷۸

نشر ریاضی، فروردین ۱۳۶۸، مرداد ۱۳۷۰، آبان ۱۳۷۴

کلک، تیر- مهر ۱۳۷۵

نشریه کتابخانه ملی تبریز، آبان ۱۳۵۵

دانشمند، تیر ماه ۱۳۶۹

تهران مصور، ۱۳۳۵

راهنمای انجمن ریاضی ایران، ۱۳۷۲

یادنامه مهندس کاظم حسینی، نویسنده و ناشر: حسین اعرابی، ۱۳۷۰

سفرنامه میرزا فتح خان فتاحی...، چاپخانه بانک بازرگانی، ۱۳۴۷ سالنامه دنیا، شماره ۲۵، ۱۳۴۸

اشعه کیهانی، (کاشون، ژونو، دودن) ترجمه جواد رهنما، (سازمان نشر فرهنگ انسانی) مطبوعاتی فریدون علمی، ۱۳۴؟

بررسی در علوم، جلد چهارم (آخر)، انتشارات دهخدا، ۱۳۴۹ سالنامه دبیرستان پهلوی، ۱۳۳۳

بزم شاعران، مهدی سهیلی، انتشارات جاویدان، ۱۳۴۶

## یاری کنندگان

اعم از اشخاص حقوقی و حقیقی عبارتند از:

مؤسسه مطالعاتی تاریخ معاصر، کتابخانه ملی، کتابخانه وزارت ارشاد، کتابخانه مجلس، کتابخانه مرکزی و دانشکده علوم دانشگاه تهران، مرکز اسناد انقلاب

آقای هادی سودبخش، دکتر محمدهادی شفیعیها، دکتر علی رضا مدقالچی، آقای سید عبدالحسین کابلی، آقای هاشم وکیلی، دکتر بیژن شمس، دکتر محمدجلوداری مقانی، دکتر عبدالحسین مصحفی، دکتر عبدالحمید ریاضی.

## و با تشکر از

سازمان اسناد ملی، دکتر محمد باقری، دکتر رشید زارع نهندی، دکتر عظیم امین عطائی، مهندس سیامک کاظمی، دکتر عمید رسولیان، دکتر احمد شفیعی ده آباد، دکتر حسن صالحی فتح آبادی، دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر مهدی بهزاد، دکتر مهدی دهقان، دکتر ناصر بروجردیان، مهندس مسعود شجاعی، آقای محمود سرشته، مهندس حسن فقیه عبداللّهی، آقای حسن اردشیری، آقایان حمید و مهندس محمدحسین طایفه، مهندس احمد میرزا حسین، آقای غلامحسن قربانی، آقای احمد ثمره گلستانی، آقای هومن هرمزی، خانم شراره صنعتی آگاه، آقای مسعود کوچری، خانم الهام یگانه، آقای حمید رضامیرزایی، آقای سعید حسینی، آقای مهدی پارسا، آقای ایرج دریابر، آقای محمد ینگلی ملکی، آقایان میثم و (مرحوم) محمد حسن علانی، دکتر هاشم صابری نجفی و آقای حسن نوری.

# چه کسی معادله درجه سوم را حل کرد؟



نویسنده: تونی آندروز

مترجم: نسرين شهاخت نادری

غیره را نیز به عنوان بخشی تعریف شده در جبر پذیرفت و از طریق آن به نظرات «فیلسوفان» اعتبار بخشید.



عمر خیام

به همان شیوه‌ای که تا قرن شانزدهم مرسوم بود، او همه شکل‌های ممکن معادله درجه سوم را که فقط با اعداد مثبت بیان می‌شوند و حتی آنهایی که از طریق حذف به حالت‌های ساده‌تر تبدیل می‌شدند را گردآوری کرد. چون او اعداد منفی را نپذیرفته بود و نمادگذاری امروزی جبر را هم در اختیار نداشت مجبور به گردآوری نوزده شکل مختلف برای معادله درجه سوم شد. ما همه آن معادلات را می‌توانیم با استفاده از روش‌های رایج و توانمند خود به یک حالت کلی (به جز

حل معادلات درجه دوم به زمان بابلی‌ها برمی‌گردد. روش‌های آنها و روش‌های یونانی‌ها از طریق ترجمه‌های لاتین کارهای ریاضیدانان عرب، که خود متون قدیمی را ترجمه کرده بودند، به اروپا منتقل شد. این روش‌های یبانی، بر اساس ایده‌های هندسی شامل دست‌ورزی با شکل‌های مسطح مثل مربع و مستطیل یا شکل‌های صلب مثل مکعب و مخروط بنا شده بود. با این حال اعراب، اتصال محکم میان جبر و هندسه را که یونانی‌ها مجبور به استفاده از آن بودند، شکستند. رویکرد آنها مستقل‌تر و بیشتر به حساب شبیه بود تا هندسه. عمر خیام، ریاضیدان و شاعر عرب زبان، شرحی در مورد حل معادلات درجه سوم نوشت. او به طور قاطع به سستی که هندسه را قلب جبر قرار می‌داد معتقد بود. او نوشته، «algebras حقایق هندسی هستند که توسط قضایای ۵ و ۶ از کتاب II اصول اقلیدس<sup>۱</sup> ثابت شده‌اند.» بنابراین او شی‌ای را (که می‌توانیم  $x$  بخوانیم) به عنوان خط راست، مربع آن  $x^2$ ، را به عنوان یک شکل مربعی و مکعب آن  $x^3$  را به عنوان یک مکعب توپر پذیرفت. اینها تنها عناصر جبری بودند که او ویژگی «حقیقی» را به آنها نسبت داد. او هم چنین توان‌های بالاتر  $x$ ، یعنی  $x^4$ ،  $x^5$  و

مثال های بدیهی) تقلیل دهیم.

با استفاده از نمادگذاری امروزی بعضی از حالت های بدیهی معادلات درجه سوم او به صورت زیر بودند:

$$x^2 = a$$

$$x^2 = ax$$

$$x^2 + ax = bx$$

و

در حالیکه حالات غیر بدیهی عبارت بودند از:

$$x^2 + ax = b$$

$$x^2 = ax^2 + b$$

با توجه به پذیرش اعداد منفی، مانمی توانیم بین دو مورد آخر تمایزی قائل شویم، حال آنکه سه مورد اول به دلیل آنکه به حالت درجه دوم تقلیل می یابند راه حل های ساده ای دارند. خیام حل معادلات درجه سوم غیر بدیهی را با استفاده از مخروطات که اساساً روشی هندسی است انجام داد. البته عمر خیام شاعر توانایی نیز بود. مجموعه اشعار او تحت عنوان «رباعیات» در قرن نوزدهم توسط ادوارد فیتز جرالذ ترجمه شد و جزئی از ادبیات کلاسیک انگلیسی قرار گرفت.

۲

در اوایل قرن شانزدهم دل فروی<sup>۳</sup> ایتالیایی اولین کسی بود که معادله درجه سوم را به صورت جبری حل کرد. او معادله درجه سوم به شکل «مکعب و اشیاء مساوی اعداد» را که در نمادگذاری امروزی به صورت  $x^3 + ax = b$  بیان می شود، حل کرد. فرو این راه حل را به شاگرد خود فیوره<sup>۴</sup> آموخت و او نیز در بسیاری از معادلات ریاضی موفق خود آن را به کار برد. در ایتالیای آن زمان اندیشمندان دانشگاهی موقعیتی به معنای امروزی نداشتند و مجبور بودند برای حفظ جایگاه خود، رقیبان شان را با ارائه مسأله ها به مبارزه بطلبند.

فیوره مورد حل معادلات درجه سوم به شکل بالا - البته نمونه های عددی خاص آن - را برای به مبارزه طلبیدن رقبای خود بسیار مناسب یافت.

اندیشمند دیگری به نام تارتاگلیا<sup>۵</sup> پس از مطلع شدن از موفقیت فیوره، مستقلاً عمل کرده، راه حل خود را ارائه نمود و برای مغلوب کردن فیوره در یک مجادله از آن استفاده کرد. یکی از مسائل عبارت بود از اینکه:

«مردی یاقوت کبودی را به ۵۰۰ سکه طلا می فروشد و معادل ریشه سوم قیمت آن سود می برد. مبلغ سود چقدر است؟»

این همان معادله  $x^3 + x = 500$  است که به شکل بالا می باشد. در آن زمان کاردانو<sup>۶</sup> که مشغول تألیف اثر معروف خود آرس ماگنا<sup>۷</sup>، در مورد معادلات بود، از تارتاگلیا خواست تا روش حل او را نیز در کتاب خود درج کند. تارتاگلیا از این کار امتناع ورزید چرا که درج این روش کاملاً به نفع کاردانو بود. از این رو او روش خود را طوری به کاردانو آموخت که نتواند آن را منتشر کند.



نیکولافونتانا تارتاگلیا

با این حال، دو چیز موجب شد کاردانو به این باور برسد که مجاز به انتشار روش تارتاگلیا است. اولاً کاردانو روش های زیاد دیگری برای حل معادلات درجه سوم دیگر کشف کرد، ضمن آنکه شاگرد ممتاز او فراری<sup>۸</sup> نیز معادلات درجه چهارم را حل کرد؛ و ثانیاً کاردانو دریافت که فیوره روش تارتاگلیا را قبل از او کشف کرده بود، در نتیجه از طریق منابع اولیه به آن روش دسترسی پیدا کرد. بدین ترتیب کاردانو راه حل های جامعی برای معادلات درجه سوم و درجه چهارم در اثر معروف خود به نام آرس ماگنا چاپ نمود. این کار به خصوصیتی بین او و تارتاگلیا منتهی شد.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}}$$

البته به سادگی دیده می شود که این، نتیجه تازه ای نیست، اما باید به یاد داشته باشیم که کاردانو امکان استفاده از اعداد منفی را نداشت. از طرفی در این فرمول هرگاه

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 > \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

منفی منجر می شود. کاردانو روش های خاصی را جهت رفع این موارد مشکل آفرین ابداع کرد.

پانزده سال بعد بامبلی<sup>۱</sup> کتاب جبر خود را که اوج رنسانس جبر بود تألیف کرد. در این کتاب او راه حل این معادلات را به صورت مشروح تری، از آنچه کاردانو در آرس ماگنا داشت، ارائه داد. اما حداقل دو جنبه ممتاز در کار او وجود داشت که او را فراتر از کارهای قبل قرار می داد.

اول آنکه در نوشتن معادلات شیوه ای حذفی اختیار کرد، به طوری که در بسیاری موارد کاملاً نمادین بود. بدین ترتیب نمادگذاری او در نوشتن توان ها بی شباهت به نمادگذاری امروزی ما نیست، و این نمادگذاری او را قادر به بیان قواعد کار با چنین توان هایی کرد.

دوم، روش کار او با دومین معادله درجه سوم بالایی کاردانو بود که در آن باید ریشه دوم یک عدد منفی را به دست می آوردیم. او به طور جدی این امکان را فراهم کرد و توانست همه قواعد بنیادی، نمادی که آن را  $i$  می نامیم، و ریشه دوم  $-1$  نامیده می شود، را به رشته تحریر درآورد. این واقعه صدها سال پیش از پذیرش چنین اعدادی (که آنها را اعداد مختلط یا موهومی می خوانیم) بوده است؛ و او در زمانی این کار را انجام داد که حتی پذیرش اعداد منفی با مشکل روبه رو بود.

زیر نویس ها

1. book II of Euclid's Elements
2. Edward Fitzgerald
3. del Ferro
4. Fiore
5. Niccolo Fontana Tartaglia
6. Girolamo Cardano
7. Ars Magna
8. Ferrari
9. Bombelli

مرجع اصلی

Andrews, Tony - WHO SOLVED THE CUBIC? amt volume 55 number 4, 1999.



جیرولامو کاردانو

۳

حال این سؤال پیش می آید که یک راه حل نوعی برای معادله درجه سوم چگونه عمل می کند؟ بهترین توضیح برای آن احتمالاً به صورت هندسی است، اگرچه پیچیده تر از آن است که در اینجا مطرح شود. از طرف دیگر راه حل جبری آن نیز، هرچند مقدماتی، نسبتاً خسته کننده است. روش هندسی، به طور غیرمنتظره ای مشابه روش مورد استفاده برای ساخت یک مربع کامل است. با این حال برای توضیح این مسأله در اینجا معادل امروزی راه حل مطرح شده در ایتالیای قرن پانزدهم برای معادله درجه سوم  $x^3 + ax = b$  ارائه می شود.

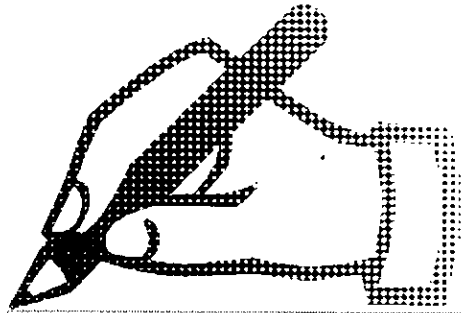
$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}}$$

با این روش برای حل معادله  $x^3 + 6x = 20$  به نتیجه زیر می رسیم:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{10.8 + 10} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{10.8 - 10}}$$

به طور حتم کاردانو با یک جایگذاری ساده می دانست که جواب  $x = 2$  است، با این وجود بدون هیچ توضیحی اجازه داد این راه حل عجیب (با اینکه صحیح است) با ماشین حساب خود امتحان کنید) رواج یابد.

برای معادلات درجه سوم از نوع  $x^3 = ax + b$  کاردانو نتیجه ای به دست آورد که می توان آن را به صورت زیر نوشت



## روایت معلمان

مریم گویا دبیر ریاضی منطقه ۲ تهران

طبق قرار قبلی برای بازدید از نمایشگاه ریاضی در صبح جمعه ۸۰/۲/۱۴ راهی مدرسه راهنمایی خاتم شدم. هوای صبحگاهی لطیف و پاکیزه بود، به سربالایی ولنچک که رسیدم نگاهم به کوه‌های سربه فلک کشیده و مغرور البرز افتاد که با ابهت خاصی قامت برافراشته بودند و همه چیز و همه کس را نظاره می‌کردند. باران شب گذشته آلودگی‌ها را زدوده بود، قلّه زیبا و برف پوش دماوند چون نگین الماس در تالو خورشید می‌درخشید، هوای پاک و باران خورده را با اشتیاق مکیدم و «ریه‌ها را پر اکسیژن لذت کردم»<sup>۱</sup>. جلوی در مدرسه روی پلاکارد بزرگی، مقدم میهمانان و بازدیدکنندگان را خوش آمد گفته بودند. در حیاط مدرسه با شیرینی و شربت از بازدیدکنندگان پذیرایی می‌کردند. در و دیوار مدرسه پر بود از شعارهایی در مورد ریاضی و تبلیغ برای غرفه‌های مختلف جملات زیر به کرات به چشم می‌خورد:

«دوستان آیا ریاضی فقط در مدرسه است؟»

«بیاید به ریاضی جور دیگر نگاه کنیم.»

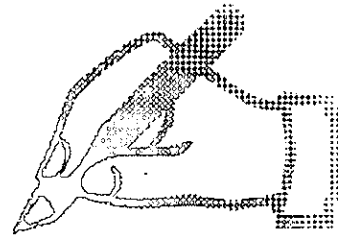
«بیاید، جای نفرت از ریاضی، ریاضی را دوست

بداریم.»

و یا به «غرفه فیثاغورث خوش آمدید. از غرفه گالیه دیدن کنید. از غرفه مبتکران جایزه بگیرید. غرفه اندیشمندان را فراموش نکنید و...». نقاشی‌ها و کاریکاتورهایی نیز زینت بخش دیوارهای مدرسه بود. شور و نشاط و ولوله عجیبی برپا بود، در هر غرفه چند کامپیوتر قرا داشت که بعضی از آنها اختصاص به بازی‌هایی داشتند که به عنوان جایزه، برندگان می‌توانستند بازی کنند. دانش‌آموزان با تسلط بی‌مانندی جوابگوی بازدیدکنندگان بودند. طرح‌ها و بازی‌های خود را توضیح می‌دادند. یکی از دانش‌آموزان

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به عمل در می‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌ای خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آنها بپردازند.



دو نوع ماشین حساب [یکی با چهار عمل اصلی و دیگری برای عملیات کسری] طراحی کرده بود. دیگری برنامه‌ای تنظیم کرده بود که همه مسائل را با راه حل به کامپیوتر می داد و جواب های غلط را مشخص می کرد. بچه ها با مهارت از کامپیوتر استفاده می کردند؛ به همان سادگی و روانی که گذشتگان ما از چرتکه سود می بردند. دیدن اینهمه توانایی انسان را به وجد می آورد. با خود گفتم ما چه خواهیم، چه نخواهیم، چه دوست داشته باشیم یا بی علاقه باشیم بچه ها از ما پیشی گرفته اند و اگر خود را همراه با تحولات جدید جهانی نکنیم و به سلاح روز مجهز نباشیم و خواست کودکان، نوجوانان و جوانانمان را درک نکنیم و ابتکار عمل را به دست نگیریم، ناچار پشت سر آنها باید حرکت کنیم و دنباله روی فرزندانمان باشیم؛ مسأله ای که بارها و بارها دیده ایم و لمس کرده ایم. نسل نوپا و جوان ما از کلماتی استفاده می کند که برای ما نامفهوم است الفاظی به کار می برد که برای ما بیگانه است و از مسائلی صحبت می کند که ما معنایش را نمی دانیم همانقدر با کامپیوتر و اینترنت مأنوس است که ما با قلم و کاغذ. در چنین حال و هوایی وظیفه ما چیست؟ آیا برای بقای خودمان هم که شده نباید دست از مقاومت برداریم و خود را هماهنگ و همسو با تحولات جدید جهانی و همگام با عصر اطلاعات بکنیم؟ آیا وقت آن نرسیده که از رویارویی با تکنولوژی نهراسیم و در برابر ایده های نو جبهه نگیریم؟ همانطور که غرفه ها را، بازدید می کردم و غرق در افکار خود بودم ناگهان صدای زد و خورد چند نفر از بچه ها چرتم را پاره کرد، فضای نمایشگاه کاملاً طبیعی بود رفتارهای کاملاً طبیعی و بی پیرایه. دیدن جنب و جوش و شور و شوق دانش آموزان این باور را تقویت می کرد که «دانش آموز محوری» و «مدرسه محوری» می تواند از شعار خارج شده و تحقق یابد به این شرط که در درجه اول بچه ها و توانایی های آنها را باور کنیم و در درجه دوم به آنها اختیار بدهیم تا خود آزمایش کنند، تجربه کنند، اشتباه کنند، اشتباهاتشان را جبران کنند و... و در نهایت تصمیم گیرندگانی مطلع و متکی به نفس شوند که توان زیستن

در قرن بیست و یکم را داشته باشند.

چند نفر که خدس زدم از مسؤولین مدرسه هستند، در حیاط مدرسه به میهمانان خوش آمد می گفتند و راهنمایی می کردند، مدیر مدرسه آقای سعیدی بین آنها بودند. به ایشان گفتم که از طرف دفتر آموزش عمومی آمده ام، مرا به دفتر راهنمایی کردند و از اینکه بالاخره کسی به دعوتشان پاسخ داده هم اظهار تعجب و هم اظهار خوشحالی کردند. در مورد ساعات درس ریاضی و کار بچه ها و وضعیت یادگیری و نمره های آنها توضیحاتی دادند. دبیر ریاضی مدرسه آقای بایرامی مسؤول آموزش ریاضی بچه ها و برگزاری نمایشگاه بودند. ساعتی با ایشان به گفتگو نشستیم و از انگیزه و نحوه کار و تدریستان پرسیدم. ایشان گفتند وقتی از تربیت معلم و دانشگاه آمدم [آقای بایرامی، فوق دیپلم ریاضی و لیسانس مدیریت و برنامه ریزی از دانشگاه شهید بهشتی هستند.]، خواستم آنچه را که به من یاد داده بودند به کار گیرم. اما هرچه بیشتر می گذشت، بیشتر احساس ناتوانی و درماندگی می کردم. به تدریج دریافتم به جای متکلم وحده بودن باید شنونده خوبی باشم و با نیازهای دانش آموزان آشنایی پیدا کنم. به مطالعه کتاب های روانشناسی پرداختم و فهمیدم که باید بسترهای مناسب برای بچه ها ایجاد گردد تا انگیزه یادگیری در آنها به وجود آید و تقویت شود. به همین جهت با دانش آموزان ارتباط برقرار کردم. فهمیدم نقطه قوت و اقتدار من ایجاد ارتباط با بچه ها است.

به میانشان رفتم، حرف هایشان را شنیدم، نیازهایشان را تشخیص دادم و آنها را در یادگیری خودشان شریک کردم. دیدم آنها دوست دارند خود به کشف و ابداع بپردازند، دوست دارند در امر یاددهی-یادگیری مشارکت فعال داشته باشند، خدس بزنند، الگوسازی کنند، کشف کنند و خود فرمول ها و روابط را پیدا کنند. می خواهند در یک همکاری دستجمعی با تشریک مساعی و تبادل اطلاعات مسائل را حل کنند، به جای حفظ کردن مطالب به حل مسائل واقعی بپردازند و احساس کنند که خود می توانند و قادر به تبیین و

حل مسائل خود هستند.

به این ترتیب بود که طرحی نو در انداختم. کلاس‌های خشک و ترس‌آور ریاضی به تدریج به محیطی گرم و صمیمی و پرنشاط تبدیل شد. بازی<sup>۲</sup> را با ریاضی درآمیختم و از آنها خواستم بازی‌هایی را طرح کنند که هم جالب باشد و هم به یادگیری ریاضی کمک کند، همانطور که می‌بینید آنها خوب از عهده برآمده‌اند. ما در هفته ۸ ساعت ریاضی داریم ولی ۳ ساعت اضافه را کارهای تست و خارج از برنامه نمی‌کنیم، در نمازخانه، در حیاط مدرسه و در هر جا که بچه‌ها بخواهند آنها را در یک کار گروهی درگیر حل مسئله می‌کنم، بچه‌ها قادر می‌شوند بدون آنکه فرمول‌ها را بدانند مسائل را حل کنند و نتیجه‌گیری کنند و این ساعات اضافی باعث تعمیق و تفهیم بهتر مطالب کتابشان می‌شود. کلاس‌های ریاضی ما شلوغ و پرسر و صدا است. اما یک شلوغی تعریف شده که همه با هم کار می‌کنند و من بر کار آنها نظارت لازم و راهنمایی‌های لازم را می‌کنم. صحبت‌ها ادامه داشت من احساس می‌کردم که چنین کار زیبایی جز با همکاری مدیر مدرسه و سایر مسئولین امکان‌پذیر نمی‌شد. مدیر مدرسه خود در تمام مراحل آموزش همراه و همگام با بچه‌ها و معلم آنها بوده است. نقش تسهیل‌کننده و یاری‌دهنده را ایفا نموده و با ایجاد امکانات مناسب و همراهی‌ها و پشتیبانی‌های لازم، فضای مناسبی برای یادگیری ایجاد نموده است که امید می‌رود به نتایج مفید و مؤثری برسد.

موقع خداحافظی با آنکه احساس شادی و سبکی می‌کردم، در عین حال تأسف عمیقی وجودم را فراگرفت، با خود فکر کردم اگر پرونده این جریان در همین مدرسه بسته شود؛ اگر در سال‌های بعد معلمینی نباشند که چنین دیدی نسبت به ریاضی داشته باشند، اگر مدیر دبیرستان اجازه چنین غوغایی را در مدرسه ندهد، اگر ساعات اضافی به ریاضی اختصاص نیابد. اگر معلم‌ها مجبور شوند برای اتمام کتاب و بعضاً امتحانات هماهنگ، راه میان‌بر انتخاب کنند و یا اگر برای رضایت اولیاء مدرسه و توجیه هزینه‌های خانواده‌ها به جای ایجاد محیطی پرنشاط و پرتحرک برای حل

مسئله، به گفتن ده‌ها و صدها صفحه جزوه و نکته و تست و تکنیک و... بپردازند، سرنوشت این بچه‌ها چه خواهد شد؟ آیا باز هم آنان ریاضی را دوست خواهند داشت، آیا باز هم برای زنگ ریاضی لحظه شماری می‌کنند؟ آیا همچنان ریاضی را درس شیرینی می‌دانند؟ و یا... از ابتدای ورود به دبیرستان به جای لذت بردن از یادگیری و آموختن و زندگی کردن در چرخه معیوبی قرار می‌گیرند که روز به روز بر اضطراب و دلهره‌هایشان افزوده می‌شود و درصدد حفظ کردن نکاتی برمی‌آیند که بتوانند از پس کنکور بآیند و به کعبه مقصود برسند و... این‌ها مسائلی است که باید جدی گرفته شود.

اگر خواهان تربیت افرادی پرتوان، فکور، مصمم و مسئله حل‌کن هستیم، باید همه دست به دست هم بدهیم و از ابتدا تا انتها هماهنگ با هم عمل نماییم در غیر اینصورت اگرچه در درازمدت حتی یک گل هم بهار را می‌آورد، اما در کوتاه مدت با یک یا چند گل بهار نمی‌شود. باید مواظب این گل‌های تازه شکفته و معطر بود، باید آنها را تکثیر کرد و مراقبت نمود که پرپر نشوند تا گلستانی به وجود آید که از رایحه دل‌انگیز آن مشام جان همه جامعه عطرآگین شود. برای همه دلسوزان امر تعلیم و تربیت و تمام کسانی که صمیمانه و مصرانه می‌کوشند به این گفته مولای متقیان (علی (ع) که فرمود: «فرزند زمان خویش باش» جامعه عمل بپوشانند و با دیدی ژرف و عمیق پیرامون خود و ماورای پیرامون را می‌نگرند و به نیازهای نسلی جوان توجه دارند. آرزوی توفیق و سربلندی داریم.

#### زیرنویس

۱. سهراب سپهری

۲. لازم به ذکر است که در بازی‌های دانش‌آموزان روح ریاضی دیده نمی‌شد یعنی بازی‌هایی نبود که خود بازی به یادگیری مفاهیم ریاضی بینجامد اما همین که سعی کرده بودند بازی را چاشنی مطالب ریاضی کنند خود می‌تواند محملی برای حرکت‌های بعدی باشد.



# روش تدریس ریاضی در مدارس

تهیه و گردآوری توسط : ذبیح الله شاهرخیان و محمدحسن پورمحمدباقر<sup>۱</sup>،  
مدرسین آموزشکده فنی شهرکرد

## مقدمه

براساس توازن برپا شده است. همچنین آیات دیگری که در آنها صحبت از اندازه بندی شده است، مانند این آیه که (و ان من شی الا عندنا خزائنه و مانزله الا بقدر المعلوم) (سوره حجر - آیه ۲۱) در این جهان هیچ نیست مگر آنکه خزانه و گنجینه وجودی آن به دست ماست و ما آن را جز به اندازه معلوم فرو نمی فرستیم.

در آغاز سوره (اعلی) نیز می خوانیم:

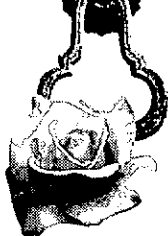
(سبح اسم ربك الاعلی الذی خلق فسوی و الذی قدر فهدی) تسبیح و ستایش کن نام پروردگار خویش را، آنکه آفرینش را آفرید و موزون آفرید و آنکه آفرینش را اندازه بندی و سپس هدایت کرد.

البته همه هستی در ریاضیات خلاصه نمی شود، اما قرآن می گوید هستی اندازه و حساب دارد و همین امر پشتوانه محکمی برای ریاضیات در تمدن اسلامی محسوب می شود. براساس همین تأیید قرآنی بوده است که مسلمانان توانسته اند میراث باستانی ریاضیات را از حوزه فرهنگی قبل از اسلام به خوبی دریافت کنند و همین جهان بینی اسلام بوده که زمینه را برای پذیرش این علم آماده کرده است. مسلمین ریاضیات یونانی و رومی را از اسکندریه، از

با نگاهی به تاریخ تمدن به این نکته پی می بریم که هیچ تمدن بزرگی در عالم ظهور نکرده، مگر آنکه در ریاضیات قوت داشته است. اگر به تمدن مصر باستان، بین النهرین، هند، چین، یونان، اسکندریه مراجعه کنیم می بینیم در همه این تمدن ها ریاضیدانان بزرگی ظهور کرده اند که چهره پرداز ریاضیات جهان در زمان خود بوده اند.

بعد از ظهور اسلام نیز می بینیم که اوج اعتلای تمدن اسلامی با اوج قدرت ریاضیات در عالم اسلام انطباق دارد. در اسلام ریاضیات از لحاظ نظری جایگاه والایی دارد. جهان بینی اسلام نه تنها با بینش ریاضی ناسازگاری ندارد بلکه آن را تأیید می کند و به آن قوت می بخشد. در قرآن آیات مختلفی وجود دارد که صریحاً دال بر آن است که جهان بر حساب مبتنی است و کار جهان حساب و کتاب دارد.

از این آیات چنین فهمیده می شود که در کار آفرینش عدد و رقم دخیل است و هستی اندازه بندی شده است. شاید تعداد این آیات از ۱۵ کمتر نباشد و از آن قبیل است آیاتی در آغاز سوره الرحمن که در آنها سخن از این است که شمس و قمر، گردش و حرکتی از روی حساب دارند و آسمان



### نقش ریاضیات در زندگی بشر

سؤالی که کراراً توسط دانش آموزان، دانشجویان و حتی دبیران مطرح می شود این است که چرا ریاضیات می خوانیم؟ و یا چرا ریاضیات باید مورد توجه هر دانش آموزی باشد؟ و یا ریاضیات چه نقشی در زندگی روزمره دارد؟ این پرسشی است که همیشه مطرح بوده است. شاید عمده ترین انگیزه مطالعه و گسترش ریاضیات و نخستین دلیل برای اهمیت دادن به آن و به کار گرفتن این دانش در مطالعه طبیعت و به منظور شناخت محیط زیست و بهره برداری از آن در جهت زندگی بهتر و راحت تر باشد.

در تمدن امروزی استفاده عملی ریاضیات در صنعت به حد اعجاب آوری رسیده است. کافی است به ماشین ها، قطارها، هواپیماها، کشتی ها، موشک ها، سینما، رادیو و تلویزیون، تلفن و دیگر وسایل مخابراتی، محصولات و وسایل مفید خانگی مانند: یخچال، جاروبرقی و غیره نگاه کنیم تا بدانیم در طراحی و دستیابی به اینها ریاضیات چه نقش اساسی بازی کرده است.

بسیاری از پرسش های پیچیده بیولوژیکی، دارویی و پزشکی امروزه پاسخ خود را در ریاضیات جستجو می کنند. ریاضیات است که در این موارد کمک ارزنده ای می نماید. مثلاً روش های تأثیر یک دارو و نحوه پخش آن در بدن از طریق ریاضی بیان می شود.

ریاضیات در زمان های مختلف از جنبه های متفاوت مورد علاقه و مطالعه قرار گرفته است که ریشه اصلی آنها را می توان در ساختار جوامع، نیازها و ارزش های حاکم بر آنها در مقاطع خاصی از زمان جستجو کرد.

در عصر حاضر که رشد عظیم تکنولوژی که خود مدیون ریاضیات است موجب تحولات عظیمی در زندگی انسان شده است و زندگی های ساده اولیه جای خود را به زندگی پیچیده ماشینی داده اند، ریاضیات بیش از پیش جای خود را در تمام شئون اجتماعی و صنعتی باز کرده است و بشر ناچار است برای یافتن پاسخ های لازم و مناسب به پرسش های پیچیده خود به ریاضیات به معنی اعم کلمه پناه ببرد.

مدارسی که در مجاورت حوزه جغرافیایی ظهور اسلام بود فراگرفتند و علاوه بر آن سنت ریاضی هند را نیز کسب کردند و این دورا با هم درآمیختند و برای چند صدسال پرچمدار دانش ریاضی در جهان بودند.

### خصوصیات فعالیت های ریاضی

از جنبه آموزشی، ریاضیات را می توان مترادف با فعالیت های ریاضی پنداشت (بعضی ها می گویند ریاضیات آن چیزی است که ریاضیدانان انجام می دهند). فعالیت های ریاضی خصوصیات چندجانبه دارند که اهم آنها به قرار زیر است:

الف- با توجه به دنیای واقعی، به کشف روابط و مفاهیم موجود پرداخته و بدان ها سازمان و ساختار می دهد.

ب- از طریق طبقه بندی و مجرد کردن به کشف مفاهیم پرداخته و به عمومیت دادن آن می پردازد. فی المثل از توجه به مثلث فیزیکی و مجرد کردن (ایده آل نمودن) آن به مثلث ریاضی می رسیم و سپس با تعمیم به چهارضلعی ها، پنج ضلعی ها و به طور کلی  $n$  ضلعی ها پی می بریم.

ج- فعالیت های ریاضی اعجاب انگیزند که این امر مغایر با شهودگرایی صرف می باشد. برای مثال با استفاده از مفاهیم تناظر یک به یک و هم عدد بودن نشان داده می شود که مثلاً مجموعه نقاط پاره خطی به طول یک کیلومتر برابر با مجموعه نقاط پاره خطی به طول یک سانتیمتر است.

د- فعالیت های ریاضی شامل استخراج نتایج از مفروضات، کنترل کردن نتایج و قانع کردن دیگران در مورد نتایج حاصله اند.

فعالیت های ریاضی به نسبت زیادی به نمادها بستگی دارند.

نمادها در ریاضیات نقش بسزایی دارند، که اهم آن عبارتند از ایجاد ارتباط، آسان نمودن روابط پیچیده و ثبت دانش ریاضی.

فعالیت های ریاضی شامل مهارت های طبیعی و فطری اند که عبارتند از: فکر کردن، با جهان فیزیکی مواجه شدن، فعالیت های ذهنی و خلق ذهنی کردن و مدل سازی.



به طور کلی امروزه ریاضیات از جنبه های زیر مورد توجه قرار دارد:

الف - یک ابزار: یعنی از دیدگاه کاربردی که ارزش و ضرورت آن روز به روز در جوامع کنونی بیشتر احساس می شود.

ب - یک زبان: یعنی وسیله ای برای نمایش دانش، توصیف، تجزیه و تحلیل و انتقال آن که ضرورت آن به مناسبت گنگ و نارسا بودن زبان های معمولی غیر قابل انکار است.

ج - یک زمینه تربیتی: به منظور پرورش و نظم فکری و بالا بردن قدرت اندیشه و استدلال منطقی و نیز قوه خلاقیت ذهن. شاید این جنبه مهم ترین هدف از تدریس ریاضی در مدارس باشد.

د - یک موضوع: برای این که علاقه می آفریند و لذت می بخشد، ریاضیات ارزش مطالعه فی نفسه و مستقل از کاربرد دارد. این جنبه، آزادی اندیشه را از قید زمان و مکان طلب می کند. زیرا در بسیاری از موارد مطالعات در خارج از فضای سه بعدی و در فضا های آفریده شده ریاضیدان صورت می گیرد.

برای حل مسائل و یافتن پاسخ به سؤالات مطرح شده اولین قدم آن است که آن مسئله یا سؤال را به صورت ریاضی درآوریم یعنی اطلاعات را به زبان ریاضی توصیف کنیم. پس از اجرای این مرحله است که مسئله را می توان با ابزار ریاضی که همان اصول و قضایا باشند تجزیه و تحلیل نموده و پاسخ لازم را پیدا کنیم.

این مرحله ایست که بسیار مهم است و اگر آموزش ریاضی نتواند دانش آموز را برای این مرحله آماده کند کار از همان آغاز نادرست است و بدانجا می کشد که دانش آموز در حل مسائل ناتوان و نسبت به ریاضی بدبین شود، و در حقیقت برداشت درستی از تحصیل ریاضی خود نداشته باشد. برای این که اهمیت این مطلب روشن شود به نظریات بعضی از دانشمندان اشاره می شود؛

لئونارد داوینچی: هیچ دانشی را نمی توان دانش واقعی دانست مگر آنکه به صورت ریاضیات متجلی شود.

گالیله: اصول ریاضیات الفبای زبانی است که خداوند جهان را به آن زبان نوشته است و بدون کمک آن درک یک کلمه هم غیر ممکن است و انسان تنها بیهوده در راهرو های تاریک و پر پیچ و خم سرگردان است.

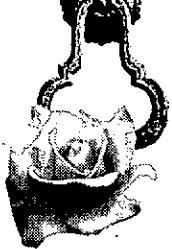
راجر بیکن: ریاضیات کلید دروازه علوم است. غفلت از ریاضیات به همه دانش ها لطمه می زند، زیرا کسی که ریاضی نمی داند علوم دیگر را نمی تواند درک کند و اشیاء دیگر جهان را بشناسد و بدتر از آن کسانی که این گونه نادانند نمی توانند جهالت خود را درک کنند و در نتیجه به فکر علاج آن نیز نمی باشند.

نقش ریاضیات از دید تربیتی بسیار مهم و با ارزش است و بدون شک باید مهم ترین هدف از تدریس ریاضی در مدارس باشد. همان طور که برای ساختن بدن سالم نیاز به ورزش های فیزیکی داریم و همانگونه که می توان با تمرین های خاص قسمت های مختلف بدن را پرورش داد تا از توانایی ویژه و یا بیشتری برای انجام کارهای معینی برخوردار شویم و یا مقاومت بیشتری در برابر امراض گوناگون پیدا کنیم، مغز انسان نیز به تمرین و ورزش خاص خود نیاز دارد تا در زمینه های مختلف ساخته شود.

یکی از وظایف مغز انسان استفاده از آن برای انبار کردن اطلاعات (حافظه) است. بالا بردن قدرت حافظه برای نگهداری داده ها امری است ضروری که از طریق حفظ کردن و تمرین های مخصوص حاصل می شود. از آنجایی که بسیاری از درس های مدارس ما تنها از دید آموزشی، این نقش را بازی می کنند نیازی به این که در دروس ریاضی تأکید زیادی به این مهم شود نیست و باید انرژی و وقت را صرف وظایف دیگر مغز بکنیم. ولی متأسفانه بسیاری از معلمین ریاضی ما تنها به این قسمت اکتفا می کنند!

وظیفه دیگر مغز نحوه استفاده صحیح و به موقع از این اطلاعات در برخورد با موقعیت های جدید است، که خود مستلزم توانایی لازم برای تجزیه و تحلیل داده ها و یا پیوند دادن آنها به یکدیگر است تا اطلاعات جدیدی به دست آورد و همواره بر ذخیره انبار بیفزاید.

به عبارت دیگر این قدرت خلاقه ذهن است که وجه تمایز



دانستن را به دانش آموزان پیاموزد نه اینکه به انتقال فرمول ها و معلومات اکتفا کند، حتی از این هم فراتر رفته تدریس را به یک نوع روان درمانی تشبیه کرده اند زیرا همان طور که در روان درمانی روان شناس صرفاً به بیمار کمک می کند تا مشکلات خود را بشناسد و آن را رفع کند از نظر این دانشمندان در تدریس هم دانش آموزان خود مطالب را فرامی گیرند و معلم به آنها کمک می کند تا مطالب را فراگیرند، تا آنجا که معلم را عامل اصلی در فرایند تدریس و یادگیری می دانند لذا توجه به کیفیت تدریس معلمان باید امری بسیار جدی تلقی گردد و وظیفه مسئولان است که در فراهم آوردن وسایل و بهبود آن تلاش کنند.

لانجرن<sup>۱</sup> تدریس را فرآیند پیچیده و از قبل برنامه ریزی شده ای می داند که توسط معلم در کلاس اجرا می شود و هدف عمده اش ایجاد درگیری و تعامل عینی و ذهنی یادگیرنده با مطالب یادگرفتنی است. بنابراین معلم باید دانش آموزان را با مطالب یادگرفتنی درگیر نماید و راه و روش دانستن را به آنها پیاموزد نه این که تنها به انتقال فرمول ها و معلومات اکتفا کند.

بنابراین به اهمیت فعال نمودن دانش آموزان و ایجاد پایداری در آموخته های آنان در حین تدریس، تأکید فراوانی شده تا آنجا که تدریس را به یک نوع روان درمانی تشبیه کرده اند.

کارل راجرز<sup>۲</sup> می گوید: همان طور که در روان درمانی روان شناس صرفاً به بیمار کمک می کند تا مشکلات خودش را بشناسد و به چگونگی رفع آن مشکل نیز پی ببرد، در تدریس نیز دانش آموز خودش مطالب را فرامی گیرد و معلم فقط به او کمک می کند تا به هدف های آموزشی نزدیک شده و آنها را فراگیرد.

فلیپ کومبز معتقد است که از میان عوامل درون مدرسه ای ۵ عامل اهداف آموزش، برنامه های درسی، معلمان، روش های تدریس و تکنولوژی آموزشی تأثیر ویژه و مهمی بر کیفیت تدریس دارند. اما اکثر صاحب نظران معتقدند که معلمان عامل اصلی در فرایند تدریس و یادگیری هستند.

انسان یا حیوان می باشد و بدون شک مهم ترین وظیفه مغز است. توانایی در این قسمت است که انسان را قادر می سازد در برخورد با مسائل و مشکلات جدید چگونه از دانش قبلی خود (از انبار داده ها) استفاده کند و راه حل مناسب را پیدا نماید تا به هدف از پیش مشخص شده خود دست یابد.

در بالا بردن و کارایی این وظیفه و دادن توان لازم به مغز، ریاضی است که نقش اساسی را بازی می کند.

بزرگترین فایده ریاضیات در دوره های ابتدایی و متوسطه (که مغز در حال رشد و شکل گرفتن است) همین جنبه است. درحقیقت مسائل و تمرین های فکری ریاضی در این دوره ها ورزش لازم برای پرورش این وظیفه مغز هستند. شکی نیست که اهمیت این ورزش از ورزش های بدنی به مراتب بیشتر است. اینها سازنده اندیشه و فکر سالم هستند که عامل تعیین کننده شخصیت اجتماعی است. همین جنبه ریاضی است که افراد تحصیل کرده را از افراد عامی متمایز می سازد و به آنها توانایی می دهد با مشکلات روزمره به طور منطقی برخورد کنند و آنها را معقولانه حل نمایند.

اگر معلمی به هر دلیلی در رسیدن به این هدف یعنی برداشت درست تربیتی از ریاضی تعلل ورزد وظیفه اصلی خود را انجام نداده است. دانش آموزی هم که توانایی لازم را در این قسمت به دست نیاورد نه تنها ممکن است توفیقی در تحصیل پیدا نکند بلکه در زندگی اجتماعی نیز از طریق راه های سالم پیروزی چشمگیری نخواهد داشت. ریاضیات غذای مغز است و اگر این غذا حساب شده و منظم در دوران جوانی انسان به آن نرسد رشد لازم را نخواهد کرد و ناتوان و رنجور خواهد شد به طوری که درمان آن شاید هیچ وقت مقدور نشود.

### عوامل مؤثر در بهبود کیفیت تدریس

تدریس در گذشته از دیدگاه عده ای از متخصصان تعلیم و تربیت به معنی انتقال معلومات بوده حال آنکه صاحب نظران جدید تعلیم و تربیت تدریس و تفهیم مطالب پیچیده درس به دانش آموزان تلقی می کنند که معلم می بایست راه و روش



### ب. ایجاد انگیزه و تشویق دانش آموزان

طبیعت انسان‌ها به گونه‌ای است که وقتی در انجام امور مورد تشویق قرار می‌گیرند درصدد برمی‌آیند تا آن کارها را بهتر انجام دهند مخصوصاً در سنین پایین که انسان‌ها پیچیدگی کمتری دارند و از طرف دیگر چون مسائل فکری را نمی‌توان با زور و اجبار به دیگران یاد داد، باید انگیزه لازم برای یادگیری در افراد ایجاد نمود تا خودشان به طور دلخواه به فراگرفتن آن امور پردازند. بنابراین معلم باید به انحاء مختلف برای علاقه‌مند کردن و ایجاد انگیزه در دانش آموزان کوشش کند. برای این منظور ممکن است از تشویق یا تنبیه استفاده شود.

البته نباید از نظر دور داشت که پاداش نقش مهمتری نسبت به تنبیه ایفاء می‌کند.

هلیگارد<sup>۲</sup> می‌گوید پاداش به عنوان عامل انگیزشی برتر از کیفر است.

### پ. مشارکت دانش آموزان در فرایند یادگیری

چون وظیفه اساسی معلم در تدریس، راهنمایی دانش آموزان برای یادگیری است، لذا باید با استفاده از شیوه‌های گوناگون و در موقعیت‌های مختلف، دانش آموزان را فعالانه با مطالب یادگرفتنی و موقعیت‌های یادگیری درگیر نماید. مشارکت دانش آموزان در فرآیند یادگیری آن قدر مهم است که بعضی ادعا کرده‌اند که معلم و تدریس خوب را می‌توان از میزان مشارکت دانش آموزان آن کلاس‌ها در فعالیت‌های یادگیری شناخت.

سعی و تلاش معلمان خوب و کارآمد آن است که همه دانش آموزان را به نوعی در اداره کلاس مشارکت دهند تا آنها احساس کنند با کمک همدیگر کلاس را اداره می‌کنند، زیرا فرصت دادن به دانش آموزان برای ارائه نظرات و پیشنهادات موجب ارضاء نیاز خودنمایی دانش آموزان می‌گردد. همچنین موجب عمق و وسعت یادگیری آنها می‌شود.

### ت. بکار بردن شیوه‌های مناسب تدریس

شیوه‌های متنوعی برای تدریس وجود دارد که هر کدام

همه فعالیت‌های آموزشی و سرمایه‌گذاری‌هایی که در آموزش و پرورش انجام می‌شود به‌خاطر برپایی کلاس و تحقق تدریس خوب می‌باشد، زیرا از طریق تدریس، اهداف نظام تعلیم و تربیت تحقق می‌یابد و تا موقعی که در طرز تدریس معلمان تغییر و بهبودی حاصل نشود، ساختمان‌های جدید، وسایل نقلیه، وسایل آموزشی و غیره هیچ‌یک برای بهبود کیفیت آموزشی مدارس، نقش مهمی نمی‌توانند ایفاء کنند.

یادگیری دانش آموزان در مدارس، به عوامل بسیار زیادی از جمله سوابق خانوادگی، انگیزه تحصیل دانش آموزان، برنامه‌ریزی درسی، زمان اختصاص یافته به آموزش و تمرین، توانایی دبیران در اداره کلاس بستگی دارد. اما تا زمانی که کیفیت تدریس معلمان به‌طور رضایت‌بخش حل نشود پرداختن به سایر مسائل آموزش و پرورش، نظیر تدوین برنامه‌ها و طراحی مراحل آموزش و پرورش امر بیهوده‌ای است.

بنابراین توجه به کیفیت تدریس معلمان باید امری بسیار جدی تلقی شود و مسئولان امر برای بهبود آن همواره تلاش نمایند.

برای بهبود کیفیت تدریس معلمان رهنمودهایی تحت عناوین ذیل ارائه شده است:

### الف. شناخت دانش آموزان و صمیمی بودن با آنها

همه صاحب‌نظران تعلیم و تربیت معتقد به وجود تفاوت‌های فردی در دانش آموزان می‌باشند، اما در چگونگی وجود آن تفاوت‌ها اختلاف نظر وجود دارد.

در هر حال شناخت این تفاوت‌ها خواه تفاوت در استعداد و یا تفاوت در سرعت و شرایط یادگیری باشد، برای معلم یک ضرورت اجتناب‌ناپذیر است. درحالی که معلم باید خصوصیات مختلف دانش آموزان خود را بشناسد، باید با همه آنها صمیمی باشد و به همه آنها به یک چشم بنگرد، درست است که وجود استعداد‌های مختلف در افراد معلم را وامی‌دارد تا برخوردهای متفاوتی با دانش آموزان داشته باشد، ولی در صمیمی بودن با آنها نباید تفاوت قائل شود.



نباشند. به عبارت دیگر هر فردی باید ناظم خودش باشد. زیرا خودکترلی دانش‌آموزان در کلاس عامل مهمی است که ضمن ایجاد نظم و آرامش در کلاس درس موجب بهبود کیفیت تدریس می‌شود.

اگر معلم بتواند سایر ویژگی‌های تدریس خوب مانند بیان اهداف درس و ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان را در کلاس به خوبی اجرا کند، خودبه‌خود انضباط در کلاس حکمفرما می‌شود و هرکس ناظم خود می‌شود. بسط<sup>۵</sup> در این زمینه معتقد است که: بسیاری از بدرفتاری‌های جزئی که در کلاس پیش می‌آید، ناشی از دست‌کم گرفتن روش‌های تدریس و مشارکت غیرفعالانه دانش‌آموزان در کلاس است.

هرگاه محیط طبیعی و دلچسب، تدریس عالی و رابطه خوب بین دانش‌آموزان و معلمان وجود داشته باشد، ممکن است جلوی بسیاری از بی‌انضباطی‌ها گرفته شود.

### ج. استفاده از وسایل و امکانات کمک‌آموزشی

در صورتی که از حواس مختلف انسان برای یادگیری استفاده شود، مسلماً یادگیری راحت‌تر و عمیق‌تر صورت می‌گیرد، لذا تدریسی بهتر است که حتی الامکان حواس بیشتری را در یادگیری درگیر نماید. باید به جای توضیح و بیان طرز صحیح انجام دادن کارها، عملاً آن امور را به دانش‌آموزان نشان داد. از طرفی چون دانش‌آموزان یک کلاس توانائی‌های فکری متفاوتی دارند، معلم نمی‌تواند با برنامه کلاس همه آنها را غناء کند. کتاب‌های رسمی نیز در حد توان متوسط دانش‌آموزان تنظیم می‌شود، لذا معلم باید از وسایل کمک‌آموزشی متنوع نظیر مجله، فیلم و غیره استفاده کند و به هریک از دانش‌آموزان متناسب با توانایی‌هایشان وسایل کمک‌آموزشی بدهد یا آنها را راهنمایی کند تا از آنها استفاده کنند.

### ح. ایجاد شرایط فیزیکی مناسب در کلاس

گرما یا سرمای بیش از حد کلاس، نامناسب بودن نظافت و نور کلاس، سروصداهای غیرمعمول و تعداد

برای شرایط و درسی خاص مناسب است، لذا معلم باید با توجه به هدف‌های آموزشی، موضوع درسی، خصوصیات دانش‌آموزان، امکانات موجود، جو حاکم بر کلاس، تعداد دانش‌آموزان و زمان در این گونه موارد مناسب‌ترین شیوه تدریس را انتخاب کند.

روش‌های تدریس فی‌نفسه بد یا خوب نیستند بلکه نحوه و شرایط استفاده از آن روش‌ها موجب ضعف یا موفقیت تدریس می‌شود. اگر روش انتخاب شده با اهداف، توانایی‌های دانش‌آموزان، محتوی درس منطبق نباشد و یا معلم مهارت‌های لازم برای استفاده از آن روش‌ها را به دست نیاورد یا زمینه اجرای آن روش‌ها را در کلاس فراهم ننموده باشد، معلم با شکست مواجه می‌شود و کیفیت تدریس او مناسب نخواهد بود.

### ث. مراعات اصول ارائه مطالب

ارائه مطالب به دانش‌آموزان، باید با رعایت اصول و ترتیبی انجام شود تا یادگیری را آسان‌تر و پایدارتر کند. بروس جویس<sup>۴</sup> می‌گوید: معلم باید مطالب آموزشی خود را در خلال مراحل زیر آموزش دهد:

مطلع کردن یادگیرنده از اهداف آموزشی، ایجاد انگیزه و جلب توجه یادگیرنده، یادآوری مطالب قبلی مربوط به درس جدید، ایجاد شرایط ارائه درس و رعایت تسلسل و هدایت بحث در کلاس.

### ج. برقراری نظم و انضباط در کلاس

از جمله نشانه‌های تدریس موفق آن است که معلم بتواند نظم و انضباط منطقی را در کلاس حکمفرما کند و صرفاً به ارائه درس توجه نداشته باشد. منظور از انضباط، ساکت و آرام بودن و گوش دادن به حرف‌های معلم نیست. زیرا جو کلاس باید متنوع و دوست‌داشتنی باشد، به طوری که هر دانش‌آموز احساس آرامش و دل‌بستگی به کلاس داشته باشد. البته در چنین جوی دانش‌آموزان باید یاد بگیرند که چگونه رفتار کنند، تا محل برنامه کلاس و حقوق دیگران



بیش از حد دانش آموزان در کلاس، موجب کاهش کیفیت تدریس می شود تا آنجا که کثرت دانش آموزان را بزرگترین مانع پیشرفت آموزشی و تربیتی به شمار می آورند.

### خ- ارزشیابی مستمر دانش آموزان

تدریسی موفق است که اکثریت دانش آموزان مطالب درسی را خوب بفهمند، برای این که بدانیم دانش آموزان مطالب درسی را فراگرفته اند یا نه، باید باز خورد دانش آموزان را سنجید با سؤال کردن درباره موضوع مطرح شده در کلاس، دادن تست های کوتاه در پایان هر کلاس، انجام تست های ماهیانه و غیره معلم باید همواره میزان یادگیری دانش آموزان را بسنجد تا بتواند روش ها و برخوردهای خود را اصلاح کند. به قول بسلر ارزشیابی یک فرایند دائمی است، بدین معنی که معلم باید همواره مراقب رفتار دانش آموزان در کلاس باشد و پیشرفت آنها را در نیل به هدف ها و مقاصد آموزشی تعیین کند.

ارزشیابی باید بدان صورت انجام شود که اولاً معلم نقایص و عیوب کار خود را درک کند، ثانیاً دانش آموزان بفهمند که در چه سطح از یادگیری قرار دارند تا بتوانند ضعف های خود را جبران کنند.

لازم به ذکر است که منظور از ارزشیابی فقط برگزاری امتحان رسمی نیست، بلکه هر وسیله یا عملی که به نحوی توانایی های دانش آموزان را بررسی و تشخیص دهد مورد نظر است.

### رشد تفکر ریاضی

ریاضیات با ساختارها و اعمال سر و کار دارد. این ساختارها و اعمال تصویرهایی ذهنی هستند. همچنین راه های انجام این امور یک فعالیت ذهنی است. به عبارت دیگر ریاضیات به تفکر وابسته است.

تشکیل مفاهیم در ذهن کودکان عموماً حالتی تدریجی و تکاملی دارد. کودکان قبل از دبستان یک مفهوم از عدد دارند که با مفهوم عدد که در پایان ابتدایی فرامی گیرند متفاوت است ولی این مفهوم شکل تکامل یافته ای از مفهوم قبلی

است و مسلماً مفهومی از عدد که دانشجو در ذهن دارد با مفهوم عدد که دانش آموزان دوره راهنمایی دارند فرق می کند. همچنین مفهومی از عدد که یک منطق دان در ذهن دارد با تعریفی که یک دانشجو از عدد دارد تفاوت می کند. ولی همه اینها به هم مرتبط بوده و هر یک شکل تکامل یافته ای از مفهوم مجرد قبلی است.

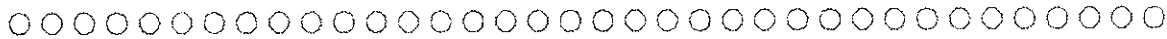
سایر مفاهیم ریاضی نیز وصفی مشابه دارند. حتی کسانی که تحصیلات رسمی از ریاضیات ندارند غالباً از مفاهیم ریاضی چون عدد، فضا و حتی مفاهیم توپولوژیکی مطلع هستند.

وظیفه مدرس ابتدایی آن است که با برنامه ریزی منظم و متناسب با مراحل رشد تفکر کودکان زیربنای فراگیری مفاهیم اساسی ریاضی در ذهن کودکان به وجود آورد تا در مراحل بعدی با استفاده از این، حربه به عنوان یک پیشتاز، بهتر بتواند این مفاهیم را تکمیل کرده و به مطالعات دقیق تر دست یابند.

این که فی المثل ما در دبیرستان مفهوم حد را با نماد و عبارت منطقی ولی به گونه ای ابتدا به ساکن معرفی کنیم کار نادرستی است و نتیجه مطلوب عایدان نمی شود. زیرا حاصل چنین آموزشی این می شود که دانش آموزان از عهده حل مسائل به صورت ماشینی برآمده ولی در درک ریاضیات و کاربرد آن که مستلزم تسلط بر مفاهیم ریاضی است بسیار عاجز باشند. لذا پیشنهاد می شود که برنامه ریزی آموزشی جزرونی مورد تأکید قرار گیرد. بدین گونه که پس از طی هر دور مجدداً مفهوم قبلی کامل تر شده و رشد و کمال می یابد و آموزش حالتی پیوستار داشته و لذا دانش آموزان اطمینان و اعتماد بیشتری به مفاهیم فراگرفته شده می نمایند.

### چگونه ریاضی را آموزش دهیم؟

هنگامی که از روش صحبت می شود طبعاً این سؤال پیش می آید که هدف از انجام این کار چیست؟ و چه کسانی در انجام آن دخالت دارند؟ در آموزش ریاضی، هم باید هدف را مشخص ساخت و هم خصوصیات دانش آموز را شناخت. آنگاه بهترین روش آن است که به ساده ترین راه و



۳- ایجاد توانایی در انجام دادن محاسبات ذهنی و حدس و تخمین زدن کمیت‌ها در حدود نیازهای زندگی روزمره. بدین صورت دانش آموز تدریجاً توانایی انجام محاسبات ذهنی را در حد نیاز در اجتماع به دست می‌آورد و می‌تواند از طول، مساحت وزن و... اجسام محیط خود برآورد نسبتاً درستی داشته باشد.

۴- آموزش ریاضیات مورد نیاز در رابطه با سایر دروس همگانی.

بدین صورت ریاضیات مورد نیاز دروس دیگر دوره همگانی آموزش داده می‌شود.

۵- ایجاد توانایی در برآورد راه حل مسائل و حدس جواب آنها.

بدین صورت به تدریج در دانش آموز توانایی تصور راه حل یک مسئله قبل از به دست گیری قلم و کاغذ ایجاد می‌شود و بالتجربه توانایی پیدا کردن خطوط کلی راه حل مسائل زندگی در او تقویت می‌گردد.

۶- ایجاد توانایی درک محتوای ریاضی مسائل، به قالب ریاضی درآوردن و حل آنها.

چون بسیاری از مسائل زندگی روزمره که به کمک عبارت‌ها و جمله‌ها بیان شده‌اند الگویی ریاضی در خود نهفته دارند، با رسیدن به این هدف دانش آموز تدریجاً قادر به تشخیص این الگو می‌گردد. یعنی نخست محتوای ریاضی مسئله را می‌شناسد و سپس با به کار بردن الگوی ریاضی مناسب آن را حل می‌کند.

با توجه به هدف‌های تعیین شده فوق می‌توان اهداف آموزش ریاضی را به طور کلی به سه دسته پرورشی، آموزشی و فرهنگی به شرح زیر تقسیم کرد:

الف- پرورش توانایی‌های ذهنی و فکری دانش آموز و ایجاد نظم فکری در وی.

ب- آموزش تکنیک‌های محاسبه‌ای مورد نیاز دانش آموز در خارج از مدرسه.

ج- آشنایی دانش آموز با ریاضی به عنوان بخشی از فرهنگ و اندیشه بشری.

اهداف پرورشی آموزشی ریاضی بدون شک مهم‌ترین

با توجه به خصوصیات دانش آموز و امکانات ما را به هدف برساند. بنابراین اصل رسیدن به هدف‌های آموزشی آموزش ریاضی است، نه ساده بودن راه. اما زمانی که هدف مشخص باشد مسلماً روشی بهتر است که اجرای آن ساده‌تر و عملی‌تر و با زبان متناسب باشد و اطمینان رسیدن به هدف در آن بیشتر باشد.

منظور از شناخت خصوصیات دانش آموزان این است که توانایی‌های جسمی و ذهنی آنها را بشناسیم و بدانیم تا چه حد قدرت مفاهیم را دارند. چه عواملی در آموزش دانش آموزان نقش دارند و چه راه‌های عملی برای علاقه‌مند کردن دانش آموزان وجود دارد.

بنابراین بحث را در چگونگی آموزش ریاضی و انتخاب بین این یا آن روش طی مراحل زیر دنبال می‌کنیم.

الف- اهداف آموزش ریاضی

ب- هوش و انگیزش

پ- اصول کلی آموزش ریاضی

الف- اهداف آموزش ریاضی

از آنجا که هدف کلی آموزش و پرورش در دوره عمومی آماده ساختن فرد برای زندگی در تمام ابعاد است لذا آموزش ریاضی در این دوره باید در جهت نیل به هدف‌های کلی زیر می‌باشد:

۱- پرورش نظم فکری و درست اندیشیدن از طریق آموزش به کار بردن صحیح دانسته‌ها برای به دست آوردن نتیجه‌ها. بدین طریق دانش آموز با توجه به مراحل مختلف استدلال و نظم حاکم بر آن در بیان یک مطلب یا یک حل مسئله، درمی‌یابد که چگونه می‌تواند دانسته‌های خود را برای به دست آوردن نتایج جدید به کار گیرد.

۲- ایجاد توانایی برای محاسبات عددی در زندگی روزمره. بدین ترتیب دانش آموز پس از اتمام دوره همگانی قادر به انجام محاسباتی خواهد بود که در زندگی عادی به آن نیاز دارد. از قبیل چهار عمل اصلی، درصدها، نسبت‌ها، تناسب و غیره.



۷- با ارائه عکس یا شرح حال و یا نمونه کار ریاضیدانان بزرگ به ویژه ریاضیدانان ایرانی، دانش آموز با تاریخ ریاضیات آشنا و سهم دانشمندان ما در پیشرفت ریاضیات برای او روشن شود.

۸- سنت های نادرست گذشته را به دور بریزند اگرچه به صورت عادت درآمده باشد.

۹- در محاسبات عددی، ذهنی و حل مسئله علاوه بر دقت، سرعت عمل را در دانشجویان تقویت کنند.

۱۰- با طرح پرسش های مناسب امکان ارزشیابی مستمر دانسته های دانش آموزان را فراهم نمایند. از دیگر عوامل مهم رسیدن به اهداف، هنر معلم در تدریس ریاضیات است. به عبارت دیگر هنر معلم در تدریس، در رسیدن یا عدم رسیدن به اهداف بسیار مؤثر می باشد.

ویلیام لیون فیلپس تدریس را چنین تعریف می کند: تدریس یک هنر است. هنری آن چنان والا و به اندازه ای مشکل که یک مرد یازن ممکن است مدت زیادی از عمرشان را صرف آموختن آن کند و هنوز نتواند در آن تجربه کافی بدست آورد و بعد از این مدت احتمالاً ممکن است به اشتباهات و نقاط ضعف خود پی ببرند.

جورج پولیا می گوید: هنر معلمی به بازیگری تئاتر، به زیر و بم موسیقی، به ظرافت شعر و به اصالت نقاشی نیاز دارد.

حال چگونه یک معلم ریاضی می تواند این هنر را فراگیرد؟ چگونه می تواند پذیرای این مسئولیت خطیر به عنوان یک معلم ریاضی خلاق باشد؟

لازمه خلاق بودن در هر هنری داشتن زمینه قبلی در تکنیک ها، شناخت وسایل و تجربه است. یک نقاش باید شخص یا منظره ای را که مدل قرار داده دقیقاً بشناسد. به همین ترتیب هنر تدریس ریاضیات به زمینه ای قوی در اصل موضوع، شناخت تکنیک های ارائه مطالب (روش ها) و وسایل کمک آموزشی لازم، نیاز دارد.

یک معلم ریاضی به یک سری وسایل متناسب با جرفه اش نیاز دارد تا بتواند با توجه به شاگردانش و با توجه به مؤثرترین وسیله در آن موضوع درسی، از بین آنها آنچه که

بخش اهداف آموزش ریاضی هستند. مهم ترین وظیفه آموزش ریاضی تربیت دانش آموز است به نحوی که بتواند با اتکاء به نفس به مسائل خود بپنشد. راه چاره پیدا کند و مسائل خود را حل نماید. تجربه نشان داده است که حتی در رشته های فنی مانند خیاطی اهداف پرورشی ریاضی اهمیت دارند و به همین خاطر در برنامه درسی تمام رشته های تحصیلی درس ریاضی قرار داده می شود.

در مورد هدف های آموزشی و آموزش تکنیک های محاسبات لازم باید نیاز دانش آموز را در رابطه با سایر درس ها و محاسبات مورد نیاز آن دروس و نیز مربوط به زندگی روزمره برآورده ساخت.

### چگونگی رسیدن به اهداف

برای رسیدن به هدف های کلی فوق الذکر لازم است معلمین نکات زیر را مورد توجه قرار دهند.

۱- در انتخاب مطالب و مسائل به فرهنگ اسلامی و زندگی روزمره هر فرد ایرانی توجه شود و از اقتباس محض و بی مورد از مطالب کتاب های خارجی که مربوط به فرهنگ خودشان است خودداری گردد.

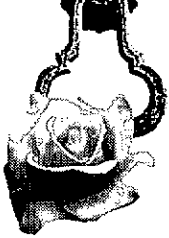
۲- حتی الامکان از مسائل منطقه ای و محیط زندگی دانش آموزان و مسائل خاص روستایی یا شهری استفاده شود.

۳- وسایل کمک آموزشی ساده توسط معلم و دانش آموز ساخته و مورد استفاده قرار گیرد.

۴- با ایجاد انگیزه و ارائه مثال های مناسب، ذهن و توجه دانش آموز را برای درک مفاهیم ریاضی آماده ساخته و سپس به بیان تعریف یا دستور و یا استدلال بپردازد.

۵- با شرکت دادن دانش آموز در درس و راهنمایی او در کشف مطالب و توجه به اظهارنظرها و پیشنهاد های وی حس اعتماد به خود را در او پرورش دهند.

۶- از طریق انتخاب مثال های جالب و مناسب علاقه به ریاضیات در دانش آموز ایجاد گردد و با احتراز از طرح معماها و مسائل پیچیده تر ترس از ریاضیات و یأس در یادگیری آن از بین برده شود.



لازم می داند انتخاب نماید.

البته هیچ کس در هنری بدون تجربه و تمرین ورزیده نمی شود. زمان به تنهایی بیار آورنده این تجربه نیست چون یک معلم ممکن است تجربه یک سالش را سال های سال تکرار کند.

بیشتر افراد بر این عقیده هستند که شرط موفقیت در تدریس ریاضیات دانستن ریاضیات است. اگر بخواهیم ریاضیات را طوری درس بدهیم که برای همه قابل فهم باشد، به طوری که برای همه دارای معنی باشد، به طوری که بتواند به کار برده شود، باید زمینه مناسبی در خود ریاضیات داشته باشیم. اطلاعات ما در ریاضیات باید فراتر از آن مطالبی باشد که تدریس می کنیم. به ریاضیات باید علاقه مند باشیم. بطوریکه از ریاضیات و تدریس آن لذت ببریم.

پروفسور آرنولد راس<sup>۶</sup> استاد دانشگاه اوهایو می گوید: معلم مبتدی همیشه به فراگیرانش بیش از آنچه می داند تدریس می کند، معلم باتجربه آنچه را می داند تدریس می کند درحالی که معلم ماهر و آگاه از دانسته های خود آنچه را که مناسب تشخیص می دهد انتخاب نموده و تدریس می کند.

به هر حال یک معلم خلاق می بایست در فراگیرانش انگیزه لازم را ایجاد نموده، معلومات و اطلاعات لازم را در اختیار آنها قرار داده و حتی الامکان به کمک وسایل کمک آموزشی آنها را به کشف و پویش نکات جدید راهنمایی کند.

نکته قابل ذکر دیگر در این زمینه انتخاب اهداف و آرمان هاست.

در طرح ریزی یک ساختمان جدید، مهندس طراح قبل از شروع به طراحی هرگونه نقشه ای تصمیم می گیرد که به چه خصوصیتی در آن بنا نیازمند است. ما به طریق مشابه یک برنامه ریاضی را با توجه به نتایج مورد نظر آن طرح ریزی می کنیم. در رابطه با برنامه ریخته شده ما وسایل و ابزار مورد نیاز در جریان تدریس را انتخاب می کنیم.

اگر هدف های درسی برایمان روشن نباشد چگونه

می توانیم پیشرفت فراگیران را مورد ارزشیابی قرار دهیم. تنها وقتی ملاک های معتبری برای انتخاب وسایل مناسب، محتوی و روش های تدریس داریم که بدانیم مسیرمان چیست و به کجا می خواهیم برویم. و تنها وقتی می توانیم پیشرفت فراگیران را ارزشیابی کنیم که بتوانیم از میزان تأثیر تدریس و روش خود ارزشیابی به عمل آوریم.

حال باید دید که بهترین و مناسب ترین هدف ها در برنامه ریاضی چیست؟ چه شاخه ای از ریاضیات برای نیل به این هدف ها مورد لزوم است؟ چه فراگیرانی در رسیدن به این هدف ها باید در نظر گرفته شوند؟ و بالاخره چه رفتاری نشان دهنده این است که یک فراگیر به آرمان خود رسیده است.

در انتخاب آرمان های خاص برای تدریس ریاضی نه تنها بایستی احتیاجات جامعه را در نظر گرفت بلکه بایستی نیازمندی های ریاضی فراگیران را نیز به حساب آورد.

در تجدید نظر روی برنامه ریاضیات جهت فراگیران باید نیازمندی هایی در نظر گرفته شود که در زیر به تعدادی از آنها اشاره می شود.

۱- فراگیر احتیاج دارد بداند که چگونه ریاضیات او را در فهم و درک پدیده های طبیعی یاری می کند.

۲- او احتیاج دارد بفهمد که چگونه روش های ریاضی در بررسی، تفسیر و تصمیم گیری در امور زندگی و روابط انسانی مورد استفاده قرار می گیرد.

۳- او نیازمند است بفهمد که چگونه ریاضیات به عنوان یک علم و به عنوان یک هنر در میراث های فرهنگی سهمیه بوده است.

۴- او بایستی برای حرفه ها و مشاغلی که در آنها ریاضیات به هر عنوان مورد استفاده قرار می گیرد چه از نظر تولیدی و یا مصرفی آماده شود.

۵- او می بایست که نحوه ارتباط صحیح و دقیق مفاهیم و عقاید ریاضی را با سایر مطالب فراگیرد.

امروزه با توجه به کارایی فزاینده ریاضیات در امور دیگر بایستی تدریس ریاضیات در سطح وسیع تری نسبت به گذشته انجام شود. برنامه های ریاضی بایستی خیلی فراتر



از پرورش و تقویت مهارت‌ها و تکنیک‌های مقدماتی در فراگیران باشد.

برنامه آموزش ریاضی باید بیشتر از تدریس واژه‌های ریاضی، حقایق و قواعد باشد، باید وسیع‌تر از تقویت قوه تجزیه و تحلیل مسائل ریاضی، و فراتر از تفهیم ساختمان‌های منطقی در ریاضیات باشد، علاوه بر این ریاضیات بایستی بصیرتی به فراگیران بدهد تا بتوانند نقطه نظرهای منطقی را از موضوعات روزمره، مواد مناسب را از نامناسب و نتایج تجربی را از قضایای اثبات شده تشخیص دهد. ریاضیات از نظر برنامه باید طوری باشد که حس کنجکاوی را در فراگیران به طوری تداوم بخشد که همیشه در پی یافتن عقاید تازه در ریاضی و کشف مطالب جدید باشند، هر چند که آن مطالب قبلاً بوسیله دیگران کشف شده باشد. به طور خلاصه بایستی بازده یک برنامه مناسب ریاضیات فراگیرانی باشند که بدانند چگونه ریاضیات را باید یاد بگیرند، از دانستن ریاضیات لذت برده و همچنان برانگیخته شده باشند که بتوانند یادگیری ریاضیات را مستقلاً ادامه دهند و آیا فعلاً اینگونه است؟

### پ. اصول کلی آموزش ریاضی

از هنگامی که تدریس ریاضی مطرح بوده، روش تدریس آن نیز مورد بحث و مطالعه بوده است. روش‌های تدریس ریاضی و اصول آن در ضمن تبعیت از اصول کلی تعلیم و تربیت مسائل خاص خودش را نیز دارد. روش‌های تدریس ریاضی با توجه به پیچیدگی‌های خود ریاضی و نیز رابطه‌ای که ریاضی با فهم و فکر دانش‌آموز دارد از اهمیت خاص برخوردارند.

با مطالعه تاریخ آموزش و پرورش، ملاحظه می‌کنیم که همواره دو نوع آموزش در برابر هم قرار داشته‌اند. یک نوع آموزش دستورالعملی که مطالب آموزشی به صورت یک دستورالعمل به دانش‌آموز تحمیل می‌شده و در آن نقش اصلی به عهده معلم بوده است و نوع دیگر آموزشی مطابق با طبیعت کودک و درجهت شکوفایی شخصیت او که بر مبنای فعالیت خود کودک شکل می‌گرفته است. بنابراین

اولین تقسیم‌بندی که در روش‌های آموزش وجود دارد عبارتند از:

۱- روش منفعل

۲- روش فعال

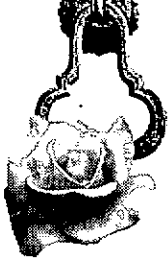
### ۱. روش منفعل

در این روش که باید آن را محور نامید کار اساسی آموزش به عهده معلم است. معلم مطالب را موبه‌موبیان می‌کند و از دانش‌آموزان می‌خواهد که درسی را حفظ کنند و تکالیف را انجام دهند. در موقع اعمال این روش‌ها انضباطی دقیق بر کلاس حکمفرماست. انجام تکالیف موجب تشویق و خلاف آن مستوجب تنبیه، موفقیت معلم در این روش به میزان تسلط او بر کلاس بستگی دارد.

### ۲. روش فعال

در این روش دانش‌آموز محور فعالیت است. دانش‌آموز در امر یادگیری شرکت فعال دارد، با مسائل مواجه می‌شود، راجع به حل آنها فکر می‌کند و با راهنمایی معلم به حل آنها می‌پردازد. در اثر کارهای آموزشی خودش به مفاهیم پی می‌برد و به کشف قواعد می‌رسد. در این روش باید دانش‌آموز را شناخت و به توانایی‌های او پی برد و آموزش را با این توانایی‌ها هماهنگ ساخت. در این صورت است که دانش‌آموز به حل تمرین‌ها و مسئله‌ها علاقه‌مند می‌شود. موفقیت دانش‌آموز در این روش به مهارت معلم و تسلط او به درس و روش تدریس بستگی دارد. با مقایسه‌ای مختصر تفاوت‌های اساسی این دو روش آشکار می‌گردد.

در آموزش ریاضی به روش منفعل که تنها معلم سخنرانی یا به اصطلاح تدریس می‌کند، معلم مطالب را با سرعتی که خود تشخیص می‌دهد، بیان می‌کند و همه دانش‌آموزان نمی‌توانند درس را تعقیب کنند. ثابت شده است که حتی باهوش‌ترین دانش‌آموزان تدریس به این شکل را حداکثر تا ۱۵ دقیقه دنبال می‌کنند. آن قسمت از مطالب را هم که گوش داده‌اند به طور سطحی فرامی‌گیرند و فرصت توجه به



## ۲- روش اصل موضوعی (استدلال، مجرد و دقیق)

### ۱- روش شهودی

در این روش سعی می شود که براساس مشاهدات دانش آموز مفاهیم را بیان و حتی گاهی اثبات کنیم. در این روش سعی می شود که حتی الامکان استدلال برای دانش آموز قابل مشاهده و ملموس باشد استدلال از ساده ترین حالت ها شروع می شود و به تدریج تکامل می یابد.

لازم به تذکر است که روش شهودی را نباید با روش فعال اشتباه کرد. آموزش را از لحاظ نوع فعالیت به روش منفعل و روش فعال تقسیم می کنیم ولی از لحاظ بیان استدلال به روش شهودی و روش اصل موضوعی. روش شهودی در بیان به معنی روش فعال نیست. در ریاضی برای بیان استدلال شهودی زیاد نباید به تعاریف دقیق متکی بود و به همین مناسبت خواستن تعریف از دانش آموزان نیز ضرورت ندارد.

در این روش بیشتر پی بردن شهودی به مفاهیم مطرح است اما گاهی در طی مراحل دانش آموز به تعریف می رسد این مورد بیشتر شامل نامگذاری ها و اصطلاحات می شود، مثل تعریف عدد اول، تعریف عمود منصف یا تعریف تساوی در هندسه.

### ۲- روش اصل موضوعی

در این روش برای آموزش یک شاخه ریاضی (مثلاً هندسه، جبر، مجموعه ها و...) یک دسته از مفاهیم به عنوان مفاهیم اولیه انتخاب می شود. یک دسته از احکام نیز به عنوان اصول موضوعه برگزیده می شوند. پس از آن به کمک مفاهیم اولیه و براساس اصول موضوعه و با استنتاج به تعریف سایر مفاهیم و اثبات سایر احکام، که قضیه نامیده خواهند شد می پردازند. روش اصل موضوعی در واقع در نتیجه تکامل کاربرد منطق ریاضی به وجود آمد و به دنبال آن ریاضیات به شکل مجرد امروزی خود درآمد. این روش موجب پیشرفت های عظیم در ریاضیات شد و از نظر علمی

جزئیات را ندارند. مهم تر از همه این است که وقتی دانش آموز می بیند که معلم با تسلط مطالب را پشت سر هم بیان می کند و او از درک و بازگویی آن عاجز است، به جای اینکه به توانایی خودش پی ببرد خود را ناتوان و ضعیف می پندارد و معلم را مظهر قدرت و توانایی. این امر سبب می شود تا به تدریج در دانش آموز فردپرستی و ستایش فرد شکل گیرد. در این روش وظایف معلم عبارتند از: تدریس و کنترل نظم کلاس، و کار دانش آموز گوش دادن است و صدا نکردن. یادگیری و حل تمرین به والدین بچه ها مربوط می شود و کار منزل است.

در آموزش به روش فعال هر دانش آموز مطالب را به سرعت خود یاد می گیرد و فرصت دارد که به مطالب فکر کند و اگر جایی به مشکلی برخورد در حل آن چاره اندیشی کند. دانش آموز از طریق طی فرایند یادگیری به تدریج به مفاهیم پی می برد و به جای آنکه شاهد راه رفتن معلم باشد، خود قدم به قدم راه رفتن را تمرین می کند و می آموزد. و با پی بردن به توانایی های خود در او حس اعتماد و اتکاء به نفس تقویت می شود چون در به دست آوردن نتیجه ها و کشف قواعد سهیم است. نسبت به مطالب احساس علاقه و مالکیت می کند و میل به دانش افزایی در او به وجود می آید و تا حدودی به خودانگیزگی می رسد در جریان کار فعال، دانش آموز رشد می کند، تفکر منطقی و تمرکز روی مطالب را یاد می گیرد. در این روش وظایف معلم عبارت است از توجه به کار یکایک دانش آموزان و دادن راهنمایی در موارد لازم، علاقه مند کردن آنها به کار و فعالیت درسی، شناخت کودکان و پی بردن به حدود توانایی های آنان و از همه مهم تر قدم به قدم پیش بردن دانش آموزان برای یادگیری یک مطلب درسی جدید طی مراحل مختلف آن، وظیفه دانش آموز هم فعالیت و کارآموزی و کاوشگری در حد توانایی خود می باشد.

در آموزش یک شاخه ریاضی (هندسه، حساب، مجموعه ها و...) از نظر ارائه استدلال معمولاً به دو صورت زیر عمل می شود:

۱- روش شهودی (مشاهده و تجربه)



می توان گفت بسیاری از پیشرفت های امروزی علوم مرهون روش دقیق اصل موضوعی در ریاضی است. بیان مطالب به روش اصل موضوعی هرچند دقیق، خالی از ابهام و با انسجام کافی صورت می گیرد اما حتی در سطح دانشگاه، اگر با شهود توأم نباشد به تدریج سبب بیگانه شدن متعلمین با مفاهیم می شود.

### مراحل آموزش ریاضی

در آموزش هر موضوع ریاضی از لحاظ مطلب سه مرحله کار را باید از هم تمیز داد. این سه مرحله آموزشی عبارتند از:

الف - مفهوم

ب - تکنیک

ج - کاربرد

به عنوان مثال در آموزش ضرب در ابتدایی، نخست مفهوم ضرب مطرح می شود. به صورت های گوناگون مجسم، نیمه مجسم و با استفاده از دسته بندی دانش آموز به مفهوم مثلاً سه پنج تا به عنوان سه دسته پنج تایی پی می برد. پس از درک مفهوم ضرب به تکنیک محاسبه حاصل ضرب و پیدا کردن حاصل ضرب دو عدد در حالات مختلف می رسد و سرانجام با کاربردهای ضرب در حل مسئله ها و سایر مفاهیم ریاضی آشنا می شود این دسته بندی را تا سطوح عالی آموزش ریاضی می توان ادامه داد. مثلاً در موضوع مشتق، سه مرحله آموزش مفهوم مشتق، تکنیک های مشتق گیری و کاربرد مشتق در پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم یا در مکانیک برای پیدا کردن سرعت و شتاب مشخص می باشد.

به عنوان مثال از دوره راهنمایی به آموزش جمع اعداد صحیح اشاره می کنیم، در قسمت مفهوم، به کمک بردارها مفهوم عباراتی مانند  $(-5) + (+3)$  را بیان می کنیم.

در این قسمت تنها توجه ما به درک مفهوم جمع است نه روش محاسبه آن. آنگاه به بیان تکنیک های محاسبه حاصل جمع می پردازیم و سرانجام کاربرد آن را در مسائل مطرح می سازیم.

درک مفهوم در آموزش از اهمیتی ویژه برخوردار می باشد. تا زمانی که دانش آموز به مفهوم یک موضوع پی نبرده باشد، آموزش تکنیک فایده ای ندارد. حتی اگر با زحمت زیاد به طور ماشینی تکنیک را به دانش آموز بیاموزیم، نمی تواند آن را در حل مسائل بکار گیرد. به عبارت فنی تر بدون شناخت مفهوم مدل ریاضی مربوطه را برای حل مسئله اش بسازد.

### اصول آموزش ریاضی در دوره ابتدایی (به عنوان زیربنای آموزش)

معلمین ابتدایی می توانند روش های متعددی در پیش گیرند که از بروز حالت یأس در آموزش یادگیری ریاضی دانش آموزان جلوگیری نمایند.

بنابراین معلمین باید قبل از برنامه ریزی و تنظیم طرح درس ریاضی نکات زیر را به دقت مورد توجه قرار دهند.

- ۱- فراهم ساختن یک محیط مناسب برای یادگیری، وقتی دانش آموز مطمئن شود که پاسخ های ساده او به مسائل ریاضی می توانند به یافته های مهم تری منجر گردند، مشارکت وی نیز در فعالیت های مختلف آموزش ریاضی بیشتر شده و جرأت اندیشیدن برای حل مسائل در آنها تقویت می گردد.

- ۲- به کلیه مواد تحصیلی در آموزش ریاضی باید تأکید شود. اغلب کودکان در آموزش ریاضیات و حساب کردن توانایی برابری دارند. بنابراین سایر رشته های ریاضی مانند هندسه، آمار، اندازه گیری و احتمالات نیز هریک ماده تحصیلی مناسب دیگری برای پیشرفت ریاضی دانش آموزان فراهم می آورد. لذا باید از تأکید زیاد بر ارقام و محاسبات عددی اجتناب شود.

- ۳- مشارکت دادن دانش آموزان در حل مسائل روزانه. تجویز تمرینات پیچیده و متراکم باید جایگزین تمرینات در قالب فعالیت های حل مسأله شود.

- ۴- با به کارگیری فرمول های کاربردی ریاضی فرصت مناسب به منظور آشنا نمودن دانش آموزان با اصول و قواعد و فرمول های ریاضی ایجاد گردد و زمان کافی باید به



باید از راه‌های بی‌نتیجه یا کم‌نتیجه کسب دانش، پرهیز کند و راه‌های ثمربخش را ترجیح دهد. برای این منظور می‌تواند از سه اصل زیر استفاده نمود:

- ۱- یادگیری فعال
- ۲- بهترین انگیزه
- ۳- تسلسل مرحله‌ها

#### ۱. یادگیری فعال

البته آنچه در کلاس مورد توجه معلم است اهمیت دارد ولی هزاربار مهم‌تر از آن چیزی است که مورد توجه دانش‌آموز است. اندیشه‌ها باید از ذهن خود دانش‌آموز بیرون بیایند. در این میان نقش معلم را می‌توان با نقش ماما و قابله مقایسه کرد.

این نصیحت رسمی سقراط است، گفت و گوی سقراطی، بهترین شکل آموزش است. معلم دبیرستان این مزیت را نسبت به معلم دانشگاه دارد که می‌تواند به صورت گسترده‌ای از شیوه گفت و گو استفاده کند. ولی متأسفانه میزان وقتی که در دبیرستان برای هر ماده درسی گذاشته‌اند چنان محدود است که برای برگزار کردن همه درس‌ها به صورت گفت و گو ممکن نیست. با همه اینها یا همین امکاناتی که هست باید حداکثر تلاش را به کار برد تا خود دانش‌آموزان در جریان کشف شرکت داشته باشند.

#### ۲. بهترین انگیزه

معلم باید خودش را واسطه‌ای بداند که می‌خواهد مقداری از ریاضیاتی را که می‌داند، در اختیار جوانان قرار دهد. ولی اگر واسطه‌ای در عرضه جنس خود با دشواری روبرو شود و کالای او روی دستش بماند یا خریداران از خرید کالای او سر باز زنند نباید تقصیر را به گردن خریداران بیندازد. به خاطر داشته باشید که معمولاً حق با خریدار است جوانی هم که از یاد گرفتن ریاضیات سر باز می‌زند ممکن است حق داشته باشد. هیچ دلیلی وجود ندارد که شاگرد شما تنبل یا کم‌هوش باشد. بلکه خیلی ساده ممکن است به چیز دیگری علاقه مند باشد. آخر دنیای ما پر است از

دانش‌آموزان داده شود تا هریک بتوانند متناسب با قدرت و توانایی خود در فهمیدن قواعد و قوانین ریاضی موفق شوند. ۵- به منظور آموزش مفاهیم ریاضی و حل مسائل، دانش‌آموزان را به گروه‌های کوچک کار و فعالیت تقسیم کنید. تعامل درون گروهی باعث تقویت افکار فردی می‌گردد. پیشرفت تفکر فردی نیز به توانایی حل مسائل کمک می‌کنند.

۶- توجه داشته باشید که فرایند دست یافتن به پاسخ به اندازه خود پاسخ حائز اهمیت است. دانش‌آموزان اغلب گمان می‌کنند که برای یافتن پاسخ صحیح فقط یک روش وجود دارد. در حالی که بیشتر اوقات چنین نیست و این طرز تفکر غلط می‌تواند باعث طرز فکر اشتباه دیگری شود مبنی بر آنکه ریاضیات چیزی نیست جز مجموعه‌ای از قوانین گام به گام. چه بسا مواقعی که فرایند دستیابی به پاسخ غلط حاوی اطلاعات و مفاهیمی باشد که منجر به یافتن راه حل صحیح مسئله شود.

۷- به همه دانش‌آموزان صرف نظر از جنسیت یا سوابق فرهنگی آنها باید به یک اندازه توجه کرد. فرصت پاسخ دادن باید به همه اعضاء گروه به صورت برابر داده شود.

۸- حصول اطمینان از آگاهی دانش‌آموز نسبت به اهمیت روزافزون ریاضی در جامعه امروز. تأکید بر شمردن موارد کاربرد ریاضی در هنر، موسیقی و سایر علوم ضرورت دارد. با استفاده از مثال می‌توان کاربرد ریاضی در حرفه‌های مختلف را برشمرد. در این ارتباط بد نیست بیوگرافی مردان و زنان ریاضیدان موفق در جهان برای دانش‌آموزان گفته شود.

۹- قبل از شروع به تدریس، اندکی درباره نقطه نظرها و نگرش خود نسبت به ریاضی و تدریس آن بیاندیشید. دلیل تجویز مشق اضافی به شاگردان ابتدایی چیست؟ آیا یک نوع تنبیه است؟ آیا خود شما، وقتی به حل مسائل ریاضی فکر می‌کنید نگران می‌شوید؟

#### اصول آموزش ریاضی در دبیرستان

معلم باید بداند که روند یادگیری چگونه جریان دارد معلم



این همه چیزهای جالب! وظیفه یک معلم به عنوان کسی که می خواهد آگاهی دیگران را بالا ببرد این است که دانش آموز را به ریاضیات علاقه مند کند. ظرافت و زیبایی آن را به او نشان دهد و به او بفهماند که اگر فرصت تسلط بر آن را از دست بدهد در آینده متأسف خواهد شد.

بنابراین معلم باید تمامی توجه خود را در انتخاب مسئله و تنظیم آن به کار برد و آن را به بهترین صورت ممکن به دانش آموزان عرضه کند. مسئله باید نه تنها از موضع معلم بلکه از موضع شاگرد هم باید جالب و مفهومی باشد. چه بهتر که بشود درس را در رابطه با تجربه روزانه شاگردان طرح کرد و چه بهتر که موضوع قابل طرح امکان کاربرد عملی مسئله و یا موضوعی مورد علاقه عموم باشد. اگر می خواهیم نیروی آفرینش دانش آموزان را تحریک کنیم باید مبنایی در اختیار آنها بگذاریم تا مطمئن شوند تلاش آنها بیهوده و عبث نیست.

علاقه دانش آموز بهترین انگیزه او برای کار است. ولی انگیزه های دیگری هم وجود دارد که نباید آنها را از دست بدهیم. قبل از این که دانش آموز به کار پردازد از او بخواهید نتیجه را حدس بزند ولو بخشی از آن را. دانش آموزی که فرضیه ای را ارائه کند در واقع خود را به آن وابسته کرده است. حقیقت و احساس او در گرو فرضیه اوست و با بی صبری در انتظار آن است که ببیند حدس او درست است یا نه، او با اشتیاق به سرنوشت مسئله و کار کلاس علاقه مند می شود و در آن لحظه ها هیچ چیز دیگری نظر او را جلب نمی کند. اگر از دانش آوز بخواهید نتیجه را حدس بزند باز هم نه تنها علاقه او را به کار برانگیخته اید بلکه به شکل گیری و تقویت نیروی ذهنی او کمک کرده اید.

### ۳- تسلسل مرحله ها

عیب اصلی کتاب های ریاضی دبیرستانی در این است که تقریباً همه مسئله های موجود در آنها از صورت های متعارف و عادی انتخاب شده است. منظور از مسئله های عادی مسئله هایی است که میدان کاربرد تنگی دارند. تنها به روشن کردن یک قانون خدمت می کنند و تمرین هایی برای

کاربرد همان یک قانون هستند. این گونه تمرین ها هم مهم است ولی دو مرحله مهم آموزش در آنها وجود ندارد مرحله بررسی و پژوهش و مرحله فراگیری.

هدف این دو مرحله این است که مسئله مورد بررسی را با شرایط موجود و با آگاهی هایی که قبلاً به دست آورده ایم مربوط می کند، مسئله های عادی این دو منظور را بر نمی آورند، زیرا از قبل معلوم است که برای روشن شدن قانون معینی طرح شده اند و اهمیت آنها تنها در خدمت کردن به همین قانون است، البته گاهی در این مسئله ها به قانون یا قانون های دیگری هم توجه می شود که در این صورت، مسئله های مفیدتری به حساب می آیند.

حقیقت این است که در دبیرستان باید در کنار مسئله های عادی، دست کم گاه به گاه مسئله های عمیق تری هم به دانش آموزان داده شود، مسئله هایی که زمینه های غنی تری داشته باشند و امکان ورود دانش آموزان را به کارهای جدی تر علمی فراهم کنند.

### مراجع

- ۱- مجلات رشد آموزش ریاضی
- ۲- جزوه درسی روش ها و فنون تدریس از محمدحسن پروند دانشکده علوم تربیتی دانشگاه تهران
- ۳- کاربرد روانشناسی در آموزشگاه (بدری مقدم)
- ۴- بحران جهانی تعلیم و تربیت (فیلیپ کومیز)
- ۵- آداب تعلیم و تعلم در اسلام (شهید ثانی)
- ۶- مبانی روانشناختی تربیت (علی اکبر شعاری نژاد)
- ۷- الگوهای تدریس شیمی (مرتضی خلخالی)
- ۸- آموزش تدریس ریاضیات دبیرستانی (توماس بسلر) ترجمه جواد همدانی زاده
- ۹- روانشناسی رشد (علی اکبر شعاری نژاد)
- ۱۰- راهنمای معلم برای کتب ریاضی دبستان
- ۱۱- کتاب معلم روش تدریس ریاضی دوره راهنمایی
- ۱۲- مجلات رشد معلم
- ۱۳- خلاصه ریاضی (جورج پولیا) ترجمه پرویز شهرباری

### زیر نویس ها

1. Lanjern
2. Carl Ragerss
3. Hilgard
4. Bruce Jogee
5. Bassler
6. Professor Arnold Rose





نویسنده: تلما پرسو<sup>۱</sup>

مترجم: سپیده چمن آرا، کارشناس ارشد ریاضی

## پیشینه موضوع

می دهد؟» «آیا اطلاعات کسب شده از این ارزشیابی درست است؟»، «آیا به عنوان پیامد تدریسی که به دانش آموزان شده است، دانش آموزان من واقعاً [مطلب را] یاد گرفته اند؟» و پرسش هایی نظیر آن را از خود پرسیم.

## تمرین ارزشیابی، گذشته و حال

انتقال تمرکز از روی ورودی ها به نتایج، همزمان نیازمند مدلی برای تغییر در تمرین های ارزشیابی است. این موضوع برای بسیاری از معلمان ریاضی در کلیه سطوح مدرسه، بی اندازه مسأله ساز است.

بسیاری از ما مانند ریاضیدان ها، تمایلی ذاتی برای کار کردن با شکلهای داریم؛ به نظر می رسد که ما در مدل ارزشیابی که با جمع آوری داده ها به دست آمده، غرق شده ایم. در این مدل، همه ما، چه در مقام دانش آموز و چه در مقام معلم فرو رفته ایم. قدرتمندی جمع آوری داده های عددی درباره دانش آموزان، «غیرقابل انکار» است. دانش آموزان ما با آوردن نمره کامل ۱۰ یا ۱۰۰ احساس خوشبختی می کنند. والدین انتظار دارند که فرزندانشان نمره خاصی را کسب کنند و این نمره در نزد آنها بسیار قدرتمند است چرا که این نمره به والدین، معلمان، مسئولان مدرسه و دانش آموزان، از قدرت ریاضی

بسیاری از سیستم های آموزشی با رویکردی که بر نتایج تکیه دارد، به سمت آموزش و یادگیری حرکت می کنند. یعنی از معلم ها خواسته می شود که بر نتایج به دست آمده توسط دانش آموزان در مقابل داده های داده شده توسط معلم به عنوان حاصل تجربه آموزش یادگیری تکیه کنند. در یک مدل ورودی، فرض معلمها بر این است که یادگیری اتفاق می افتد به این دلیل که به دانش آموز درس داده می شود. این فرضیات اغلب به وسیله ارزشیابی هایی که توسط آنها انجام می شود، حمایت می شوند. در یک کلاس ریاضی، این ارزشیابی ها به ندرت از تست های صوری ای تشکیل شده که اغلب به دانش آموزان اجازه می دهند صرفاً کارایی حافظه کوتاه مدت خود را نشان دهند به جای این که بیانگر یادگیری واقعی آنها که ناشی از حضورشان در محیط آموزشی است، باشد.

رویکرد به تدریس با تکیه بر نتایج - که معلم ها را به توجه بیشتر به این که آیا یادگیری واقعی در کلاس درس آنها رخ داده است یا نه ملزم می کند - متقاضی راهبردهای مختلف ارزشیابی است. در مقام معلم، ما باید پرسش هایی نظیر «هدف از ارزشیابی چیست؟»، «اگر از این تکلیف ارزشیابی استفاده کنم چه اطلاعاتی به من

صاحب نمره خبر می دهد. امتیازها نیز قدرت مشابهی دارند؛ به عنوان مثال جامعه از شخصیت دانش آموزی که «الف» گرفته است، تصویری تخیلی ساخته است.

در طول تاریخ برای رده بندی دانش آموزان معمولاً از ارزشیابی هنجار مدار استفاده کرده ایم: دانش آموزانی که نمره تکالیف ارزشیابی آنها بیشتر از نمره مناسبی باشد، نمره کامل می گیرند. نمره کل هر دانش آموز در نمره کل یک کلاس یا یک گروه تأثیر می گذارد و از روی آن میانگین و انحراف معیار استاندارد به دست می آید. یک نمونه از مجموعه دستورالعمل ها برای دانش آموزان در این روش این است که برای کسب نمره «الف»، باید جمع نمره شان بیشتر از یک انحراف معیار استاندارد بالای میانگین باشد، کسانی که جمع نمراتشان بین میانگین و یک انحراف معیار استاندارد بالای میانگین است نمره «ب» کسب می کنند و افرادی که جمع نمراتشان بین میانگین و یک انحراف معیار استاندارد پایین میانگین می باشد نمره «ج» می گیرند، و بالاخره آنهایی که جمع نمراتشان یک انحراف معیار استاندارد زیر میانگین است، نمره «د» می گیرند.

در دهه ۱۹۷۰، به سمت سیستم های نمره گذاری که بر مبنای «نمرات توصیفی وابسته» بود و از نظر خیلی ها منصفانه تر به نظر می رسید روی کردیم. این تحول، تغییراتی اجباری در تکالیف ارزشیابی تعیین شده را به همراه داشت که فرصتهایی را برای نشان دادن فرآیند تفکر در سطوح بالاتر به دانش آموزان تأمین می کرد. این تغییر برای گنجاندن نتایج تحقیقی بین المللی [در روند آموزش] طراحی شد. در این تحقیق اذعان می شد که باید روی تفکر دانش آموزان و پردازش اطلاعات در مقابل فراخواندن دانش و توانایی نمایش مهارت های اکتسابی آنها، تمرکز شود و این یعنی توجه به تمرین های ارزشیابی قدیمی تر.

این گام تنها به طور جزئی موفق بود، و احتمالاً بیشتر جنبه پی آمد یک تحول شغلی ناقص برای معلمان را داشت. خیلی از معلم ها نمی دانستند که چگونه پردازش اطلاعات در ریاضیات را به دانش آموزان یاد بدهند: به وضوح، بسیاری از آنها برای تدریس ریاضیات، آن طور که باید و شاید تعلیم ندیده بودند. حل مسأله و تکالیف

ارزشیابی جستجوگرانه به عهده گذاشته شدند ولی استفاده از اینها به عنوان بخشی از فرآیند آموزش، تنها یک کار حاشیه ای بود. استفاده صوری از نمرات توصیفی وابسته هر چند که در برخی جاها اجباری بود به طور چشمگیری نتایج ضعیفی در بر داشت، معلمان ترجیح می دادند که هنگام تصمیم گیری درباره نمره ای که دانش آموزان کسب کرده اند، از روش های داوری خودشان استفاده کنند.

### داوری های معلم

در این صورت جایگاه داوری معلم ها در ارزشیابی کجاست؟ چرا بعد از تدریس گروهی از دانش آموزان به مدت ۳ یا ۴ هفته، یک معلم با تجربه می داند که کدام دانش آموزان در کلاس نمره الف می گیرند یا کدام یک نمره ب، ج، یا د؟ شگفت این که، باقی ترم یا نیمسال تحصیلی ناچاراً به ارزشیابی صوری از دانش آموزان سپری می شود تا اطلاعات (نمره های) عددی ای به دست بیایند که تأیید کننده پیش بینی انجام شده توسط معلم باشند و آنچه را که قبلاً معلم می دانست توجیه یا تأیید کنند! بیشتر معلم ها، بعد از سه یا چهار هفته داوری ها و پیش بینی های دقیقی می کنند. اکثر آنها، این داوری ها را «حس غریزی» خود می نامند. این «احساس غریزی» از کجا می آید؟

این «حس غریزی» از شواهدی به دست می آید که طی دوره هر یک از زمان های تدریس توسط معلم کسب شده است.

- این حس برآمده از:
- سؤال هایی است که توسط دانش آموز از معلم پرسیده می شود؛
  - جواب هایی که در پاسخ به سؤالات معلم توسط دانش آموز داده می شود؛
  - مکالمات بین دانش آموزان که توسط معلم هدایت می شوند؛ و
  - مشاهده معلم از این که دانش آموزان طی درس با ریاضیات چه کار می کنند.

متأسفانه به نظر می رسد که تعداد بسیار اندکی از معلم ها یا دیگر افراد به درستی به اطلاعات به دست آمده از این

طریق واقف هستند. آنها به داوریه‌های خودشان اعتماد ندارند!

### تمرینهای ارزشیابی آینده

داوریه‌های غیررسمی معلّم‌ها درباره توانایی‌ها و فهم دانش‌آموزان جایگاه کم‌ارزشی در ارزشیابی دارد و البته، روش‌های آموزشی در همه جای دنیا، بر قدرت این داوریه‌ها اذعان دارد. به معلّم‌ها آزادی تصمیم‌گیری درباره آنچه دانش‌آموزان می‌توانند بفهمند و انجام دهند داده می‌شود، و به علاوه داوریه‌های آنها به درستی مورد تأیید قرار می‌گیرند.

البته جالب است که در بسیاری از حالت‌ها به نظر می‌رسد که معلّم‌ها به داشتن این اختیار تمایلی ندارند. بعضی از آنها ظاهراً از در اختیار داشتن اجازه داوریه درباره یادگیری دانش‌آموزان می‌ترسند. حتی اگر ده سال سابقه کار داشته باشند. آنها توانایی‌های خودشان در این حیطه را پشت نمره‌هایی که در دفتر نمره‌شان هست مخفی می‌کنند. به این ترتیب احساس «امنیت» می‌کنند چرا که نمره‌ها، تأییدکننده دانسته‌های قبلی آنها هستند. بسیاری از معلّم‌ها، به عنوان آدم‌هایی باتجربه، شناخت و درک خودشان را در این حیطه تأیید می‌کنند ولیکن هنوز نسبت به تغییرات نامطمئن هستند. این مشکل در کشورهایی که دولت‌های آنها از یک سو درستی داوریه‌های معلّمانشان را تأیید می‌کنند و با فرمانی دیگر معیار امتحان را به عنوان ابزاری جهت تأیید داوریه‌های معلّم‌ها در نظام گسترش می‌دهند، وخیم‌تر است! این رویداد، واقعیتی است که پرداختن به آن خارج از این مقاله است. برای خیلی از معلّم‌ها سخت است که بدون «پشتوانه» به دست آمده توسط «نمره دادن از ده» عمل کنند.

### الگوی تغییر

من معتقدم که «پشتوانه» در آموزش متمرکز بر نتایج، در ضحّت و ذات تکالیف ارزشیابی مورد استفاده معلّم‌ها می‌باشد. از آنجا که اکنون در نظام‌های آموزشی، به آنچه که دانش‌آموزان می‌توانند به عنوان نتیجه تجربه یادگیری نمایش دهند اهمیت می‌دهند، معلّم‌ها در نحوه اجازه به

دانش‌آموزان برای نمایش میزان درک و مهارت‌هایشان نیازمند هوشمندی خواهند بود. واضح است که اصلاحات موجب تبدیل تمرین‌های ارزشیابی بسیار رسمی به تمرین‌های ارزشیابی‌ای که کمتر رسمی هستند می‌شود. اگر داوریه‌ها بر مبنای پرسش‌هایی که دانش‌آموزان می‌کنند، پاسخ‌هایی که آنها به پرسش‌های معلّم می‌دهند، مشاهده عملکرد دانش‌آموزان و تعامل دانش‌آموز باشد معلّم‌ها باید از اینها به عنوان روال و نحوه ارزشیابی استفاده کنند. در این صورت این ارزشیابی‌های غیررسمی دربردارنده بخش عمده‌ای از اساس داوریه‌های معلّم خواهند بود. در حالی که داوریه‌های غیررسمی گذشته بر مبنای «حس غریزی» یا مبنای ضمنی برای تصمیم‌گیری درباره پیشرفت‌های دانش‌آموز بودند، اینک [داوریه‌ها] صریح خواهند بود.

تغییر در طرز فکر نیازمند این باور است که ارزشیابی غیررسمی، بخشی از پایه صریح و مشخصی است که بر مبنای آن درباره پیشرفت‌های دانش‌آموزان تصمیم‌گیری می‌شود، در این صورت معلّم‌ها با احساس نیاز به

(I) یادگیری ارزشیابی صحیح، و

(II) توسعه ابزارهای موجود برای جمع‌آوری مدارک به دست آمده از ارزشیابی‌ای که این کار را انجام می‌دهد، مواجه می‌شوند.

### ارزشیابی یادگیری صحیح

تنها با ارزشیابی صحیح می‌توان درباره یادگیری صحیح قضاوت کرد. زمانی که قصد داریم بفهمیم که به عنوان نتیجه‌ای از تجربه یادگیری، آیا دانش‌آموزان چیزی فراگرفته‌اند، نیازمند آزمایش دانسته‌های آنها هستیم. در بیست ساله اخیر، محققان و معلّم‌ها درباره دانسته‌های دانش‌آموزان به عنوان نتیجه‌ای از تجربه یادگیری آنها به چیزهای زیادی- که اغلب نادرست هستند- پی برده‌اند.

مثلاً، من در تجربه تدریس خودم، فهمیدم که بسیاری از دانش‌آموزان اگرچه در جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم مهارت دارند، اما درباره ارزش مکانی خیلی کم می‌دانند یا اصلاً نمی‌دانند. همچنین، دانش‌آموزانی که از آنها نام برده شد قادرند به کرات و با موفقیت عملیات مربوط به کسرها را

انجام دهند ولی مفهوم کسر را به درستی نمی دانند.

این به این معنی است که برای ارزشیابی دانسته های دانش آموز درباره مثلاً کسرها، کافی نیست که فقط از آنها بخواهیم عملیات آنها را انجام دهند. لازم است تا از آنها پرسش هایی- رسمی یا غیررسمی- درباره تفکرات آنها در این حیطه پرسیم، به آنها اجازه بدهیم که استدلال های خودشان را شرح دهند و نتایج را توجیه کنند. این میسر نیست مگر با تجدیدنظر در استفاده از ارزشیابی های رسمی، و به ویژه در مقدار پرسش های با پایان.

چند سال است که استفاده از پرسش های باز- پاسخ توسط متخصصین آموزش ریاضی به عنوان روشی ایده آل در ارزشیابی یادگیری صحیح، توصیه می شود<sup>۱</sup>. البته، به چند دلیل، معلم های ریاضی از این نوع پرسش ها به صورت حاشیه ای استفاده می کنند؛ برای معلم ها طرح کردن و نوشتن چنین سؤالاتی و نمره دادن به آنها (عموماً از نظر زمان و قابل مقایسه بودن) مشکل است. من قصد دارم که در مورد هر دو موضوع بالا بحث و استدلال کنم. من از تجربیات خودم دریافته ام که همیشه یک پرسش باز- پاسخ نسبت به بیست تا یا حتی تعداد بیشتری پرسش با پایان، حاوی اطلاعات بیشتری درباره یادگیری صحیح است. به وضوح، با جایگزینی پرسش های باز- پاسخ، به جای نمره دادن به بیست تا پرسش با پایان برای هر دانش آموز، برای هر یک از آنها تنها یک پرسش باز- پاسخ را تصحیح می کنیم. این کار، اگر زمان کمتری نبرد، همان مقدار زمان از معلم می گیرد. تصور این که نوشتن پرسش های باز- پاسخ مشکل است نیز غلط است. «باز- پاسخ بودن» سؤال تنها با اضافه کردن جملاتی نظیر «پاسخ خود را شرح دهید» یا «نتایج خود را توجیه کنید» یا «با رسم یک نمودار، پاسخ خود را نمایش دهید» به انتهای یک پرسش با پایان به دست می آید. مقالات زیادی درباره شیوه طرح سؤالات باز- پاسخ نوشته شده است که حاوی راهنمایی ها و مثال های متعددی است که به آموزگاران نحوه عمل را نشان می دهد. (به عنوان مثال ر. ک ۱)

روش های متعدد دیگری نیز برای ارزشیابی یادگیری صحیح وجود دارد که بسیاری از ما به عنوان معلم های ریاضی، به پاره ای دلایل که به گذشته مربوط می شود، از

آنها پشتیبانی می کنیم. ریاضیات، به طور سنتی یک موضوع «سیاه و سفید» است؛ ریاضیات همیشه یا درست است یا نادرست. ما با این عادت که از بدو ورود به مدرسه به ما تلقین شده است، بزرگ شده ایم. بخشی از عدم موفقیت در استفاده از تحقیقات به عنوان جزئی از الگوی ارزشیابی رسمی، در این است که نمی توانیم به دانش آموزان مان بقبولانیم که برای یک مسأله، جواب ثابتی وجود ندارد. آموزگاران نیز در آموزش به دانش آموزان برای پذیرفتن جایگاه تحقیقات در تفکر و نوشتار، مشکلات زیادی داشتند، شاید به این دلیل که خود آنها در بسیاری از موارد در پذیرفتن آن دچار مشکل می شدند.

احتمالاً دلیل دیگر این که ما با تمرین های ارزشیابی خویش خلاق تر نشده ایم مربوط به شرایط تحمیل شده خارجی درباره زمان تدریس است: محتوای ریاضیات همیشه به گونه ای هدایت شده است که- در جایی که ناچار به تدریس برنامه درسی در دوره خاصی از زمان هستیم- مدل ورودی برای بیان به معنی اختصاص دادن زمان ناچیزی به ارزشیابی است. ما برای تدریس، تعداد محدودی هفته را در اختیار داریم و لذا مطالب تدریس شده را به صورت ظاهری طی هفته هایی که در برابر زمان تدریس، زمان بسیار کمی است و برای ارزشیابی در اختیار ما می باشد، مورد ارزشیابی قرار می دهیم.

در یک مدل بیانی متمرکز بر نتایج، ارزشیابی را می توان بخشی از برنامه تدریس و یادگیری دانست. به ما همچنین گفته می شود که می توانیم از سرعت خود در تدریس بکاهیم و به دانش آموزان جایگاهی را که در آن قرار دارند درس بدهیم تا به این ترتیب دانش آموزان یاد بگیرند که در هر قدم می توانند دانش خودشان را بسازند. این کار به نفع گروه وسیعی از روش ها و راهبردهای ارزشیابی است که یادگیری صحیح را مورد ارزشیابی قرار می دهند. در مثال هایی از ارزشیابی های صحیح، از مجموعه های کار، مجلات، مصاحبه ها، نمودارها، نمایش ها، تکالیف عملی، و پرسش های باز- پاسخ استفاده می شود.

### جمع آوری نشانه های یادگیری صحیح

دیران ریاضی برای تصدیق این واقعیت که داوری های

آنها که بر مبنای مدارک رسمی یا غیر رسمی می باشد. درباره این که آیا یادگیری صحیح رخ داده است یا نه، درست است، نیازمند پیشرفت ابزارهای مؤثر جمع آوری این اطلاعات هستند. همانگونه که در گذشته، ارزشیابی های رسمی از معلّمی به معلّم دیگر فرق داشت، این ابزارها نیز از معلّمی به معلّم دیگر متفاوت است. ممکن است بعضی معلّم ها در استفاده از چک لیست هایی که برای هر دانش آموز دارند، راحت باشند، ممکن است بعضی دیگر قصد جمع آوری مدارک داستان گونه را داشته باشند، امکان دارد برخی دیگر از نمونه های کار دانش آموزان استفاده کنند، و برخی هم تلفیقی از روش های فوق را مورد استفاده قرار می دهند.

یکی از معلّم ها، کاغذهای یادداشت کوچک چسب داری<sup>۱</sup> در دست داشت که هنگام قدم زدن در کلاس، روی آنها درباره عملکرد و گفته ها و اثبات های دانش آموزان یادداشت هایی می نوشت. او اینها را به یک دفترچه یادداشت که برای جمع آوری اطلاعات مربوط به آن کلاس بود، می چسباند؛ برای هر دانش آموز یک صفحه.

از تعدادی از معلّم ها شنیده ام که به اعتقاد آنها این روش برای دانش آموزان ترسناک است، چرا که آنها احساس می کنند که از سوی معلّم تهدید می شوند و دوست ندارند چیزی بگویند یا کاری بکنند که «به ضرر آنها استفاده شود». در واقع این وضعیت در ابتدا رخ می دهد. البته از سوی دیگر این کار مثل یک نیروی کمکی برای دانش آموزان است و به آنها در احساس مسئولیت نسبت به امر یادگیری کمک می کند. من معتقدم که ما معلّم ها همان گونه که ناچاریم به دانش آموزان طریقه توضیح دادن درباره آنچه که می توانند انجام دهند را آموزش دهیم تا نمره بگیرند، نیاز خواهیم داشت که به آنها آموزش دهیم که این شیوه را به عنوان «جمع آوری صحیح» بپذیرند. در این شرایط، برای انجام این تحول، به وضوح زمانی طولانی مورد نیاز است.

### جمع بندی

به اعتقاد من، در تمام دنیا بسیاری از معلّم های ریاضی، روش تفکر شده اند؛ به آنها به عنوان افراد متخصص اختیاراتی داده شده است و در انجام داورى های شخصی درباره

پیشرفت های دانش آموزان تشویق شده اند. این امر ارزشیابی مجدد تأثیرگذاری راهبردهای ارزشیابی و تمرین هایی که هم اکنون توسط آنها مورد استفاده قرار می گیرد را می طلبد: «آیا این راهبردها و تمرین هادربرگیرنده مدارک و نشانه هایی هست که بتوان به وسیله آن درباره میزان فهم دانش آموزان قضاوت کرد؟» و «آیا اینها، یادگیری صحیح را ارزشیابی می کنند؟»

این اصلاح تفکر برای خیلی از معلّم ها دشوار است، چه برای معلّم های باتجربه و چه برای بقیه. این موضوع به مقدار زیادی به توانایی آنها در پذیرفتن توانمند بودنشان در انجام داورى های حقیقی درباره پیشرفت های دانش آموزان بستگی دارد، ضمن این باور که آنها به عنوان افراد مجرب می دانند که توانایی های ریاضی دانش آموزان آنها بهتر از هر فرد دیگری است.

چه به سوی مدل متمرکز بر نتایج حرکت کنیم و چه در مدل بیانی و رودی ها بمانیم، ارزشیابی مجدد تمرین های ارزشیابی مورد استفاده فعلی یک بخش ضروری و سازنده در وظایف هر آموزگاری است. تمام ارزشیابی ها باید به دلیل نیاز به برآورد کردن یادگیری صحیح شخصی به وجود بیایند. این پرسش مطرح است که: «آیا نمره دادن از ۱۰۰ این کار را انجام می دهد؟»

### مراجع:

- [1]. Perso, T. F. (1997). Investigations, *The Australian Mathematics Teacher*, 53 (2) pp. 20-22.
- [2]. Sullivan, P. & Clarke D. (1991). *Communicating in the classroom: The importance of good questioning*. Geelong: Deakin University Press.

### مرجع اصلی:

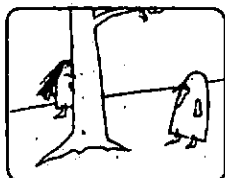
Perso, Thelma, *Assessment in the Mathematics Class*, amt, volume 55, No 4, 1999

# تناقض های ریاضیات و علوم (سرگرمی برای اندیشه ورزی)

اثر : مارتین گاردنر

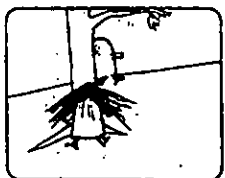
ترجمه : حسن نصیرنیا ، کارشناس مسئول گروه ترجمه دفتر برنامه ریزی و تالیف کتب درسی

## گردیدن به دور دختک

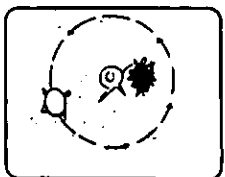


ماروین : آه «میرتل»! پشت آن درخت قایم شدی؟

همگام با ماروین که به دور درخت می گردید ، میرتل هم همین کار را می کرد . در حالی که میرتل بینی خود را بر درخت گذاشته بود ، یک وری به دور درخت گردید و از نظر پنهان شد .



پس از اینکه آنها یک بار دور درخت گردیدند ، به همان جایی که آغاز کرده بودند ، بازگشتند . آیا پسرک دور میرتل گردیده بود؟



ماروین : البته من به دور درخت گردیده ام ، پس باید به دور او هم گردیده باشم .  
میرتل : بیخود می گوید! حتی اگر درخت هم آنجا نبود ، او هرگز پشت مرا نمی دید . چطور می شود آدم چیزی را دور بزند و همه اطراف آن را نبیند؟

که صرفاً به معانی بیان مربوط است . به مجرد اینکه طرفهای مخالف درگیر در بحث درمی یابند که صرفاً بر سر تعریف واژه ای مجادله می کنند ، مشکلات از میان می رود . چنانچه مردم از اهمیت تعاریف دقیق عبارات و اصطلاحات آگاهی بیشتری داشتند ، معلوم می شد که بسیاری از مشاجره های تند و تیز آنها مانند این یکی ، تقریباً بی مورد بوده است .

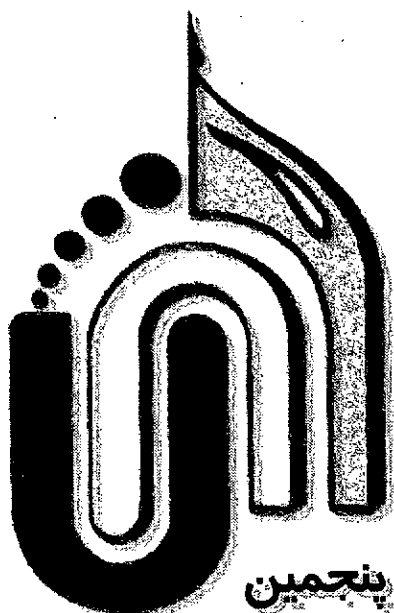
منبع ترجمه :

Gardner, Martin. aha! Gotcha, Paradoxes to Puzzle and Delight. W.H. Freeman & Company. 1982, New York.

زیر نویس :

۱ - ویلیام جیمز (William James ، ۱۸۴۲ - ۱۹۱۰) روان شناس و فیلسوف آمریکایی که به ویژه به منزله بنیانگذار مکتب «پراگماتیسم» مشهور است . کتاب پراگماتیسم را در سال ۱۹۰۷ منتشر کرد . - م .

این پارادوکس قدیمی را معمولاً با تمثیل شکارچی و سنجاب نشان می دهند . سنجاب روی کنده درختی نشسته است ؛ همگام با گردیدن شکارچی به دور کنده درخت ، سنجاب هم می گردد ، به طوری که سنجاب همواره رویاروی شکارچی است . آیا پس از اینکه شکارچی کنده درخت را دور زد ، یک بار به دور سنجاب گردیده است ؟ البته پاسخ دادن به این پرسش ممکن نیست ، مگر اینکه در مورد معنی واژه دور توافق کنیم . بسیاری از واژه هایی که جزء صحبت های روزمره هستند ، معنای دقیقی ندارند . «ویلیام جیمز»<sup>۱</sup> در اثر فلسفی کلاسیک خود به نام پراگماتیسم (مصلحت گرایی) بحثی سرگرم کننده درباره پارادوکس شکارچی و سنجاب آورده است . او این پارادوکس را به مثابه نمونه ای از اختلاف نظر مطرح می کند



پنجمین  
کنفرانس آموزش ریاضی ایران  
۸-۱۰ بهمن ۱۳۷۹ مشهد مقدس

گزارش از

## پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی کشور

بهمن ماه ۱۳۷۹. مشهد

گزارشگر: محمدجواد جوامع

مرکز تربیت معلم و آموزش عالی فرهنگیان مشهد

انسانها بویژه معلمان، مزییان و اساتید گرانقدر در به فعلیت رسانیدن گوهر وجودی انسان یعنی اندیشه است، توجه به آموزش ریاضی در آموزش و پرورش از اهمیت ویژه برخوردار است.

اهداف گوناگونی را برای برگزاری کنفرانس های ریاضی می توان برشمرد، از جمله:

- ❊ اشاعه و ارتقای فرهنگ ریاضی در جامعه،
- ❊ تبادل تجارب و استفاده از روش های جدید آموزش ریاضی،
- ❊ اعتلای دانش حرفه ای معلمان ریاضی،
- ❊ نقد و بررسی برنامه ها و روش های جاری آموزش ریاضی،
- ❊ ایجاد فضای پژوهش و تحقیق در میان معلمان به منظور بهبود روش های یاددهی- یادگیری ریاضیات.

پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی از ۸ تا ۱۰ بهمن ۱۳۷۹ در مرکز تربیت معلم شهید بهشتی مشهد و توسط اداره کل تربیت معلم و آموزش نیروی انسانی وزارت آموزش

برگزاری مطلوب کنفرانس های آموزش ریاضی فرصت هایی را فراهم می آورد تا در طی آنها معلمان و همه کسانی که به نوعی با تعلیم و تعلم ریاضیات سروکار دارند به گفتگو پردازند و از تجربه و دانش یکدیگر بهره ببرند.

در پیام وزیر محترم وقت آموزش و پرورش جناب آقای مظفر که در مراسم افتتاحیه ایراد گردید، آمده بود:

«امروزه آموزش ریاضی شاخه ای از دانش بشری و نیز بستری مناسب در جریان یاددهی- یادگیری دانش ریاضی می باشد، که با توجه به نقش بنیادی دانش ریاضی در رشد خلاقیت و باروری اندیشه، و تأثیر آن در خردورزی خاص و عام، و توسعه و ارتقای علوم، و جایگاه ارزشمند آن در تمدن و فرهنگ شکوفای اسلامی و ایرانی از یک سو، و وجود زمینه های مساعد از هوش و استعداد جوانان این مرز و بوم، و بارقه های امیدی که هم اکنون در مدارس و مراکز آموزشی و انجمن های علمی و آموزشی نمایان شده است از سوی دیگر، تلاش همه جانبه و فراگیر در آموزش آن بیش از پیش ضروری است. از آنجا که آموزش و پرورش بستر توسعه پایدار در تمام زمینه ها محسوب می شود و پایه های توسعه همه جانبه، موهون کوشش

و پرورش، اداره کل آموزش و پرورش استان خراسان، انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان خراسان، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد، و انجمن ریاضی ایران برگزار گردید.

آقای جعفر ملکی مدیرکل اداره آموزش و پرورش خراسان دبیر کنفرانس، آقای امرا... سبجانی نیا معاون برنامه ریزی و آموزش نیروی انسانی اداره کل آموزش و پرورش خراسان دبیر کمیته اجرایی، و آقای سید حسن علم الهدایی (عضو هیئت علمی دانشگاه فردوسی مشهد) دبیر کمیته علمی بودند.

بعضی از محورهای خاص مورد بحث در این کنفرانس عبارت بودند از:

❶ نقش چند رسانه ای ها و رایانه در یاددهی-یادگیری ریاضیات،

❷ سبک ها و روش های یاددهی ریاضی با تأکید بر استانداردهای جهانی در آموزش ریاضی،

❸ نقد و بررسی موضوعی مباحث موجود در ریاضیات ابتدایی، راهنمایی و متوسطه،

❹ بررسی تطبیقی آموزش ریاضیات در ایران و سایر کشورها،

❺ حل مسئله و راهبردهای حل آن،

❻ آموزش حرفه ای بلندمدت و کوتاه مدت ضمن خدمت معلمان در عرصه آموزش ریاضیات،

❼ موانع یاددهی-یادگیری ریاضی ناشی از شیوه موجود آزمون ها،

❽ نقش رقابت در آموزش ریاضی،

❾ تأثیر شگفتی ها و جنبه های کاربردی ریاضیات در آموزش ریاضی.

اعضای کمیته علمی را ۱۸ نفر از استادان دانشگاه ها و مدرسان مراکز تربیت معلم و آموزش عالی فرهنگیان و دبیران ریاضی تشکیل می دادند (برای اولین بار مسئولیت تشکیل کمیته علمی به انجمن علمی و آموزشی معلمان ریاضی استان خراسان واگذار شد). فهرست الفبایی اعضای کمیته علمی با محل کار آنها که در زیر می آید نشان دهنده تنوع انتخاب آنان با توانایی های علمی-آموزشی مختلف در حیطه ریاضیات است:

محمدعلی ابراهیمی (انجمن علمی و آموزشی معلمان ریاضی استان خراسان)

محمدعلی پورعبداله نژاد (دانشگاه فردوسی مشهد-دانشکده ریاضی-انجمن ریاضی ایران)

محمدجواد جوامع (مرکز تربیت معلم و آموزش عالی فرهنگیان مشهد)

پرویز حسن پور (دانشگاه بیرجند-گروه ریاضی-انجمن ریاضی ایران)

جلیل خلیل زاده (معاونت متوسطه اداره کل آموزش و پرورش خراسان)

پروانه ذوالفقاری (کارشناسی گروه های آموزشی اداره کل آموزش و پرورش خراسان)

علی رجالی (دانشگاه صنعتی اصفهان-اتحادیه انجمن های علمی و آموزشی معلمان ریاضی ایران)

محمد ربیعی (انجمن علمی و آموزشی معلمان ریاضی استان خراسان)

حسن صادقی (دانشگاه فردوسی مشهد-انجمن آمار ایران)

سید حسن علم الهدایی (دانشگاه فردوسی مشهد-دانشکده ریاضی)

سید نعمت عبدی (انجمن علمی و آموزشی معلمان ریاضی استان خراسان)

محمدحسن غلامپور (اتحادیه انجمن های علمی و آموزشی معلمان ریاضی ایران)

محمدرضا کریمی راد (کارشناسی گروه های آموزشی اداره کل آموزش و پرورش خراسان)

زهرا گویا (دانشگاه شهید بهشتی-انجمن ریاضی ایران)

محمد صال مصلحیان (دانشگاه فردوسی مشهد-دانشکده ریاضی-انجمن ریاضی ایران)

علی رضا مدقالچی (دانشگاه تربیت معلم-انجمن ریاضی ایران)

اسداله نیکنام (دانشگاه فردوسی مشهد-دانشکده علوم ریاضی)

در فرم فراخوان، اعضای انجمن های علمی و آموزشی از پرداخت حق ثبت نام معاف شده بودند و برای اولین بار در فرم ثبت نام، جایگاهی برای معلمان ریاضی مدارس

راهنمایی و آموزگاران دبستان در نظر گرفته شده و تعدادی از مقالات ایشان برای ارائه در کنفرانس پذیرفته شده بود. اعضای کمیته علمی کنفرانس ضمن تشکیل حدود ۳۷ جلسه عمومی و تخصصی در شش واحد (۱) دبیرخانه (۲) پذیرش مقالات (۳) پیگیری و تنظیم سخنرانی‌ها (۴) میزگردها و کارگاه‌ها (۵) هماهنگی کمیته علمی و اجرایی (۶) ارزیابی و ارائه راهکارها) به تشریک مساعی پرداختند که گزارش مختصری از فعالیت این واحدها را در ذیل می‌آوریم. دبیرخانه کمیته علمی فعالیت خود را از ابتدای تشکیل کمیته علمی آغاز نمود و همچنان به فعالیت مشغول است. تعداد متقاضیان ۲۶۴۵ نفر بود که از این تعداد براساس اولویت‌هایی که از سوی مسئولین کنفرانس تعیین شد، ۱۳۶۸ نفر پذیرش شدند و بقیه، متأسفانه به دلیل کمبود امکانات، عدم پذیرش دریافت کردند. از بین پذیرفته‌شدگان ۴۹/۵۲ درصد (۶۷۷ نفر) زن و ۵۰/۴۸ درصد (۶۹۰ نفر) مرد بودند.

۵۰/۳۳ درصد از کل پذیرفته‌شدگان نیز از اعضای انجمن‌های علمی آموزشی معلمان و انجمن‌های ریاضی و آمار ایران بودند. ۱۰/۹۷ درصد از شرکت‌کنندگان دارای مدرک کارشناسی ارشد به بالا (اعضای هیئت علمی دانشگاه‌ها، مراکز آموزش عالی فرهنگیان، تربیت معلم و پیش‌دانشگاهی و دبیرستان)، ۶۳/۳۵ درصد دارای مدرک کارشناسی (شاغل در دبیرستان‌ها و مدارس راهنمایی) و ۲۱/۸ درصد دارای مدرک کاردانی و دیپلم (شاغل در دوره‌های راهنمایی و ابتدایی) بودند. ۳/۸۸ درصد مدرک خود را اعلام نکرده بودند.

۱۵/۳۶ درصد از شرکت‌کنندگان مقاله ارائه نمودند. مجموعاً ۲۱۰ مقاله به دبیرخانه ارسال شده بود که از این تعداد، ۱۷۰ مقاله در موعد مقرر به دبیرخانه واصل و برای ارزیابی به واحد پذیرش مقالات تحویل گردید.



اعضای واحد پذیرش مقالات که از بین اعضای کمیته علمی برگزیده شده بودند در طول یک ماه و با استفاده از نظرات ۲۹ داور (۱۵ نفر از اعضای هیئت علمی و ۱۴ نفر از آموزش و پرورش) در طی ۹ جلسه به بررسی مقالات دریافت شده پرداختند.

روند کلی داوری این چنین بود که بعد از دریافت هر مقاله، نام نویسنده و مشخصات وی از مقاله حذف می‌شد و سپس همراه با فرم مخصوص داوری و به طور محرمانه، برای یک یا دو داور ارسال می‌شد. بعد از دریافت نظر داور، مقاله (بدون ذکر نام و مشخصات نویسنده) در جلسه واحد پذیرش مقالات مطرح می‌گردید و بعد از مرور محتوی آن و قرائت نظر داور، مورد ارزیابی قرار می‌گرفت. تصمیم‌گیری نهایی به صورت رأی‌گیری و بر مبنای اکثریت آراء صورت می‌گرفت و در پایان، نام نویسنده و مشخصات وی به اطلاع واحد پذیرش می‌رسید.

در مجموع ۵۹ مقاله برای سخنرانی و ۳۹ مقاله برای پوستر پذیرفته شد و ۷۲ مقاله نیز در اولویت قرار نگرفت. این واحد مدت زمان ارائه مقالات (سخنرانی‌ها) را به مسئول واحد پیگیری و تنظیم سخنرانی‌ها پیشنهاد می‌نمود.

واحد پیگیری و تنظیم سخنرانی‌ها کار خود را از اولین جلسات تشکیل کمیته علمی آغاز کرد و براساس پیشنهاد کمیته علمی نسبت به دعوت از ۲۰ صاحب نظر داخلی و ۱۰ صاحب نظر خارجی در زمینه‌های مختلف آموزش ریاضی اقدامات اولیه را به عمل آورد. پس از قبول موضوع پیشنهادی و دریافت خلاصه یا اصل مقاله از جانب ۱۶ نفر از ایشان نسبت به دعوت آنها اقدامات مقتضی صورت پذیرفت. از این عده ۶ نفر از استان خراسان، ۹ نفر از سایر نقاط کشور و یک نفر نیز از دانشگاه ویسکانسن آمریکا بودند.

به پیشنهاد کمیته علمی از صاحب‌نظران غیر ایرانی خارج از کشور توسط واحد



**نوراله نژاد صادقی**

استعاره‌های مختلف حد و پیوستگی

**مهدی رجبعلی‌پور**

تأثیر فعالیت‌های تحقیقاتی ریاضی در امر آموزش و ایجاد انگیزه در یادگیرنده‌ها

**محمد رضا رجب زاده مقدم**

وقتی دانش آموز می پرسد «این ریاضیات به چه درد می خورد» چه جوابی داریم؟

**محمدعلی پور عبدالله نژاد**

پژوهش مشارکتی معلمان در کلاس درس ریاضی

**رضا سرکار آرائی**

صفحه شطرنج و مهره‌های آن

**انسیه شاهدانی**

\*\*\*\*\*  
**سخنرانی‌های ۴۰ دقیقه‌ای**  
 \*\*\*\*\*

یاددهی- یادگیری ریاضی از نوع دیگر!

**جواد حاج بابایی**

آموزش مفاهیم اساسی ریاضیات و هندسه در قالب بازی

**مریم قاسمی و زهرا مهرپور**

ریاضی جبرانی و تکمیلی

**انسیه شاهدانی**

نقش امید ریاضی در مسائل و بازی‌های شانس

**فریدون نوذری**

پایروس جدید یا چند رسانه‌ای

**سیما ترابی**

بررسی مقایسه‌ای کتاب ریاضی پنجم ابتدایی ایران با Math plus

**الله رشیدی**

تأثیر مکاتب فلسفی ریاضی در آموزشی ریاضی

**محمد صالح مصلحیان**

اشتباه در استدلال‌های ریاضی

**اکبر زمانی**

نقش زبان و تعامل در یاددهی- یادگیری ریاضیات (به ناشنویان)

**زهرا مقاهری زاده**

چگونه اتحادهای جبری را آموزش دهیم

**ابراهیم ریحانی**

هماهنگی دعوت رسمی بعمل می‌آید، ولی با وجود پیگیری واحد تنظیم سخنرانی‌ها و قبول دعوت از جانب میهمانان و نیز دریافت خلاصه مقاله آنها (که در کتابچه راهنمای کنفرانس گنجانده شده است) به علت پاره‌ای از مشکلات، متأسفانه هیچیک از آنان موفق به حضور در کنفرانس نشدند.

در تنظیم زمان سخنرانی‌ها (که به علت تراکم باید بطور موازی ایراد می‌شدند) برای ۷۵ سخنرانی ۵۰، ۴۰ و ۲۰ دقیقه‌ای، ترتیبی اتخاذ گردید که شرکت کنندگان بتوانند حداکثر استفاده را از برنامه‌های علمی کنفرانس ببرند. در هر روز علاوه بر چهار سخنرانی ۵۰ دقیقه‌ای (در دو نوبت و به طور موازی) در صبح و بعد از ظهر ۶ تا ۷ سخنرانی ۴۰ و ۲۰ دقیقه‌ای بطور همزمان ایراد گردید (حدود ۵ سخنرانی از مجموع سخنرانی‌ها بدلیل عدم حضور سخنران برگزار نشد). برای آگاهی بیشتر خوانندگان، نام مقاله، با زمان ارائه، و نام سخنران را در زیر می‌آوریم.

\*\*\*\*\*  
**سخنرانی‌های ۵۰ دقیقه‌ای**  
 \*\*\*\*\*

رویکرد پولیا به حل مسئله

**محمدحسین احمدی**

بررسی تطبیقی آموزش ریاضی در ایران با سایر کشورها

**زهرا گویا**

نکته‌هایی در آموزش ریاضی

**احمد شرف‌الدین**

فن‌آوری اطلاعات و آموزش ریاضی

**یحیی تابش**

نقش طرح‌واره‌های مفهومی در یاددهی یادگیری ریاضیات

**سید حسن علم‌الهدایی**

مهندسی آموزشی و نقش فناوری‌های پیشرفته در آموزش

**مرتضی میرمحمدزایی**

تأثیر شگفتی‌ها و جنبه‌های کاربردی ریاضیات در آموزش ریاضی





انواع عدد و نقطه در ریاضیات و هندسه

## رضا جمشیدیان

ارائه کنندگان پوستر در دو نوبت و در دوروز متوالی در کنار پوستر خود حضور پیدا کردند و با علاقه مندان به بحث و تبادل نظر پرداختند.

واحد میزگرد و کارگاهها، عناوین و نحوه برگزاری میزگردها و کارگاههای آموزشی را مشخص و به کمیته علمی ارائه نمود و کمیته علمی پس از بررسی موارد پیشنهادی توسط این واحد، عناوین میزگردها و کارگاهها را به شرح زیر اعلام کرد:

الف - میزگرد جایگاه آموزش ریاضی کشور،

ب - میزگرد آموزش معلمان ریاضی.

ج - کارگاه آمار و مدلسازی - آموزش Minitab

د - کارگاه آموزش هنر حل مسئله.

هدف از تشکیل کارگاهها، آشنایی معلمان ریاضی بادو کتاب جدید التالیف با همین عناوین بود. کارگاهها از روز دوم کنفرانس شروع و در پنج نوبت تکرار شدند.

ه - کار گروهی ریاضی عمومی، حساب دیفرانسیل و انتگرال و نیز هندسه در برنامه علمی کنفرانس گنجانیده شده بود که توسط صاحب نظران و انجمنهای علمی و آموزشی معلمان ریاضی استانها اداره می گردید.

برای هر میزگرد ۶ نفر (۳ نفر از استادان دانشگاه و ۳ نفر از مدرسان و دبیران آموزش و پرورش) در نظر گرفته شده بودند که با تشکیل جلسات هماهنگی و تقسیم کار، میزگردها در زمان مقرر برگزار گردید (پایان روز اول و دوم) و با استقبال گسترده شرکت کنندگان روبرو شد.

محورهای مورد بحث در میزگرد آموزش ریاضی عبارت بودند از فرا آموزش، کتابهای ریاضی دبیرستانی و دانشگاهی، لزوم شناخت قالبهای نو در آموزش، انتظارات ما از ریاضی، مشارکت در کلاس و فعالیتهای گروهی، وضعیت درس آموزش ریاضی در دانشگاهها، مراکز تربیت معلم و آموزش عالی فرهنگیان، و گسل بین مبانی نظری و عملی در آموزش ریاضی، و در پایان به بعضی از سؤالات حضار پاسخ داده شد و بقیه سؤالات (که اکثراً دقیق و با اهمیت بودند) برای جمع بندی به واحد ارزیابی

آیا زمان استفاده از ماشین حساب در آموزش ریاضی فرانسیده است؟

## محمد علی کرایه چیان

نقش ریاضیات در پیشرفت زندگی بشر

### هادی ضیائی

تعدادی نامساوی برای جمعهای متناهی بر اساس اعداد (دنباله)

فیوناچی

### فرزاد ایرانمنش

(۱) آموزش مفاهیم نصف و ثلث و ... (۲) روش تدریس جمعها و ... (۳) عدد نویسی

### شهین عبدالملکی و صفی عبدالملکی

بعضی از حقیقتها و تمایلات در مورد تدریس ریاضیات در کشور مجارستان

### سعید رضایی اول

سقراط و روش دانش آموز محوری

### محمد داوودی درزی

درباره قضیه اولر

### سید نعمت عبدی

جستاری بر علل افت تحصیلی دانش آموزان در درس ریاضی

### محمد صالح شبلی

جایگاه روشهای عددی در کتب درسی (بررسی نکات مهمی در روشهای عددی نیوتن - رافسون)

حسن خاصه خانیاددهی - یادگیری ریاضیات با تاکید بر تفکر تحلیلی، تصویری نقاد و خلاق و نقش چند رسانه ای ها و رایانه در یاددهی یادگیری ریاضیات  
عیسی فلاحی

برد توابع پیوسته

### محمد حسن شیر دره حقیقی

مشاهده و تجسم، نقش آن در آموزش و یادگیری ریاضیات

### محمد رضا نوری

آموزش ریاضی و موانع موجود، راههایی جهت آموزش مطلوبتر و رسیدن به کیفیت بهتر

ذبیح الله شاهر خیان - محمد حسن پور محمد باقر

ارسال گردید.

اهم مباحث میزگرد آموزش معلمان ریاضی عبارت بودند از آموزش قبل و ضمن خدمت معلمان، چالش های موجود بر سر راه این آموزش، و تجربه سایر کشورها در این زمینه، پرسش و پاسخ نیز مورد توجه حاضرین قرار گرفت. امیدواریم در کتاب گزارش کنفرانس شاهد درج سؤالات و توضیحات بیشتر باشیم.

استقبال شرکت کنندگان از کارگاه های آموزشی نیز بسیار گسترده بود، بطوریکه امکانات موجود تنها جوابگوی ۴۰ درصد (حدود ۶۰۰ نفر) از متقاضیان بود. اکثر معلمان شرکت کننده در کارگاه ها نسبت به دو کتاب جدید التالیف نظر مساعد داشتند. آموزش Minitab در کارگاه کامپیوتر معمولاً بابیش از دو برابر ظرفیت! تشکیل می شد.

کارهای گروهی بیش از زمان پیش بینی شده، وقت می گرفت و بدلیل کمبود جا در سالن ها، اغلب حاضرین ایستاده بودند.

واحد هماهنگی کمیته های علمی و اجرایی نیز نقش انتقال تصمیمات کمیته علمی به کمیته اجرایی، کار تنظیم قرارداد بین انجمن علمی معلمان ریاضی استان خراسان و اداره کل متبوع، تنظیم کتاب راهنما و خلاصه مقالات را با اخذ محتوای آن از سایر واحدها و کمیته علمی و اجرایی به عهده داشت. در قسمتی از گزارش این واحد به معاونت برنامه ریزی و نیروی انسانی، استمرار و آگاهی

کمیته علمی کنفرانس به انجمن های علمی آموزشی استانها، و نیز استمرار معرفی بهترین مقاله ارائه شده در کنفرانس ها، از موارد راهبردی شمرده شده بود که در برگزاری مطلوب کنفرانس های آتی، تأثیر مثبت خواهد داشت.

در حاشیه کنفرانس نمایشگاهی در ۳ محور: (۱- فیلم و نرم افزارهای کمک آموزشی، ۲- کتاب، پایان نامه و مجلات، ۳- مواد کمک آموزشی) فعالیت داشت.

در بخش فیلم و نرم افزار، تولیدات دفتر تکنولوژی آموزشی وزارت آموزش و پرورش ارائه شده بود.

در بخش کتاب انتشارات مدرسه، آستان قدس رضوی، امیرکبیر، نشر دانشگاه صنعتی شریف و دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد کتب خود را در معرض فروش و نمایش قرار داده بودند. در بخش مواد کمک آموزشی، صنایع آموزشی و خانه ریاضیات نیشابور محصولات تولیدی خود را ارائه نمودند. همچنین کار هنری- ریاضی با عنوان تفسیر طبیعت که توسط یکی از دبیران آموزش و پرورش سمنج ارائه شده بود مورد توجه بازدیدکنندگان قرار گرفت. نمایشگاهی از پارادوکسها در ریاضیات، آثار «اشر»، وسیله ابتکاری برای آموزش مفهوم حد، و... سایر فعالیت های بخش نمایشگاه را تشکیل می دادند. ضمناً کتاب «گزارش چهارمین کنفرانس آموزش ریاضی» به شرکت کنندگان عرضه شد.

کمیته ارزیابی با تهیه دو فرم یکی برای ارزیابی کیفیت علمی مقالات ارائه شده و دیگری برای امور اجرایی مبادرت

به نام آن که حق را غفلت از محبت

# خبرنامه

پس از برگزاری دوره های آموزشی  
در روزهای ۱۳ و ۱۴ خرداد ماه ۱۳۸۵

معاونت علمی و فناوری ریاست جمهوری  
سازمان پژوهش های علمی و اطلاع رسانی  
مرکز تحقیقات و توسعه ریاضیات

موضوع: آموزش ریاضی و به عنوان یکی از محورهای اصلی برنامه های آموزشی و پژوهشی  
در راستای تحقق اهداف و سیاست های کلی نظام جمهوری اسلامی ایران

این خبرنامه به منظور آشنایی شما با آخرین دستاوردهای علمی و پژوهشی در زمینه های مختلف ریاضیات و به عنوان یکی از ابزارهای مهم برای ارتقای سطح علمی و پژوهشی شما در این زمینه تهیه شده است.

این خبرنامه به صورت فصلی منتشر خواهد شد و شما می توانید با مراجعه به وبسایت مرکز تحقیقات و توسعه ریاضیات یا از طریق پست دریافت کنید.

تألیف: دکتر سید علی حسینی  
ویراست: دکتر سید علی حسینی  
طراحی: دکتر سید علی حسینی  
چاپ: مرکز تحقیقات و توسعه ریاضیات

تلفن: ۰۲۱-۸۸۸۸۸۸۸۸  
پست الکترونیک: info@math.ac.ir  
وبسایت: www.math.ac.ir

Teaching Mathematics and its Applications  
http://www.math.ac.ir  
Email: info@math.ac.ir

به نظرخواهی از شرکت کنندگان کرد.

تمایل خود را به مطالب زیر ابراز داشته بودند:

- ۱ - اظهار تمایل شرکت کنندگان به آگاهی از نظریه ها و یافته های جدید ریاضی که در کتب درسی به صورت خلاصه یا اشاره بیان شده است.
- ۲ - اظهار تمایل به آگاهی از شیوه های جدید ارائه مطالب ریاضی که توسط آموزشگران، تجربه و ابداع شده اند.

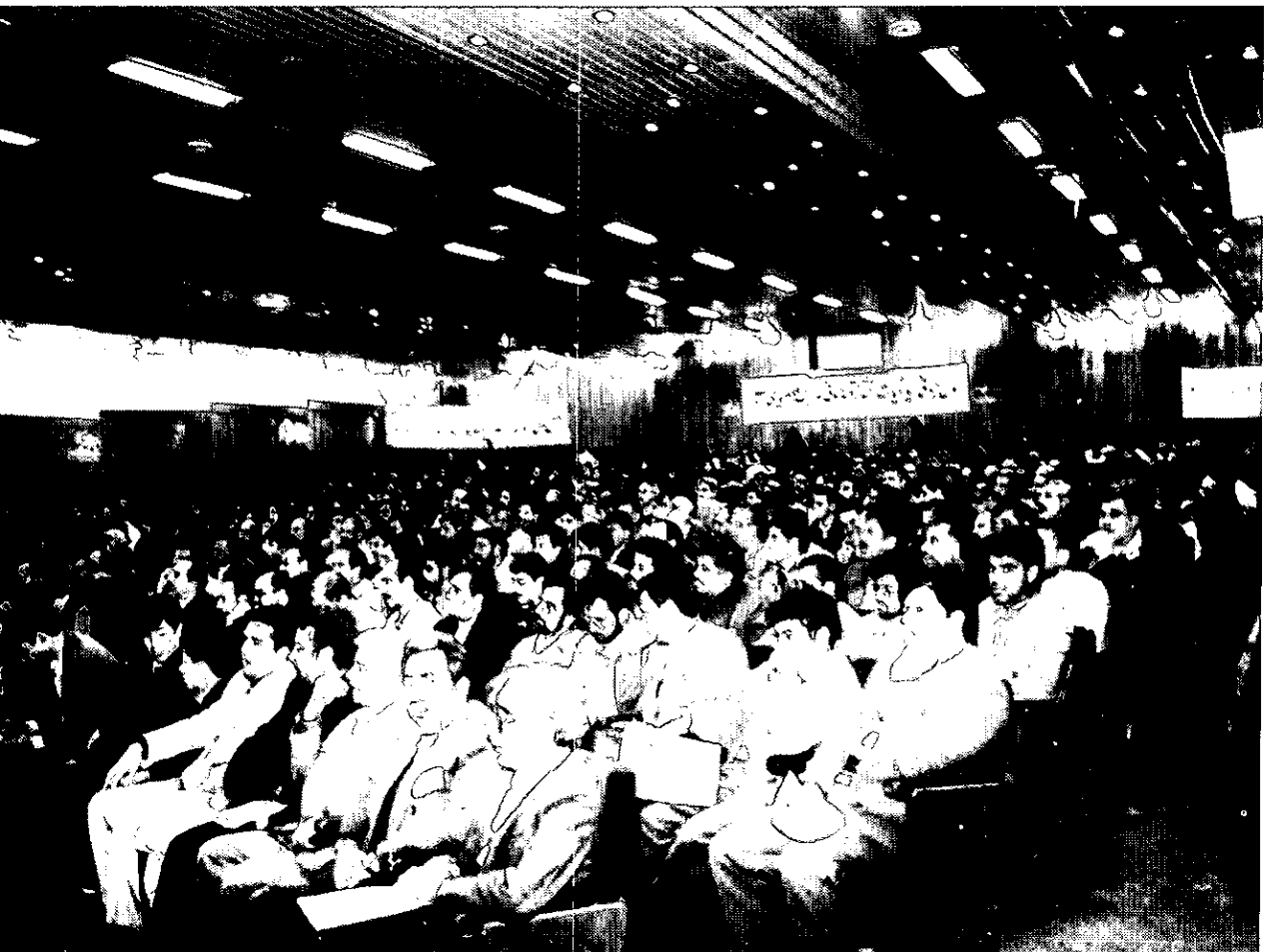
همچنین در این زمینه (سؤالات باز) انتقادات را می توان به ایراد بعضی سخنرانیهای تکراری، بیان صرف مشکلات بدون ارائه راه حل، تکرار بعضی مطالب درسی یا بررسی کتب، که غالباً در دوره های کوتاه مدت آموزش ضمن خدمت معلمان نیز انجام می شود، خلاصه کرد. سایر فعالیتها - در روز اول با وجود بارش برف سنگین بیش از ۱۳۰۰ نفر در مراسم افتتاحیه شرکت داشتند. در قسمتی از این مراسم فیلمی کوتاه از زندگی زنده یاد مرحوم پروفسور تقی فاطمی به نمایش درآمد و در پایان جایزه ای

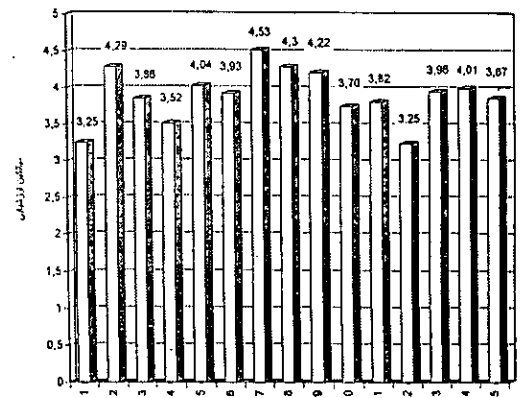
### ارزیابی کیفیت علمی مقالات

فرم نظر سنجی سازمان یافته ای در قالب طیف لیکرت همزمان با ارائه مقاله در اختیار شرکت کنندگان قرار می گرفت و بعد از خاتمه جلسه جمع آوری می گردید. لازم به یادآوری است که گروه مجری قبلاً در مورد چگونگی توزیع فرمها توجیه شده بودند. در نهایت بعد از استخراج نتایج نمره ۸۰۳/۳ از ۵ بدست آمد.

### نتایج حاصل از ارزشیابی اجرای کنفرانس

در آخرین ساعات برگزاری کنفرانس، فرم ارزشیابی از اجرای کنفرانس در بین شرکت کنندگان توزیع و در هنگام خروج آنان جمع آوری گردید. نتایج حاصله به شرح زیر می باشد: در مورد سؤالات باز در فرم ارزشیابی شرکت کنندگان





محور افقی نمودار فوق ستون‌ها مربوط به فرم ارزشیابی اجرایی کنفرانس می باشد.

به نام آن مرحوم، توسط اهداکننده این جایزه (آقای دکتر حسین احمدی از دانشگاه ویسکانسین آمریکا) به یکی از دبیران ریاضی بنابه تصمیم کمیته علمی چهارمین کنفرانس آموزش ریاضی که شامل یک لوح به همراه یک سکه بهار آزادی بود، اهدا گردید. در مراسم اختتامیه نیز از پیشکسوتان ریاضی استان، آقایان پرویز حسن پور، ابراهیم ناگهانی و کاظم صفایی نیکو تجلیل به عمل آمد و هدیه ای به رسم یادبود به آنان و نیز پدر زنده یاد رضا صادقی (یکی از نخبگان فقید ریاضی کشور) اهدا گردید.

چاپ سه شماره خبرنامه که حاوی اطلاعات مفیدی از برنامه های کنفرانس، پایگاههای اطلاعاتی آموزش ریاضی در اینترنت، نکاتی در آموزش ریاضی و مطالب علمی متنوع دیگر بود، مورد استقبال فراوان شرکت کنندگان قرار گرفت. به کلیه شرکت کنندگان یک لوح فشرده (CD) حاوی برنامه های علمی (خلاصه مقالات، اسامی شرکت کنندگان، برنامه های علمی کنفرانس، نقاط دیدنی مشهد و خراسان، تصاویری از ایران، توضیحات آرم کنفرانس، ...) اهدا گردید و به بعضی از ارائه کنندگان مقاله نیز هدیه ای خاص تعلق گرفت.

بیانیه پایانی کنفرانس حاوی نکات ارزنده ای خطاب به برنامه ریزان و دست اندرکاران آموزش ریاضی کشور بود که بعضی از بندهای آن را در زیر می آوریم:

۱- برگزاری کنفرانسهای آموزشی ریاضی به لحاظ ایجاد فضای گفتمان، انتقال تجارب و آشنایی با یافته های جدید در عرصه یاددهی - یادگیری ریاضیات امری شایسته و ضروری است لذا اهتمام مسئولان را در برگزاری مستمر این کنفرانسها خواستاریم؛

۲- ریاضیات به عنوان دانش بنیادی و راهبردی در توسعه همه جانبه کشور به ویژه توسعه علمی و فناوری اثر جدی دارد. لذا هرگونه بخشی نگری دوره ای در آن و غفلت از آموزش و برنامه ریزی اصولی و علمی برای آن موجب خسران است؛

۳- ضرورت پژوهش پیرامون برنامه، محتوا، دانش پایه و شیوه های تدریس برای جذب معلمان کارآمد و نیز فراهم آوردن زمینه های علاقه مندی و پایداری آنان در عرصه تعلیم و تربیت از اهم امور است؛

۴- تقویت شوراها و برنامه ریزی درسی ریاضی با حضور معلمان باتجربه و کارآمد را مورد تأکید قرار می دهیم تا این شوراها بتوانند با بهره مندی از امکانات به صورت بهینه به امر مهم برنامه ریزی و تألیف کتب درسی بپردازند؛

۵- امروز نقش انجمنهای علمی و آموزشی معلمان ریاضی استان ها در هماهنگی، ساماندهی و بهره مندی از توان آنان به صورت فراگیر، عینی و بی بدلیل می باشد. لذا تقویت انجمن ها و اتحادیه انجمنهای علمی و آموزشی معلمان اثری مستقیم در اصلاح و بهبود آموزش ریاضی کشور دارد؛

۶- آموزش مستمر معلمان ریاضی بر مبنای نیازسنجی و برنامه ریزی اصولی و علمی و کاربردهای آن در آموزش ریاضی از موارد ضروری است که اهتمام جدی مسئولان را در انجام آن می طلبد؛

۷- تمرکز زدایی در امر برگزاری کنفرانسهای آموزش ریاضی و استفاده از توان علمی و اجرایی استانها همراه با ساماندهی و نهادینه نمودن آن اثر مطلوبی در خودباوری نیروهای استانها و ارائه به هنگام راهبردهای کنفرانسها دارد؛

۸- توجه عمومی به منزلت حقیقی معلمان عامل مؤثر در جذب و ماندگاری معلمان علاقه مند و کارآمد در عرصه تعلیم و تربیت است؛

۹- ایجاد پایگاه اطلاع رسانی علمی و آموزشی فراگیر و متمرکز برای دست یابی معلمان ریاضی سراسر کشور به شیوه های جدید آموزش ضرورتی اجتناب ناپذیر است.



## C O N T E N T S :

### 2 Editor's Note

### 4 Reviewing school Algebra

by: S. Gholamazad

### 13 A Combinatorial method for Sums of Integer Powers

by: J. Laali

### 20 Professor Hashtroudi

by: M.E. Allai

### 28 Who Solved the Cubic?

by: T. Andrews, Tran: N. Shahamat Naderi

### 31 Teachers' Narrative

by: M. Gooya

### 34 Mathematics Teaching Method in School

by: Z. Shahrokhian. & M.H. Poormohamadbagher

### 49 Assessment in the Mathematics Class

by: T. Perso, Tran: S. Chamanara

### 54 Mathematics Paradoxes

by: M. Gardner, Tran: H. Nasirnia

### 55 A Report of the Fifth Annual Iranian Mathematics Education Conference

by: M. Javameh

**Managing Editor:** Alireza Hadjianzadeh

**Editor:** Zahra Gooya

**Executive Director:** Soheila Gholamazad

**Graphic Designer:** Fariborz Siamaknejad

**P.O.Box :** Tehran 15875 - 6585

## برگه اشتراک مجلات آموزشی رشد

نام و نام خانوادگی :

تاریخ تولد :

میزان تحصیلات :

تلفن :

نشانی کامل پستی :

استان :

شهرستان :

خیابان :

کوچه :

پلاک :

کد پستی :

مبلغ واریز شده :

شماره رسید بانکی :

تاریخ رسید بانکی :

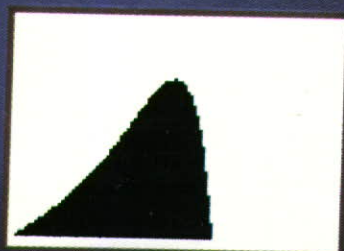
مجله در خواستی :

امضاء:

## شرایط اشتراک

۱ - واریز حداقل مبلغ ۱۰۰۰۰۰ ریال به عنوان پیش پرداخت به حساب شماره ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سرخه حصار، کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال رسید بانکی به همراه برگه تکمیل شده اشتراک به نشانی دفتر انتشارات کمک آموزشی.

۲ - شروع اشتراک از زمان وصول برگه درخواست اشتراک است. بدیهی است یک ماه قبل از اتمام مبلغ پیش پرداخت، به مشترک جهت تجدید اشتراک اطلاع داده خواهد شد.



تصویر بالا منظره ای را نشان می دهد که موجب ترس همه شناگران خواهد شد،

**باله پشتی یک کوسه!**

این تصویر با استفاده از یک ماشین حساب گرافیکی رسم شده است .

**آیا می توانید آن را بازسازی کنید؟**

( راهنمایی : از معادله ای به فرم  $y = x^n e^{x^n} \cos x^n$  استفاده کنید . )

# پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران



۸-۱۰ بهمن  
مشهد مقدس

5 th Iranian Mathematics Education Conference

MASHHAD - IRAN 27-29 Jan 2001