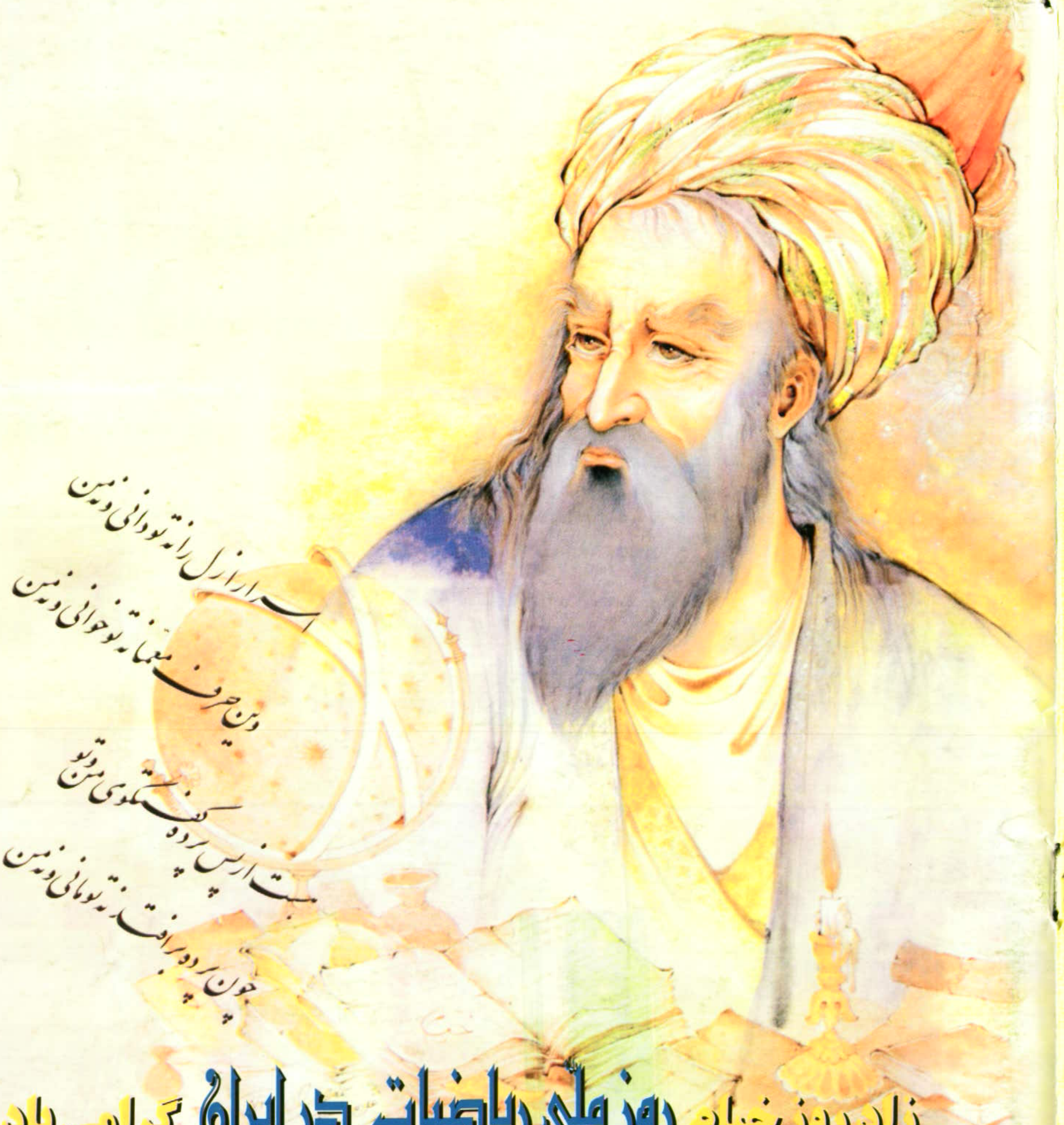
رشد آموزش ریاضی

سال چهاردهم / شماره ۵۵ / بهار ۱۳۷۸ / ۲۰۰ تومان



زادروز خیام روز ملّی ریاضیات در ایران گرامی باد

ریاضی ،
سنگ بنای استراتژیک ،
برای توسعهٔ اقتصادی و
فرهنگی یک ملت است .

رولاندو ریبولدو ، رییس « کمیسیون توسعه و تبادل »
اتحادیهٔ بین المللی ریاضیدانان به نقل از « خبر نامهٔ
سال جهانی ریاضیات »
بهار ۱۹۹۹

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی

شماره مسلسل ۵۵ / سال تحصیلی ۷۹ - ۱۳۷۸ / بهار ۱۳۷۸

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

مدیر مسئول: سیدمحسن گلدانساز
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی: سهیلا غلام آزاد
اعضای هیأت تحریریه: اسماعیل بابلیان، عین ا... پاشا، میرزا جلیلی، جواد حاجی بابایی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام آزاد و علیرضا مدقالچی
طراح گرافیک: فریبرز سیامک‌نژاد

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶ (داخلی ۴۳۲)
تلفن دفتر مجله: ۹- ۸۸۳۱۱۶۰ (داخلی ۳۰۱)
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

دفتر انتشارات کمک آموزشی، مجلات زیر را منتشر می‌کند:

رشد کودک، برای پیش‌دبستان و دانش‌آموزان کلاس اول دبستان
رشد نوآموز، برای دانش‌آموزان دوم و سوم دبستان
رشد دانش‌آموز، برای دانش‌آموزان چهارم و پنجم دبستان
رشد نوجوان، برای دانش‌آموزان دوره راهنمایی
رشد جوان، برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه
مجلات رشد: معلم، تکنولوژی آموزشی، آموزش ابتدایی، آموزش ریاضی، آموزش فیزیک، آموزش شیمی، آموزش زبان و ادب فارسی، آموزش زبان، آموزش راهنمایی تحصیلی، آموزش زیست شناسی، آموزش جغرافیا، آموزش معارف اسلامی،
برای معلمان، دانشجویان تربیت معلم، مدیران مدارس و کارشناسان آموزش و پرورش

- مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان مقاطع مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. **لازم است در مطالب ارسالی، موارد زیر رعایت شود:**
- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- اصل مقاله‌های ترجمه شده به پیوست، ارسال شود.
- در متنهای ارسالی تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویسها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.

همچنین:
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

یادداشت سردبیر

در چند سال اخیر، به مناسبت سال جهانی ریاضیات - ۲۰۰۰، فعالیتهای متنوّع تبلیغی، اطلاع رسانی و مطالعاتی در ایران و جهان انجام گرفته است. اغلب این فعّالیتها در سطح بین المللی توسط یک ستاد جهانی و در سطح ملّی توسط ستاد ملی سال جهانی ریاضیات در ایران انجام می گیرد. در خبرنامه های ستاد جهانی سال ریاضیات، ضمن تشریح هدفهای این سال، نظرات متخصّصان ریاضی و آموزش ریاضی در رابطه با هدفهای اعلام شده ارائه می گردد. سه هدف مشخّص سال جهانی ریاضیات یکی **رویارویی با چالشهای ریاضی در قرن بیست و یکم**، دیگری **بررسی نقش ریاضی به عنوان کلید توسعه و پیشرفت**، و سومی **همگانی یا مردمی کردن ریاضی** اعلام شده است. در مورد هدف سوم، بیشترین کارهائی که در سطح جهان و ایران انجام گرفته، فعالیتهای تبلیغی با هدف «بهبود تصورّ جامعه نسبت به ریاضی و حضور آن در عصر ارتباطات» بوده است. راجع به هدف دوم، بیشترین تلاش بر این بوده که چنین ادّعای کلی، از طریق برجسته کردن نقش ریاضی در سایر حوزه های معرفت بشری توجیه پیدا کند که این زمینه، به مطالعات و تلاشهای جدّی تری نیازمند است. با این حال، هدف نخست سال جهانی ریاضیات، یعنی رویاروئی با چالشهای قرن بیست و یکم از اهمیّت ویژه ای برخوردار است. از زمانی که هیلبرت در شروع قرن بیستم، چالشهای ریاضی این قرن را به صورت بیش از بیست مسأله حل نشده مطرح کرد، جامعهٔ بشری به موفقیتهای چشمگیری در زمینهٔ رشد و توسعهٔ ریاضی دست یافته است. به ادّعای بسیاری، رشد ریاضی در این قرن بیش از رشد آن در طول تاریخ مدوّن بشری بوده است. همچنین، پوشش جهانی آموزش عمومی و تخصّصی به طور مستمر وسیع تر شده است و این وسعت، نیازمندیِ همگان را به ریاضی افزایش داده است. از طرفی دیگر، توسعه و پیشرفت در حوزه های دیگر و نقش برجستهٔ ریاضی در آن پیشرفتها، نیاز افزون تری را برای یادگیری ریاضی ایجاد کرده است. به دلیل همین نیازها، از اوایل قرن بیستم بحث راجع به چگونگی یادگیری ریاضـی و انتخاب ریاضی مناسب برای متقاضیانِ متفاوت، در به وجود آمدن یک حوزهٔ جدید معرفتی به نام «آموزش ریاضی» بسیار مؤثر بودند.

توسعهٔ وسیع ریاضی، گسترش پوشش عمومی آن و پررنگ تر شدن مستمر نقش ریاضی در سایر حوزه ها، «آموزش ریاضی» را نیز با چالشهای جدیدی روبه رو کرده است. در واقع، رویاروئی با چالشهای آموزش ریاضی در قرن بیست و یکم باید مورد توجّه آموزشگران ریاضی در دنیا باشد. همچنین، در سطح ملّی نیز قبل از هرچیز باید در جهت شناخت چالشهای قرن آینده تلاش شود تا به پشتوانهٔ تحقیقات اصیل، بتوان با آن چالشها یک رویاروئی منطقی پیدا کرد.

در عصر ارتباطات و اطلاعات که تکنولوژی ابزار اصلی آن است، ضرورت دانستن و به کارگیری ریاضی چشمگیرتر از گذشتهٔ است. در «عصر جدید» ریاضیاتی که تضمین کنندهٔ تنوّع، مساوات آموزشی و دست یابی به امکانات آموزشی یعنی عدالت آموزشی برای همگان نباشد، قدرت حضور و بقا در برنامه های درسی آموزش عمومی را نخواهد داشت. به این ضرورت، از طریق برنامه های غیرقابل انعطاف و جزمیِ سنّتی، روشهای ارزشیابی ایستا و غیر مولّد و روشهای تدریس و یادگیری مربوط به قرن پایان یافته، پاسخ داده نخواهد شد. برای تحقّق هدفهای والای تضمین عدالت آموزشی، دستیابی همه به امکانات آموزشی، در نظر گرفتن تنوّع و تکثّر یعنی اصل نگاشتنِ وجود تفاوتهای فردی، مربوط بودن برنامه و محتوای درسی با نیازهای یادگیرندگان با توجّه به تنوّع نیاز و علاقهٔ آنها، جامعهٔ آموزش ریاضی با چالشهای بزرگی روبه رو شده است. در آستانهٔ قرن جدید، هنوز محتوای صلب و کهنهٔ قدیمی را در برنامه های درسیِ سنّتی فرض انگاشتن، ارزشیابی را در «بازپس گرفتن آنچه که به دانش آموز یاد داده ایم» خلاصه کردن و تدریس را در «ارائهٔ یکنواخت و منفعلانهٔ محتوای آموزشی» به دانش آموز دیدن، یک خطای نابخشودنی و جبران ناپذیر است. در نتیجه، اگر اعتقاد به تغییر در چنین نگرشهائی وجود داشته باشد، آموزش معلّمان؛ روشهای ارزشیابی؛ برنامه های درسی و انتخاب محتوا و نقش یادگیرنده در یادگیری، از چالشهای جدّی نظام آموزشی و جامعهٔ آموزش ریاضی خواهد بود.

شاید شناخت چالشها امکانی ایجاد کند تا پژوهشگران علاقه مند، به جای پژوهش در مسائل بعضاً نامرتبط با نیازهای ملموس و بنیادی جامعه و در پرتو یک واقع بینی، برای رویاروئی اصولی با آنها دریچه های تازه ای را باز کنند.

همانطور که آناسیرپینسکا در سرمقالهٔ خبرنامهٔ تابستان ۱۹۹۸ سال جهانی ریاضیات ـ ۲۰۰۰ اشاره کرده، هنوز تصورّ عمومی نسبت به ریاضی ضعیف و ناچیز است «زیرا اغلب مردم، ریاضی را فقط به عنوان یک موضوع درسی کسالت بار می بینند که در آن، یا شکست می خورند یا به ندرت موفق می شوند. در نتیجه، به مناسبت سال جهانی ریاضیات ـ ۲۰۰۰، ریاضیدانها باید دست به فعالیتهائی بزنند تا نشان دهند ریاضی تا چه اندازه می تواند هیجان انگیز باشد و با چه

گستردگی می تواند قابل کاربست و استفادهٔ واقعی در «جامعهٔ اطلاعاتی» مدرن باشد. » (ص۱)

ایجاد چنین تصوّری در جامعه، مستلزم تغییر نگرش برنامه ریزان آموزشی و درسی به یادگیری، تبیین جدید هدفهای آموزش عمومی و تغییر باور معلمان ریاضی نسبت به ریاضی و نسبت به یادگیرندگان ریاضی است. واضح است که تغییر نگرش و تغییر باور نه با نصحیت و سخنرانی‌های هیجانی امکان پذیر است و نه با تحمیل و دستور و صدور بخشنامه! برای تغییر نگرش و تغییر باور، باید افقهای تازه با پشتوانه های پژوهشی معرفی شوند و چشم اندازهای جدید بررسی گردند و همهٔ اینها، نیازمند کنار گذاشتن مطلق بینی ها و جزم اندیشی ها ست. اگر جامعهٔ آموزشی قرائت های مختلف از یادگیری؛ آموزش؛ ارزشیابی و تدریس را نپذیرد، در دور معیوبی که بیش از ۷۰ سال است در آن گرفتار شده، باز هم گرفتارتر می شود.

در عصر جدید، گوناگونی انسانها؛ تنوّع مشاغل؛ سرعت غیرقابل تصوّر تکنولوژی؛ رشد لحظه به لحظهٔ علوم؛ برتری فکر به عمل؛ نیازمندی بیشتر شهروندان به یادگیری؛ رقابتهای بین المللی و نیازهای بومی و بسیاری عوامل دیگر، ضرورت دوباره نگری در آموزشهای معلمان، روشهای ارزشیابی و برنامه های درسی ریاضی را بیش از گذشته ایجاب می کند که در این مختصر، تنها به مورد آموزش معلمان اشاره ای می شود:

آموزش معلمان و به خصوص آموزش معلمان ریاضی، از دغدغه های جدی نظامهای آموزشی است و یکی از علّت های آن، تغییرات ذکر شده است. معلمان با دانسته های متنوّعی که معمولاً از طریق گذراندن دوره های تحصیلی خاص حاصل شده است، تدریس را شروع می کنند. در نظامهای آموزشی ایستا، چنین معلّمی حتی می تواند ۳۰ سالِ بی دغدغه تدریس کند و نیازی به دانسته های جدید احساس نکند!؟ اما در زمان حاضر، به لحاظ اصولی امکان چنین تدریسی وجود ندارد، زیرا سرعت ارتباطات و حجم اطلاعات آن چنان زیاد و وسیع است که نیم عمر دانسته های معلّم روز به روز کوتاهتر می شود. در دنیای فعلی، مدارس پذیرای دانش آموزانی هستند که دیده ها و شنیده های متنوّع تری نسبت به دانش آموزان گذشته دارند، همچنان که قدرت تجزیه و تحلیل و توانائی نقد بالاتری را نیز دارند. این دانش آموزان، کم کم به حقوق اجتماعی خود واقف می شوند و می دانند که نمی توان همهٔ آنها را یکسان فرض کرد و بر قامت همهٔ آنها، لباس یکنواخت پوشاند. دانش آموزان عصر حاضر، به مباحث آزادی انتخاب، احترام به حقوق فردی، رعایت حق جامعه، مسؤلیت پذیری در مقابل انتخاب خود، نقش تنوّع در ارتقای یادگیری و بسیاری دیگر که قبلاً حضوری در کلاس درس و نقشی در انتخاب محتوا، چگونگی تدریس و شیوه های ارزشیابی نداشتند به طور جدی می نگرند و فضای مدرسه ای بی توجه به این مباحث را برای خود، تنگ می بینند. در صورت توجّه نظام آموزشی به این مباحث، ضرورتِ دوباره نگری در آموزشهای قبل و ضمن خدمت معلمان لحظه به لحظه افزون تر می شود.

معلمان بزرگواری که با دانسته های سالهای قبل مجبور به تدریس در کلاسهائی با چنین تنوّع دانش آموزی هستند، خدای ناکرده احساس ضعف و ناتوانایی می کنند و این احساس برای جامعهٔ آموزشی بسیار خطرناک و پرهزینه است. تنوّع تغییرات در ریاضی و تفاوت نیازمندیهای افراد در مشاغل و حرفه های دیگر نسبت به ریاضی، ضرورت تنوّع در برنامه های آموزشی و درسی ریاضی را ایجاد می کند. نظام آموزش مدرسه ای ایران که به طور تاریخی، به تفکیک استعدادها و علاقه ها در قالب رشته های تحصیلی ـ و بدون استفادهٔ اصولی از درسهای اختیاری و انتخابی ـ پرداخته است، محتاج یک دوباره نگری همه جانبه در این زمینه است. تعیین سه نوع ریاضی برای سه رشتهٔ درسی در نظام آموزش متوسطهٔ نظری و تکرار این رشته های تفکیک شده از هم تا زمانی که عملاً امکان ادامه و تکرار وجود نداشته باشد! ظاهراً ضرورت بازنگری در آموزش معلمان ریاضی را کم رنگ می کند. با این حال، معلمان ریاضی، می توانند پیشگامان تغییر و تحولهای اصولی در برنامهٔ درسی ریاضی باشند، به شرط آن که آموزش مستمر آنها جدی گرفته شود. آموزش معلمان تنها به معنای ارائه محتوای جدید درسی به آنها نیست. معلمان ریاضی می توانند تضمین کنندهٔ حصول به هدفهای بلند آموزش ریاضی و آموزش عمومی باشند اگر و فقط اگر، نظام آموزشی فراتر از تعریفهای زبانی و گاهی عملی از معلمان، به فکر نوسازی و بازسازی آموزش آنها که غبار زمان آنها را پوشانده است باشد. بسیاری از ادّعاهائی که در رابطه با ضرورت حضور ریاضی در برنامهٔ درسی عمومی می شود قابل دفاع نیست، مگر آن که جامعهٔ آموزش ریاضی با عملهای متکی به یافته های پژوهشی نشان دهد که یادگیری ریاضی ـ آن هم نه فقط یک شکل کلاسیک آن ـ چه نقشی در توانمندتر کردن شهروندان دارد. در برنامه های کلاسیک، ریاضی بیشتر نقش «دروازه بان» را داشته است تا از ورود عدّهٔ وسیعی به حیطه های خاص جلوگیری کند، در صورتی که حضور ریاضی در برنامهٔ عمومی باید نقش «راه عبور» را داشته باشد تا ورود افراد را به حرفه ها و مشاغلِ متناسب با علایق و سلیقه ها و انتخابهای خودشان تسهیل کند. چنین تغییر نقشی، نیازمند تلاش بسیار است که جا دارد در این زمینه، سرمایه گذاری های اساسی صورت گیرد. تغییر چنین نقشی می تواند تصوّر جامعه را نسبت به ریاضی تلطیف و واقعی کند که این خود یکی از اهداف سال جهانی ریاضیات، یعنی همگانی و مردمی کردن ریاضی است. تحقّق این هدف، جز از طریق تغییر باور و نگرش معلمان نسبت به ریاضی و نقش آن در اعتلای جامعه امکان پذیر نیست و این تغییر نیز جز از طریق دوباره نگری در برنامه های آموزش معلمان ایجاد نخواهد شد.

والسلام

فراشناخت و ریاضیات

مؤلف: ای.اچ. شونفیلد
مترجم: فرهاد کریمی، عضو هیأت علمی پژوهشکده تعلیم و تربیت

فراشناخت[1] اصطلاحی است که کاربردهای گسترده ای دارد و به دانش، فهمیدن و تنظیم فرایندهای تفکر به وسیله فرد اشاره دارد. این اصطلاح در دههٔ ۱۹۷۰ به کانون پژوهش در آموزش و پرورش، روان شناسی و هوش مصنوعی[2] تبدیل شد و به سرعت به عنوان نمایندهٔ جنبه ای اساسی از تفکر و حل مسأله انسانی شناخته شد. سه جنبهٔ مهم از فراشناخت در ادبیات پژوهشی مورد بررسی قرار گرفته اند.

اولین جنبه یعنی دانش فراشناختی[3]، به داوری های فرد درباره ظرفیت های ذهنی و رفتار خود مربوط می شود. مثال هایی از دانش فراشناختی مشتمل است بر ارزیابی فرد از:

الف ـ مقدار اطلاعاتی که می تواند بدون خطا به خاطر بسپرد؛

ب ـ چگونه موضوع درسی ریاضی که تدریس شده است را به خوبی می فهمد؛

ج ـ انواع حساب های ذهنی که می تواند انجام دهد؛

د ـ توانایی های وی برای فهمیدن و بکارگیری مواد متن ریاضی.

انواع ارزیابی های فوق، مؤلفهٔ حساس «چرخهٔ بازخورد»[4] هستند که همانگونه که یادگیرنده با مهارت های تازه سر و کار پیدا می کند، اطلاعاتی نیز در اختیار او قرار می دهد. بطورکلی دانش فراشناختی کودکان کاملاً غیر دقیق است و به موازات رشد کودک دقیق تر می شود (فلاول[5]، ۱۹۷۹).

جنبهٔ دوم کنترل یا خودنظمی[6] به توانایی فرد برای بازبینی، ارزیابی و (اگر لازم باشد)، اصلاح رفتار خود در حین انجام تکالیف پیچیده نظیر حل مسأله ریاضی مربوط می شود. پژوهش ها نشان داده اند که عملکرد خودنظمی مسأله حل کن های خبره[7]، خیلی بهتر از تازه کارهاست[8]. علاوه براینکه آنها مسأله حل کن های کاردان تری هستند، در به کارگیری اطلاعاتی که در دسترس دارند نیز کارآمدتر هستند، زمان بیشتری را برای برنامه ریزیِ تلاش های معطوف به راه حل صرف می کنند و با افزایش سن، زمان نسبتاً بیشتری به ارزشیابی تلاش های مربوط به راه حل اختصاص می دهند. در نتیجه، عملکرد آنها در محدود کردن کاوش های نامناسب یا ترک امور محال بهتر می شود و راه حل های امیدوار کننده و مناسبِ مسأله را بیشتر پی گیری می کنند. این امر به نوبه خود به موفقیت بیشتر در حل مسأله می انجامد (شونفیلد، ۱۹۸۵؛ کیل پاتریک، ۱۹۸۶).

> **مهمتر از این، شیوهٔ به‌کارگیری این اصطلاح ـ که همراه با رفتار فراشناختی، به‌عنوان مؤلفهٔ الگوهای فرایند شناختی عمل می‌کند ـ تازه است و منعکس‌کنندهٔ پیشرفت‌های اخیر در فهمیدن و الگوسازی فرایندهای پیچیدهٔ تفکر است.**

جنبه سوم، نظام باورها[9]، به مجموعه ای از فهمیدن ها (در حد امکان ضمنی)[10] مربوط است که افراد درباره خودشان، ریاضیات و ماهیت تفکر ریاضی دارند. تصورات آدمی از اینکه ریاضی چیست و چگونه انجام می شود، شیوه های رفتار در موقعیت های ریاضی را شکل می دهد. برای مثال، بسیاری از

در دهه گذشته، روند مسلط بر برنامهٔ درسی در آموزش ریاضی، حل مسأله بوده است.

ظهور همزمان فراشناخت به عنوان مفهومی مهم در آموزش و پرورش، روان‌شناسی و علوم شناختی (و از جمله هوش مصنوعی)، تا حدودی به خاطر برقراری ارتباط فزایندهٔ میان پژوهشگران این رشته‌هاست.

دانش‌آموزان معتقدند که اندیشه‌ها و روندهای ریاضی که به وسیله متخصصان از بالا منتقل می‌شوند را باید به خاطر بسپارند، در نتیجه انتظار دارند فرمول‌های آماده‌ای برای موقعیت‌هایی که مطالعه کرده‌اند در اختیار داشته باشند و ممکن است در صورتی که فرمول‌ها را فراموش کرده باشند، به سادگی تسلیم شوند یا ممکن است نتوانند از عهدهٔ تحلیل موقعیت‌هایی که قادر به فهمیدن آن‌ها بوده‌اند و سعی کرده‌اند آنها را تحلیل کنند برآیند. به گونه‌ای مشابه، بسیاری از دانش‌آموزانی که تنها تجربهٔ آنها در مورد حل مسأله به کار کردن، تمرین و مشق‌های عملی مربوط بوده است، توقع دارند که اگر می‌توانند مسأله‌ای را حل کنند، تنها در چند دقیقه این کار را انجام دهند. چنین دانش‌آموزانی ممکن است به سادگی کار را بر روی مسایل طولانی که قابل حل بوده‌اند متوقف کنند و زمان کمتری را به این امر اختصاص دهند (سنجش ملی پیشرفت آموزشی، ۱۹۸۳).

تا زمانی که آموزش ریاضی، به‌سوی بنای رابطهٔ مستحکمی با جریان گستردهٔ موضوعات شناختی و فراشناختی که اکنون کانون اصلی توجهند حرکت نکند، موفقیت‌های حاصل، احتمالاً مبهم و قابل صرفنظر خواهد بود.

الف ـ تطوّر مفهوم فراشناخت

توانایی‌های فراشناختی، به «مهارت‌های عالی مرتبهٔ تفکر» مربوط هستند که میراث ممتازی در ادبیات روان‌شناسی و ریاضی به شمار می‌روند. پیشینهٔ مهارت‌های عالی مرتبهٔ تفکر به ویژه در مورد ریاضی را می‌توان تا قرن هفدهم و تأملات دکارت[11] دربارهٔ تفکر خود (دکارت، ۱۹۶۷) و گسترش‌های بعدی این مفهوم که به وسیلهٔ پولیا (۱۹۴۵) صورت گرفته است و همچنین تا کارهای روان‌شناسان گشتالتی نگر نظیر ورتایمر[12] جستجو کرد. در واقع بهترین فعالیت فراشناختی، شباهت‌های ویژه‌ای با برترین حالت فعالیت عقلانی که به وسیله پیاژه[13] (۱۹۷۰) توصیف شده است، یعنی انتزاع تأملی (تجرید بازتابی)[14] دارد. در این حالت افراد قادر هستند «از دور دست»، کنش‌های[اعمال] خود را ببینند، دربارهٔ آنها به تأمل بپردازند و در صورت لزوم رفتار خود را براساس آنها اصلاح کنند.

اصطلاح فراشناخت، علیرغم نیاکانش مفهوم تازه‌ای است. (برای مثال این اصطلاح در ویرایش فشرده فرهنگ انگلیسی اکسفورد به سال ۱۹۷۱، یا ویرایش ۱۹۷۹ فرهنگ جدید وبستر، به چشم نمی‌خورد). مهمتر از این، شیوهٔ به کارگیری این اصطلاح ـ که همراه با رفتار فراشناختی، به عنوان مؤلفهٔ الگوهای فرایند شناختی عمل می‌کند ـ تازه است و منعکس کنندهٔ پیشرفت‌های اخیر در فهمیدن و الگوسازی فرایندهای پیچیدهٔ تفکر است. تشخیص این امر که این مفهوم مورد نیاز است و پیشرفت‌هایی که نسبت به تعریف آن به عمل آمد، تقریباً بطور همزمان در دههٔ ۱۹۷۰ در سه رشتهٔ علمی متفاوت به وقوع

پیوست.

پژوهشگران روان شناسی مشاهده کردند که کودکان خردسال در ارزیابی توانایی های خود در به خاطر سپردن، بسیار ضعیف هستند (فلاول، ۱۹۷۹). دانش آموزان ادعا می کردند که فهرست کوتاهی از واژه ها را می توانند بطور کامل به خاطر بسپارند، حال آنکه خطاهای فراوانی در یادآوری مرتکب می شدند. آنها ادعا می کردند که قادرند ۱۰۰ واژه را به خاطر بسپرند، حال آنکه در واقع، صرفاً قادر به حفظ تنها ۵ یا ۶ واژه بودند. البته کسانی که معتقد بودند حفظ کردن کار آسانی است و به خوبی از عهده آن برمی آیند، به سختی در نوعی رفتار (برای مثال مرور ذهنی) درگیر می شوند که این درگیری، ممکن است به آنها کمک کند تا مهارت های حافظهٔ مورد نیازشان را رشد دهند. از این رو، دانش آموزانی که دیدگاه های نسبتاً خام و نادرستی درباره مهارت های حافظه خود داشتند، برای توسعهٔ عادت های مناسب مطالعه به زمان بیشتری نیاز داشتند. نخستین پژوهش ها در این زمینه به فرا حافظه[15] مربوط می شود که تأثیر دوسویهٔ بین به کارگیری و رشد مهارت های شناختی فرد و آگاهی و ارزیابی مهارت های مذکور را آشکار می کنند. پژوهش های روان شناختی که در خلال دههٔ کنونی انجام شده اند نشان داده اند که تعامل از موضوعاتِ مربوط به حافظه، به موضوعات گسترده تر در زمینهٔ تفکر و یادگیری گسترش یافته است (براون[16] و دیگران، ۱۹۸۳).

فراشناخت اصطلاحی است که کاربردهای گسترده‌ای دارد و به دانش، فهمیدن و تنظیم فرایندهای تفکر به‌وسیله فرد اشاره دارد. این اصطلاح در دههٔ ۱۹۷۰ به کانون پژوهش در آموزش و پرورش، روان شناسی و هوش مصنوعی[2] تبدیل شد و به سرعت به عنوان نمایندهٔ جنبه‌ای اساسی از تفکر و حل مسأله انسانی شناخته شد.

پژوهشگران زمینهٔ هوش مصنوعی ـ شاخه ای از علم کامپیوتر که برنامه های هوشمند کامپیوتری می سازد ـ به مشاهدات همانندی دست یافته اند. همانگونه که برنامه های حل مسأله پیچیده تر می شوند، مدیریت منابع به عنوان موضوعی بنیادی خود را نشان می دهد. برنامه های کامپیوتری می توانند اطلاعات فراوانی را ذخیره کنند و محاسبه های سریع تری انجام دهند. معهذا اثربخشی آنها به این امر بستگی دارد که کدام اطلاعات در دسترس باشد و کدام محاسبه ها انتخاب شده باشند. ثابت شده است که طرح های سادهٔ نمودار گردش کار یا سایر رویکردهای تک بعدی نامناسب هستند و [به همین دلیل] نسل تازه ای از ساختارهای دو بعدی و دو خطی[17] (یکی برای انجام دادن و دیگری برای تصمیم گیری) توسعه یافتند. به منظور اجرای اعمال بازبینی، ارزیابی و تصمیم گیری، به بعد «اجرایی» سطح بالاتری اختصاص یافته است که با اعمال فراشناختی آدمی موازی هستند (اسلیمن[18] و براون، ۱۹۸۲).

پژوهشگران آموزش و پرورش نیز به نتایج مشابهی دست یافتند. شونفیلد (۱۹۸۵) در ضمن مشاهدهٔ حل کنندهٔ تازه کار مسأله گزارش کرده است که چنین دانش آموزانی اغلب دارای دانش واقعی[19] و راهبردی[20] مناسب برای حل مسأله هستند؛ آنها به این دلیل از عهدهٔ حل مسأله برنمی آیند که تصمیم های اجرایی ضعیفی اتخاذ می کنند، مسیرهای نامناسبی را پی گیری می کنند و نمی توانند روی مسیرهای مناسب سرمایه گذاری کنند. در مقابل، حل کنندگان خبرهٔ مسأله اغلب مسأله را از طریق تولید امکانات بیشتر، ارزشیابی دقیق گزینه ها و پی گیری گزینهٔ مناسب حل می کنند. این پژوهش همچنین نشان می دهد که معرفت شناسی[21] (دیدگاه های شخصی فرد در این باره که حیطه های موضوعی خاص نظیر ریاضی یا فیزیک درباره چه چیزی هستند) فرد عادی و غیر مجرّب، نحوه نگاه کردن به آن حیطه ها را شکل می دهد و نیز شیوهٔ عمل در هر حیطه را تحت تأثیر قرار می دهد.

دی سیسا[22] (۱۹۸۳) نشان داد دانشجویانی که در دروس فیزیک کالج، عملکرد خوبی داشتند، اغلب از دانش رسمی خود برای ارائه تبیین های ارسطویی از پیامدهای روزمرّه غفلت می کردند؛ شواهد تجربی که آنها در اختیار داشتند (برای مثال، برای به حرکت درآوردن گاری باید آن را هُل دهید) آموزش های رسمی که درباره قوانین نیوتن دریافت کرده بودند را به کناری نهاده بود. به گونهٔ مشابهی، ظاهراً تجربه عملی دانش آموزان در کلاس ریاضی (برای مثال، تمرین های گسترده در مورد امور معمولی و به خاطر سپردن منفعلانهٔ روندهایی که برای آنها اثبات شده است؛ نگاه کنید به کاکرفت[23] [۱۹۸۲]) سبب می شود دانش آموزان باورها و رفتارهای نامناسبی که به آنها اشاره شد را کسب کنند.

ب ـ دلالتهای آموزشی

در دهه گذشته، روند مسلط بر برنامهٔ درسی در آموزش ریاضی، حل مسأله بوده است. در دهه ۱۹۷۰، هیچ اثری از حل مسأله به چشم نمی خورد. در آن سال ها، مشق و تمرین مورد توجه بود. توجه به حل مسأله صرفاً در دهه ۱۹۸۰ ظاهر شد (در چهارمین کنگره بین المللی آموزش ریاضی در برکلی[24] کالیفرنیا، سه نشست به حل مسأله اختصاص یافته بود) و حل مسأله به گونه ای چشمگیر رشد کرد به طوری که در پنجمین کنگره بین المللی آموزش ریاضی

در آدلاید استرالیا در سال ۱۹۸۴، حل مسأله به موضوعی تبدیل شد که نشست های مهمی درباره آن تشکیل گردید. همانگونه که در مورد نهضتهای برنامه درسی نیز صادق است، حل مسأله برای افراد مختلف معناهای مختلفی دارد. با این حال، دو موضوع اصلی در آموزش و پرورش پدید آمدند. (همچنین حرکت هایی کوچک اما رو به رشد در جهت استفاده از گروه های کوچک مشارکتی حل مسأله در اکتشاف های باز پایان[25] مکرر به وجود آمده اند. این روند مناسب نیازمند تشویق و تقویت است). موضوع نخست استفادهٔ فزاینده از «مسأله های کلامی»[26] در مقایسه با تمرین های محاسباتی صرف است. روند دوری گزیدن از محاسبهٔ صرف امر مطلوبی است، اما تعریف مهارت حل مسأله به عنوان توانایی حل مسأله های کلامی، بسیار محدود است. موضوع دوم عبارت از گنجاندن بخشها یا واحدهای مجزا در باره حل مسأله در سایر کتاب های ریاضی استاندارد است. چنین بخشها یا واحدهایی بر رهیافتهائی[27] شبیه آنچه که پولیا ارائه داده است متمرکزند که اغلب به عنوان نکته های هوشمندانه برای حل دستهٔ خاصی از مسایل بکار می روند. (به عنوان مثال، یکی از این نکته های هوشمندانه این است که هرجا n دیدید، سعی کنید مقدارهای ۴ , ۳ , ۲ , ۱ = n را جایگزین کنید و [از نتایج آنها]، یک الگو بگیرید.) آموزش این چنینی، اغلب به لحاظ ریاضی تصنّعی و سطحی است.

محیط یادگیری آرمانی، همراه با بعد محتوی ـ آنچه که دانش آموزان باید درباره موضوع درسی بیاموزند، باید توجه به موارد زیر را در برگیرد:
الف ـ دانش حیطه،
ب ـ راهبردها و قواعد اکتشافی حل مسأله،
پ ـ راهبردهای اجرایی یا کنترل،
ت ـ راهبردهای یادگیری

ادبیات مربوط به فراشناخت این نکته را کاملاً مشخص می کند که چنین تلاش هایی نه تنها به لحاظ ریاضی سطحی و تصنّعی نیست، بلکه بیشتر محتمل است که از نظر شناختی سطحی و تصنّعی باشند (کالینز[28] و دیگران، زیر چاپ). کالینز و دیگران پس از بررسی سه الگوی موفقیت تربیتی، در مورد چارچوبی برای ارزشیابی محیط های یادگیری بحث کرده اند. آنها تأکید می کنند که محیط یادگیری آرمانی، همراه با بعد محتوی ـ آنچه که دانش آموزان باید درباره موضوع درسی بیاموزند، باید توجه به موارد زیر را در برگیرد: الف ـ دانش حیطه[29]، ب ـ راهبردها و قواعد اکتشافی حل مسأله، پ ـ راهبردهای اجرایی[30] یا کنترل و ت ـ راهبردهای یادگیری[31]. آنها همچنین اشاره کردند که الگوهای موفقیت، از رهگذر تمرکز بر جنبه های مهم تفکر و فهمیدن در آن حوزه، به رشد و پرورش نظام باورهای مناسب برای یادگیری کمک می کنند.

بسیاری از تدریس های ریاضی، تقریباً به طور انحصاری بر دانش حیطه متمرکز هستند هرچند که تأکید اخیر بر حل مسأله، توجه فزاینده ای را به سوی راهبردها و قواعد اکتشافی حل مسأله جلب کرده است. باوجود این، چنین آموزش هایی موضوعات فراشناختی را بدون اینکه به آنها توجه شده باشد رها می کند و احتمال گسترش راهبردهای غیرانطباقی یا فهمیدن غیرانطباقی در مقوله های راهبردهای اجرایی یا کنترل، راهبردهای یادگیری و نظام باورهای مناسب برای یادگیری را افزایش می دهد.

کالینز و دیگران، راهبردهای الگوسازی و هدایت برای توجه کردن به منظور کنترل و یادگیری راهبردها را مورد بحث قرار داده اند. در هدایت، معلم نقش روشنفکرانه ای نظیر نقش یک مربی ورزشی را بازی می کند. زمانی که کودکان مسأله ها را حل می کنند (در صورت امکان در گروه های کوچک)، معلم با آنها کار می کند و ممکن است به روش های زیر، توجه آنها را به اعمال فراشناختی معطوف کند، مثلاً از دانش آموزان بخواهد آنچه را که انجام می دهند و دلیل انجام آن کار را شرح دهند؛ و توضیح دهند که چگونه موفقیت در انجام آن کار، به آنها کمک می کند تا مسألهٔ مورد نظر را حل کنند. معلم در الگوسازی ممکن است در ضمن حل مسأله، توصیفات مفصّلی دربارهٔ راه حل های مسأله ارائه کند. این توضیحات، دربرگیرنده چرخه های برنامه ریزی و بازنگری است که در آن، معلم برخی تصمیم های فراشناختی را که معمولاً پنهان و نامرئی هستند، آشکار می کند (شونفیلد، ۱۹۸۵؛ ماسون[32] و دیگران، ۱۹۸۲). باورهای دانش آموزان درباره ریاضی را می توان در بحث ها، بطور مستقیم یا به گونه ای مفیدتر به وسیلهٔ ایجاد محیط کلاس درس که به رشد نظام باورهای ریاضی زاینده و آفریننده منجر شود (شونفیلد، ۱۹۸۷) مورد توجه قرار داد.

بطور خلاصه، آموزش[فعلی] صرفاً بر دانش حیطه و راهبردهای حل مسأله متمرکز است که تنها با بخشی از تفکر ریاضی سر و کار دارند. تا زمانی که آموزش ریاضی، به سوی بنای رابطهٔ مستحکمی با جریان گستردهٔ موضوعات شناختی و فراشناختی که اکنون کانون اصلی توجهند حرکت نکند، موفقیت های حاصل، احتمالاً مبهم و قابل صرفنظر خواهد بود. یافته های گزارش کاکرفت (۱۹۸۲) و گزارش سنجش ملی پیشرفت آموزشی (۱۹۸۳) هرچند کشورهای متفاوتی را مورد بحث قرار می دهد، به ترتیب طرح ها و پیامدهای آموزشی را نشان می دهد که عمدتاً به جای درک اساسی،

بر کسب مهارت متمرکز هستند.

پ ـ موقعیت و جهت ها

ظهور همزمان فراشناخت به عنوان مفهومی مهم در آموزش و پرورش، روان شناسی و علوم شناختی (و از جمله هوش مصنوعی)، تا حدودی به خاطر برقراری ارتباط فزاینده میان پژوهشگران این رشته هاست. معهذا دلیل اصلی برای ظهور آن، این است که پارادیم ها[۳۳] و چشم اندازهای فلسفی زیربنایی همهٔ رشته های فوق در دههٔ ۱۹۷۰ تغییرات بنیادی را آغاز کردند. پژوهش های پیشین که به عنوان «پژوهش محصول[۳۴]» مشخص شده اند، عمدتاً بر شناسایی مهارت ها و توانایی ها (نظیر درک فضایی که به وسیلهٔ تحلیل عاملی شناسایی می شوند)، روش های اندازه گیری آنها و روش های پیدا کردن روابط (معمولاً از نوع همبستگی) بین آن توانایی ها و اندازه های عملکرد متمرکزند. در پژوهش های رسمی، هرچند که این موضوع مورد توجّه بوده است، امّا عموماً این امر که این توانایی ها چگونه به عملکرد کمک می کنند مورد بررسی قرار نگرفته است. البته ابزارهای روش شناختی دقیق و محکمی نیز برای بررسی چنین موضوعاتی در دسترس نبوده اند. در دهه ۱۹۷۰، پژوهش ها به سمت الگوهای فرایندی[۳۵] تغییر جهت دادند. در چنین پژوهش هایی مشکلات اثبات بسیار دشوارتر است: پژوهشگر نه تنها باید ساختار را تعیین کند، بلکه باید شرح دهد که چگونه آن ساختار کار می کند. الگوهای فرایند، گاهی به عنوان برنامه های کامپیوتری اجرا می شوند واین الگوها، هم ماهیت دقیق و هم کارکرد سازه های ذهنی را مشخص می کنند. چنین الگوهایی، این نکته را مشخص می کنند که الگوهای صرفاً شناختی دهه های اخیر ناکافی بوده اند و لازم است الگوهای فرآیندهای تفکر، مؤلفه های فراشناختی را نیز دربرگیرند.

مفهوم فراشناخت، با وجود اهمیت بنیادی آن هنوز به خوبی تمایز نیافته است و درک نشده است. پژوهش های شناختی مفصل، مشتمل بر بررسی های بالینی دانش آموزان در حین حل مسأله (شونفیلد، ۱۹۸۵) و برنامه های کامپیوتری با مؤلفه های چند وجهی (اسلیمن و براون، ۱۹۸۲) تا حدودی به این نکته اشاره کرده اند که چگونه فراشناخت با شناخت تعامل می کند. در خلال دههٔ آینده، می توان انتظار داشت که تعاریف بسیار دقیق تری از فراشناخت ارائه شوند، تعاریفی که با احتمال بیشتری از تجزیهٔ خوشهٔ «توانایی های فراشناختی»، به بخش های تشکیل دهنده آن از جمله کنترل هشیار و ناهشیار رفتار، نظام باورها و غیره ناشی می شود. با چنین تمایزاتی، عمق (برای مثال، الگوهای تفصیلی که روابط کارکردی در میان دانش حیطهٔ راهبردها و کنترل را مشخص و آشکار می کنند) و گستردگی (برای نمونه مطالعات مردم شناختی[۳۶] کلاس های درس و تجربه های «دنیای واقعی» ریاضی که به توضیح این امر کمک می کند که آدمی چگونه معرفت شناسی ریاضی خود را گسترش و رشد می دهد) افزایش خواهد یافت. یکپارچه سازی پژوهش های روان شناختی و مردم شناختی با عمل و آزمایش های پرورشی (نظیر حرکت به سوی «بررسی های باز»[۳۷] و تعامل گروه های کوچک در کلاس های ریاضی) درک بهتری از ماهیت تفکر ریاضی و اینکه چگونه باید آنرا تدریس کرد ارائه می کند.

مرجع:

The International Encyclopedia of Curriculum
Edited by: A. Levy, Pergamon Press, 1991. PP.888 891.

پانویسها:

۱. Metacognition
۲. Artificial Intelligence
۳. Metacognitive Knowledge
۴. Feedback loop
۵. Flavell
۶. Self-regulation
۷. Expert Problem solver
۸. Novice Problem solver
۹. Belief systems
۱۰. Implicit
۱۱. Descartes
۱۲. Wertheimer
۱۳. piaget
۱۴. Reflective abstraction
۱۵. Metamemory
۱۶. Brown etal
۱۷. Two- tiered
۱۸. Sleeman
۱۹. Factual knowledge
۲۰. Strategic
۲۱. Epistemology
۲۲. Disessa
۲۳. Cockcroft
۲۴. Berkeley
۲۵. Open-ended
۲۶. Word problems
۲۷. Heuristics
۲۸. Collins
۲۹. Domain knowledge
۳۰. Executive strategics
۳۱. Learning strategics
۳۲. Mason
۳۳. Paradigm
معادلهای مختلف برای این واژه انتخاب شده است که به نظر می رسد هیچیک در برگیرندهٔ معنای کامل paradigm نیست.
۳۴. Product Research
۳۵. Process models
۳۶. Anthropological
۳۷. Open investigations

ریاضیات گسسته

هم‌اکنون در کلاس درس است ـ اما پنهان است

نویسنده: جوارن رینتهالر
مترجم: شیوا زمانی ـ دانشگاه صنعتی شریف

در چند سال اخیر، معلم های دبیرستان با یک بوفهٔ غیر قابل مقاومت از تنقلات ریاضی برای افزودن به مباحث درسی مواجه شده اند ـ کاربردهای دنیای واقعی، بازگشت، فرکتالها و آشوبها، تحلیل داده ها و کاربردهای ماتریس ها، به عنوان چند نمونه ـ و البته، توانایی کار با تکنولوژی (فن آوری) که تمام این ها را ممکن ساخته است. ریاضیات گسسته چتری است که بسیاری از این عنوان ها را در برمی گیرد. با وجود هیجانی که این ایده ها در بسیاری از معلم ها و دانش آموزان آنها ایجاد کرده، وقتی واقعیت موجود مباحث درسی از پیش تعیین شده سرِ نازیبای خود را بلند می کند، سؤال غیرقابل اجتنابی که ما می پرسیم این است: «کجا می توانم این ها را بگنجانم؟» این یک پرسش ساده نیست و مستحق توجهی است بیش از آنچه که عموماً جمع ریاضی محققّان و مدرّسان دانشگاه ها با برنامهٔ درسی متفاوت به آن می کنند.

به عنوان اولین قدم در پاسخ به این پرسش، من اظهار می کنم که وجوه ریاضیات گسسته هم اکنون در مباحث درسی حضور دارد اما ما به عنوان معلم و برخی از کتابهای درسی که از آنها استفاده می کنیم، مایلیم از آنها چشم پوشی کنیم. بسیاری از کتابهای مقدماتی جبر سعی در نادیده گرفتن تفاوت بین یک حوزهٔ پیوسته مانند رابطهٔ بین فاصله و زمان، و یک حوزهٔ گسسته مانند رابطهٔ بین قیمت یک پاکت شیر و مقدار شیر محتوای پاکت، یا رابطهٔ بین دفعات جیرجیرِ جیرجیرک ها و دما دارند. این ها مسائل فوق العاده ای هستند، اما ما وقتی با آنها رفتار یکسانی داریم و یا وقتی که به طور خودکار نقاط روی نمودارشان را به هم وصل می کنیم، فرصتی را برای ایجاد تمایز بین دامنه ها و بردهای گسسته و پیوسته از دست می دهیم. ما به جای چنین رفتاری، لازم است مسائلی را که شامل حوزه های گسسته است (برای مثال مسائل مربوط به پول، یا تعداد چیزهایی مانند مداد یا افراد یا بلیت های شرط بندی) شناسایی کنیم. در واقع، باید مواظب و منتظر آنها باشیم، از آنها به وجد بیاییم و به عنوان سکّوی پرتابی به سوی کاوشهای زاینده و خلّاق از آنها استفاده کنیم.

در اینجا مثالی از چنین موادّ اولیه ای می آوریم که می توان آن را در بسیاری از کتابهای درسی جبر مقدماتی یافت و اغلب به گونه ای بررسی می شود که گویا دامنه اش پیوسته است.

یک کفاش، کفش راحتی و پوتین تولید می کند و به ۲ فوت مربع چرم برای هر کفش راحتی و ۳ فوت مربع چرم برای هر پوتین نیاز دارد. ۲۰ فوت مربع چرم موجود است.

در این جا دانش آموزان عادت کرده اند که با سؤالی مواجه شوند،

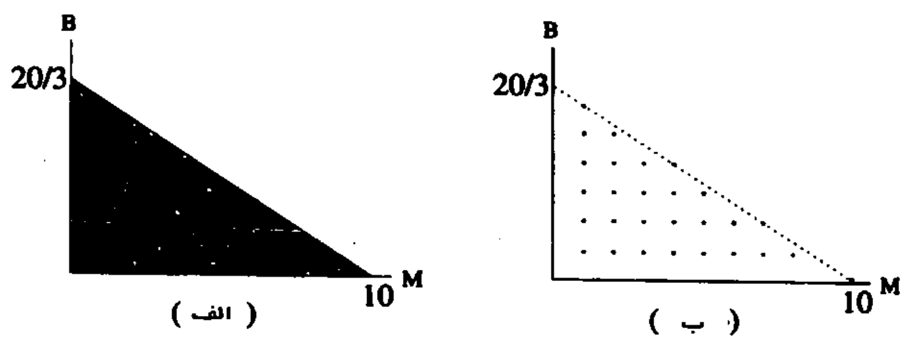
در چند سال اخیر، معلم‌های دبیرستان با یک بوفهٔ غیر قابل مقاومت از تنقلات ریاضی برای افزودن به مباحث درسی مواجه شده اند ـ کاربردهای دنیای واقعی، بازگشت، فرکتالها و آشوبها، تحلیل داده‌ها و کاربردهای ماتریس‌ها، به عنوان چند نمونه ـ و البته، توانایی کار با تکنولوژی (فن آوری) که تمام این‌ها را ممکن ساخته است. ریاضیات گسسته چتری است که بسیاری از این عنوان‌ها را در برمی‌گیرد.

بدیهی ترین سؤال هایی از این نوع، پرسشی است در مورد تعداد پوتین ها و کفش های راحتی که تولید می شوند، یا ممکن است از آنها خواسته شود نموداری رسم کنند که اطلاعات داده شده را نمایش دهد، یا یک نامساوی بنویسند که اطلاعات را مُدل کند. پاسخ های معمول به چنین درخواست هایی عبارتند از :

$$2M + 3B \leq 20$$

یا نموداری که کمابیش شبیه نمودار شکل (الف) است. فرض شده است که $M \geq 0$ و $B \geq 0$ و هم برد و هم دامنه پیوسته هستند (و معمولاً دانش آموز از اینکه چنین فرض هایی کرده است غافل است).

پوتین ها و کفش های راحتی را جفت جفت تولید کنید؟ آیا روابط و نمودارهایی که در بالا نمایش داده شده است مدل های مناسبی برای این وضعیت هستند؟ آیا مدل های بهتری وجود دارند؟ در این نقطه، می توان تفاوت بین نمودار یک *ناحیه* و یک شبکه را همان طور که در شکل ۱ (ب) نمایش داده شده است، بررسی کرد. می توان از تعداد راه حل ها پرسید. می توان طبیعت مرز نمودار را مورد بحث قرار داد و به تعداد جواب هایی که روی مرز واقع شده اند توجه کرد. تمام این کاوش ها کاملاً در سطح مطالبی است که حتی در محافظه کارترین مباحث درسی جبر گنجانده شده اند. چنین بحث هایی می تواند کم کم به دانش آموزان نسبت به معنای «ریاضیات گسسته» بصیرتی ببخشد.



شکل ۱. (الف) نمودار $2M + 3B \leq 20$؛ (ب) نمودار نقاط شبکهٔ اعداد صحیح که در $2M + 3B \leq 20$ صدق می کنند.

امّا وضعیتی که در بالا تشریح شده است به یک پرسش ختم نمی شود. تجربهٔ من این بوده است که چنین حالتی اغلب دانش آموزان را به کاوش های خلاقتر و بحث های دامنه دارتر هدایت می کند. دانش آموزان ممکن است سؤال هایی را که در بالا فهرست شده اند بپرسند و ممکن است همان پاسخ ها را بدهند. اما هربار که من از چنین رهیافتی استفاده کرده ام، دانش آموزان با شروع به پرسیدن سؤال های دیگری، اعتبار این پاسخ های مرسوم را مورد سؤال قرار داده اند. کفاش به چند روش متفاوت می تواند از منابعش استفاده کند؟ آیا شما می توانید کسری از یک پوتین را بدوزید؟ آیا شما باید

این جا مثال دیگری است از آن مواد اولیه ای که هم اکنون پیش روی ماست و تنها انتظار می کشد که در زمینهٔ یک دامنهٔ گسسته مورد بررسی قرار گیرد. این مثال مسأله ای است از یک کتاب درسی مقدماتی حسابان مشهور.

دفتر کار سَلی مجهز به سیستمی است که به افراد اطلاع می دهد در چه زمانی جلسه ای در گروه تشکیل می شود. سَلی به سه نفر تلفن می کند. سپس، این سه نفر هر یک به سه نفر دیگر تلفن می کنند و به همین

کاوش‌هایی مانند آنچه در این جا به طور مختصر تشریح شد، نشانگر انحرافی از مباحث درسی استاندارد نیستند. آنها از مسائلی ناشی می‌شوند که در متون درسی مرسوم فراوان هستند و به معلم‌ها این فرصت را می‌دهند که ریاضیات گسسته را به طور طبیعی و در خلال برنامهٔ درسی موجود به کلاس درس بیاورند.

ترتیب، تا اینکه تمام گروه مطلع شوند. اگر ده دقیقه طول بکشد که هر فرد سه نفر را خبر کند و تمام تلفن ها در ۳۰ دقیقه پایان یابند، به چند نفر در دور آخر تلفن شده است؟

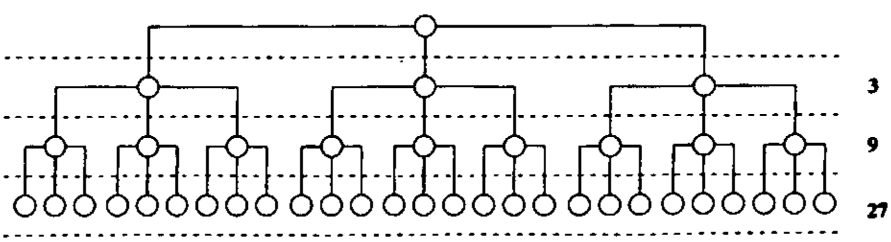
معمولاً فرض می شود مدل مناسب این مسأله تابع نمایی $y = ۳^x$ است، بدون هیچ اشاره ای به این حقیقت که در این حالت x (تعداد دورها) و y (تعداد تلفن هایی که در یک دور می شود) کمیّت هایی گسسته هستند. جوابی که در کتاب آمده است یعنی $۲۷=۳^۳$ به راحتی با جایگذاری در معادله به دست می آید. مسأله را می توان با بررسی نمودار درختی شکل ۲ نیز کنکاش کرد و هر معلّمی که می خواهد روش هایی برای استفاده از ابزارهای استاندارد ریاضیات گسسته بیابد می باید از چنین فرصتی برای انجام این کار استفاده کند. اما اگر مسأله صریحاً به عنوان مسأله ای از ریاضیات گسسته مورد بحث قرار گیرد، برای آن راه حل بسیار متفاوتی می توان یافت و در مسیر یافتن آن، دانش آموزان می توانند تجارب بیشتری از رفتار دستگاههای گسسته به دست آورند.

پاسخ ۲۷، تنها هنگامی جواب است که فرض شود ردهٔ دوم تماسهای تلفنی شروع نمی شود مگر اینکه هر سه تماس تلفنی اولیه انجام شده باشد، و به طور کلی، اینکه دور $n+1$ ام تماسهای تلفنی آغاز نمی شود مگر اینکه دور nام کامل شده باشد. به جای آن، فرض کنید که هر تماس تلفنی به اندازهٔ یک قطعهٔ زمان طول بکشد ($۳\frac{۱}{۲}$ دقیقه در این مسأله آن طور که در ابتدا بیان شده است) و شخصی که در قطعهٔ زمان t به او تلفن شده است به جای آن که برای دور بعد صبر کند، اولّین تلفن خود را در قطعهٔ زمان $t+1$ می زند. در این صورت، همان طور که در پایین تشریح شده است، دنبالهٔ تعداد افرادی که در هر دور با آنها تماس گرفته می شود جمله ای از یک دنباله از نوع فیبوناتچی است. (تعداد تلفن ها همچنان به طور نمایی رشد می کند.) اگر هر فرد تنها دو تلفن بزند و G_t تعداد تلفن هایی باشد که در قطعهٔ زمان t می شود، جملات از الگوی استاندارد فیبوناتچی پیروی می کنند:

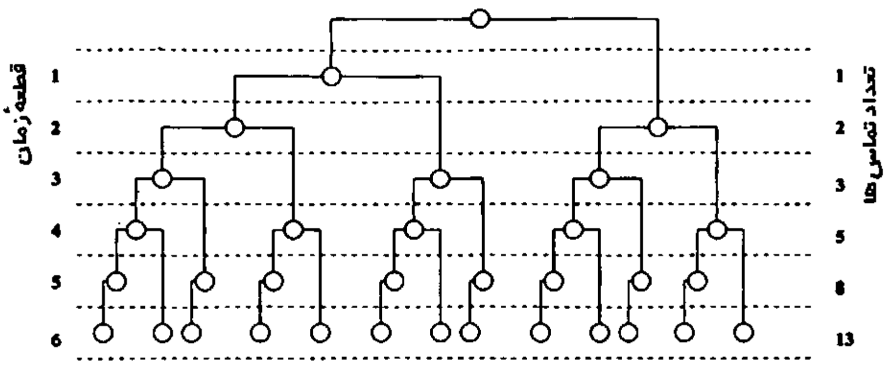
$$G_{t+2} = G_{t+1} + G_t \quad (\text{برای } t \geq 1)$$

که در آن $G_1 = 1$ و $G_2 = 2$ (شکل ۳ را ببینید.) اگر مانند مسأله اصلی هر نفر سه تلفن بزند، آنگاه جملات طبق رابطهٔ بازگشتی

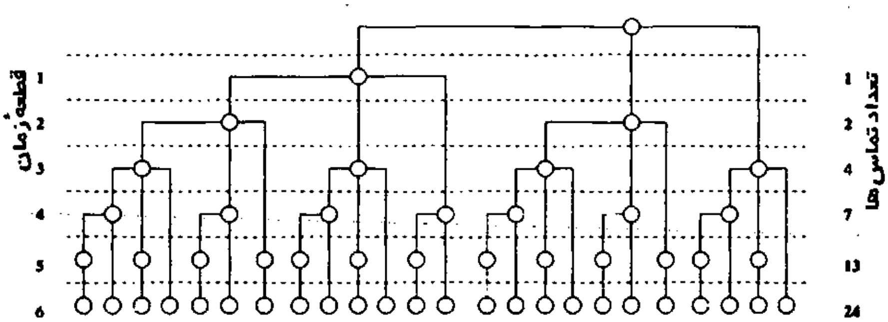
$$G_{t+3} = G_{t+2} + G_{t+1} + G_t \quad (\text{برای } t \geq 1)$$



شکل ۲. درخت تلفن استاندارد: هر نفر به سه نفر تلفن می کند. قبل از اینکه تلفن هایش را شروع کند صبر می کند تا دور قبلی کامل شود.



شکل ۳. درخت تلفنی که در آن هر شخص به دو نفر تلفن می‌زند اما هر کس می‌تواند اولین تلفنش را در قطعهٔ زمان بعدی بکند.



شکل ۴. درخت تلفنی که در آن هر نفر به سه نفر دیگر به طور متوالی تلفن می‌کند.

بعضی از معلم‌ها در حین تدریس، مسائلی را تشخیص می‌دهند که نقطهٔ عطف خوبی برای کاوش در مباحث گسسته است. همچنین، بعضی از معلمها ریاضیاتی را دنبال می‌کنند که خود و دانش‌آموزانشان در هنگام پیشروی مطلب، به درک آن‌ها می‌رسند.

رشد می‌کنند، که در آن $G_1 = ۱$ ، $G_2 = ۲$ و $G_3 = ۴$ (شکل ۴ را ببینید.)

در این حالت، دور آخر در $t = ۹$ روی می‌دهد و G_9 یعنی تعداد تلفن‌هایی که شده است، به جای ۲۷ ، ۱۴۹ است!

با ارائهٔ این مدل، می‌توان در مورد کارآمدترین سیستم تلفن زدن برای تعداد معینی از افراد سؤال کرد. یا اینکه اگر هر نفر به m نفر دیگر ($m = ۲,۳,۴,...$) تلفن کند، تعداد تلفن‌ها در قطعهٔ آخر از زمان به چه ترتیب خواهد بود؟

در آخر، یک مثال از فرصتهایی که مسائل استاندارد در اختیار ما می‌گذارند توسیع این مسأله است که در یک کتاب جبر متوسطه یافته‌ایم:

طول و عرض یک مستطیل به نسبت ۲ به ۳ هستند. اگر هر یک از ابعاد به اندازهٔ ۴ اینچ اضافه شود، طول و عرض جدید به نسبت ۵ به ۷ خواهند بود. ابعاد اولیه را بیابید.

چون دامنهٔ تغییرات طول‌ها پیوسته است، پاسخ این مسأله به راحتی با روش‌های استاندارد جبری به دست می‌آید. اما در اینجا مسأله‌ای هست که در نگاه اول شباهت بسیاری به این مسأله دارد:

وقتی مایکل جُردَن برای پرتاب توپ روی خط جریمه ایستاد، بلندگو اعلام کرد که امسال دَرصد پرتاب‌های خطای او ۷۸٪ بوده است. از دو پرتاب جردن یکی وارد حلقه می‌شود. دفعهٔ بعد که او روی خط می‌ایستد بلندگو اعلام می‌کند که او ۷۶٪ پرتاب موفق داشته است. او امسال چه تعداد پرتاب خطا داشته است؟

در این مسأله، دامنهٔ تغییرات و تعداد پرتاب‌ها گسسته است و درصدهای اعلام شده نسبت‌های پرتاب‌های موفق به پرتاب‌های انجام شده است که تا دو رقم اعشار گرد شده است. این بدان معناست که اگر m تعداد پرتاب‌های موفق و a تعداد پرتاب‌های انجام شده باشد، آنگاه

$$۰/۷۷۵ \le \frac{m}{a} < ۰/۷۸۵ \quad , \quad ۰/۷۷۵ \le \frac{m+۱}{a+۲} < ۰/۷۶۵$$

برای این مسأله بیش از یک پاسخ ممکن وجود دارد (برای مثال $a=۳۶$ ، $m=۲۸$ یا $a=۴۰$ و $m=۳۱$ جواب هستند) و یافتن تمام آنها ساده نیست. (شما می‌توانید با نموداری مانند آنچه در شکل ۱ (ب) استفاده شده شروع کنید.) اما تحلیلی که منجر به این دستگاه نامعادلات می‌شود خود یک تمرین مفید است و تحلیلی است که تنها از طبیعت گسستهٔ این وضعیت ناشی می‌شود. کاوش هایی مانند آنچه در این جا به طور مختصر تشریح شد، نشانگر انحرافی از مباحث درسی استاندارد نیستند. آنها از مسائلی ناشی می‌شوند که در متون درسی مرسوم فراوان هستند و به معلّم‌ها این فرصت را می‌دهند که ریاضیات گسسته را به طور طبیعی و در خلال برنامهٔ درسی موجود به کلاس درس بیاورند. چیزی که برای این کار لازم است این است که بعضی از معلم‌ها در حین تدریس، مسائلی را تشخیص می‌دهند که نقطهٔ عطف خوبی برای کاوش در مباحث گسسته است. همچنین، بعضی از معلمها ریاضیاتی را دنبال می‌کنند که خود و دانش‌آموزانشان در هنگام پیشروی مطلب، به درک آن‌ها می‌رسند.

آدرس نویسنده:

THE SIDWELL FRIENDS SCHOOL, 3825 WISCONSIN AVENUE, N.W., WASHINGTON, D.C. 20016

E-mail address: joanr @ umd 5. umd. edu

منبع اصلی:

Reinthaler, J. (1997). Discrete Mathematics is Already in the Classroom- But It's Hiding. In J. Rosenstein, D. Franzblau and F. Roberts (eds.). ***Discrete Mathematics in the Schools. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science.*** vol. 36, pp 295-299, AMS and NCTM

روان‌شناسی یادگیری ریاضی

نویسنده: سید حسن علم الهدائی
دانشگاه فردوسی مشهد

شناخت‌گرایان برخلاف رفتارگرایان براین اعتقادند که یادگیری فرآیندی است که به‌کمک آن، اطلاعات جدید با دانش موجود فرد مرتبط می‌شود و در نتیجهٔ فرآیند یادگیری، دانش قبلی دانش‌آموز تغییر می‌کند و او بصیرت لازم را در موفقیت‌های مختلف کسب می‌نماید. از این رو ریاضیات غیررسمی دوران کودکی نیز به‌عنوان پایه‌ای برای بنانهادن ریاضیات مدرسه‌ای شناخته می‌شود.

نگرش شناختی با تأکید بر ساختن فعال دانش توسط دانش‌آموزان، طبعاً معانی دیگری از آموزش و یادگیری به همراه خواهد داشت و در نتیجه کاربردهای متفاوتی را برای معلّمان و برنامه‌ریزان درسی دربردارد.

روان شناسی دانشی است که بر مطالعهٔ رفتار و تجربه انسان متمرکز است و در جستجوی یافتن پاسخ هایی علمی برای این قبیل سؤالات است که انسانها

۱ ـ چگونه تکالیف می گیرند؟

۲ ـ چگونه تکالیف خود را انجام می دهند؟

۳ ـ چگونه رشد (اعم از جنسی و فکری) می کنند؟

روان شناسان علاقمند به آموزش ریاضی می کوشند تا دریابند چگونه عامل های گوناگون بر تفکر و رفتار ریاضی دانش اندوزان مؤثرند و این سؤال که «ریاضی گونه اندیشیدن یعنی چه؟» در مرکزیت این مطالعه قرار دارد.

چرا روان شناسی در فهم ما از اینکه مردم چگونه ریاضی را یاد می گیرند نقش فراوانی دارد؟ این سؤالی است که پاسخ آن هنوز برای بسیاری مبهم و ناشناخته است و علی رغم برخی از تلاشها در به کارگیری ابزار روان شناختی در تبیین یادگیری و آموزش علوم از جمله ریاضیات، می توان مدعی شد که هنوز اندکند کسانی که با نگرش روان شناختی در این عرصه تلاش می کنند. عبارت روان شناسی یادگیری ریاضی نه تنها در میان مردم عادی بلکه در جمع معلمان و مربیان ریاضی خصوصاً در جامعهٔ ما عنوان چندان آشنایی نمی باشد. به علاوه آنچه به دانشجویان به ویژه در رشته های دبیری از مباحث روان شناختی می آموزند غالباً همچون مفاهیم کلّی و بی ارتباط با سایر شاخه های معرفت بشری از جمله علوم تجربی و ریاضیات بر ایشان جلوه گر می شود. از اینرو ارتباط معنی داری میان دانسته های آنان در روان شناسی و تلاش در عرصهٔ فراگیری ریاضی به نظر نمی رسد. مثلاً دانشجویان در درس روان شناسی تربیتی با نظریه های مختلف یادگیری از جمله نظریهٔ پردازش خبر (IPT) [۱] آشنا می شوند در حالی که ممکن است کمترین اطلاعی از کاربرد مدل پردازش خبر در یادگیری و آموزش ریاضی و تدوین برنامه های درسی نداشته باشند و اینکه این مدل چگونه می تواند بر رشد و پویایی رفتار ریاضی شاگردان مؤثر باشد برای آنان امری ناشناخته باشد.

چگونه می توان با نگرش روان شناختی به تجزیه و تحلیل مقولاتی چون یادگیری و آموزش ریاضی پرداخت و در شناسایی و رفع مشکلات مهارتی و مفهومی دانش اندوزان کوشید و یا اینکه بسط ساختارهای مفهومی و ذهنی در انسان چگونه اتفاق می افتد؟ و یا توانایی ریاضی که اختلاطی از تجربه و دانش قبلی و توان ذهنی و عاطفی فرد است چگونه

قابل تبیین است؟ همگی پرسشهایی هستند که در عرصهٔ روان شناسی یادگیری ریاضی مایل به یافتن پاسخ هایی مناسب برای آنها هستیم. همچنین، مهارتهای مهم ریاضی گونه دانش اندوزان چگونه شکل می یابد و چطور در موقعیت های گوناگون یادگیری و حل مسأله ریاضی یک پارچه و هماهنگ شده و بکار می آیند، در این شاخه از دانش بشری قابل کنکاش و تفسیر است. اسکمپ از جمله دانشمندانی است که در سال های اخیر از ۱۹۷۰ به بعد ـ تحقیقات فراوانی در این خصوص نموده و کتاب روان شناسی یادگیری ریاضی او تا کنون به چند زبان زنده دنیا ترجمه و چاپ شده است.

در این کتاب، اسکمپ می گوید که یادگیری و آموزش ریاضی از مقوله های روان شناختی است و ما پیشرفت قابل ملاحظه ای در ریاضی نخواهیم داشت مگر اینکه بدانیم ریاضیات چگونه یاد گرفته می شود. هنگامی که یک روان شناس متحمّل مطالعهٔ فرآیند یادگیری و پردازش مقوله های نسبتاً دشوار ریاضی می شود، براین تلاش است تا دریابد مردم هنگامی که درگیر انجام تکالیف دشواری مانند آنچه در ریاضیات هست می شوند چه می کنند و چه فعل و انفعال هایی رفتار ریاضی یک فرد را می سازند و چه عامل هایی برآن مؤثر هستند؟

چون کار در ریاضی یک فعالیت عقلانی است تا فیزیکی، بنابراین روان شناسان و متخصصان آموزش ریاضی و هم معلمان این شاخه از دانش بشری باید بکوشند تا آنچه را در ذهن و اندیشهٔ شاگردان می گذرد شناخته و مورد تجزیه و تحلیل قرار دهند. از اینرو رفتار درست یا نادرست ریاضی از سوی دانش اندوزان مورد توجه و علاقه روان شناسان و پژوهشگران آموزش ریاضی می باشد. چرا و چگونه دانش آموز یا دانشجوی ما به استدلالی درست یا نادرست دست یافته است و چارهٔ کار یا درمان آن چیست؟ در این عرصه، توجه به سه عنصر کی، کجا و چگونه از اهمیت به سزایی برخوردار است.

به قول بارودی(۱۹۸۷) فهم اینکه دانش آموزان چگونه ریاضی را یاد می گیرند می تواند ما را به عنوان معلّمان ریاضی با شیوه های گوناگون یاری دهد. در واقع این فهم درست و واقع گرایانه، ما را قادر می سازد تا با داشتن تصویری شفاف از چگونگی بروز رفتار ریاضی افراد تصمیم سازی مناسب علمی در اندیشه سازی و انتخاب عنوان های درسی، تقدم و تأخر مطالب و اتخاذ شیوه های آموزشی را داشته باشیم و در رفع مانع های یادگیری دانش آموزان بکوشیم. به علاوه قادر خواهیم شد تا آگاهانه روش هایی را انتخاب نمائیم که به درستی می تواند میزان پیشرفت رفتار ریاضی شاگردان را در موقعیت های مختلف از جمله حل مسأله و آزمون اندازه گیری نماید.

تبعات فراوان ناشی از غفلت از اینکه دانش آموزان چگونه ریاضی را یاد می گیرند مورد بررسی بارودی (۱۹۸۷) واقع شده است. و معتقد است که یکی از پی آمدهای این امر احتمالاً دشواری های بی جهتی است که در آموزش ریاضی برای فراگیران به بار خواهد آمد. دانش آموزان ممکن است یاد بگیرند ریاضی را به گونه ای مکانیکی و بدون به کارگیری مؤثر اندیشه بیاموزند و بدین ترتیب، مشکلات یادگیری خود را توسعه دهند. این نوع یادگیری همان چیزی است که اسکمپ (۱۹۷۶) از آن به عنوان فهم و درک ابزاری یاد می کند و معتقد است که فهم ودرک ابزاری نه تنها یادگیری معنی دار مفاهیم و مهارتهای ریاضی را به همراه نخواهد داشت، بلکه غالباً به صورت مانعی در تولید، تثبیت و تقویت اندیشهٔ ریاضی درمی آید و طبعاً زمینه های تقویت نگرش منفی نسبت به ریاضی را در اذهان دانش آموزان فراهم می آورد. اسکمپ در ادامه می افزاید خواسته یا ناخواسته باورهای ما دربارهٔ اینکه طبیعت ریاضی چیست و چگونه یاد گرفته می شود برانتخاب شیوه های آموزشی و ارزیابی ما تأثیر خواهد داشت. بنابراین، مهم است که باورهای خود را بیازمائیم و تجربه کنیم که روشهای مورد انتخاب ما چگونه می توانند هماهنگ با پژوهش های انجام شده در این عرصه سازگاری یا عدم سازگاری

به‌هرحال، هریک از این رویکردهای دوگانهٔ یادگیری می‌توانند در افزایش و باروری فهم ما نسبت به‌این که افراد چگونه ریاضی را یاد می‌گیرند، مؤثر باشند. دیدگاه رفتارگرایی می‌تواند شکل‌های ساده‌تر یادگیری مانند به‌خاطر سپردن حقایق[۳۱] اعداد و عملیات روی آنها را تبیین نماید و مفاهیمی مانند تقویت، تقلید، مدل‌سازی و الگوریتم را که نه‌تنها در یادگیری ریاضی بلکه در سایر موقعیت‌های یادگیری نیز دارای اهمیت هستند، به‌ما ارائه دهد. در عین‌حال به‌قول بارودی (۱۹۸۷)، این دیدگاه شناختی است که قادر است شکل‌های پیچیدهٔ یادگیری و تفکر را مانند آنچه در وضعیت‌های مختلف حل مسأله اتفاق می‌افتد، تبیین نماید.

داشته باشند.

بر این نکته تأکید می کنیم که نه ریاضی دان و نه روان شناس هیچکدام به تنهایی قادر نیستند که آنچه در دنیای پیچیدهٔ ذهنی دانش آموزان می گذرد را بشناسند بلکه برای مطالعه در عرصهٔ روان شناسی یادگیری ریاضی ابتدا باید طبیعت و ساختار دانش ریاضی را شناخت یعنی آنگونه که یک ریاضی دان به دانش ریاضی می نگرد نگریست و آنگاه سؤالات مربوط به قلمرو روان شناختی را مطرح کرد، زیرا بدون فهمی درست از طبیعت دانش ریاضی امکان طرح روان شناسی یادگیری ریاضی به مثابه یک دانش کارآمد در عرصهٔ معرفت بشری فراهم نمی آید. از اینرو می توان مدعی شد که روان شناسی ریاضی دانشی دوگانه است. از یک سو دانش ریاضی مطرح است و از سوی دیگر دانش اینکه مردم چگونه فکر می کنند، چطور استدلال می نمایند و چگونه ظرفیت های عقلانی خود را بکار می بندند مورد توجه است. در واقع تعامل و تعاطی دانش ریاضی و نحوهٔ تفکر و فرآیندهای ذهنی انسان این عرصه از دانش بشری را تعریف و تبیین می نماید. از این گذشته، آنگونه که یانگ لوریج (۱۹۹۴) معتقد است، این نکته نیز اساسی است که مربیان باید نه تنها به این مهم بیاندیشند که دانش آموزان چگونه یاد می گیرند و چگونه فکر می کنند (عامل های شناختی) بلکه باید به عامل های هیجانی [عاطفی][1] نیز عنایت کافی داشته باشند.

در کنار رویکرد روان شناختی به یادگیری و آموزش ریاضی و اتخاذ ساز و کارهای متناسب با این دیدگاه در شناخت و رفع مشکلات دانش اندوزان که اجمالاً در این نوشتار مورد بحث قرار گرفت، اسکمپ (۱۹۸۶) رویکرد دومی را تحت عنوان رویکرد منطقی[2] در تبیین و تفسیر رفتار ریاضی افراد مطرح می کند و معتقد است که ریاضی دانان و معلمان ریاضی و برنامه ریزان آموزشی غالباً با غفلت از رویکرد اول (رویکرد روان شناختی)، عمدتاً با رویکرد منطقی یادگیری و آموزش ریاضی را مورد مطالعه قرار می دهند. این امر از دیدگاه اسکمپ ـ یعنی ارائه و تبیین ریاضیات ـ صرفاً به مثابه رشد منطقی مغالطه آمیز بوده و ناشی از خلط میان دو رویکرد روان شناختی و منطقی در آموزش ریاضی است. اسکمپ معتقد است که رویکرد منطقی به محصول نهایی کشف و ابداع اندیشهٔ ریاضی توجه دارد و از یادگیرنده ها می خواهد که این یافته ها را آنگونه که هست یاد بگیرند. این رویکرد در واقع درصدد آموزش فکر (ایده های) ریاضی[3] می باشد و نه تفکّر ریاضی[4].

در رویکرد منطقی دستورزی معنی دار نمادهای ریاضی و استنتاج های منطقی روی صفحهٔ کاغذ مورد نظر است و هدف نهایی اینست که افراد شکّاک را متقاعد سازد.

رویکرد منطقی توانایی ایجاد و تبیین فرآیندهایی که موجب کشف یا ابداع مقولات ریاضی در ذهن و اندیشه یادگیرنده ها می شود را ندارد، درحالی که به اعتقاد اسکمپ در رویکرد روان شناختی به دنبال تبیین درست مقوله فهمیدن[5] هستیم در این جا فرآیندهای یادگیری و فعالیت های ذهنی، چگونگی پردازش اطلاعات علمی و نحوهٔ ارتباط آنها با دانش قبلی فرد محور بحث قرار می گیرد. در این دیدگاه، به دنبال تبیین تفکر ریاضی و چگونگی ایجاد و بسط و تقویت آن هستیم و تصویرهای ذهنی فرد مورد توجه ما می باشد. معتقدیم که او با این تصویرهای ذهنی (مفهومی)[6] از مفاهیم و مقولات ریاضی است که آنها را جذب و هضم میکند نه با به خاطر سپردن تعریف های منطقی و روابط و فرمول های ریاضی. در اینجا تعامل و ارتباط و اعتماد متقابل معلم و دانش آموز به عنوان دو انسان در آموزش و یادگیری ریاضی جنبه اساسی و حیاتی دارد و معلم باید دانش آموزان خود را همچون افراد انسانی با ویژگیها و مشخصه های فردی شان مورد توجه قرار دهد و نه به صورت موج انسانی و صرفاً مشخصه های همسان و یکنواخت.

در واقع این فهم درست و واقع گرایانه، ما را قادر می سازد تا با داشتن تصویری شفاف از چگونگی بروز رفتار ریاضی افراد، تصمیم سازی مناسب علمی در اندیشه سازی و انتخاب عنوان های درسی، تقدم و تأخر مطالب و اتخاذ شیوه های آموزشی را داشته باشیم و در رفع مانع های یادگیری دانش آموزان بکوشیم.

فهم و درک ابزاری نه تنها یادگیری معنی دار مفاهیم و مهارتهای ریاضی را به همراه نخواهد داشت، بلکه غالباً به صورت مانعی در تولید، تثبیت و تقویت اندیشهٔ ریاضی در می آید و طبعاً زمینه های تقویت نگرش منفی نسبت به ریاضی را در اذهان دانش آموزان فراهم می آورد.

رویکردهای متفاوت روان‌شناختی به یادگیری ریاضی

در این خصوص، نظریه های روان شناختی فراوانی وجود دارد که به خصوص دو رویکرد ارتباط زیادی با یادگیری ریاضی دارند و آن دو عبارتند از:

الف: رفتارگرایی[7]

ب: شناخت گرایی[8]

هرکدام از این دو دیدگاه باورهای متفاوتی دربارهٔ چیستی طبیعت دانش ریاضی و چگونگی کسب این دانش و معرفت دارند. اکنون به گونه ای اجمالی به این دو دیدگاه می پردازیم.

الف: رفتار گرایی

برای سالیان دراز، دیدگاه رفتارگرا با تسلط بر عرصهٔ روان شناسی بر روشها و الگوهای آموزشی و تربیتی با شیوه های مختلف مؤثر افتاده است. موضوع مهم در مکتب رفتارگرا، بررسی رفتار آشکار موجود زنده از جمله انسان است و پدیده های دیگر روان شناختی از جمله ادراک، اندیشه، فرآیندها و پردازش های ذهنی هنگام یادگیری مورد توجه نیست بلکه تمامی این مقولات در عرصهٔ رفتار آشکار فرد مورد مطالعه و کنکاش قرار می گیرد. به علاوه، طرفداران این دیدگاه، معرفت و شناخت انسان را به فعالیت های حسی محدود می سازند و شناخت را بازتاب امر خارجی در حواس تلقی می کنند. آنان یادگیری با شناخت و تفکر را مبتنی بر جریان شرطی می دانند.

رفتارگرایان معتقدند که دانش مجموعه ای از اطلاعات و مهارتهاست که به گونه ای انفعالی دریافت شده و توسط یادگیرنده در خلال شکل گیری تداعی های میان محرک[9] و پاسخ[10] انباشته می شود. به عنوان مثال، «۱+۱» محرک و «۲» پاسخ است، یا «۷×۸» محرک و «۵۶» پاسخ است. در این دیدگاه، یادگیری با شیوه ای نسبتاً یکنواخت در دانش آموز اتفاق می افتد و به مثابه نتیجه کنترل های بیرونی (مانند تنبیه و پاداش) توسط معلمان درمی آید. ذهن یادگیرنده همچون ظرفی تهی می ماند که توسط جریان یادگیری پر از اطلاعات می شود و مطالب درسی از معلم به دانش آموز انتقال می یابد و در این جریان، دانش آموز منفعلانه تنها اطلاعات را به صورت محرک ـ پاسخ دریافت می کند و تأکید در یک درس ریاضی بیشتر بر ارائهٔ محتوی و حفظ آن توسط دانش آموزان است تا توجه به چگونگی فرآیندهای استدلال توسط آنان.

در این رویکرد، یادگیری تکلیف های دشوار و پیچیده تر با تجزیه به قسمت های ساده تر تسهیل می گردد و آموزش ریاضی با توجه به یادگیری سلسله مراتب مفهومی[11] ارائه می گردد به طوری که یک مفهوم و مهارت دشوارتر برای دانش آموز از مفاهیم و مهارتهای ساده تر به دشوارتر تدریس می شود. برنامه های آموزشی که ریاضی را به سطوح مختلف تقسیم می نمایند و برای نیل از یک سطح به سطح دیگر موفقیت در آزمون های مهارتی را ضروری می سازد، در واقع از دیدگاه رفتاری پیروی می نماید.

هدف‌های رفتاری[12] در آموزش و یادگیری ریاضیات

هنگامی که هدف های رفتاری از دیدگاه رفتارگرایان در عرصه کار ریاضی مورد بررسی قرار می گیرد، در واقع به رفتارهایی اطلاق می گردند که برنامه ریزان و معلمان انتظار دارند که پس از فرا گرفتن یک درس یا مبحث ریاضی توسط شاگردان بروز نماید. همین رفتارها هستندکه نهایتاً به عنوان نتیجهٔ کار یک درس ریاضی توسط دانش آموزان بروز نمایدو همین رفتارها هستند که نهایتاً به عنوان نتیجهٔ کار یک درس ریاضی مورد سنجش قرار می گیرند. مثلاً پس از آموزش مفهوم حد، انتظار داریم که دانش آموزان بتوانند حد یک تابع دلخواه مانند f که با ضابطه $y = f(x)$ مشخص شده است را در نقطه ای مانند $x = x_0$ به دست آورند. یا

شناخت‌گرا براین اعتقاد است که دانش ریاضی توسط یادگیرنده ساخته می‌شود یعنی دانش‌آموز روی داده‌های دریافتی عمل می‌کند و با فرآیندهای ذهنی به آن داده‌ها سازمان و نظم می‌بخشد و بدین شیوه است که معانی ساخته می‌شوند. از این‌رو دانش‌آموز در جریان یادگیری ریاضی فعال است (نه منفعل) و در آموزش مشارکت دارد.

اسکمپ می‌گوید که یادگیری و آموزش ریاضی از مقوله‌های روان‌شناختی است و ما پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در ریاضی نخواهیم داشت مگراین که بدانیم ریاضیات چگونه یاد گرفته می‌شود.

پس از آموزش مبحث تعیین علامت چند جمله ای های درجهٔ دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، از دانش آموز انتظار می رود که قادر باشد با توجه به علامت Δ و در نتیجه تعداد ریشه های یک معادلهٔ درجه دوم آن را تعیین علامت نماید.

طرفداران تبیین هدف های رفتاری عمدتاً براین تصوّرند که این هدف ها در واقع هدف های اساسی آموزش و پرورش هستند و همهٔ رفتارهای علمی ریز و درشت باید در قالب این هدفها مورد توجه و کنکاش قرار گیرند، درحالی که مخالفان دیدگاه رفتارگرایی معتقدند که این مکتب در تبیین رفتار آدمی در عرصه ای محدود عمل می نماید. بنابراین باید در مطالعهٔ هدف های رفتاری در عرصهٔ علوم، تأمل و دقت بیشتری معمول گردد.

برخی محققان[13] در انتقاد از طرح هدف های رفتاری مواردی را ارائه کرده اند که به کوتاهی برخی ازآنها را در عرصه آموزش و یادگیری ریاضیات اقتباس می نمائیم.

۱ ـ معرفی هدف های آموزش رفتاری، رفتار علمی دانش آموزان را در یک عرصه صرفاً قابل مشاهده و اندازه گیری محدود می سازد و به فرایندهای ذهنی و چگونگی تفکر فرد و پردازش اطلاعات که در پس این رفتار نهفته و قابل اندازه گیری و مشاهده نیستند عنایتی ندارد. اصولاً رفتار ریاضی یک فرد شامل فعالیت های قابل رؤیت و غیرقابل رؤیتی است که چرایی های فراوان در ورای آن وجود دارد و توجه به همین چراها و چگونگی های فرایندهای ذهنی و عمل تفکر فرد است که می تواند برای معلّمان و برنامه ریزان درسی الهام بخش و رهگشا باشد. اینکه دانش آموزی بتواند فقط با کمک برخی از قاعده ها و فرمول ها مشتق یا انتگرال تابعی را به دست آورد (هدف رفتاری) براین امر دلالت ندارد که او مفهوم و ایدهٔ مشتق پذیری و انتگرالگیری را با برخی دقت ها و ظرافت های ریاضی درک کرده است و قادر است آنها را در موقعیت های مختلف ریاضی به درستی به کار گیرد.

۲ ـ آنچه دانش آموزان در موقعیت های مختلف آموزشی، یادگیری و حل مسأله از خود بروز می دهند مبتنی بر تصوّرهای ذهنی و فعل و انفعالهای عقلانی آنان است. در این میان، ابهام ها و خلط های مفهومی در ذهن هوشمند آنها و تلاش برای شفاف نمودن آنها از جایگاه بالایی برخوردار است.

برخورد سطحی مربیان و معلمان با این ابهام ها و خلط های ذهنی و عدم کنکاش برای جستجوی ریشه های این نادرستی ها و عدم تصحیح آنها می تواند به شدت برای یادگیری معنی دار مفاهیم وایده های ریاضی زیان آور باشد. اصولاً فقط یک قاعده و یک فرمول و حل یک مسأله با کمک آن، بیانگر یادگیری معنی دار فرد نمی باشد هرچند که ارزیابی محفوظات دانش آموزان به مراتب آسان تر از ارزیابی انتقادی اوست.

۳ ـ هدف های رفتاری دانش آموزان را به همسان شدن با هم سوق می دهد و از رشد توانایی خلاق و رشد تفکر انتقادی در آنان می کاهد. تدوین هدف های رفتاری برحسب موّاد کاملاً معین، مانع ارزیابی و قضاوت های منتقدانهٔ دانش آموز و معلم می گردد و جایی برای بروز نوآوری ها و ابتکارهای علمی ـ در هر سطحی ـ را باقی نمی گذارد.

۴ ـ جزئی کردن زیاد هدف های رفتاری و انتظارات کلیشه ای از دانش آموزان موجب شرطی شدن یادگیری آنان در یک عرصهٔ علمی می شود و در این جریانِ شرطی شدن مجاورت و تکرار و روابط حاصل از آنها پایهٔ یادگیری را تشکیل می دهد. در واقع دانش اندوز مطالب کتاب و کلاس درسی را می پذیرد و به ذهن خود می سپارد و این تکرار و تمرین است که موجب حفظ مطالب درسی می شود و دانش آموز در موقعیت امتحان و ارزیابی، تنها سپرده های خاطر خود را ارائه می دهد. نتیجهٔ این نوع آموزش و یادگیری چیزی جز برخورد حافظه ای و یادگیری طوطی وار[14] در ریاضیات و شرطی شدن افراد نسبت به فرمول ها و قاعده ها نیست.

این که دانش‌آموزی بتواند فقط با کمک برخی از قاعده‌ها و فرمول‌ها مشتق یا انتگرال تابعی را به‌دست آورد (هدف‌رفتاری) براین امر دلالِت ندارد که او مفهوم و ایدهٔ مشتق‌پذیری و انتگرالگیری را با برخی دقت‌ها و ظرافت‌های ریاضی درک کرده است و قادر است آنها را در موقعیت‌های مختلف ریاضی به‌درستی به‌کار گیرد.

برنامه‌های آموزشی که ریاضی را به‌سطوح مختلف تقسیم می‌نمایند و برای رسیدن از یک سطح به‌سطح دیگر موفقیت در آزمون‌های مهارتی را ضروری می‌سازد، درواقع از دیدگاه رفتاری پیروی می‌نماید.

رشد فهم و تفکر ریاضی به معنای درک رابطهٔ عنوان با مطلب و ادراک هر جزء با کل و اجزاء با هم در افراد از جایگاهی راهبردی برخوردار است.

ب: شناخت گرائی

برخلاف رفتارگرایان، شناخت گرایان رفتار آشکار یاد گیرنده (فرد) را موضوع اصلی روان شناسی نمی دانند، بلکه به فرآیندها و پردازش های ذهنی او که رفتارها از آنجا ناشی می شود توجه خاصی دارند. در سالهای اخیر، شناخت گرایی جایگاه ویژه ای در عرصهٔ فعالیت های روان شناختی پیدا نموده و در باب آموزش و یادگیری ریاضیات نیز با طرح نظریه های کارکردی به نتایج و توصیه های شفافی دست یافته است. برپایهٔ دیدگاههای مختلف روان شناسان شناختی، مدل های یادگیری متفاوتی وجود دارند و همه براین ایده مشترکند که یادگیرنده در موقعیت های مختلف آموزش، یادگیری و حل مسأله تحت تأثیر عامل ها و فشار محدودیت هایی قرار دارد. در این میان می توان به مدل های زیر اشاره نمود.

۱ ـ مراحل رشد عقلانی پیاژه

۲ ـ اکافی بودن دانش قبلی آزوبل برای یادگیری معنی دار[۱۵]

۳ ـ ایدهٔ پاسکال لئونی از محدودیت فضای حافظهٔ فعال فرد و مدل های پردازش خبر[۱۶]

۴ ـ مدل هایی که در عرصهٔ یادگیری و آموزش علوم تجربی (ریاضی) بر مبنای مدل پردازش خبر (IPT) ارائه شده اند که دربردارندهٔ برخی از ویژگیهای مدل های دیگر هستند.

۵ ـ نظریهٔ یادگیری واسطه ای[۱۷] و ساختمانهای مفهومی[۱۸] اسکمپ که شامل درک ابزاری[۱۹] و درک مفهومی[۲۰] از ریاضی است.

شناخت گرا براین اعتقاد است که دانش ریاضی توسط یادگیرنده ساخته می شود یعنی دانش آموز روی داده های دریافتی عمل می کند و با فرآیندهای ذهنی به آن داده ها سازمان و نظم می بخشد و بدین شیوه است که معانی ساخته می شوند. از این رو دانش آموز در جریان یادگیری ریاضی فعال است (نه منفعل) و در آموزش مشارکت دارد. البته توانایی های ذهنی ای که موجب ساختن دانش ریاضی است از هر مرحله ای به مرحلهٔ دیگر تغییری کیفی و کمّی می یابند و یادگیری تحت تأثیر این توانایی ها قرار می گیرد. نگرش شناختی با تأکید بر ساختن فعّال دانش توسط دانش آموزان، طبعاً معانی دیگری از آموزش و یادگیری به همراه خواهد داشت و در نتیجه کاربردهای متفاوتی را برای معلّمان و برنامه ریزان درسی در بردارد.

شناخت گرایان برخلاف رفتارگرایان براین اعتقادند که یادگیری فرآیندی است که به کمک آن، اطلاعات جدید با دانش موجود فرد مرتبط می شود و در نتیجهٔ فرآیند یادگیری، دانش قبلی دانش آموز تغییر می کند و بصیرت لازم را در موفقیت های مختلف کسب می نماید. از اینرو ریاضیات غیر رسمی دوران کودکی نیز به عنوان پایه ای برای بنا نهادن ریاضیات مدرسه ای شناخته می شود. بارودی (۱۹۸۷) معتقد است که سن یادگیرنده ها هرچه باشد، آموزش باید با توجه به میزان فهم و توان یادگیری فرد صورت پذیرد.

به هر حال، هر یک از این رویکردهای دوگانهٔ یادگیری می توانند در افزایش و باروری فهم ما نسبت به اینکه افراد چگونه ریاضی را یاد می گیرند، مؤثر باشند. دیدگاه رفتارگرایی می تواند شکل های ساده تر یادگیری مانند به خاطر سپردن حقایق[۲۱] اعداد و عملیات روی آنها را تبیین نماید و مفاهیمی مانند تقویت، تقلید، مدل سازی و الگوریتم را که نه تنها در یادگیری ریاضی بلکه در سایر موقعیت های یادگیری نیز دارای اهمیت هستند، به ما ارائه دهد. در عین حال به قول بارودی (۱۹۸۷)، این دیدگاه شناختی است که قادر است شکل های پیچیدهٔ یادگیری و تفکر را مانند آنچه در وضعیت های مختلف حل مسأله اتفاق می افتد، تبیین نماید.

زیرنویس ها:

۱. Information Processing Theory
۱مکرر. Affective factors
۲. Logical approach
۳. Mathematical thought
۴. Mathematical thinking
۵. understanding
۶. concept image
۷. Behaviorism
۸. Cognitivism
۹. Stimulus
۱۰. Response
۱۱. Conceptual Hierarchy
۱۲. Behavioral Objectives
۱۳. به کتاب روان شناسی پرورشی علی اکبر سیف و چند مبحث اساسی در برنامه ریزی، علی شریعتمداری مراجعه شود.
۱۴. Rote learning
۱۵. Meaningful Learning
۱۶. Information Processing
۱۷. Relational understanding
۱۸. schemata
۱۹. Instrumental understanding
۲۰. Conceptual understanding
۲۱. Facts

مراجع:

۱. Baroody, A.J. (1987). **Children's Mathematical Thinking: A Developmental Framework for preschool, primary and Special Education Teachers.** NewYork: Teachers college, columbia university.

۲. Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and Instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, 77,P. 20-26.

۳. Skemp, R.R. (1986). **The Psychology of learning mathematics.** second edition. Harmonds worth, penguin.

۴. young -Loveridge, J. (1994). The psychology of learning Mathematics. In J. Neyland (ed.) **Mathematics Education, A handbook for Teachers.** Vol 1, The Wellington College of Education, Newzealand.

مروری بر هندسه فرکتالی

نویسنده: مجتبی عمّاری الهیاری،
عضو هیأت علمی دفتر گسترش آموزش عالی

چکیده: در این مقاله ابتدا به معرفی فرکتالها و سپس به بررسی بعد فرکتالی و خمهای فضاپرکن می پردازیم.

فرکتالها: برای نخستین بار در سال ۱۹۷۵ یک ریاضیدان در شرکت IBM بنام مندلبرات[1] واژه فرکتال را وارد دنیای ریاضیات کرد و این موضوع باعث گردید که وی ملقب به «پدرهندسه فرکتالی» گردد. وقتی دانشمندان و ریاضیدانان به یک فرکتال برمی خورند فوراً آنرا می شناسند. امّا هنوز تعریفی عام از فرکتالها مورد توافق همه دانشمندان وجود ندارد. بهر حال فکر می کنم که تعریف زیر جالب و جامع باشد.

تعریف۱: فرکتال عبارت است از شییٔ که دارای سه ویژگی زیر باشد:

الف ـ در مقیاس میکروسکوپی بسیار پیچیده باشد؛

ب ـ دارای خاصیت خودمتشابهی[2] باشد؛

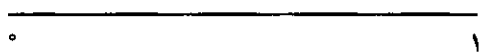
ج ـ بعدش عدد صحیح نباشد.

آیاتعجب کرده اید؟ بله، بعد یک فرکتال عدد صحیح نیست. شاید دلیل این تعجب این باشد که هرآنچه در هندسه اقلیدسی تا کنون مورد بررسی قرار گرفته دارای بعد صحیح بوده است، بعنوان مثال دانش ما از هندسه اقلیدسی به ما می گوید که خط دارای بعد یک، صفحه دارای بعد دو و فضا دارای بعد سه است. روشی جالب برای ارائه فرمولی جهت محاسبه ابعاد فوق را در بخشهای بعدی معرفی خواهیم کرد و سپس با استفاده از آن بعد فرکتالی را تعریف می کنیم. قبل از پرداختن به موضوع فوق اندکی مفاهیم خودمتشابهی و هندسه فرکتالی را روشنتر می کنیم.

خود متشابهی ـ تعریف ۲: یک ساختمان[3] را خودمتشابه گوئیم، هرگاه بخشهایی از آن با یک عامل مقیاس[4] مشخص، یک کپی از کل ساختمان باشد. بعبارت دیگر ساختمانهای تکراری در مقیاسهای مختلف طولی را ساختمانهای خودمتشابه می نامیم.

مثال ۱ـ جورج کانتور ریاضیدان آلمانی و واضع نظریه مجموعه ها، در سال ۱۸۸۳ مجموعه ای را معرفی کرد، که امروزه بنام مجموعه کانتور یا مجموعه سه تائی کانتور[5] مشهور است. این مجموعه به این صورت ساخته می شود که ابتدا فاصله $[0,1]$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنیم و سپس $\frac{1}{3}$ میانی را حذف کرده و فاصله های $[0,\frac{1}{3}]$ و $[\frac{2}{3},1]$ را در نظر می گیریم و عمل فوق را روی ایندو فاصله تکرار می کنیم و روی فاصله های باقیمانده نیز این عمل را بارها و بارها تکرار می کنیم.

گام صفر:



گام اول:

گام دوم:

همانطور که دیده می شود بخشی که در گام دوم مشخص شده است، یک کپی کامل از گام اول است با مقیاس توانهایی از $\frac{1}{3}$.

مثال ۲ـ گل کلم، اگر به قطعات کوچک گل کلم در ترشی دقت کرده باشید، هر یک از آنها مشابه یک گل کلم؛ البته در مقیاسی

کوچکتر به نظر می رسد، پس گل کلم یک ساختمان خود متشابه طبیعی است.

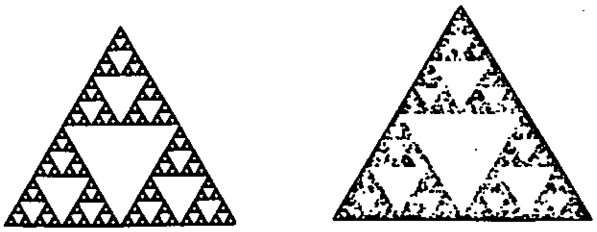
مثال ۳ـ درخت کاج ـ هر یک از شاخه های یک درخت کاج کاملاً شبیه یک درخت کاج است منتهی در مقیاسی کوچکتر. در طبیعت می توان ساختمانهای خود متشابه فراوانی یافت، مثل پشته های ابر، رشته کوهها، مسیر رودخانه ها، خطوط ساحلی و غیره.

هندسه فرکتالی[۶]: حتماً تا به حال به این نکته توجه کرده اید که کوهها واقعاً مخروطی نیستند و تنه درختها واقعاً استوانه نیستند و یا خط ساحلی یک منحنی ساده نیست. سطح کوهها به شدت پستی و بلندی دارد و روی تنه درختها برجستگیها و فرو رفتگیهای فراوانی موجود است. پس هندسه اقلیدسی مدل خوبی برای تفسیر پدیده های طبیعی نیست و دارای خطای زیادی است. چه باید کرد؟ آیا ریاضیات از تفسیر طبیعت ناتوان است؟ جواب مسلماً منفی است.

زبان ریاضیات برای تفسیر پدیده های طبیعی، هندسه است و هندسهٔ طبیعت چیزی نیست جز هندسه فرکتالی، این موضوعی است که در حال حاضر ریاضیدانان برجسته ای را بخود مشغول داشته است و به جرأت می توان گفت، هیچ چیز در طبیعت موجود نیست که ریاضیات قادر به تفسیر آن نباشد. آیا واقعاً چنین است؟ طبیعت سرشار از فرآیندها و پدیده های تصادفی و به ظاهر غیرقابل پیشگوئی است. چگونه می توان اینهمه بی نظمی را تفسیر کرد؟ امّا در این میان، سؤالی مهمتر نیز مطرح است و آن اینکه آیا واقعاً طبیعت و پدیده های طبیعی بی نظمند و تصادفی هستند؟ یا در دل این بی نظمیهای ظاهری، نظمی پنهان موجود است؟ شاید دو مثال زیر شما را در یافتن پاسخ یاری کند.

مثال ۴ـ یک مثلث متساوی الاضلاع را در نظر می گیریم، سپس وسط اضلاع آنرا به هم وصل می کنیم، چهار مثلث متساوی الاضلاع بدست می آید. مثلث میانی را حذف کرده و روی سه مثلث باقیمانده همین عمل را تکرار می کنیم. اگر این کار را بی نهایت بار تکرار کنیم، فرکتالی بنام بادبان سرپینسکی[۷] حاصل می گردد همانطور که ملاحظه کردید این بادبان به روشی کاملاً جبری[۸] و الگوریتمی بدست آمد.

اکنون همان مثلث متساوی الاضلاع را در نظر می گیریم و رئوس آنرا با A و B و C نامگذاری می کنیم، یک تاس را نیز در نظر گرفته، شماره های ۱، ۲ را به رأس A، ۳، ۴ را به رأس B و ۵، ۶ را به رأس C نظیر می کنیم. از نقطه ای داخل مثلث که آنرا x_0 می نامیم شروع می کنیم، تاس را پرتاب می کنیم، فرض کنید عدد ۶ ظاهر شود، فاصله x_0 تا رأس C را اندازه گرفته، وسط آنرا x_1 می نامیم (وضعیت جدید) دوباره تاس را پرتاب می کنیم و فرض کنید این بار عدد ۳ ظاهر شود، فاصله x_1 تا رأس B را اندازه گرفته، وسط آنرا x_2 می نامیم (وضعیت جدید) اگر این عمل را حدود ۱۵۰ بار یا بیشتر تکرار کنیم، سایه ای از بادبان سرپینسکی را ملاحظه خواهیم کرد! در واقع بادبان سرپینسکی رباینده[۹] فرآیند تصادفی توصیف شده در فوق است.



مثال ۵ ـ مجموعه کانتور را در نظر می گیریم. همانطور که قبلاً ملاحظه شد این مجموعه بروشی کاملاً جبری و الگوریتمی ساخته شده بود.

اکنون فاصله [۰، ۱] و یک سکّه را در نظر می گیریم. با نقطه ای دلخواه درون این فاصله شروع می کنیم و آنرا x_0 می نامیم. سکه را پرتاب می کنیم با این شرط که اگر روی سکه آمد، فاصله x_0 تا ۱ را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و $\frac{2}{3}$ جلو می رویم نقطه حاصل را x_1 می نامیم (وضعیت جدید) و اگر پشت سکه آمد همین عمل را در جهت صفر انجام می دهیم. بهمین ترتیب برای یافتن وضعیت جدید هر بار سکه را پرتاب می کنیم. بنابراین با یک فرآیند تصادفی سروکار داریم. پس از تعداد زیادی تکرار این عمل، به سایه ای از مجموعه کانتور خواهیم رسید! و در واقع مجموعه کانتور رباینده فرآیند تصادفی توصیف شده در فوق است.

آیا تعجب نمی کنید؟ آیا در دل هر بی نظمی یک الگوریتم موجود است؟ تعمق بیشتر روی این سؤال و سایر پدیده های طبیعی را در حال حاضر به شما و سپس به قسمتهای بعدی این مسأله واگذار می کنیم.

بعد فرکتالی[۱۰]: کمی به عقب برمیگردیم، دنبال فرمولی هستیم که بعدهای اقلیدسی خط و صفحه و فضا را ارائه دهد. پاره خطی به طول L را در نظر می گیریم:

خط

مقیاس $r = \frac{1}{2}$
تعداد قطعات $N = 2$
$\Rightarrow Nr^1 = 1$ (منظور از این یک، کل پاره خط است)

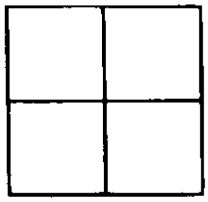
$r = \frac{1}{3}$
$N = 3$
$\Rightarrow Nr^1 = 1$ (منظور از این یک، کل پاره خط است)

ملاحظه می شود که اگر با مقیاس r ، پاره خط مذکور را به قطعات کوچکتر تقسیم کنیم، تعداد N قطعه حاصل می شود و هر بار داریم :

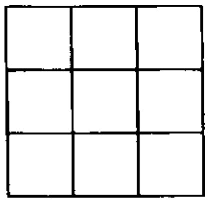
$$Nr^{1} = 1$$

چیزی که مستقل از مقیاس و تعداد قطعات است، توان مقیاس است که در اینحالت برابر یک است پس بعد خط را یک می گیریم.
اکنون یک مربع به ضلع L را در نظر می گیریم :

$r = \frac{1}{2} \Rightarrow N = 4 \Rightarrow Nr^{2} = 1$ (منظور از این یک، کل مربع است)

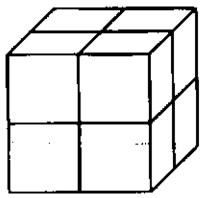


$r = \frac{1}{3} \Rightarrow N = 9 \Rightarrow Nr^{2} = 1$ (منظور از این یک، کل مربع است)

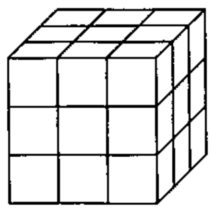


باز ملاحظه می شود که صرف نظر از r و N های مختلف همواره توان r ثابت است و برابر ۲ است، پس بعد صفحه را ۲ می گیریم.
در مورد فضا، مکعبی به ضلع L را در نظر می گیریم :

$r = \frac{1}{2} \Rightarrow N = 8 \Rightarrow Nr^{3} = 1$ (منظور از این یک، کل مکعب است)



$r = \frac{1}{3} \Rightarrow N = 27 \Rightarrow Nr^{3} = 1$ (منظور از این یک، کل مکعب است)



و عیناً دو حالت قبلی صرف نظر از تغییر r و N، توان r ثابت باقی مانده و برابر ۳ است، بنابراین بعد فضا را ۳ می گیریم.

تعریف ۳ : موارد فوق این ایده را به ذهن ما متبادر می کند که اگر شئ را با مقیاس r به قطعات کوچکتر تقسیم کردیم و N قطعه بدست آمد و بعلاوه داشتیم :

$$Nr^{D} = 1$$

آنگاه بعد فرکتالی شئ را برابر D تعریف می کنیم. با یک محاسبه ساده به شرح زیر خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(Nr^{D}) = \mathrm{Log}\,1 &\Rightarrow \mathrm{Log}N + D\,\mathrm{Log}r = 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Log}N = -D\,\mathrm{Log}r \\ &\Rightarrow \mathrm{Log}N = D\,\mathrm{Log}\frac{1}{r} \\ &\Rightarrow D = \frac{\mathrm{Log}N}{\mathrm{Log}\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

D را بعد فرکتالی می نامیم. بعنوان مثال بعد فرکتالی چند فرکتال زیبا و کلاسیک را مورد محاسبه قرار می دهیم؛

مثال ۶ ـ خم وان کخ

هنگ وان کخ ریاضیدان سوئدی بود که در سال ۱۹۰۴ برای اولین بار این خم را معرفی کرد. این خم امروزه بعنوان دقیقترین مدل ریاضی خطوط ساحلی مشهور است.

گام صفر : پاره خطی به طول L

گام اول : آنرا به سه قسمت مساوی تقسیم کرده، یک سوم میانی را حذف کرده و روی آن یک مثلث متساوی الاضلاع بنا می کنیم.

$r = \frac{1}{3}$, $N = 4$

گام دوم : روش فوق را روی چهار قطعه پدیدآمده تکرار می کنیم :

$r = \frac{1}{9}$, $N = 16$

$$D = \frac{\text{Log}\,۱۶}{\text{Log}\,۹} = \frac{۲\,\text{Log}\,۴}{۲\,\text{Log}\,۳} = \frac{\text{Log}\,۴}{\text{Log}\,۳} \simeq ۱/۲۶ \notin \mathbb{N}$$

این بعد عدد صحیح نیست . این موضوع نشاندهنده چیست؟ شاید بهترین پاسخ برای این سؤال این باشد که بعد فرکتالی نشاندهنده میزان پیچیدگی شیٔ است . بعد ۱٫۲۶ برای خم کخ به این معنی است که این شی دارای پیچیدگی بیشتر از خط و کمتر از صفحه است . اگر این پیچیدگی زیاد شود به صفحه خواهیم رسید . این موضوع را در بخش خمهای فضاپرکن[11] بررسی خواهیم کرد .

مثال ۷ ـ بادبان سرپینسکی

و اتسلاو سرپینسکی ریاضیدان لهستانی بود که در سال ۱۹۱۶ برای اولین بار این فرکتالی را معرفی کرد .

گام اول : $r = \frac{۱}{۲} \Rightarrow N = ۳$

گام دوم : $r = \frac{۱}{۴} \Rightarrow N = ۹$

$$D = \frac{\text{Log}\,۹}{\text{Log}\,۴} = \frac{۲\,\text{Log}\,۳}{۲\,\text{Log}\,۲} = \frac{\text{Log}\,۳}{\text{Log}\,۲} \simeq ۱٫۵۸$$

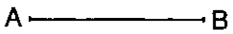
ساختمانهای فضاپرکن:

در سال ۱۸۹۰ ژوزف پئانو ریاضیدان ایتالیایی و همزمان و مستقل از وی دیوید هیلبرت ریاضیدان آلمانی در سال ۱۸۹۱ ساختمانهایی را معرفی کردند، که بقولی لرزه براندام ریاضیدانان سنّتی می انداخت . آنهاچیزی نبودند جز ساختمانهای فضاپرکن . اینگونه ساختمانها نه تنها در دنیای ریاضیات بلکه درجای جای طبیعت قابل مشاهده هستند . همه جامدات دارای چنین ساختمانی هستند، بلورها، قند، آهن، ... همگی ساختمانهایی فضاپرکن تشکیل می دهند . در بدن انسان، مویرگهای داخل کلیه یک ساختمان فضاپرکن است .

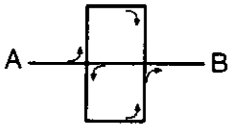
در خاتمه مقاله به معرفی خم پئانو بعنوان یک ساختمان فضاپرکن در دنیای ریاضیات می پردازیم .

این خم از بعد یک شروع می کند، پیچیدگی اش آنقدر بالا می رود که به صفحه می رسد .

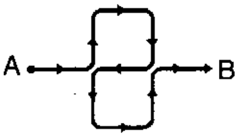
گام صفر : پاره خطی به طول L را در نظر می گیریم :



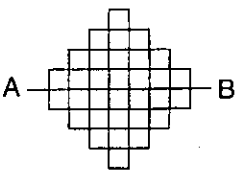
گام اول : آنرا به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و روی یک سوم میانی دو مربع بنا می کنیم :



$r = \frac{۱}{۳} \Rightarrow N = ۹$



گام دوم : روش فوق را روی هر یک از ۹ قطعه بدست آمده تکرار می کنیم :



روش فوق پس از چندین بار تکرار کل صفحه را پر می کند . اگر بعد خم پئانو به روشی که در بخش قبل توضیح داده شد، مورد محاسبه قرار گیرد، خواهیم داشت :

$$D = \frac{\text{Log}\,۹}{\text{Log}\,۳} = \frac{۲\,\text{Log}\,۳}{\text{Log}\,۳} = ۲$$

که همان بعد صفحه است .

نکته : با فلشهایی که در گام اول نشان داده شده می توان از نقطه A به نقطه B در گام دوم و حتی گامهای بعدی رسید، به گونه ای از تمام خطوط عبور شود و از هر کدام فقط یکبار آنهم بدون برداشتن قلم از روی کاغذ . امتحان این موضوع می تواند تمرین جالبی باشد .

مرجع:

1. Fractal and Chaos- Pietgen & Jürgens & saupe, Springer-verlag 1992.

زیرنویس‌ها:

1. B.Mandelbrot
2. Self-Similarity
3. Structure
4. Factor
5. Cantor ternary set
6. Fractal Geometry
7. Sierpinsky Gasket
8. Deterministic
9. Attractor
10. Fractal Dimension
11. Space -Filling

برچسب گذاری گرافها

نویسنده: رعنا خوئیلر، دانشگاهی تربیت معلم تبریز
با مشاورت دکتر سید عباداله محمودیان، دانشگاه صنعتی شریف

مقدمه

توجه به مسائل برچسب گذاری پس از حدس معروف رینگل[۱] در سال ۱۹۶۴، و انتشار مقاله ای در سال ۱۹۶۷ توسط رزا [۱۲]، آغاز شد. رینگل حدس زد که تمام درختها دلپذیر هستند. در سال های اخیر نزدیک به ۲۰۰ مقاله در زمینه روشهای برچسب گذاری گرافها ارائه شده است و جهت اصلی تعداد زیادی از این مقالات اثبات حدس رینگل بوده است، ولی تا به امروز درستی یا نادرستی آن اثبات نشده است. در این مقاله ابتدا تعاریف مقدماتی مورد نیاز از نظریهٔ گرافها را بیان نموده و سپس مروری به برخی روشهای برچسب گذاری گرافها می کنیم. مثالهایی نیز در این زمینه خواهیم داشت و چند حدس مهم مطرح خواهد شد.

یک گراف G سه تائی مرتب $(V(G),E(G),\Psi_G)$ شامل مجموعهٔ ناتهی $V(G)$ از رأسها، یک مجموعهٔ $E(G)$ از یالها و تابع اتصال Ψ_G است که به هر یال از G دو رأس از G (نه لزوماً مجزا) را متناظر می کند. اگر e یک یال و u و v رأسهایی از G باشند، به طوری که $\Psi_G(e) = uv$، گوئیم e رأسهای u و v را به هم متصل می کند. u و v رأسهای انتهایی e نامیده می شوند.

مثال. $G = (V(G),E(G),\Psi_G)$ که در آن:

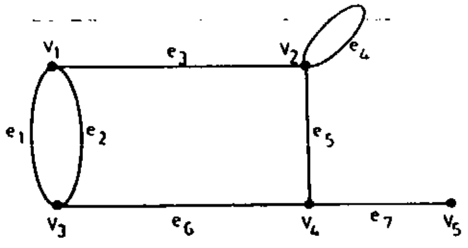
$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \qquad E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$$\Psi_G(e_1) = v_1v_3 \qquad \Psi_G(e_2) = v_1v_3$$

$$\Psi_G(e_3) = v_1v_2 \qquad \Psi_G(e_4) = v_2v_2$$

$$\Psi_G(e_5) = v_2v_4 \qquad \Psi_G(e_6) = v_3v_4 \qquad \Psi_G(e_7) = v_4v_5$$

گراف فوق را می توان با نمودار زیر نشان داد:



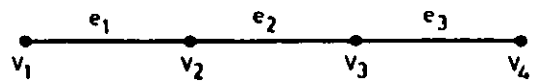
شکل ۱

هر رأس با یک نقطه مشخص شده و هر یال نیز با یک خط یا منحنی که رأسهای انتهایی آن یال را به هم وصل می کند، نشان داده می شود. یال e_4 که هر دو سر آن رأس v_2 است یک **طوقه**[۲] نامیده

می شود. درجهٔ رأس v در گراف G تعداد یالهایی است که با آن رأس تلاقی دارند. اگر درجهٔ تمام رأسهای گراف G مساوی عدد ثابتی مانند k باشد، G را گراف منتظم از درجهٔ k یا k- منتظم می نامند.

یک **گراف ساده**، گرافی است که شامل طوقه و یالهایی که هر دو رأس انتهایی آن یکی باشد (**یال چندگانه**)، نیست. اگر در شکل فوق یکی از یالهای e_1 یا e_2 و یال e_4 را حذف نمائیم، یک گراف ساده به دست می آوریم. گرافی که فقط یک رأس داشته باشد و یال نداشته باشد **گراف بدیهی** نامیده می شود.

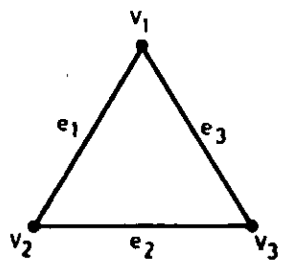
یک مسیر P_n، گرافی است با n رأس متمایز $v_1, v_2, \dots, v_n$، که هر دو رأس متوالی v_i و v_{i+1} با یال e_i به هم متصل هستند.



شکل ۲. گراف P_4

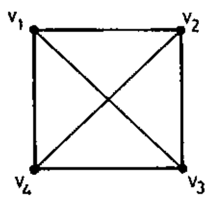
گراف فوق را با رشتهٔ $v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4$ می توان نشان داد.

گرافی به صورت $v_1e_1v_2e_2\dots v_ne_nv_1$ را که به ازای $i \neq j$، v_i و v_j متمایز و e_i و e_j نیز متمایز هستند یک دور C_n می نامند.



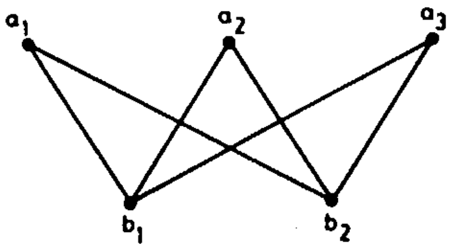
شکل ۳. گراف C_3

یک گراف ساده با n رأس، که بین هر دو رأس متمایز آن یال منحصر بفردی وجود داشته باشد، **گراف کامل** نامیده می شود و با K_n نشان می دهند. برای حالت $n=3$ گراف C_3 در واقع همان K_3 است.



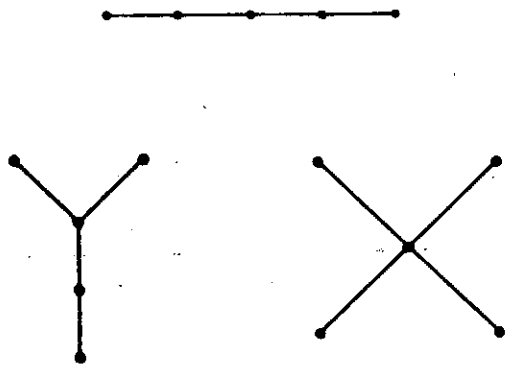
شکل ۴. گراف A_4

گراف دو بخشی گرافی است که بتوان رأسهای آن را به دو زیرمجموعهٔ X و Y تقسیم نمود. به طوری که هر یال گراف دارای یک رأس انتهایی در X و یک رأس انتهایی در Y باشد. **گراف دو بخشی کامل**، یک گراف دو بخشی است، که در آن هر رأس از X به هر رأس از Y متصل است. اگر $|X| = p$ و $|Y| = q$ چنین گرافی را با $K_{p,q}$ نمایش می دهند.



شکل ۵. گراف $K_{3,2}$

اگر بین هر دو رأس مجزا از گراف G یک مسیر وجود داشته باشد، آنگاه G یک **گراف همبند** نامیده می شود. گرافی که همبند بوده و دور نیز نداشته باشد، یک **درخت** نامیده می شود.



شکل ۶. درختهایی با ۵ رأس

چند نوع برچسب گذاری

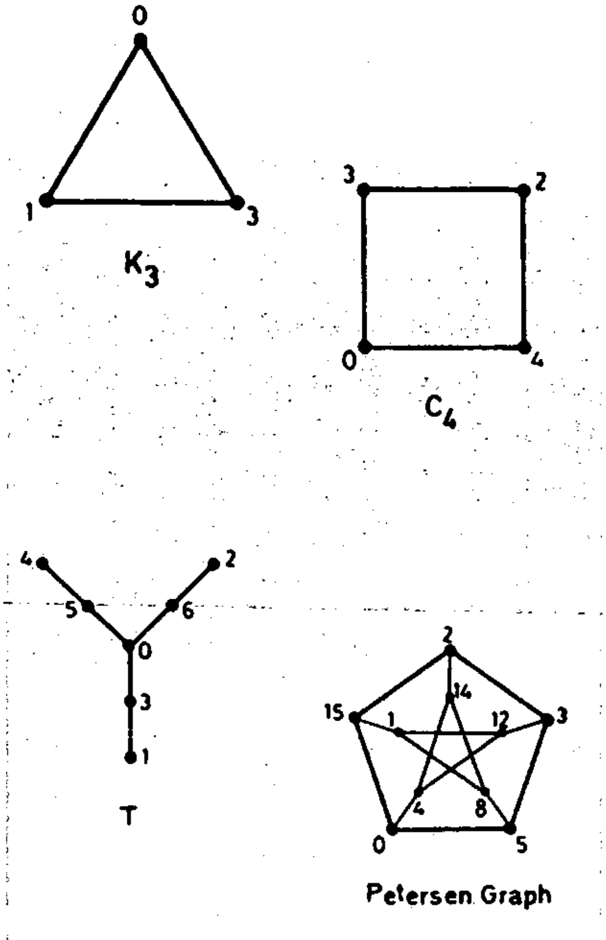
□ **تعریف ۱**. یک برچسب گذاری رأسی[3] از گراف $G=(V,E)$، نگاشت یک به یک f از رأسهای G به مجموعهٔ اعداد صحیح غیر منفی است، که به هر یال xy برچسبی که بستگی به برچسبهای $f(x)$ و $f(y)$ دارد متناظر می کند.

□ **تعریف ۲** . یک برچسب گذاری دلپذیر[۴] از گراف $G=(V,E)$ با n یال، یک نگاشت یک به یک از رأسهای G به مجموعهٔ $\{0,1,2,\dots,n\}$ است، به طوری که اگر برای هر یال xy برچسب $|f(x)-f(y)|$ داده شود، برچسبهای به دست آمده برای یالها مجزا باشند.

گرافی که دارای برچسب گذاری دلپذیر باشد، **گراف دلپذیر** نامیده می شود.

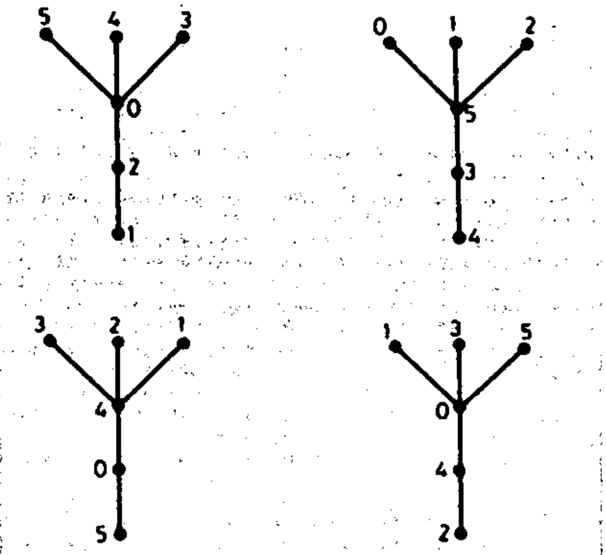
رزا در سال ۱۹۶۶ [۱۲]، این نوع برچسب گذاری را β- ارزیابی[۵] نامید، ولی گلمب در سال ۱۹۷۲ [۵]، آنرا برچسب گذاری دلپذیر نامید و امروزه بیشتر به همین نام معروف است.

در شکل زیر چند گراف دلپذیر نمایش داده می شود.



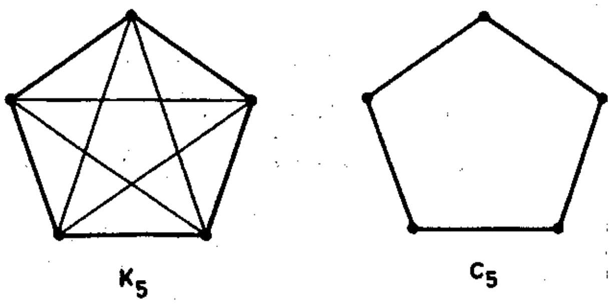
شکل ۷. چند گراف دلپذیر

یک گراف ممکن است برچسب گذاری های دلپذیر متفاوت داشته باشد. مثلاً:



شکل ۸. برچسب گذاری های دلپذیر متفاوت از یک گراف

باید توجه داشت که هر گرافی دارای برچسب گذاری دلپذیر نیست، به عنوان مثال C_5 و K_n برای $n>4$، دلپذیر نیستند. [۵].



شکل ۹. چند گراف غیر دلپذیر

رزا در [۱۲]، α- ارزیابی گراف G را به ترتیب زیر تعریف کرد:

□ **تعریف ۳.** یک برچسب گذاری دلپذیر از G با این خاصیت که یک عدد صحیح k وجود داشته باشد به طوری که برای هر یال xy داشته باشیم $f(x) \le k < f(y)$ یا $f(y) \le k < f(x)$، یک α- ارزیابی[۶] برای G نامیده می شود و k را مشخصهٔ این برچسب گذاری گوئیم.

قضیه ۱. [۱۲] برای دور C_n یک α- ارزیابی وجود دارد، اگر و فقط اگر (سنج ۴) $n \equiv ۰$ یک برچسب گذاری دلپذیر برای C_n وجود دارد، اگر و فقط اگر، (سنج ۴) ۳ یا $n \equiv ۰$.

اثبات. برای اثبات یک طرف قضیه فرض کنیم $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ رأسهای متوالی C_n باشند. اگر (سنج ۴) $n \equiv ۰$ آنگاه برای $i=1,2,\dots,n$

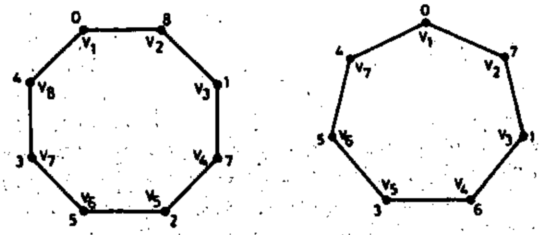
$$f(v_i) = \begin{cases} (i-1)/2 & \text{فرد } i \\ n+1-i/2 & i \le \frac{n}{2} \text{ و } i \text{ زوج} \\ n-i/2 & i > \frac{n}{2} \text{ و } i \text{ زوج} \end{cases}$$

یک α- ارزیابی برای C_n است. اگر (سنج ۴) $n \equiv ۳$، آنگاه برای $i=1,2,\dots,n$

$$f(v_i) = \begin{cases} n+1-i/2 & \text{زوج } i \\ (i-1)/2 & i \le \frac{n-1}{2} \text{ و } i \text{ فرد} \\ (i+1)/2 & i > \frac{n-1}{2} \text{ و } i \text{ فرد} \end{cases}$$

یک برچسب گذاری دلپذیر برای C_n است. برای تکمیل اثبات به [۱۲] مراجعه شود.

در شکلهای زیر دو نوع برچسب گذاری یکی برای C_7 و دیگری برای C_8 نشان داده شده است.



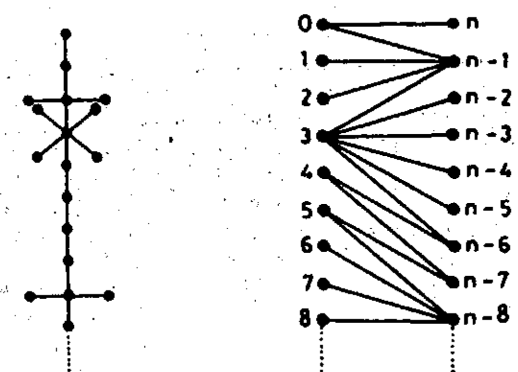
برچسب گذاری دلپذیر برای C_7 — α- ارزیابی برای C_8 با مشخصه $k = ۳$

شکل ۱۰

□ **تعریف ۴.** منظور از پایهٔ یک درخت T درخت B_T است که با حذف کردن تمام رأسهای درجهٔ یک و یالهای متصل به آنها از T بدست می آید. یک گراف کاترپیلار[۷] یک درخت است که مسیر نیست ولی پایهٔ آن مسیر است.

قضیه ۲. [۱۲] اگر درخت T یک کاترپیلار یا یک مسیر باشد، آنگاه T دارای α- ارزیابی است.

اثبات. در شکل زیر ساختار یک α- ارزیابی برای کاترپیلارها نشان داده شده است.

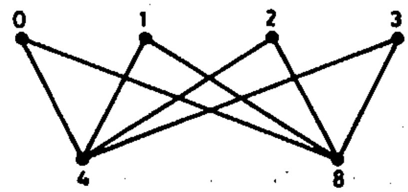


شکل ۱۱. α- ارزیابی برای کاترپیلارها

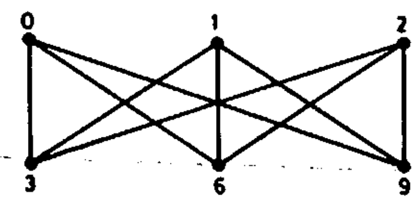
قضیه ۳. [۱۲] گراف دو بخشی کامل $K_{p,q}$ دارای α- ارزیابی است.

اثبات. اگر مجموعهٔ رأسهای $K_{p,q}$ را با دو رشتهٔ $a_1,a_2,\dots,a_p$ و $b_1,b_2,\dots,b_q$ نشان دهیم برچسب گذاری زیر یک α- ارزیابی برای $K_{p,q}$ است:

$$\begin{cases} f(a_i) = i-1 & (i=1,\dots,p) \\ f(b_j) = jp & (j=1,\dots,q) \end{cases}$$



α- ارزیابی برای $K_{4,2}$ با مشخصه $k=3$



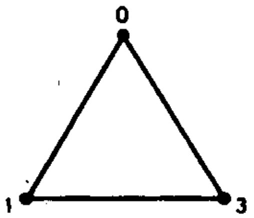
α- ارزیابی برای $K_{3,3}$ با مشخصه $k=2$

شکل ۱۲

جوزف گالیان در [۴]، α- ارزیابی ضعیف را به صورت زیر تعریف کرد:

تعریف ۵. یک برچسب گذاری دلپذیر از G با این خاصیت که یک عدد صحیح k وجود داشته باشد، به طوری که برای هر یال xy داشته باشیم $f(x) \le k \le f(y)$ یا $f(y) \le k \le f(x)$، یک α- ارزیابی ضعیف[8] برای G نامیده می‌شود.

دورهای C_n با $n \equiv 3$ (سنج ۴) دارای α- ارزیابی نیستند ولی دارای α- ارزیابی ضعیف هستند.



شکل ۱۳. α- ارزیابی ضعیف برای K_3 با مشخصهٔ $K=1$

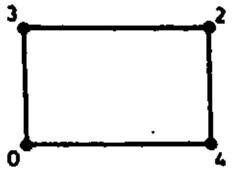
یک تعمیم از گرافهای دلپذیر، گرافهای k- دلپذیر هستند که بطور مستقل توسط اسلیتر [۱۳] و ماهئو و توپلیر [۱۰] تعریف شده است.

تعریف ۶. یک برچسب گذاری k- دلپذیر[9] از گراف G با n یال، یک نگاشت یک به یک f از مجموعهٔ رأسهای G به مجموعهٔ $\{0,1,\dots,n+k-1\}$ است، به طوری که مجموعهٔ برچسب یالها که توسط قدرمطلق تفاضل برچسب رأسهای دو سر یال بدست می‌آید $\{k,k+1,\dots,n+k-1\}$ باشد. پس برچسب گذاری دلپذیر همان برچسب گذاری ۱- دلپذیر است.

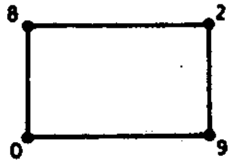
اگر یک α- ارزیابی f با مشخصهٔ k^* برای گراف G وجود داشته باشد، آنگاه برای هر $k \ge 1$ گراف G، یک گراف k- دلپذیر است که برچسب گذاری φ در آن به صورت زیر است:

$$\varphi(V) = \begin{cases} f(v) & \text{اگر } f(v) \le k^* \\ f(v)+k-1 & \text{اگر } f(v) > k^* \end{cases}$$

در شکل زیر یک α- ارزیابی C_4 به یک برچسب گذاری ۶- دلپذیر از آن تبدیل شده است.



α- ارزیابی از C_4

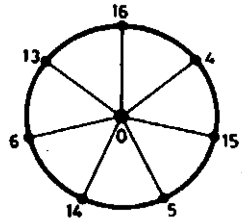


برچسب گذاری ۷- دلپذیر از C_4
شکل ۱۴

نگ [۱۱] نشان داد که گرافهایی وجود دارند که به ازای هر k، k- دلپذیرند ولی دارای α- ارزیابی نیستند.

❑ **تعریف ۷**. یک چرخ[10] W_n با اضافه نمودن یک رأس به دور C_n و متصل نمودن n رأس روی دور به آن رأس به دست می آید.

هوئد و کوپر [۷] ثابت کردند که تمامی چرخها دلپذیرند. ماهئو و تویلیر [۱۰] نشان دادند چرخ W_{2k+1}، k- دلپذیراست.



شکل ۱۵. برچسب گذاری ۳- دلپذیر از W_7

❑ **تعریف ۸**. اگر $v_1, v_2, \ldots, v_n$ رئوس C_n باشند با اضافه نمودن n رأس دیگر $u_1, u_2, \ldots, u_n$ و n یال (u_i, v_i)، $i = 1, 2, \ldots, n$ به C_n گراف R_n که تاج[11] نامیده می شود به دست می آید.

فراخت [۳] ثابت کرد که تاج R_m برای هر $n \geq 3$ دلپذیر است.

❑ **تعریف ۹**. گراف m- آسیاب بادی فرانسوی[12] گرافی است شامل m تا گراف K_4 که همگی در یک رأس مشترکند.

حدس ۱. (حدس معروف رینگل) تمام درختها دلپذیر هستند.

حدس ۲. [۱۰] چرخ W_{2k}، که $k \neq 3,4$، k- دلپذیر است.

حدس ۳. [۳] اگر $n \equiv 0$ (سنج ۲)، آنگاه تاج R_n دارای α- ارزیابی است.

حدس زیر هنوز یک مسأله حل نشده است، اگرچه درستی آن برای $4 \leq m \leq 32$ اثبات شده است.

حدس ۴. [۱] اگر $m \geq 4$ آنگاه گراف m- آسیاب بادی فرانسوی دلپذیر است.

در سال ۱۹۷۰ کوتزیگ و رزا [۹]، برچسب گذاری جادوئی از یک گراف سادهٔ $G(V,E)$ را به صورت زیر تعریف کردند:

❑ **تعریف ۱۰**. گوئیم گراف سادهٔ $G(V,E)$ دارای برچسب گذاری جادوئی[13] یا M- برچسب گذاری با مقدار ثابت C است، هرگاه نگاشت یک به یک $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \ldots, |V \cup E|\}$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $ab \in E(G)$، $f(a) + f(b) + f(ab) = C$.

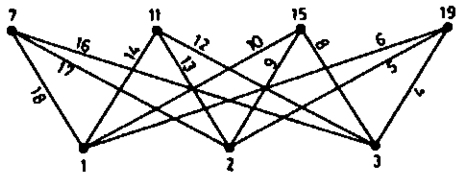
✘ **قضیهٔ ۴**. [۹] همهٔ گرافها دو بخشی کامل $K_{p,q}$ دارای M- برچسب گذاری هستند.

✍ **اثبات**. اگر مجموعهٔ رأسهای $K_{p,q}$ را با دو دستهٔ $a_1, a_2, \ldots, a_p$ و $b_1, b_2, \ldots, b_q$ نشان دهیم، f را با ضابطهٔ زیر تعریف می کنیم:

$$f(a_i) = i$$
$$f(b_j) = jp + i + p$$
$$f(a_i b_j) = (p+1)(q - j + 2) - i - 1$$

واضح است که f یک M- برچسب گذاری از $K_{p,q}$ با مقدار ثابت $C = pq + 3p + q + 1$ است.

به عنوان مثال یک M- برچسب گذاری از $K_{3,3}$ در شکل ۱۶ نشان داده شده است.



شکل ۱۷. یک M- برچسب گذاری از $K_{3,3}$

قضیهٔ ۵ . [۹] دور C_n برای هر $n \geq 3$ ، دارای M- برچسب گذاری است .

اثبات . فرض می کنیم $v_1, v_2, \ldots, v_n$ رأسهای متوالی C_n باشند .

اگر $n = 2k+1$ تعریف می کنیم :

$$f(v_i) = \begin{cases} i & i \text{ فرد} \\ i+n & i \text{ زوج} \end{cases}$$

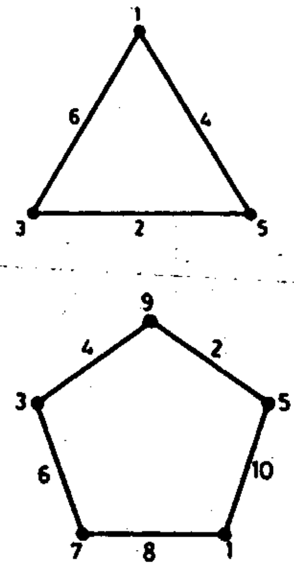
$$f(v_i v_{i+1}) = 2n - 2i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$f(v_n v_1) = 2n$$

داریم :

$$\bigcup_{V(G)} \{f(v_i)\} = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$$

$$\bigcup \{f(v_i v_{i+1})\} = \{2, 4, \ldots, 2n\}$$

$$f(v_n) + f(v_1) + f(v_n v_1) = n + 1 + 2n = 3n + 1$$



شکل ۱۷. M- برچسب گذاری برای C_3 و C_5

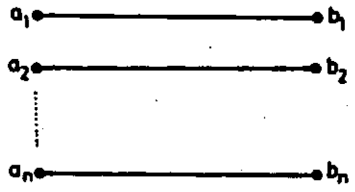
$$f(v_i) + f(v_{i+1}) + f(v_i v_{i+1}) = 2i + n + 1 + 2n - 2i = 3n + 1$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

پس f یک M- برچسب گذاری برای C_n با مقدار ثابت $C = 3n+1$ است .

برای تکمیل اثبات در دو حالت $n = 4k$ و $n = 4k+2$ به [۹] مراجعه شود .

قضیه ۶ . [۹] گراف nP_2 یعنی n اتحاد مجزا از P_2 که در واقع یک گراف منتظم از درجهٔ یک با n یال و 2n رأس است ، دارای M- برچسب گذاری است ، اگر و تنها اگر n فرد باشد .

اثبات . رأسها و یالهای nP_2 را با a_i ، b_i و a_ib_i ، $(i = 1, 2, \ldots, n)$ نشان می دهیم



شکل ۱۸. گراف nP_2

اگر nP_2 داری M- برچسب گذاری با ثابت C باشد ، آنگاه $nC = 1 + 2 + \ldots + 3n$ و $C = \frac{3n(3n+1)}{2n} = \frac{3}{2}(3n+1)$ که باید عددی صحیح باشد ، در نتیجه n باید فرد باشد . برعکس اگر $n = 2k+1$ تعریف کنیم :

$$f(a_i) = i$$

$$f(b_i) = \begin{cases} 5k + 2 + i & i = 1, 2, \ldots k+1 \\ 3k + 1 + i & i = k+2, k+3 \ldots, 2k+1 \end{cases}$$

$$f(a_ib_i) = \begin{cases} 4k + 4 - 2i & i = 1, 2, \ldots, k+1 \\ 6k + 5 - 2i & i = k+2, k+3 \ldots, 2k+1 \end{cases}$$

در نتیجه :

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{f(a_i)\} = \{1,2,\dots,n\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{f(b_i)\} = \{2n+1, 2n+2, \dots 3n\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{f(a_ib_i)\} = \{n+1, n+2, \dots 2n\}$$

$$f(a_i) + f(b_i) + f(a_ib_i) = 9k + 6$$

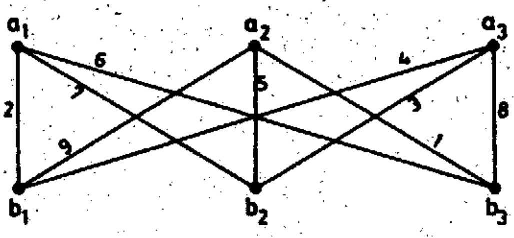
بنابراین f یک M- برچسب گذاری از nP_2 با ثابت $C = 9k + 6$ است.

مسأله ۱ . [۹] آیا هر درخت داری M- برچسب گذاری است؟

مسأله ۲ . [۹] شرط لازم برای یک گراف منتظم از درجهٔ دو (به ترتیب درجهٔ سه و چهار) برای داشتن یک M- برچسب گذاری چیست؟

در سال ۱۹۹۰ هارتسفیلد و رینگل در کتاب خود [۶]، برچسب گذاری جادوئی را به صورت زیر روی یالهای یک گراف تعریف کردند.

❑ **تعریف ۱۱ .** اگر گراف G دارای n یال باشد، G **جادوئی** یا **ابرجادوئی**[۱۴] نامیده می شود، اگر یالهای G را بتوان با $\{1,2,\dots,n\}$ چنان برچسب گذاری نمود که مجموع برچسب یالهای تلاقی کننده در هر رأس، برابر باشند.



شکل ۱۹. برچسب گذاری ابر جادوئی برای $K_{3,3}$

یادآوری می شود که یک مربع جادویی[۱۵] مربعی است که دارای n سطر و n ستون بوده و اعداد از ۱ تا n^2 به طوری در آن قرار داده شده است که مجموع اعداد هر سطر و هر ستون و هر یک از دو قطر اصلی آن با هم مساوی باشند. ثابت می شود که به ازای هر $n \geq 3$، مربع جادوئی $n \times n$ وجود دارد[۸].

قضیه ۷ . $K_{n,n}$ برای $n \neq 2$ ابر جادوئی است.

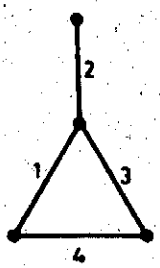
اثبات . اگر رأسهای $K_{n,n}$ را با دو دستهٔ $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ نشان دهیم، کافی است برچسب یال a_ib_j را مؤلفه (i,j)ام مربع جادوئی $n \times n$ بگیریم.

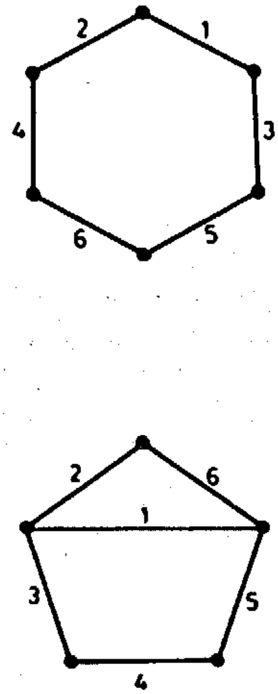
در شکل ۱۹ برچسب گذاری ابرجادوئی برای $K_{3,3}$، از مربع جادوئی زیر به دست آمده است.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

در شکل زیر چند مثال از گرافهای با n یال را می بینیم که یالهای آنها با $\{1,2,\dots,n\}$ برچسب گذاری شده اند، به طوری که مجموع برچسب ها در هر رأس متفاوت از مجموع برچسب ها در هر رأس دیگر است.

چنین گرافهایی را **پاد جادویی**[۱۶] می نامند.





شکل ۳۰- چند گراف پاد جادوئی

حدس ۵ . [۶] هر درخت به جز K_2 پاد جادوئی است.

حدس ۶ . [۶] هر گراف همبند بجز K_2 پاد جادوئی است .

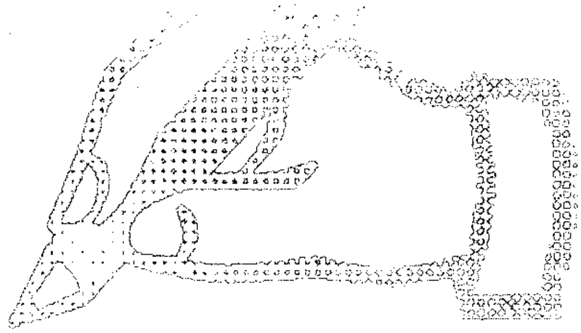
زیرنویس ها:

1. Ringel
2. Loop
3. Vertex labeling
4. graceful labeling
5. β - Valuation
6. α - Valuation
7. Caterpilar
8. Weak α - valuation
9. k- graceful labeling
10. Wheel
11. Crown
12. French m- Windmill
13. magic- valuation
14. magic or super magic
15. magic square
16. antimagic

مراجع:

1. J. C. Bermond, A. Kotzig and J. Turgeon, On a combin-atorial problem of antennas in radioastronomy, Combinatorics, North-Holland, Amesterdam (1978) 135-149
2. R. Bodendiek and G. Walther, On relations between certain graph labelings, Discrete Mathematics 134 (1994) 9-16.
3. R. W. Frucht Graceful numbering of wheels and related graphs, Ann. N. Y. Acad. of Sci. 319(1979) 219-229.
4. J. A. Gallian, J. Prout and S. Winters, Graceful and harmonious labelings of prisms and related graphs, Ars Combinatoria 34(1992) 213-222.
5. S. W. Golomb, How to number a graph, Graph Theory and Computing, Academic Press, New York (1972) 23-37.
6. N. Hartsfield and G Ringel, Pearls in Graph Theory, Academic Press, San Diego (1990) 103-120.
7. C. Hoede and H. Kuiper, All wheels are graceful, Utilitas Math. 14(1987) 311.
8. Q. Jianping, A short proof of the magic squares, Ars Combinatoria 28(1989) 252-257.
9. A. Kotzig and A. Rosa, Magic valuations of finite graphs, Canada. Math. Bull. 13(1970) 451-461.
10. M. Maheo and H. Thuillier, On d-graceful graphs, Ars Combinatoria 13(1982) 181-192.
11. H. Ng, α -valuations and k-gracefulness, Amer. Math. Soc. Abstract 7(1986) 247.
12. A. Rosa, On certain valuations of the vertices of a graph, Theory of Graphs, (International Symposium, Rome, July 1966), Gordon and Breach, New York and Dunod Paris (1967) 349-355.
13. P. J. Slater, On k-sequential and other numbered graphs, Discrete Mathematics 34(1981) 185-193.

■



روایت معلمان

مریم گویا، منطقهٔ ۲ تهران

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه‌ای خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آنها بپردازند.

اختصاص روز و هفته‌ای به نام معلّم بهانه‌ای بدستم داد که به جای خاطره‌ای از کلاس درس ریاضی مروری داشته باشم بر سالهایی که به صورت رسمی روز ۱۲ اردیبهشت را به نام روز معلّم خواندند و بعدها هفته‌ای را به بزرگداشت مقام معلّم اختصاص دادند.

سالهای اول در بعضی مدارس دقایقی را به تعریف و تمجید از معلّم اختصاص می‌دادند و کم کم بعضی از مدیران ابتکار به خرج داده و کتابی یا شاخه گلی به معلّمها هدیه می‌کردند و یا نوشته‌ای (لوح تقدیری) به تعدادی از معلّمان داده می‌شد.

تعداد محدودی از دانش آموزان نیز به تناسب سلیقه و روحیه و امکان مالی خود سعی می‌کردند هدیه‌ای برای معلّم هایشان تدارک ببینند. این روند آنچنان شتاب گرفت که مشکلاتی را برای خانواده‌ها و مدرسه‌ها به وجود آورد. البتّه مشکل، بیشتر در دبستانها و مدارس راهنمایی بود. چون در دبیرستانها، هم دانش آموزان بزرگتر شده بودند و هم تعداد معلّم هایشان بیشتر بود و عملاً امکان نداشت بتوانند به هر معلّم گلی یا هدیه‌ای تقدیم کنند. این مسألهٔ هدیه دادن در مدارس آنچنان ابعاد گسترده و مخرّبی پیدا کرد که مسئولان آموزش و پرورش درصدد برآمدند با ارسال بخشنامه هایی از ضایعات و پیامدهای ناخوشایند این مسأله جلوگیری کنند و ...!

چند سالی است که در دبیرستانها و مراکز پیش دانشگاهی مسئولان مدرسه با همکاری انجمن اولیا و مربیان برنامهٔ تقدیری ترتیب می‌دهند و گل و شیرینی و نهار و هدیه‌ای از طرف انجمن تهیه می‌کنند. اصل موضوع نیز مانند مسائل دیگر لوث شده و همین تعارف و تکلّفاتش مانده است. منِ معلّم مانند صدها معلم دیگر از این برنامه‌ها نه تنها دل خوشی نداریم که احساس ناخوشایندی نیز همراهمان است. ما در تمام شرایط بدون چشمداشتی تا حد امکان، کارمان را انجام داده‌ایم، نه تشویقی این چنینی، محرّک ما در ارائه کار بهتر بوده و نه بی مهری‌ها و بها ندادن‌ها مانع کارمان شده است! آنچه که ما را دلگرم به کار می‌کند و با وجود همهٔ مشکلات، توان کار کردن و استقامت به ما می‌دهد، عشقی است که به کارمان داریم. عاشق را باکی نیست که بنوازند یا برانند. ما عاشقیم! عشقمان را به خدا عرضه می‌کنیم و اوست که باید بپذیرد یا رد کند. عشق به تدریس و عشق به دانش آموزان آن چنان ایجاد انگیزه می‌کند که وقتی در کلاس هستی، از دنیا و آنچه در آن هست جدا می‌شوی و جز محدودهٔ کوچک کلاس و آنچه که باید انجام دهی و مخاطبینت، به چیزی و کسی نمی‌اندیشی. خستگی ناشی از کارترا فقط خود بچه‌ها هستند که از جان و روحت می‌زدایند.

بسمه تعالی

هنگامی که در کنار تخته سیاهی که حتی نمی دانست گل نیز گریه می کند می ایستادی، احساس می کردم با هر عددی که بر روی تن سرد تخته حک می کنی اشتیاقی ناپیدا در سلولهای مرده آن هویدا می شود. دوست دارم سبد پر از گلی را که از باغچه سرسبز وجودت چیدم بر روی سر گذاشته و در کوچه ها فریاد برآورم که تا پایان عمر هیچگاه تو را فراموش نخواهم کرد و در همه جا به یادت خواهم بود و هیچگاه افق بی کران محبتت را از زیر رادیکال وجودم بیرون نخواهم کشید. (دانش آموز سال دوم، درس ریاضی ۴)

نگاههای حق شناسشان و کلامهای معصومانه و پراحساسشان بزرگترین هدیه ای است که به معلم ارزانی می شود. منِ معلم حاضر نیستم به هیچ قیمتی نوشته های دانش آموزانم را که به عنوان قدردانی به من داده اند، با گرانبهاترین هدیه ها معاوضه کنم.

وقتی که تو را دیدم، دریافتم که از قبیله ای دیگر هستی! از قبیله آسمان! سیمایت را در خورشید دیدم و نگاهت را در ماه خواندم. من از پنجرهٔ چشمان تو با آسمان آشنا شدم.

من دلم را در صمیمیت باران چشمان تو شستم، تو در کلامت از طلوع می گفتی و من آفتاب را در آینه نگاهت یافتم. معلم گرامیم! می خواستم گلی تقدیمت کنم دیدم در محدودهٔ کوچک پاکت پرپر می شود. پس، از گل محبت گرفتم و به عنوان پرمحبت ترین هدیه سلامی تقدیمت می کنم. سلام ای ... (دانش آموز سال سوم، درس جبر و احتمال)

طبیعی است که برای من بسیار تلخ است که از طریق مدرسه و انجمن هدیه ای دریافت کنم که می دانم بسیاری از اولیاء راضی به آن نیستند و یا با اکراه در تهیه هدیه مشارکت می کنند. روی سخنم با مسؤولان آموزش و پرورش است بیائید بیش از این ما را خفیف نکنید! نه بخشنامه ای در تأیید معلم بدهید، نه بخشنامه هایی در جهت برگزاری چنین و چنان روز معلّم. بگذارید دانش آموزان خود داوری کنند. بگذارید احساسشان را چه مثبت چه منفی بی مهابا بروز دهند. بچّه ها را شرمندهٔ خانواده هایشان نکنید که به خاطر پرداخت مبلغی منّتی بر آنها داشته باشند. دانش آموزانمان را به ما واگذارید و ما را به آنها، خودمان می دانیم چگونه از هم تشکر کنیم!

... می خواهم بدانی که هیچگاه لحظاتی را که تخته سیاه را با موج سپید وجودت مقایسه می کردم و کورکورانه به درس زندگیت که با گچ سفید بر تخته حک می شد می نگریستم فراموش نمی کنم. (سال دوم ـ ریاضی ۴)

وقتی به کلاس وارد می شویم و روی تخته سیاه می خوانیم

معلم... روزت مبارک

همین برای ما کافی است! باور کنید ما چیزی نمی خواهیم. هیچگاه نخواسته ایم و نخواهیم خواست. به قول خواجهٔ شیراز

یار با ماست چه حاجت که زیادت طلبیم
دولت صحبت آن مونس جان ما را بس

در روزگار معلمی به مناسبتهای مختلف بارها دانش آموزان، کلامی یا نقشی و یا جملاتی به من هدیه داده اند که خستگیها و ملالتهای ناشی از کار را تمام و کمال از جان و روحم زدوده اند و این همان «مونس جان است که خواجه شیراز می گوید و ما را بس است:

... وازکنارهٔ درگچها را دیدم که در خلوت دستهای تو می رقصیدند و تخته پاک کن را که چهرهٔ تخته را بوسه باران کرده بود. آری! دیگر نه پاره خط بودم و نه نیم خط. خط ممتد محبت شده بودم. (دانش آموز، سال دوم، درس ریاضی ۳)

ختم کلام آنکه بیائید قداست معلمی را خدشه دار نکنیم و با این پیرایه ها و افتراق ها، بیش از پیش روح و جسم معلّمان را آزرده نسازیم. زیرا همانطور که گفتم، معلّمان هدیهٔ خود را از دانش آموزانشان ـ اگر مستحقّ هدیه ای باشند ـ می گیرند:

«وقتی تو آمدی، عشق بارید، شمع خفت و خورشید شکفت. مردمک سپیدم رنگ آفتاب گرفت و تکلّم خاموشم نی داوودی نواخت و بر شیار داغ بستهٔ دست و پای بایرم رود حرکت جوشید.

ای سراندیش آبروی عشق!

بگذار ساقهٔ ترد و نازک وجودم در دستهای پر سخاوتت معنی زلال آرامش را تجربه کند که در رستاخیز پرشکوه قلبم چشم به یاری تو دوخته ام.

ای سایهٔ سپیدار رحمت. روزتان مبارک.

(دانش آموز سال سوم درس جبر و احتمال)

آگاهی یافتن از روی ارزشیابی عملکرد [دانش‌آموزان] در ریاضی

نوشته: کارول اس. پارک و سوزانا لین[1]
ترجمه: شهرناز بخشعلی‌زاده

معلمین با استفاده از ارزشیابی عملکرد کواسار[2] می‌توانند تدریس ریاضی خود و نیز موقعیت‌های تحصیلی دانش‌آموزان را افزایش دهند.

چگونه معلمین می توانند راجع به ارزشیابی عملکرد آگاه‌تر شوند؟ چگونه اطلاعات به دست آمده از سؤالات ارزشیابی عملکرد می تواند برنامه درسی آنها را تقویت نماید و روشها و متدهای تدریسشان را بهبود بخشد؟ چگونه معلمین می توانند به دانش‌آموزانشان کمک کنند تا به اهمیت این آزمون و نحوهٔ تصحیح آنها پی ببرند؟

اطلاعات جمع‌آوری شده از نتایج استفادهٔ ارزشیابی های عملکرد در یک پروژهٔ ریاضی با جهت گیری های اصلاح شده می تواند به این سؤالات پاسخ دهد[3]. از سال تحصیلی ۱۹۹۱ـ۱۹۹۰ تاکنون، شش مدرسه در پروژهٔ کواسار شرکت نموده‌اند. هدف این پروژه این است که نشان دهد چگونه برنامه های ریاضی که بر مهارتهای حل مسئله و استدلال تمرکز دارند، می توانند در مدارس متوسطهٔ شهری با پیشینه های نژادی مختلف موفق باشند (سیلور و استین ۱۹۹۶).

برای این پروژه، ما ابزار ارزشیابی شناختی کواسار (QCAI) را تکمیل نمودیم و از آنها در زیر نظر گرفتن نتایج و پیشرفتهای دانش‌آموزان استفاده کردیم (لین ۱۹۹۳). این ابزار شامل یک سری آزمونهای پاسخ باز که مهارتهای حل مسئله، استدلال و ارتباطات دانش‌آموزان را اندازه گیری می کنند، می باشد. ما از یک دستورالعمل جامع برای تصحیح پاسخهای دانش‌آموزان به هر آزمون با مقیاس ۰-۴ استفاده کردیم و از عملکرد دانش‌آموزان، یک تجزیه و تحلیل عمقی به عمل آوردیم. در طی سالها معلمین در فعالیتهای متنوعی شرکت کردند که به آنها کمک کرد تا از اطلاعات مربوط به درک ریاضی

شکل ۱

اهمیت توضیحات

دور عددی که بیشترین مقدار را نشان می دهد، دایره‌ای بکشید:

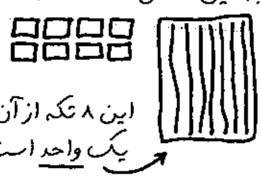
۰/۰۰۸۰۰۰　　۰/۰۸۰　　۰/۸　　۰/۰۸

پاسخ خود را توضیح دهید.

ـ۱

۰/۸، ۸ تا یک دهم است.
۰/۰۸، ۸ تا یک صدم است.
۰/۰۸۰، برابر است با
۰/۰۰۸۰۰۰، ۸ تا یک هزارم است.
آنها به این شکل هستند که:

۰/۸　　۰/۰۸
۰/۰۸۰



این ۸ تکه از آن یک واحد است

۰/۰۰۸۰۰۰ IIIIIIII اینها ۸ تکه از آن یک واحد هستند

ـ۲

این بیشترین مقدار را دارد.

ـ۳

۸ بزرگترین است. زیرا هیچ صفری قبل یا بعد از آن نیست. هر چه تعداد صفرها بیشتر باشد، عدد کمتر است.

دانش آموزانشان استفاده نمایند.

یادگیری در مورد ارزشیابی های عملکرد

برای آن که ارزشیابی های عملکرد تأثیر مثبتی بر تدریس در کلاس داشته باشند، معلمین باید با طبیعت آزمون، محتوای آن و مهارتهای تفکری را که آزمون ارزشیابی می کند و این که چه پاسخی یک پاسخ خوب خوانده می شود، آشنا شوند. معلمین کواسار در کارگاههای آموزشی شرکت کردند و با همکارانشان در جهت افزایش تجربیات

شکل ۲

پاسخهای متعدد

یولاندا در مورد آنچه در کلاس ریاضی انجام داده است، با برادرش دیمن صحبت می کند.

یولاندا گفت: دیمن، من امروز در کلاس ریاضی از مکعب استفاده کردم. وقتی مکعبها را در گروههای ۲تایی قرار دادم، یک مکعب باقی ماند. وقتی مکعبها را در گروههای ۳تایی قرار دادم، یک مکعب باقی ماند. و وقتی مکعبها را در گروههای ۴ تایی قرار دادم، هنوز یک مکعب باقی ماند.

دیمن پرسید: چند تا مکعب داشتی؟

پاسخ یولاندا به سؤال برادرش چیست؟

عملیات خود را نشان دهید.

۱ -

ابتدا من یک مضرب مشترک از هر سه آنها را پیدا می کنم.

۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸

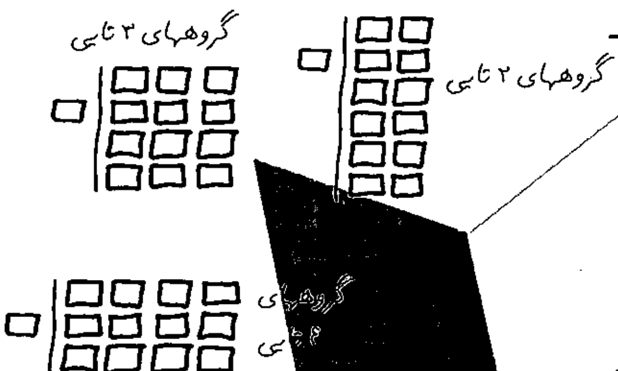
۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۲۱، ۲۴

۴، ۸، ۱۲، ۱۶، ۲۰، ۲۴، ۲۸، ۳۲

۱۲ اولین مضرب مشترک است. پس من به آن ۱ را اضافه نمودم.

پاسخ من ۱۳ است.

۲ -



۱۳

۳ -

$۲\overline{)۱۳}$ ۶ R1

$۳\overline{)۱۳}$ ۴ R1

$۴\overline{)۱۳}$ ۳ R1

۱۳

مختلف، بطور غیررسمی همکاری نمودند. آنها بر دو جنبهٔ مهم ارزشیابی عملکرد تمرکز نمودند:

- ارزشیابی های عملکرد به دانش آموزان فرصت می دهد تا چگونگی دست یابی به راه حلهایشان را نشان دهند و برای پاسخهایشان توضیحاتی را بیان کنند؛ بنابراین اطلاعات غنی در مورد تفکر و استدلال دانش آموزان فراهم می سازند.
- ارزشیابی های عملکرد از محتوای سطوح مختلف درک ریاضی پرده برمی دارند؛ بنابراین، ارزیابی پاسخهای دانش آموزان باید بر محتوای پاسخها تمرکز داشته باشد نه بر طول پاسخها.

فراهم نمودن پاسخها و توضیحات

در یک مدرسه، معلمین با همکاران آگاهی دهنده، یک آموزشگر ریاضی در دانشگاه نزدیک آنها، جهت بحث روی پاسخهای دانش آموزان در یک آزمون خاص بطور عمیق، کار کردند. در آزمون از دانش آموزان خواسته شده بود تا بزرگترین عدد اعشاری را از بین یک سری عدد پیدا کرده و پاسخشان را توضیح بدهند.

بسیاری از دانش آموزان این مدرسه نمرهٔ پائین کسب کردند. گرچه آنها توانسته بودند پاسخ صحیح را انتخاب کنند، ولی در بیان چگونگی به دست آوردن پاسخ خود ناتوان بودند. یکی از معلمین نمی توانست لزوم بیان توضیحات توسط دانش آموزان را درک کند. او چنین استدلال می کرد: «پاسخ مهمترین قسمت است. اگر آنها پاسخ را یافته اند، دیگر نیازی به توضیح نمی باشد.»

برای نشان دادن اهمیت توضیحات، همکار آگاهی دهنده نمونه های مختلفی را که دانش آموزان پاسخ درست را انتخاب کرده بودند ولی لزوماً نمی دانستند چرا، به معلمین نشان داد. (شکل ۱ را ملاحظه فرمائید.)

اولین پاسخ، ارزش مکانی اعشاری ها را به طور کامل و صحیح نشان داد و بیان کرد چرا ۰٫۸ بزرگترین است. پاسخ دوم شامل یک توضیح مبهم و ناقص است که هیچ نشانی از درک دانش آموز از اعشاری ها ندارد. پاسخ سوم، نشان دهندهٔ یک درک نادرست از ارزش و مکان صفرها در اعشاری ها می باشد.

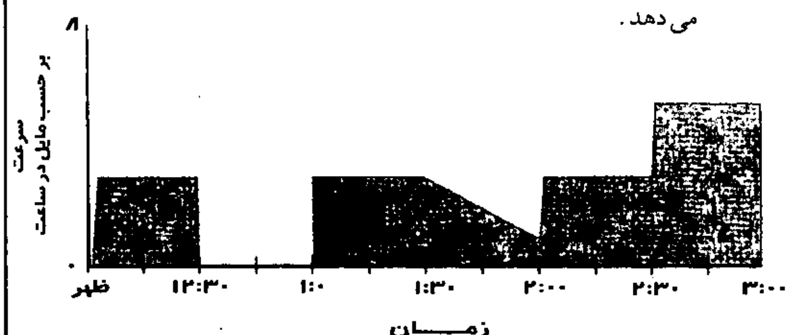
وقتی معلمین توضیحات را مقایسه کردند، آنها متوجه شدند که تا چه اندازه با داشتن

شکل ۳

تعبیر یک نمودار

از اطلاعات و نمودار زیر برای نوشتن یک داستان راجع به قدم زدن تُنی استفاده کنید.

در ظهر، تنی شروع به قدم زدن به طرف خانهٔ مادربزرگش کرد. او در ساعت ۳ بعدازظهر به خانهٔ مادربزرگش رسید. نمودار زیر سرعت تنی را برحسب مایل در ساعت در طول قدم زدن نشان می دهد.



داستانی راجع به قدم زدن تُنی بنویسید. در داستان خود بگوئید که تنی در زمانهای مختلف، احتمالاً مشغول چه کاری بوده است؟

تُنی خانهٔ مادربزرگش را در ساعت ۱۲ ظهر ترک کرد. او در ساعت ۱۲:۳۰ برای خوردن غذا در تاکوبل توقف کرد. از ساعت ۱۲:۳۰ تا ۱:۰۰ برای استراحت روی یک نیمکت در پارک توقف داشت. از ساعت ۱:۰۰ تا ۱:۳۰ به قدم زدن ادامه داد. سپس تُنی تصمیم گرفت از ساعت ۱:۳۰ تا ۲:۰۰ در خانهٔ دوستش-توقفی داشته باشد. از ۲:۰۰ تا ۲:۳۰ به قدم زدن خود ادامه داد. نهایتاً او به خانهٔ مادربزرگش رسید.

دانش آموزان این پاسخ را نقد می کنند:

چون در زمانی که او در خانهٔ دوستش بود او با سرعت ۳ مایل در ساعت حرکت می کرد. همچنین او نگفت که سرعت او در چه زمانی زیاد شد. او نگفت.

وقتی می نویسی به نمودار نگاه کن، جزئیات را نیز بیاور. به علاوه می توانی مراقب سرعت خودت باشی

دقت عمقی به توضیحات می توانند به سطح درک دانش آموزان پی ببرند. این بحث، یکی از اولین تعاملهای معنی داری بود که معلمین در مورد درک مفهومی دانش آموزان و حد یادگیری آنها در کلاس، داشتند.

جستجوی توضیحات با محتوای غنی

یک گروه معلمین در مدرسهٔ دیگری، پاسخهای دانش آموزان خود را در قبال آزمون QCAT مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که آنها باید تأکید بیشتری بر مهارتهای ارتباطاتی نوشتاری داشته باشند. تعدادی از دانش آموزان توضیحات طولانی برای برخی سؤالات آزمونها نوشتند که این توضیحات یا شامل کمی و یا هیچ از ریاضیات خواسته شده در آزمون بودند.

برای مثال، در یک مسئله از دانش آموزان خواسته شده بود تا نقش یک گویندهٔ رادیو را اجرا کنند که مشغول توضیح یک مسابقه است. ابتدا، آنها باید یک نمودار را که نشان دهندهٔ زمان و فواصل دویده شده توسط دو دونده می باشد بخوانند. آزمون چنان طراحی شده بود که عملکرد دانش آموزان را در تعبیر و بررسی همزمان، دو بُعد زمان و مسافت در نمودار، به صورت معنی دار، ارزشیابی کند. یک دانش آموز توصیف مشروحی نوشت؛ ولی این گزارش جنبهٔ ریاضی نمودار را در برنداشت. این دانش آموز نمودارهای خطی را طوری تعبیر کرده بود، گویی که آنها فقط «مسیرهای» دو دونده بودند.

مشخص بود که این دانش آموز چنان درگیر اعلام برنامهٔ رادیویی شده بود که ارزش زمان و مسافت را روی محورها در نمودار نادیده گرفت. یک معلم چنین یادداشت کرده بود: «پس مشکل این نیست که آنها نمی نویسند، بلکه مشکل آنچه می نویسند، است.» او سپس پیشنهاد کرد که معلمین این مدرسه باید در تعیین راههایی که دانش آموزان را وادار به نوشتن توضیحات ریاضی با کیفیت بالاتر می کنند، تشریک مساعی کنند.

استفاده از نتایج برای آموزش آگاهانه

همانطور که مثال بالا نشان داد، معلمین QUSAR راجع به طبیعت آزمون ارزشیابی عملکرد و نحوهٔ پاسخ دانش آموزان، آگاه تر شدند.

در یک موقعیت دیگر، گروهی از معلمین از نتایج QUSAR در تعیین نقاط ضعف و قوت برنامه درسی، استفاده نمودند. با بررسی درصد دانش آموزان با نمرات مختلف در هر آزمون، معلمین به ارزیابی تأثیر برنامهٔ تعلیمی خود پرداختند. برای مثال، در یک مورد، در یک سؤال الگوی دیداری، ۴۹ درصد دانش آموزان نمرهٔ بالایی (۳ و ۴) در پائیز کسب کردند. در صورتی که این درصد در بهار به ۱۶ درصد کاهش یافت. معلمین چنین توجیه کردند که این کاهش به این دلیل بود که قبل از پائیز، آنها در آموزش، بطور وسیعی بر الگوهای دیداری تمرکز داشتند، ولی در بقیهٔ سال، آنها هیچگونه آموزشی روی این موضوع نداشتند. در نتیجهٔ این بحث معلمین برنامهٔ خود را اصلاح کردند تا اطمینان حاصل کنند که در طول سال این موضوع مهم را مرور کنند.

در یک نمونه دیگر، یک کارگاه آموزشی پس از ساعت کار مدرسه برای معلمین، بر اهمیت الگوها و توابع در طول برنامهٔ درسی ریاضی مدارس متوسطه تمرکز داشت.

آزمون QCAI لازم می دانست که دانش آموزان شکل بعدی را در الگوی داده شده رسم کنند و سپس الگو را توضیح دهند. در امتحان معلمین مشاهده کردند که در حالی که دانش آموزان در کشیدن شکل بعدی بطور صحیح موفق بودند، در بیان توضیح الگو مشکل بسیاری داشتند. معلمین به اهمیت فراهم نمودن فرصتهای مناسب برای تحقیق و کشف الگوها و فرصتهایی برای دانش آموزان برای توضیح، توسعه و عمومیت دادن به الگوهای متنوع بیشتر و توابع با استفاده از جدولها، نمودارها و معادلات پی بردند. این فعالیتها به معلمین کمک کرد تا برنامهٔ درسی و آموزشی خود را اصلاح کرده و آنها را بهبود بخشند.

آشنایی دانش آموزان با ارزشیابی

برای آن که اطمینان پیدا کنیم که دانش آموزان فرصت عمل به بهترین وجه را دارند، بسیار مهم است که دانش آموزان را با طبیعت پایان ـ بازآزمون ارزشیابی، نوع محتوا و مهارتهای تفکر از قبیل آنهایی که در سؤالات ارزیابی می شوند و معیارهای استفاده شده در ارزیابی پاسخها آشنا کنیم. معلمین در مدارس QUASAR متناوباً از تمرینهای نمونهٔ QCAI برای رسیدن به این هدف استفاده می کردند.[۴]

یکی از روشهای استفاده از مواد آموزشی امتحانی، نشان دادن امکان وجود چند راهبرد در حل یک مسئله بود. برای مثال، پاسخهای دانش آموزان به مسئلهٔ شکل ۲ راهبردهای ممکن برای رسیدن به یک راه حل صحیح را نشان داد. دانش آموز اول، از مضارب مشترک استفاده کرد؛ دانش آموز بعدی از سه نمودار مجزا از مکعبها استفاده کرد؛ دانش آموز سوم سه تقسیم طولانی را انجام داد و نشان داد که باقیماندهٔ همه آنها ۱ است. وقتی دانش آموزان راهبردها و پاسخهای خود را با یکدیگر به اشتراک گذاشتند، به درک مفهومی عمیق تری از محتوا رسیدند و پی بردند که بیش از یک راه برای حل یک مسئله وجود دارد. معلمین همچنین دانش آموزان را با فعالیتهایی مشغول می کردند که جهت اطمینان بخشی به اینکه آنها با معیارهای تصحیح استفاده شده در ارزیابی عملکرد آنها آشنا شوند، طرح شده اند. یک فعالیت دو روزه در کلاس درس یکی از معلمین، تجربهٔ بسیار موفقی در یادگیری برای همه به همراه داشت. ابتدا، دانش آموزان در گروههای کوچک در گوشه های مختلف کلاس، برای حل مجموعه ای از سؤالات کار کردند. پس از آن که هر گروه روی آزمون کار کرد، معلم معیارهای تصحیح را برای سطوح مختلف

شرح داد. سپس همهٔ دانش آموزان کلاس، مجموعه ای از پاسخ های نمونه را که قبلاً با استفاده از این معیارها تصحیح شده بودند را مورد بررسی قرار دادند.

روز بعد، دانش آموزان برگه های خود را رد و بدل کردند و پاسخهای یکدیگر را تصحیح نمودند. معلم اهمیت بی طرف بودن و عدم تناقض در حین ارزیابی دانش آموزان را به بحث گذاشت. این بحث به دانش آموزان کمک کرد تا فعالیتها را جدّی گرفته و همچنین در مورد ملزومات تفکر ریاضی فکر کنند. دانش آموزان نمره های داده شده را ثبت نموده و دلیل منطقی برای اختصاص آن نمرات را نوشتند و راههای بهبود پاسخها را پیشنهاد نمودند. شکل ۳ سؤالی از QCAI را که در رابطه با تعبیر نمودار سرعت پسری که به خانهٔ مادربزرگش می رود است، نشان می دهد. گروه دانش آموزانی که این پاسخ را ارزیابی کردند در مقیاس ۴ـ۰ به این سؤال ۲ دادند. به عنوان استدلال برای اختصاص این نمره، اشاره کردند که کجا پاسخ نادرست بوده است. برای مثال داستان می گوید از ۱:۳۰ تا ۲:۰۰ تنی قدم نمی زد، بدون توجه به این که در نمودار، سرعت او را در این فاصله زمانی ثبت شده است. آنها نوشتند که پاسخ به نوعی ناقص است، زیرا داستان به افزایش سرعت تنی قبل از رسیدن به خانهٔ مادربزرگش اشاره نکرده است. همچنین شکل پیشنهاد دانش آموزان را برای بهبود بخشیدن به پاسخ نشان می دهد. معلمین دریافتند که فعالیتهای تعلیمی نه تنها دانش آموزان را برای گذراندن آزمون QCAI آماده می کنند؛ بلکه اشتغال آنها را در سؤالات چالشی ریاضی و بحث روی آنچه لازمهٔ یک پاسخ خوب ریاضی است، را افزایش می دهد.

استفادهٔ معلمین و دانش آموزان

تجربیات رشد حرفه ای و همکاری با همکاران در تمام موضوعات درسی، به معلمان در آگاه شدن بیشتر از طبیعت آزمون ارزشیابی عملکردی کمک می کنند. این تجربیات همچنین فراهم کنندهٔ درون بینی و بصیرت لازم برای معلمین در تقویت برنامه درسی و بهبود تکنیکهای تعلیمی لازم، می باشند.

به علاوه، معلمین می توانند از فعالیتهای متنوع چالشی و درگیرکننده برای معرفی آزمون ارزشیابی عملکرد به دانش آموزان و آشنا نمودن آنها با معیارهای استفاده شده در ارزیابی پاسخهایشان استفاده کنند. در نتیجه، دانش آموزان درک بهتری از آنچه مستلزم سطح بالاتری از تفکر و استدلال می باشد را رشد و توسعه می دهند.

زیرنویس ها:

۱ـ CAROL S. Parke متخصص تحقیقات کالج تعلیم و تربیت، دانشگاه پیتسبورگ می باشد.
School of Education, University of Pittsburgh, SCOI Forbes Quad, University of pittsburgh, Pittsburg, PA., 15260 e-mail: Csparke @ Vms. Cis pitt. edu.

Suzanne Lane دانشیار در روش شناسی تحقیق، در کالج تعلیم و تربیت دانشگاه پیتسبورگ می باشد.
School of Education, university of pittsburgh, SCOI Forbes Quad, university of Pittsburgh, pittsburgh, PA, 15260 e-mail: SI @ Vms. CIS. Pitt. edu.

۲ـ پروژهٔ QUASAR پروژهٔ دانشگاه پیتسبورگ است که توسط بنیاد فورد سرمایه گذاری شده و توسط ادوارد ا. سیلور در دانشگاه پیتسبورگ راهنمایی و هدایت شده است.

۳ـ ما مطالعاتی را که داده ها را از معلمین، همکاران آگاهی دهنده، و مدیران راجع به نتایج ارزشیابی عملکرد ریاضی (QCAI) جمع آوری کرده، فراهم می کنیم. (پارک، لین، گو ۱۹۹۵؛ لین و پارک ۱۹۹۶)

۴ـ ماگون (magone) و همکارانش (۱۹۹۴) و کای (Cai) و همکارانش (۱۹۹۶) را برای بحثهای بیشتر از تجزیه و تحلیل پاسخهای دانش آموزان به سؤالات، ملاحظه کنید.

۵ـ برای زیر نظر گرفتن پیشرفت دانش آموزان و برنامهٔ تعلیمی، QCAI در پائیز و بهار هر سال اجرا می شود. مواد آموزشی آزمونها، شامل سؤالات واقعی استفاده شده در سالهای قبل می باشند.

مراجع:

1- Learning from performanc Assessment In Math: Carol s. Parker and Suzann Lane,
EDUCATIONAL LEADERSHIP, Volume 4, No.4 DECEMBER 1996, JANUARY 1997

2- Cai, J., Magone, M.E., Wang, N., and Lane, S. (1996), "A Cognitive Analysis of QUSAR'S Mathematics Performance Assessment Tasks and Their Sensitivity to Measuring Changes in Middle School Students' Thingking and Reasoning." Research in Middle level Education.

3- Lane, S. (1993). "The Conseptual Framework for the Development of Mathematics Performance Assessment." Educational Measurement" Issues and Practice 12,2: 16-23

4- Lane, s. and C.S Parke (April 1996). "Consequences of a Mathematics Performance Assessment and the Relationship Between the consequences and student learning." paper presented at the annual meating of the National Council on Measurement in Education, NewYork.

5- Magone, M. E., J. Cai, E.A. Silver, and N. wang (1994). "Validating the cognitive Complexity and content Quality of a Mathematics performance Assessment." International Journal of Educational Research 12,3: 317-340

6- Parke, C.S., S. Lane, and F. Guo. (April 1995) "The Consequ-enses of a performance Assessment in the context of a Mathematics Instruction Reform project. "paper presented at the annual meeting of the National Council of Measurement in Education, San Francisco.

7- Silver, E.A., and M.K. Stein. (1996). "The QUASAR Project: "The Revolution of the Possible" In Mathematics Instructional Reform In Urban Middle Schools." Urban Education 30, 4: 476-522.

موقعیت کنونی و دورنمای آینده برای آموزش آمار

کنفرانس بین المللی آمار

نویسنده: کارمن باتانرو، دانشگاه گراناداسپانیا مترجم: زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه:

در چهارمین کنفرانس بین المللی آمار ایران، بخشهای متعددی به طور موازی تشکیل شدند که یکی از این بخشها، آموزش آمار[1] بود و چند تن از آماردانهای ایرانی به ارائهٔ سخنرانیهائی در این بخش پرداختند. همچنین، میزگردی در مورد بحث و بررسی ریز مواد پیشنهادی برای درس آمار و مدلسازی با حضور آقای دکتر پاشا و خانم بخشعلی‌زاده از دفتر برنامه‌ریزی و تألیف برگزار گردید. از جمله فعالیتهای این بخش، سخنرانی‌های پروفسور کارمن باتانرو[2] از دانشگاه گرانادای اسپانیا و پروفسور کاتلین‌هارت[3] از دانشگاه ناتینگهام و برگزاری دو کارگاه آموزش آمار و احتمال توسط آنها بود. البته شایان ذکر است که به‌جز کارشناسان گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی، دو تن از کارشناسان دفتر آموزشهای نظری معاونت نظام‌جدید آموزش متوسطه و تعداد انگشت‌شماری از دبیران گرامی ریاضی، کس دیگری از وزارت آموزش و پرورش در این کارگاهها شرکت نکردند و این در حالی بود که برگه‌های تقاضای ثبت‌نام و اطلاعیه‌های چهارمین کنفرانس آمار در سطح معاونتها و دفاتر کل وزارت آموزش و پرورش و ادارهٔ کل استان تهران توزیع شده بود. در این شماره، خلاصه‌ای از سخنرانی پروفسور باتانرو به‌اطلاع خوانندگان عزیز می‌رسد و سعی خواهد شد تا در شماره‌های آینده، جزئیات بیشتری از بخش آموزش آمار و احتمال شامل سخنرانی پروفسور هارت نیز تقدیم‌حضور خوانندگان گرامی گردد. لازم به‌ذکر است که پروفسور باتانرو معاون «اتحادیهٔ بین‌المللی آموزش آمار» (IASE)[4] است و ایشان قبل از ایراد سخنرانی، پیام رئیس این اتحادیه را خطاب به‌جناب آقای دکتر نوربلوچی دبیر چهارمین کنفرانس بین‌المللی آمار در دانشگاه شهید بهشتی قرائت کرد. طبق دعوت کمیتهٔ علمی سومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، پروفسور باتانرو سخنرانی خود را مجدداً در این کنفرانس تکرار کردند و به‌دلیل شرکت جمع کثیری از معلمان گرامی ریاضی، این سخنرانی با استقبال زیادی مواجه شد و پس‌از سخنرانی، یک جلسهٔ پرسش و پاسخ نیز با حضور جمعی از شرکت‌کنندگان برگزار گردید. در زیر، خلاصه‌ای از سخنرانی پروفسور باتانرو به‌اطلاع می‌رسد. لازم به‌ذکر است که هرگاه قسمتی از اصل مقاله ترجمه نشده است، به‌جای آن ... گذاشته شده است تا علاقه‌مندان برای مراجعه به‌اصل مقاله دچار مشکل نشوند. حذفیات عمدتاً اسامی اماکن و مؤسسات درگیر آموزش آمار بودند که چند بار تکرار شده بود و حذف آنها به‌کلیّت موضوع خدشه‌ای وارد نمی‌کرد.

موقعیت کنونی و دورنمای آینده برای آموزش آمار

اگرچه بیست سال قبل تنها چند پژوهشگر به مسألهٔ تدریس و یادگیری آمار علاقه مند بودند، امروز مشاهده می کنیم که افزایش قابل ملاحظه ای در انتشارات، طراحی های برنامه های درسی و بررسیهای مرتبط به این حوزه رخ داده است. در این سخنرانی، ما شرایطی را که باعث ظهور آموزش آمار شد خلاصه کرده و به تحلیل بعضی از گرایشات قابل پیش بینی آینده می پردازیم.

بعد از مقدمه، نکات زیر به بحث گذشته خواهند شد:

- **آموزش آمار در درون آمار**
- **دیدگاههای روان شناسی**
- **آمار در درون آموزش ریاضی**
- **به کجا می رویم؟ و چند بازتاب نهائی**

معرفی آمار در سطح مدرسه

در حال حاضر، حضور آمار در برنامه هـای درسـی ریـاضـی بـرای دوره های ابتدائی و متوسطه و تخصصّهای مختلف دانشگاهی گسترده شده است. دلایل تدریس آمار در سطوح مختلف در طی ۲۰ سال گذشته مرتب بر جسته شده اند (هولمز، ۱۹۸۰[۸]؛ هاوکینز و همکاران، ۱۹۹۱[۶]؛ ورجونز، ۱۹۹۵[۱۷]). این دلایل شامل مفید بودن آمار برای زندگی روزانه، نقش ابزاری آمار در حوزه های دیگر، نیاز به دانش پایهٔ آمار در بسیاری حرفه های دیگر و نقش آن در توسعهٔ استدلال کردن انتقادی است.

تمام این دلایل باعث شده است تا معلمان ریاضی و پژوهشگران آموزش ریاضی، علاقمند به تحقیق و توسعهٔ برنامهٔ درسی در حوزهٔ مشخصّ آمار شوند. مثالهای مختلف از کارهایی که در این زمینه انجام شده است عبارتند از: پروژه های برنامهٔ درسی توسط پروژهٔ شورای مدارس در مورد آموزش آمار[۵] در بریتانیا (۱۹۵۷ تا ۱۹۸۱)، پروژهٔ سوادآموزی کمّی[۶] در ایالات متحدّه آمریکا(۱۹۸۵ تا ۱۹۹۸) و کار گروه تحقیق در آموزش آمار، دانشکدهٔ علوم ریاضی در دانشگاه صنعتی اصفهان (رجالی، ۱۹۹۷[۱۳]). تولید مواد آموزشی، نرم افزارهای آموزشی، کارهای پژوهشی، مجلات و برگزاری

در دیدگاه جدید، انسان یک ریاضیدان شهودی در نظر گرفته می‌شود که با تصمیمهای چندگانه و پی‌آمدهای غیرقطعی مواجه می‌شود، انسانی که به طور ناخودآگاه، از رهیافتهای ناآگاهانه برای کاهش پیچیدگی استفاده می‌کند و اغلب به‌نتایج غلط یا اعمال نامناسب باپی‌آمدهای جدّی می‌رسد. این دیدگاه جدید به‌همراه علاقه به‌توسعهٔ تطوّری ایده‌های تصادفی ازکودکی تا بلوغ، باعث پیدایش تحقیقات بیشمار روان شناسی در رابطه باچگونگی استدلال کردنِ تصادفی کودکان و بزرگسالان شده است (شانِسی، ۱۹۹۲[۱۶]).

گردهم‌آیی ها و کنفرانسها دربارهٔ تدریس آمار به طور اعجاب‌آوری در چند سال گذشته رشد کرده اند .

همکاری‌های انجام شده در آموزش آمار

آموزش آمار فقط یک زیر مجموعه از آموزش ریاضی نیست . یکی از دلایل توجه زیاد به آموزش آمار ممکن است مشکل بودن آمار نسبت به سایر شاخه های ریاضی باشد که بازتاب این سختی را در سؤالهای فلسفی ، اجتماعی ، اخلاقی و رویّه ای در رابطه با کاربرد آمار می توان دید . ... همچنین ، همکاری ها در حوزهٔ ما نه تنها توسط معلمان ریاضی بلکه توسط آماردانها ، روانشناسان و معلمان سایر رشته ها که از آمار به عنوان ابزار استفاده می کنند نیز انجام می شود . بُعد سیاسی استفاده و سوء استفادهٔ ممکن از آمار و اطلاعات آماری ، فاکتور دیگری است که به ویژه بودنِ این حوزه ـ آموزش آمار ـ کمک می کند .

علاقهٔ آماردانها به سؤالهای آموزشی و آموزش حرفه ای ها و کاربران آمار دارای یک تاریخ طولانی است و این نکته ، از شروع تأسیس کمیتهٔ آموزش مؤسسهٔ بین المللی آمار (ISI)[۷] در سال ۱۹۴۹ مشهود است . این کمیته تا سال ۱۹۹۱ وجود داشت و پس از آن ، تبدیل به اتحادیهٔ بین المللی برای آموزش آمار (IASE)[۴] شد که اولین جامعهٔ حرفه ای بین المللی تشکیل شده از کسانی است که به سؤالهای آموزشی در حوزهٔ آمار علاقه مند بودند . ازطرف دیگر ، یک تغییر دیدگاه در روانشناسی به وجود آمده است که در آن ، از مُدل استدلال مستدل و عقلانی ؛ منطقی و تعیّنی ، به یک دیدگاه جدید نظر دارد .

در دیدگاه جدید ، انسان یک ریاضیدان شهودی در نظر گرفته می شود . که با تصمیمهای چند گانه و پی آمدهای غیرقطعی مواجه می شود ، انسانی که به طور ناخودآگاه ، از رهیافتهای ناآگاهانه برای کاهش پیچیدگی استفاده می کند و اغلب به نتایج غلط یا اعمال نامناسب با پی آمدهای جدّی می رسد . این دیدگاه جدید به همراه علاقه به توسعهٔ تطوّری ایده های تصادفی از کودکی تا بلوغ ، باعث پیدایش تحقیقات بیشمار روان شناسی در رابطه با چگونگی استدلال کردنِ تصادفی کودکان و بزرگسالان شده است (شانسی ، ۱۹۹۲[۱۶]) .

به دلیل این همکاری ها و مبادلهٔ دو طرفهٔ این منابع پژوهش و همچنین ، به دلیل همکاری بین متخصصان در حوزه های روانشناسی ، ریاضی و آمار و حوزه های دیگر مانند پداگوژی ، تاریخ و جامعه شناسی ، اکنون آموزش آمار به صورت یک رشتهٔ آکادمیک تخصصّی درآمده است . در زیر ، نگاهی اجمالی به دلایل تقویت آموزش آمار می پردازیم[۸] :

■ دیدگاههای روان‌شناسی

پژوهش دربارهٔ استدلال تصادفی

آنچنان تأثیر پژوهشهای انجام شده دربارهٔ استدلال تصادفی بر روانشناسی قوی است که این **انقلاب احتمالی**[۹] با تأثیر **مطالعات شناختی**[۱۰] مقایسه شده است . تغییر دیدگاه در تحقیقات راجع به استدلال کردن انسان از مُدلی ناشی شده است که در آن ، به جای آن که استدلال کردنِ انسان را براساس منطق صوری بدانند ، او را تصمیم گیرنده می داند . تصمیم گیرنده ای که با توجه به یک نظام احتمالی پیچیده رفتار می کند و از رهیافتهائی[۱۱] که از روابط تجربی خود با پدیده های روزانه حاصل کرده است استفاده می کند . این رهیافتها یا استراتژی های ناخودآگاه ، با پایمال کردن بخشی از اطلاعات مربوط ، پیچیدگی مسائل تصادفی را کاهش می دهد . به هر حال ، این استراتژی های ناخودآگاه ، باعث یکسویه نگری و تعصّب[۱۲] در نتیجه گیری های حاصل می شود و حتی این یکسویه نگری ها در مورد آنهایی که با آموزشهای بالای آماری نیز در زمانی که خارج از قالبهای آکادمیک کار می کنند ، دیده می شود .... برای مثال ، یکی از این باورهای ناخودآگاه آنچنان گسترده است که در پرتاب سکّه ، اگر چندین بار سکه به «رو» بیفتد! بسیار نادر است که مردم برای آمدن «پشت» شرط ببندند . کارهای کسانی مانند کاهنمان و همکاران[۱۰](۱۹۸۲) در بین سایر موارد ، به استدلال همبستگی ، استنباط ، احتمال شرطی و قانون بیزو به مشخص کردن این یکسویه نگری ها و تغییر مدل های ذهنی[۱۳] در مطالعات روانشناسی کمک کرده است ....

مفید بودن آمار برای زندگی روزانه، نقش ابزاری آمار در حوزه‌های دیگر، نیاز به‌دانش پایهٔ آمار در بسیاری حرفه‌های دیگر و نقش آن در توسعهٔ استدلال کردن انتقادی از جمله دلایل تدریس آمار در آموزش عمومی است.

تحقیقات راجع به توسعهٔ شناختی کودکان

به عقیدهٔ پیاژه و اینهلدر[۱۱] (۱۹۵۱)،

❑ یادگیری توسط تجربه و دانش قبلی تعیین می شود ... .

❑ تضادهای شناختی که توسط ایده های جدید تولید می شوند، به وسیلهٔ جذب (شبیه سازی[۱۴]) و هضم (جایگزینی[۱۵]) حل می شوند.

❑ یادگیری از طریق مجموعه ای از مراحل تولید می شود

❑ مفاهیم تصادفی بودن، احتمال، استدلال ترکیباتی، تناوب نسبی، توزیع و همگرائی، از نظر پیاژه نیازمند «استدلال نسبتی[۱۶]» است که نمادی از مرحله تفکر صوری است و در نتیجه، برای آموزش این مفاهیم باید تا نوجوانی صبر کرد زیرا کودک در این مرحله می تواند احتمال را کاملاً بفهمد ... .

به گفتهٔ فیشباین[۴] (۱۹۷۵)، ظهور شهود جزئی[۱۷] و تأثیر تدریس، می تواند سن درک احتمال را جلو بیندازد. بر اثر این تفکر، «گروه بحث راجع به مباحث تصادفی[۱۸]» در گروه بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی[۱۹] در سال ۱۹۹۴ [و توسط پروفسور هارت] تشکیل شد و در سال ۱۹۹۷، این گروه بحثی تبدیل به «گروه کاری»[۲۰] شد. [این گروه در سال ۱۹۹۸، دو سؤال تحقیقی زیر را مطرح کرد:

❑ جدائی آمار از ریاضی و حرکت آن به سمت دانش داده ها؛

❑ افزایش تقاضا برای آموزش آمار در تمام سطوح بنا به دلایل بالا.

در نتیجه، نیاز به آموزش معلمان در رابطه با آمار به طور فزاینده ای احساس می شود.

چرا آموزش آمار اینقدر مشکل است

دلایل زیادی وجود دارند که نشان می دهند آموزش آمار بسیار مشکل است[۱]، [۲] و [۳] زیرا:

❑ برخلاف ماهیت آمار و احتمال، فرهنگِ کلاسهای سنتّی تدریس ریاضی اغلب تعیّنی[۲۲] است.

❑ تفسیر و تبیین مفاهیم اولیه مانند تصادفی بودن، احتمال، استقلال، آزمون فرضیه و همبستگی مشکل است و حتی در بین متخصصّان، مسائل فلسفی زیادی در رابطه با تفسیر و کاربرّد این مفاهیم وجود دارد.

❑ استفاده از دست ورزی ها برای بررسی حدسیّه های کودکان همیشه امکان پذیر نیست زیرا مفاهیم تصادفی بازگشت پذیر نیستند.

❑ مسائل آماری معمولاً باز ـ پاسخ هستند و حتی تکرار آزمایش، اجازهٔ کنترل نتیجه را نمی دهد. در صورتی که مثلاً در عملیات

❂ اگر تنها از دانش آموزان بخواهیم تا پیش بینی کنند و بعد آنها را با داده های تجربی مقایسه کنند، برای تغییر تصوّر آنها کافی نیست، تدریس موثر باید بر مبنای دانش از قبل تشکیل شدهٔ دانش آموزان باشد.

❂ رابطهٔ صریحی بین دسترسی بهتر به اطلاعات کارآی آماری و توسعهٔ اقتصادی وجود دارد، همچنان که این رابطه بین آموزش بهتر آماری و کارآئی بیشتر در تولید و تفسیر اطلاعات آماری وجود دارد.

۱ـ تأثیر استدلال نسبتی و ترکیباتی در یادگیری احتمالی چیست؟

۲ـ تأثیر تفاوتهای فرهنگی بر تدریس و یادگیری احتمال چیست؟]

راجع به اهمیّت آموزش آمار و احتمال، همین بس که در بیست و دومین کنفرانس بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی، یکی از سه موضوعهای پژوهشی کنفرانس و یکی از سخنرانیهای عمومی به کار با داده ها اختصاص یافته بود.

ویژگی آمار در درون آموزش ریاضی[۲۱]

❑ تجربهٔ تغییرات پیشروئی در آمار، هم در محتوای آن و هم در کاربران آن؛

❑ موضوعیت داشتن دانش آماری در جامعهٔ هدایت شده با داده ها؛

حسابی، این کار امکان پذیر است.

❑ معلمان معمولاً دچار کمبود آموزش در زمینهٔ تدریس آمار هستند. مثلاً در اسپانیا، معلمان فارغ التحصیل رشتهٔ ریاضی برای تدریس آمار در دورهٔ متوسطه، آموزش ویژه نمی بینند و در دورهٔ ابتدائی، وضع از این هم بدتر است. برنامه های درسی و کتاب های درسی هم که برای معلمان دوره های ابتدائی و متوسطه تهیّه شده اند حامی [تدریس بهتر آمار] نیستند زیرا اغلب این [برنامه ها و کتابها] گمراه کننده[۲۳] هستند[۱۵].

❑ آمار یک موضوع میان رشته ای است. نه تنها خود آمار متنوّع است بلکه آمار با تعیین حدود سنتّی موضوعهای درسی در بیشتر مدارس و دانشگاهها نیز تضاد دارد. این موضوع ممکن است باعث




تضادهائی در کلاس درس ریاضی شود زیرا ممکن است تعریفها یا خواص مفاهیم با آنچه که در آن کلاس ها گفته شده است انطباق نداشته باشد.

برای غلبه بر مشکلات تدریس آمار، تلاشهای زیادی صورت گرفته است. برای مثال،

- برنامه های درسی جدید ریاضی برای دوره های ابتدائی و متوسطه در تمام دنیا معرّفی شده اند.
- باورهای موجود راجع به چگونگی تدریس احتمال تغییر کرده اند.
- احتمال در پایه های پایین تر معرفی می شود.
- بر یادگیری فعّال به گونه ای که دانش آموزان آزمایشها را با ابزار تصادفی انجام دهند تأکید شده است. این روش ممکن است دانش آموزان را با بدفهمی های خود دربارهٔ پیشامدهای تصادفی روبه رو کند.

تمام این مسائل مربوط به تدریس آمار و احتمال نشان می دهد که هنوز، ضرورت فراوان برای انجام پژوهشهای بنیادی در این زمینه احساس می شود. اگر تنها از دانش آموزان بخواهیم تا پیش بینی کنند و بعد آنها را با داده های تجربی مقایسه کنند، برای تغییر تصوّر آنها کافی نیست. تدریس مؤثر باید بر مبنای دانش از قبل تشکیل شدهٔ دانش آموزان باشد.

تغییر دیدگاه در تحقیقات راجع به استدلال کردن انسان از مُدلی ناشی شده است که در آن به‌جای آن که استدلال کردن انسان را براساس منطق صوری بداند، او را تصمیم‌گیرنده می‌داند. تصمیم‌گیرنده‌ای که باتوجه به یک نظام احتمالی پیچیده رفتار می‌کند و از رهیافتهائی که از روابط تجربی خود باپدیده‌های روزانه حاصل کرده است استفاده می‌کند.

آموزش آمار: به‌کجا می‌رویم؟

روندی که در این مقاله به آن اشاره شد، نشان می دهد که در آیندهٔ نزدیک، رشد وسیعی در علاقه نسبت به آموزش آمار به وجود می آید. از یک طرف، ممکن است آموزش آمار آنقدر موضوع محدودی باشد که نتوان آن را به عنوان یک دیسیپلین مستقل معرفی کرد. از طرف دیگر، وقتی ما محتوای این حوزه را تجزیه و تحلیل می کنیم، می بینیم که بسیار پیچیده و گوناگون است. دلالتهای آموزش آمار برای تدریس همه چیز را از آموزش ابتدائی تا دانشگاه، حرفه ای ها، معلمان، تکنسین ها و آماردانهای رسمی پوشش می دهد. همچنین، مسائل مختلف زیادی وجود دارند که نیازمند مطالعه هستند. این مسائل شامل پژوهش، توسعهٔ برنامهٔ درسی، مسائل یادگیری، راههای استدلال، ارزیابی، طرز تلقّی ها، استفادهٔ مناسب از آمار، روابط با سایر حوزه ها، مواد و منابع شامل نرم افزارهای آموزشی، تاریخ، فلسفه و غیره می باشند.

امکانات جدید[۲۳]

تغییرات سریع تکنولوژیک از جمله شبکه های موجود در اینترنت، کتابهای الکترونیکی و گروههای بحث شبکه ای و نرم افزارهای متعدد این سؤال را مطرح می کند که آموزش آمار به کجا می رود و چه نوع تدریسی در آینده رخ خواهد داد (هاوکینز[۷]، ۱۹۹۷). همچنین، برای دانش آموزان امکان به دست آوردن انواع داده ها برای انجام پژوهش در تقریباً هر موضوعی و حتی با منابع بسیار محدود، وجود دارد. معلمان می توانند این داده ها را از طریق اینترنت بگیرند و آنها را به ماشین حسابهای گرافیک [که در اختیار بعضی] دانش آموزان است معرفی کنند. بدین طریق، دانش آموزان می توانند داده ها را در منزل تجزیه و تحلیل کنند یا آنها را به سایر کامپیوترها یا ماشین حسابها صادر کنند. همچنین، دانش آموزان می توانند داده های مختلف را با هم ترکیب کنند یا مجموعه داده های خود را به سایر دانش آموزان در کشور خود یا سایر کشورها بفرستند.

در حال حاضر، فهرست های بحث معلمان یا دانش آموزان و تدریس از راه دور در زمانی که ارتباطات مستقیم با معلم مشکل است، در حال آزمایش کردن در بعضی مدارس و دانشگاهها است. برای مثال، یکی از این تجربه ها آزمایشی است که در استرالیا برای آموزش معلمان از راه دور انجام شده است (واتسون، ۱۹۹۸). روند تغییرات فن آورانه [تکنولوژیکی] نشان می دهد که راههای جدیدی، برای تدریس و یادگیری در آیندهٔ نزدیک درحال توسعه است.

بازتاب نهائی

در حال حاضر، مسألهٔ اصلی مشکل دسترسی کشورهای درحال توسعه به این منابع و به کارهای پژوهشی است. رابطهٔ صریحی بین

دسترسی بهتر به اطلاعات کارآی آماری و توسعهٔ اقتصادی وجود دارد، همچنان که این رابطه بین آموزش بهتر آماری و کارآئی بیشتر در تولید و تفسیر اطلاعات آماری نیز وجود دارد.

گروههای فعال آموزشگران آمار در یک کشور به بهبود و پیشرفت آمادگی برای شهروندان آن کشور کمک می کند. در نتیجه، همبستگی و تعهّد آموزشگران آمار و مشارکت آنها در اتحادیه های بین المللی مانند «اتحادیهٔ بین المللی آموزش آمار» (IASE) برای گسترش آموزش آمار و تشکیل ارتباطات مشارکتی برای این که این واقعیت برای اکثریت و نه فقط برای یک اقلیت بهره مند اتفاق بیفتد لازم است.

زیرنویس‌ها:

1. Statistical Education
2. Carmen Batanero
3. Kath. Hart
4. International Association for Statistical Education
5. Schools Council Project on Statistical Education in the United Kingdom
6. Quantitative Literacy Project
7. International Institute of Statistics (ISI) Education Committee

۸ـ در این قسمت، بخش «آموزش آمار در درون آمار» چون فقط جنبهٔ اطلاع رسانی در زمینهٔ مؤسساتِ درگیر آموزش آمار را داشت، حذف شده است.

9. Probabilistic revolution
10. Cognitive Studies
11. Heuristics

۱۲ـ در فارسی برای Bias معادل تورش یا اریب را آورده اند با این حال، به نظر می رسد معادل یکسویه نگری یا تعصّب برای این بحث مناسب تر است. (م)

13. Paradigms
14. Assimilation
15. Accomodation
16. Proportional reasoning
17. Partial intuition
18. Discussion Group on Stochasties
19. PME 18
20. Working Group on Stochastics

۲۱ـ این قسمت از اصل مقاله تا «آموزش آمار: به کجا می رویم؟» براساس اولویتی که پروفسور باتانرو خود در کنفرانس تعیین کردند، خلاصه شده است.

22. Deterministics
23. Misleading

۲۴ـ این قسمت مقاله هم تابه آخر، به اطلاع رسانی در زمینهٔ فعالیّتهای مختلف دربارهٔ آموزش آمار از جمله گروههای کاری و تحقیقی در دانشگاههای مختلف دنیا، مجله های علمی موجود در این مورد و نشستها و کنفرانسهای بین المللی در این زمینه پرداخته است که در ترجمه، این قسمت حذف شد اما علاقه مندان می توانند برای دریافت اطلاعات با دفتر مجله تماس بگیرند.

مراجع:

[1] Batanero, C. (1997). Should we get rid of statistical testing? The significance tests Controversy. *ISI Newsletter*, 21(2), 19.

[2] Batanero, C. (1998). The International Study Group for, Research on Learning Probability and Statistics, *ISI Newsletter*, 22(1), 21-22.

[3] Batanero, C., Godino, J.D., Vallecillos, A., Green, D.R., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.

[4] Fischbein, E. (1975). *The intuive Sources of probabilistics thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel.

[5] Galmacci, G. (1996). Statistics in the era of networking. *Annual Report on International Statistics*, 3,

[6] Hawkins, A., Jolliffe, F., & Glickman. L. (1991). *Teaching statistical concepts* London: Longman.

[7]Hawkins, A. (1997). How far have we come? Do we know where we are going? En E. M. Tiit (Ed.), *Computational- statistics & statistical education* (pp. 100 -122).
Tartu: International Association for Statistical Education e International Association for Statistical Computing.

[8] Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics* 11-16. Sloug: Foulsham Educational.

[9] Joliffe, F. (1998). What is research in statistical education? In L. Pereira-Mendoza et al. (Eds.), *Proceedings of the V International Conference on Teaching Statistics* (pp. 801-806). Voorburg: The International Statistical Institute.

[10] Kahnemann, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgments under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press.

[11] Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La génese de L'idée de hasard chez L'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

[12] Rejali, A. (1997). Teaching probability and statistics in school, *Andishe -ye Amari*, the magazine of the Iranian Statistical Society, 2(2), 10-18, in Farsi with English summary.

[13] Research Group in Statistical Education, School of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Iran (1998). Statistics and probability in Iranian School curriculum. *ISI* Newsletter, 22(1), 20-21.

[14] Truran, J. (1998). The stochastics working group at conferences on the Psychology of Mathematics Education. *Teaching Statistics*, 20(1), central pages (IASE matters).

[15] Turuan, J. M., & Truran, K. M. (1994). *Chance. & data and the profiles in secondary schools. In C. Beesy, & D. Rasmussen (eds), Mathematics without Limits*, pp. 132-134. Melbourne, Victoria: Mathematical Association of Victoria.

[16] Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and dircetions. In D. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics education*. MacMillan.

[17] Vere -Jones, D. (1995). The coming of age of statistical education. *International Statistical Review*, 63(1), 3-23.

مباحثی پیرامون پیوستگی و مشتق

قدیر مهاجری مینایی
مؤسسهٔ ریاضیات دکتر غلامحسین مصاحب

بخش «۱»

■ **موضوع:** فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ متناهی از اعداد حقیقی باشد می‌خواهیم توابعی حقیقی را معرفی کنیم که مجموعه نقاط پیوستگی آنها برابر مجموعه A باشد و همچنین توابعی را بسازیم که مجموعه نقاطی که f در آن نقاط مشتق‌پذیر است برابر مجموعه A باشد.

(۱-۰) تعریف: فرض کنیم $I\subseteq \mathbb{R}$ یک بازه و $f:I\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد؛ گوییم حد f در نقطه $x_0\in I$ برابر عدد حقیقی L است هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ وجود داشته باشد $\delta>0$ به طوری که به ازای هر x در I

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \qquad (*)$$

(۱-۱) قضیه: تابع $f:I\to\mathbb{R}$ در $x_0\in I$ دارای حد L است. اگر و فقط اگر برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ از I که $x_n\neq x_0$ و $x_n\to x_0$ داشته باشیم $f(x_n)\to L$.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم حد f در $x_0\in I$ برابر $L\in\mathbb{R}$ باشد یعنی $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ فرض می‌کنیم $x_n\neq x_0$ و $x_n\to x_0$ و $\varepsilon>0$ مفروض باشد. در نتیجه $\delta>0$ ای وجود دارد که برای هر $x\in I$،

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

چون $x_n\to x_0$ بنابراین وجود دارد عدد طبیعی مانند n_0 که برای هر $n\geq n_0$، $0<|x_n-x_0|<\delta$.

بنابراین برای هر $n\geq n_0$ از رابطه(*) داریم:

$|f(x_n)-L|<\varepsilon$ یعنی $f(x_n)\to L$.

برعکس: فرض می‌کنیم برای هر دنباله $\{x_n\}$ از I که $x_n\to x_0$ و $x_n\neq x_0$ داشته باشیم $f(x_n)\to L$. نشان می‌دهیم $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.
(اثبات از طریق برهان خلف).

فرض می‌کنیم چنین نباشد. در نتیجه وجود دارد $\varepsilon>0$ به طوری که برای هر $\delta>0$ (از جمله برای هر $\delta=\frac{1}{n}$) یک $x_n\neq x_0$ موجود است که $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$ ولی $|f(x_n)-L|\geq\frac{\varepsilon}{2}$. به وضوح پیداست که $x_n\to x_0$ و $x_n\neq x_0$ ولی $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon$ و این نشان می‌دهد که $f(x_n)\not\to L$ و این با فرض مغایرت دارد پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

■ **(۱-۲) تعریف:** گوییم تابع $f:I\to\mathbb{R}$ در $x_0\in I$ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

❑ **(۱-۳) نتیجه:** تابع $f:I\to\mathbb{R}$ در $x_0\in I$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ از I، که $x_n\to x_0$ داشته باشیم $f(x_n)\to f(x_0)$.

❑ **(۱-۴) لم:** هر بازه I از اعداد حقیقی دارای تعداد نامتناهی اعداد اصم و همچنین دارای تعداد نامتناهی اعداد گویاست[۱ و نتایج ۹.۱ و ۱۰.۱].

❑ **(۱-۵) نتیجه:** برای هر عدد حقیقی $x_0\in I$ دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$ و دنباله‌ای از اعداد اصم مانند $\{y_n\}$ $(y_n\neq x_0)$ موجود است که $x_n\to x_0$ ، $y_n\to x_0$.

(۱-۶) قضیه اصلی: فرض کنید f و g دو تابع پیوسته روی $I\subseteq\mathbb{R}$ باشند(یعنی f و g در هر نقطه $x_0\in I$ پیوسته باشند) و همچنین f و g متمایز باشند یعنی $x_0\in I$ موجود باشد به طوری که

$f(x_\circ) \neq g(x_\circ)$. اگر تابع $h: I \to IR$ با ضابطهٔ

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in Q \quad (\text{گویا}) \\ g(x) & x \in Q^c \quad (\text{گنگ}) \end{cases}$$

تعریف کنید در آن صورت h در $x_\circ \in I$ پیوسته است اگر و فقط اگر $f(x_\circ) = g(x_\circ)$.

اثبات: ابتدا فرض می کنیم h در $x_\circ \in I$ پیوسته است . فرض می کنیم $\{x_n\}$ دنباله ای از اعداد گویا در I و $\{y_n\}$ دنباله ای از اعداد اصم در I که $x_n \to x_\circ$, $y_n \to x_\circ$.

چون h در $x_\circ$ پیوسته است داریم

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = h(x_\circ)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} h(y_n) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = h(x_\circ) .$$

و چون f و g در $x_\circ$ پیوسته هستند پس

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\circ) \text{ و } \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(x_\circ) .$$

بنابراین از روابط فوق و اینکه حد هر دنباله منحصربه فرد است داریم $f(x_\circ) = g(x_\circ)$.

برعکس: فرض می کنیم $f(x_\circ) = g(x_\circ)$. نشان می دهیم h در $x_\circ$ پیوسته است . چون f و g روی I پیوسته هستند لذا $f(x_n) \to f(x_\circ)$ و $g(x_n) \to g(x_\circ)$.

فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ مفروض باشد . چون $f(x_\circ) = g(x_\circ)$ و همگرایی دو دنباله فوق وجود دارد n_1 در IN که به ازای هر n که

$$n \geq n_1 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_\circ)| < \varepsilon$$

و وجود دارد n_2 در IN که به ازای هر n که

$$n \geq n_2 \Rightarrow |g(x_n) - f(x_\circ)| < \varepsilon$$

قرار می دهیم $n_\circ = \max\{n_1, n_2\}$ در نتیجه برای هر $n \geq n_\circ$

$$|h(x_n) - f(x_\circ)| < \varepsilon$$

بنابراین $h(x_n) \to f(x_\circ)$ و چون $f(x_\circ) = g(x_\circ)$ پس با توجه به تعریف h ، $h(x_n) \to h(x_\circ)$.

(۱-۷) نتیجه: مجموعهٔ نقاط پیوستگی تابع h در قضیهٔ اصلی(۶ـ۱) برابر مجموعهٔ جواب معادله $f(x) = g(x)$ در I است .

(۱-۸) نتیجه: اگر $A \subseteq IR$ مجموعه ای متناهی به صورت $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ باشد آن گاه تابعی وجود دارد که مجموعه نقاط پیوستگی آن ، مجموعه A باشد .

حل: تابع $f: I \to IR$ را با ضابطه $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$ و $g: I \to IR$ را با ضابطه $g(x) = 0$ تعریف می کنیم که در آن I به گونه ای است که $A \subseteq I$. واضح است که f و g در مفروضات قضیه اصلی صدق می کنند و $f(x) = g(x)$ در I اگر و فقط اگر $x \in A$. پس بنابر نتیجهٔ (۷ـ۱) مجموعه نقاط پیوستگی تابع $h: I \to IR$ با ضابطهٔ

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in Q \\ g(x) & x \in Q^c \end{cases}$$

برابر مجموعه A است . اینک مشابه قضیهٔ اصلی(۶ـ۱)، قضیه ای ارائه می دهیم و به کمک آن توابعی معرفی می کنیم که مجموعه نقاطی که تابع در آنها مشتق پذیر است برابر مجموعهٔ متناهی مفروض A باشد .

(۱-۹) تعریف: فرض کنید I یک بازه باشد و $f: I \to IR$ یک تابع باشد گوییم f در $x_\circ \in I$ مشتق پذیر است هرگاه $\lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$ موجود و این حد را با $f'(x_\circ)$ نمایش می دهیم .

(۱-۱۰) قضیه: اگر تابع $f: I \to IR$ در $x_\circ \in I$ مشتق پذیر باشد آن گاه f در $x_\circ$ پیوسته است . [۱ ، قضیه ۱.۵]

(۱-۱۱) قضیه: فرض کنید f و g دو تابع متمایز و مشتق پذیر روی I باشند(در هر نقطه $x_\circ$ از I مشتق پذیر باشند) و $h: I \to IR$ را با ضابطه

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in Q \\ g(x) & x \in Q^c \end{cases}$$

تعریف کنید در آن صورت h در x_0 مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر $f'(x_0) = g'(x_0)$ و $f(x_0) = g(x_0)$.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم h در x_0 مشتق‌پذیر است . بنابراین h در x_0 پیوسته است و در نتیجه بنابر قضیهٔ اصلی $h(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$. اما برای اثبات تساوی $f'(x) = g'(x)$ چون $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = h'(x_0)$ ، بنابراین برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد گویای I که $x_n \neq x_0$ و $x_n \to x_0$ داریم :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n-x_0} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = h'(x_0)$$

همچنین فرض می‌کنیم $\{y_n\}$ دنباله‌ای از اعداد اصم در I باشد که $y_n \neq x_0$ و $y_n \to x_0$ در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h(y_n)-h(x_0)}{y_n-x_0} = \lim_{n\to\infty}\frac{g(y_n)-g(x_0)}{y_n-x_0} = h'(x_0)$$

و چون f و g در x_0 مشتق‌پذیر هستند لذا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(y_n)-g(x_0)}{y_n-x_0} = g'(x_0) \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$$

در نتیجه با توجه به منحصر به فردی حد یک دنباله و روابط فوق نتیجه می‌شود که $f'(x_0) = g'(x_0)$.

برعکس: فرض می‌کنیم $f(x_0) = g(x_0)$ و $f'(x_0) = g'(x_0)$. نشان می‌دهیم h در x_0 مشتق‌پذیر است . فرض می‌کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای از I باشد که $x_n \to x_0$ و $x_n \neq x_0$ در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0) = g'(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}$$

فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ مفروض باشد در نتیجه وجود دارد n_1 در IN که به ازای هر n که

$$n \geq n_1 \Rightarrow \left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$$

و وجود دارد n_2 در IN که به ازای هر n که

$$n \geq n_2 \Rightarrow \left|\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0} - g'(x_0)\right| < \varepsilon$$

بنابراین با توجه به اینکه $f'(x_0) = g'(x_0)$ و تعریف تابع h وجود دارد n_1 در IN که به ازای هر n که

$$n \geq n_1 ,\ x_n \in Q \Rightarrow \left|\frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$$

و وجود دارد n_2 در IN که به ازای هر n که

$$n \geq n_2 \ \&\ x_n \in Q^c \Rightarrow \left|\frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$$

بنابراین برای هر $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ داریم

$$\left|\frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$$

یعنی $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ (به کمک قضیهٔ (۱ـ۱)) پس h در x_0 مشتق‌پذیر است .

(۱-۱۲) نتیجه : مجموعه نقاطی که تابع h مشتق‌پذیر است برابر است با اشتراک مجموعه جواب معادله‌های $f(x) = g(x)$ و $f'(x) = g'(x)$ در I .

(۱-۱۳) نتیجه : برای یک مجموعهٔ متناهی و مفروض $A \subseteq IR$ مانند $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ تابعی موجود است که مجموعه نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر است برابر مجموعه A می‌باشد .

حل : فرض می‌کنیم بازه I چنان باشد که $A \subseteq I$. تابع $f: I \to IR$ را با ضابطهٔ $f(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2$ و تابع $g: I \to IR$ را با ضابطهٔ $g(x) = 0$ تعریف می‌کنیم در آن صورت f و g در مفروضات قضیهٔ (۱۱ـ۱) صدق می‌کنند در نتیجه چون $f(x) = g(x)$ و $f'(x) = g'(x)$ اگر و فقط اگر $x \in A$. پس بنابر نتیجه (۱۲ـ۱) نقاطی که تابع $h: I \to IR$ با ضابطهٔ

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in Q \\ g(x) & x\in Q^c \end{cases}$$

در آنها مشتق پذیر باشد برابر مجموعه A است.

■ **(۱۴-۱) تذکر:** شرط پیوستگی f و g در قضیهٔ اصلی(۶ـ۱) و قضیهٔ(۱۱ ـ ۱) مهم است در حقیقت اگر f و g پیوسته نباشند حکم هردو قضیه نادرست است زیرا اگر $f:(0,1)\to IR$ با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in Q \\ 0 & x\in Q^c \end{cases}$$

تعریف شود و تابع $g:(0,1)\to IR$ با ضابطه

$$g(x)=\begin{cases} 0 & x\in Q \\ x & x\in Q^c \end{cases}$$

تعریف شود در آن صورت f و g مطابق قضیهٔ اصلی فقط و فقط در $x=0$ پیوسته هستند و مطابق قضیهٔ(۱۱ ـ ۱) در هیچ نقطه ای مشتق پذیر نیستند در حالی که تابع $h:(0,1)\to IR$ با ضابطه

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in Q \\ g(x) & x\in Q^c \end{cases}$$

به صورت $h(x)=x$ است که این تابع بر $(0,1)$ مشتق پذیر است.

■ **(۱۵-۱) تبصره:** با توجه به اینکه حد یک تابع در یک نقطه زمانی قابل تعریف است که آن تابع در یک همسایگی از آن تعریف شده باشد و چون برای تابعی مانند f، داریم که

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

پس اگر بخواهیم مشابه قضایای (۶ـ۱) و (۱۱ـ۱) حکمی را برای مشتق دوم بیان کنیم اولین شرطی که بایستی لحاظ کنیم این است که h در یک همسایگی x_0 مشتق پذیر، یعنی حداقل بازه ای مانند $J\subseteq I$ موجود باشد که $f'(x)=g'(x)$ و بعد سایر شرایط را به دست آوریم.

بخش «۲»

اگر خواننده با مفاهیم پیشرفته ای از آنالیز در سطح مفهوم اندازه و انتگرال لبگ و توابع با تغییر کراندار آشنایی داشته باشد می تواند به راحتی حکمهای زیر را ثابت کند[۲].

❑ **(۰ ـ ۲) لم:** با مفروضات قضیه(۶ـ۱)، تابع h اندازه پذیر لبگ است.

حل: چون $h(x)=g(x)$ تقریباً همه جا g تابعی پیوسته پس اندازه پذیر است و با توجه به کامل بودن فضای لبگ روی R(زیرمجموعه های، مجموعه های با اندازه صفر، اندازه پذیرند) لذا h اندازه پذیر لبگ است[۲ و مثال ۳۳ـ۳]

❑ **(۱ ـ ۲) لم:** با مفروضات قضیهٔ(۶ـ۱)، تابع h، انتگرال پذیر لبگ نیست.

حل: چون f و g متمایز هستند پس وجود دارد x_0 یی که $f(x_0)\neq g(x_0)$. بدون آنکه از کلیت کاسته شود می توان فرض کرد $f(x_0)>g(x_0)$. چون f و g پیوسته اند. پس وجود دارد بازه بازی مانند $J\subseteq I$ که $f(x)>g(x)$ برای هر $x\in J$.

در نتیجه بنابر قضیهٔ(۶ـ۱)، h در هیچ نقطه ای از J پیوسته نیست و چون بنابر «قضیهٔ محک لبگ» h انتگرال پذیر لبگ است اگر و فقط اگر مجموعه نقاط ناپیوستگی اش با اندازه صفر باشد[۱ و قضیه ۶ .۱۹]، چون J زیرمجموعهٔ، مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی h است و $m(J)>0$ پس اندازه مجموعه نقاط ناپیوستگی h صفر نیست در نتیجه h انتگرال پذیر لبگ نیست.

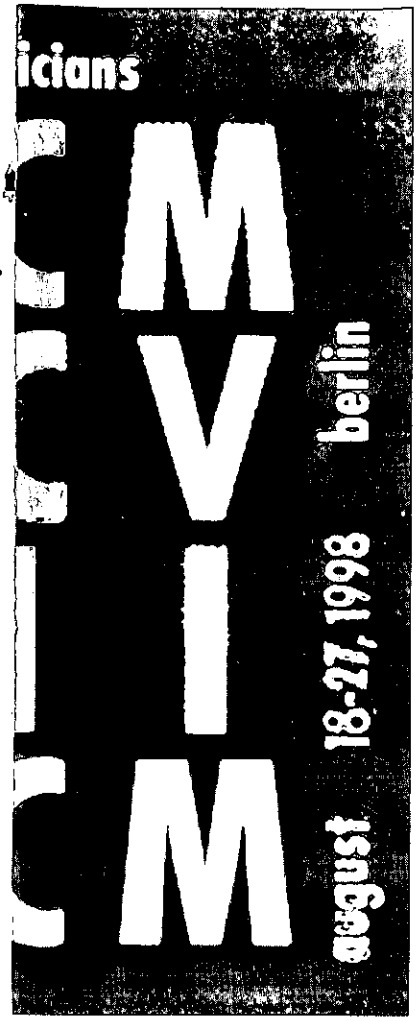
❑ **(۲ـ۲) لم:** با مفروضات قضیه (۶ـ۱)، تابع h با تغییر کراندار نیست(حتی اگر I یک بازه بسته باشد).

حل: فرض می کنیم(فرض خلف) h با تغییر کراندار باشد. بنابراین دو تابع صعودی موجودند مانند H و K که $h=H-K$. چون H و K صعودی هستند پس مجموعه نقاط ناپیوستگی آنها شمارا، در نتیجه با اندازه صفر است و لذا مجموعه نقاط ناپیوستگی h که زیرمجموعه ای از اجتماع مجموعه نقاط ناپیوستگی K و H است، با اندازه صفر است. و لذا h انتگرال پذیر لبگ خواهد بود که با لم(۱ـ۲) تناقض دارد پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

مراجع:

[۱]ـ «آشنایی با آنالیز ریاضی» ویلیام ر. پارزینسکی، فیلیپ و. زیپس، ترجمه سیدمحمود طالبیان، انتشارات آستان قدس رضوی، ۱۳۷۴
[۲]ـ «نظریه اندازه و انتگرال»، تألیف، دکتر عبدالحمید ریاضی ـ دکتر علیرضا مدقالچی، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۷۴

کنگرهٔ بین المللی ریاضیدانان ۹۸



در شمارهٔ پیشین(۵۳) رشد آموزش ریاضی گزارش گونه ای تحلیلی از کنگره بین المللی آلمان ارائه کردیم و اشاره کردیم که در مراسم افتتاحیهٔ این کنگره تنی چند از ریاضیدانان بزرگ و برگزارکنندگان و مسؤلین در باب تأثیر شگرف این کنگره ها در توسعه ریاضی، پی آمدهای علمی این کنگره ها و نقش و کاربرد ریاضیات در سایر علوم و فعالیتهای علمی و فرهنگی سخن گفتند، در این مقاله به بعضی از نکات ارزشمند و مفید سخنان آنان اشاره می کنیم. این سخنان به خصوص از این جهت اهمیت دارند که نشان می دهند تا چه اندازه یک کشور توسعه یافته با آگاهی نسبت به نقش ریاضی در جامعه، برای همگانی کردن ریاضی، اعتلای آن و آموزش و یادگیری و تحقیق ریاضی سرمایه گذاری های کلان می کند.

دیوید مامفورد[1]: رئیس اتحادیه ریاضیدانان(۱۹۹۸-۱۹۹۴):

ریاضیات نه دانش دشواری است که ابداعات آن به طور وسیع در رسانه ها پخش شود و نه یک هنر است که سبب تحسین همگانی شود. از این رو، مخصوصاً خوشحالم که کنگرهٔ ما در برلین مورد توجه وزیر آموزش و علوم، دفتر ریاست جمهوری، وزیر امور مالی و اقتصادی و شهردار برلین قرار گرفته است. همچنین اطلاع و آگاهی همگانی از ریاضیات و کنگره خوشحالی مرا دوچندان کرده است. در طول این کنگره فرصت خواهیم یافت تا نقش ریاضیات را به مردمی که در سایر حرفه ها مشغولند نشان دهیم. اجازه بدهید که سهم خود را با بیان اینکه دانش ریاضی چگونه با دنیای وسیع فرهنگی ارتباط دارد انجام دهم.

معمولاً نقش ریاضیات با ارائه مثالهایی از ابداعات مهمّ به دنیا عرضه می شود که بدون کمک ریاضیات نمی توانند به وجود آیند. این امر با قدرتی ظاهر می شود که ما ریاضیدانان خود را با حقیقت ابدی مرتبط می یابیم، آنرا به فیزیکدانان تحویل می دهیم و آنان نیز به شیمیدانان و مهندسین تحویل می دهند، و در نهایت همهٔ آنها در اختیار بشریت قرار می گیرند. مطمئناً مثالهای مهمی از این ایده ها وجود دارد که از این زنجیر عبور کرده اند(در دو جهت!) ولی من همچنین فکر می کنم که این دیدگاه باریکی است که ریاضیات را بر این اساس منزوی می کنیم. یک نظریهٔ اساسی جامعه شناختی وجود دارد که معتقد است ریاضیات و ریاضیدانان کاملاً فرهنگ بشری را احاطه کرده اند و به ویژه به هنر متصلند. جایی عشق به تجرید هم نمودار می شود. اجازه بدهید که این را توضیح دهم.

سرآغاز این قرن، دیوید هیلبرت موشکافی فوق العاده مؤثر خود را از هندسهٔ اقلیدسی با مؤلفه های منطقی انجام داد. آیا این مطابق و همزمان با امپرسیونیست های فرانسه برای تجزیهٔ نور و رنگ به مؤلفه های اصلی نبود؟ در دهه های ۲۰ و ۳۰ میلادی هنرستان معماری باوهاوس[2] در آلمان محل سکونت بشری با طراحی ریز خطها ارائه کرد، و بورباکی در فرانسه ریاضیات را در مجردترین شکل خود بازسازی می کرد. مسلم است که چنین برمی آید که یک همسوُیی بین ریاضیات و مسیرهای گستردهٔ فرهنگ بشری وجود دارد، **مانند کشف اینکه پیشرفت تصادف می تواند مؤثرتر از برنامه ریزی دقیق باشد.** تقریباً به طور همزمان توسط جکسون پالوک[3] هنرمند و ان. سی. متروپولیس[4] ریاضیدان کشف شد. ولی من خود را با این بیان متقاعد می کنم که مشهورترین موفقیت چهار سال گذشته یعنی حل مسألهٔ ۳۰۰ ساله فرما، این قضیه فرامدرن بوده است. ترکیب اساسی از آن چیزی که هنر و معماری فرامدرن نامیده می شود ترکیب آگاهانه ای از زبان هر عصری در گذشته است. و در واقع، برهان وایلز، تقریباً ایده هایی از هر شاخه از ریاضیات کلاسیک، از جمله نظریهٔ اعداد، هندسهٔ جبری، نظریه گروههای لی و آنالیز را ترکیب می کند؛ و ریشه های آن به دیدگاه، معروف کرونکر در قرون ۱۹ میلادی برمی گردد.

(ICM 98)

گزارشگر: علیرضا مدقالچی استاد دانشگاه تربیت‌معلم

اگر چه بعضاً ارتباطات پنهان است، ولی ریاضیات به تمام هنرها و علوم بافته شده است.

مارتین گروتشل[5]: رئیس کنگره ریاضیدانان ۹۸:

ایشان بعد از گزارشی از نحوهٔ اجرا و جمع آوری بودجه و نکات آماری در مورد شرکت کنندگان به تفکیک مناطق جغرافیائی و جنسیت، به سه وجه تمایز کنگرهٔ ۱۹۹۸ با سایر کنگره ها اشاره کرد.

اولاً، برای اولین بار است که در این کنگره، کاربرد وسیعی از ارتباطات، اطلاعات و سازماندهی الکترونیک به کار می رود. تقریباً هرکس در این سالن حداقل یک نامهٔ الکترونیک را از من دریافت کرده است، بسیاری از شما با من و یا همکارانم به وسیلهٔ ابزارهای الکترونیکی تماس گرفته اید.

آماری چند برجستگی های «انقلاب الکترونیک» را نشان می دهد: دوسوم شرکت کنندگان کنگره ۹۸ به طور الکترونیکی ثبت نام کرده اند، ۹۵٪ چکیده خود را با پست الکترونیکی فرستاده اند، و فقط یکی از مقالات مدعو ما به وسیلهٔ پست ارسال شده بود. این امر تولید گزارش کنگره را قبل از کنگره ممکن ساخت و به غیر از بخش های افتتاحیه بقیه در شبکهٔ اینترنت و در دسترس همگان قرار گرفت.

ثانیاً، کمیتهٔ اجرایی با همکاری اتحادیه بین المللی ریاضی (IMU) بخش دیگری را به نام **بخش فعالیتهای ویژه** اضافه کرد که در آنجا موضوعات به وسیلهٔ ارتباطات ریاضی تحت پوشش قرار می گیرند ولی در برنامه ریزی سنتی جایگاهی ندارند. سخنرانی، میزگرد در مورد انتشارات الکترونیک، نرم افزارهای ریاضی، فعالیتهای زنان، مقایسه بین المللی از تدریس ریاضی، و سریالی از برلین به عنوان مرکزی از فعالیتهای ریاضی ارائه خواهد شد.

ثالثاً، این کنگره بین المللی به افکار عمومی غیرریاضی هم گسترش یافت. این امر به عنوان موضوعی بااهمیّت به وسیلهٔ همهٔ اعضای کمیتهٔ اجرایی مورد توجه قرار گرفت. جزئیات فعالیتهای این کنگره ها بسیار بیشتر از آن است که بتوان در اینجا با جزئیات ذکر کرد. ما ساختمان اورانیا[6] را برای جذب اهالی برلین به شنیدن بحثهای ریاضی اجاره کرده ایم. در آنجا، چند نمایشگاه و اجرای موسیقی در مورد ریاضیات خواهد بود. امیدواریم که این فعالیتها نه تنها مورد علاقهٔ افکار عمومی بلکه مورد علاقه شرکت کنندگان و همراهانشان قرار بگیرد.[7]

کارل هنرهافمن[8]: رئیس انجمن ریاضی آلمان:

برای اولین بار در سال ۱۹۹۴، کنگره بین المللی ریاضی به آلمان برمی گردد. از جانب انجمن ریاضی آلمان ورود شما را به برلین خوش آمد می گویم.

در ۱۹۱۲ یعنی هشت سال بعد از آن که کنگرهٔ بین المللی ریاضیدانان در هایدلبرگ برگزار شد، ما در مقاله ای از نویسندهٔ اطریشی به نام رابرت موسیل[9] چنین می خوانیم:

«ریاضیات (به عنوان یک علم) جلوه ای از استدلال محض است. می توان گفت که ما کاملاً در برهان زندگی می کنیم. کل جهانی که می چرخد و در اطراف ما وجود دارد نه تنها وابسته به ریاضیات به سبب قابل درک بودن آن است بلکه به طور مؤثر به وسیلهٔ آن آفریده شده است ... با آن آرامش می یابد ... وجودش متکی به آن [ریاضیات] است.»

نگاهی به برنامه های کنگرهٔ ۱۹۹۸ از جمله طیف وسیعی از سخنرانیها در مورد ریاضیات محض و کاربردی، نمایشگاه نرم افزارهای ریاضی و «فستیوال ویدیویی ریاضی»[10] این قضاوت را به نحو مؤثری مورد تأئید قرار می دهد. هافمن در ادامه گفت که ریاضیات هنر و فرهنگ است، ولی همچنین اساس فن آوری جهانی است. کمیسیون آکادمی علوم آمریکا به این نتیجه رسیده است که

عالیترین فن آوری اساساً فن آوری ریاضی است .

ریاضیات نه تنها فرزند فوق العاده موفق خود، یعنی علوم کامپیوتری را به وجود آورده است، ولی روشهای ریاضی در جایگاه خود نیز به کار می روند و در نتیجه استخوانبندی اصلی فن آوری جدید هستند. اجازه بدهید در این رابطه به توموگرامی[11]، رباتها، دانش هوانوردی، علوم فضایی، فن آوری نیمه هادیها، و علوم مواد اشاره کنم.

برخلاف اعتقاد عمومی، ریاضیدانانِ خوب تربیت شده نه فقط مورد نیاز حوزه های آکادمیک هستند، بلکه در مشاغل تجاری، بانکداری و شرکت های بیمه نیز مورد نیاز هستند. انستیتوی استخدام در نورنبرگ اخیراً اعلام کرده است که به تعداد ریاضیدانان جویای کار، پست خالی برای ریاضیدانان وجود دارد. آموزش وسیعی که ریاضیدانان فرا می گیرند انعطافی را برای آنان فراهم می آورد که سرشت محیط های کاری مدرن است. با توجه به همهٔ اینها، حمایتی که ریاضیات در آلمان از شورای تحقیقات آلمان (DFG)، انجمن ماکس پلاک، سرمایه گذاری خصوصی، صنعت و وزارت فدرال آموزش، علوم و تکنولوژی دریافت می کند سرمایه گذاری مؤثری برای آینده است. ما به آنها افتخار می کنیم. این حمایتها منجر به آفرینش مراکز تحقیقاتی و به عنوان نمونه، بنیانگذاری انستیتوها و شبکه های تحقیقاتی می شود.

فردریش هایرزبروک[12]: رئیس افتخاری کنگره ۹۸

در سال ۱۹۹۰ میلادی، انجمن ریاضی آلمان صدمین سال خود را جشن گرفت، من خوشحال هستم که برای این کنگره تمبر ویژه ای چاپ می شود که دبیر دفتر ریاست جمهوری آن را ارائه می دهد.

من صدمین سال انجمن ریاضی آلمان را ذکر کردم. اوّلین رئیس آن جورج کانتور بنیانگذار نظریهٔ مجموعه ها و از هواداران سرسخت برگزاری کنگره های ریاضی بود. از سالهای بنیانگذاری انجمن ریاضی تا دوران نازی ها، ریاضیات در آلمان در سطح بین المللی هدایت می شد. در میان رئیسان انجمن در این دوره، فیلکس کلاین، الکساندر ویلهم، فون بریل، ماکس نوتر، دیوید هیلبرت، الفرد پرینگ شیم، فردریش انگل، کرت هنسل، ادموند لانداو، اریک هک، اتوبلومنتال و هرمان وایل بودند.

آلفرد پرینگ شیم در ۱۹۴۱ در ۹۰ سالگی بعد از فرار از آلمان در زوریخ درگذشت. ادموند لانداو کرسی خود را در ۱۹۳۴ در گوتینگن از دست داد. اتوبلومنتال به بازداشتگاه زندانیان تبعید شد که در آنجا در ۱۹۴۴ درگذشت. هرمان وایل رئیس اتحادیه ما در ۱۹۳۲، در سال ۱۹۳۳ به آمریکا مهاجرت کرد. او در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته در پرینستون با آلبرت انیشتین، کرت گودل، جان فون نویمن کار می کرد که همگی اعضای اتحادیهٔ ما بودند.

دیوید هیلبرت در سال ۱۹۴۳ در گشکن درگذشت. هرمان وایل سرگذشت خود را به نگارش درآورد که در انگلستان و آمریکا منتشر گردید و من آن را عیناً نقل می کنم: «سالیان درازی بعد از جنگ جهانی اول، بعد از آن که فلیکس کلاین رفت و ریچارد کورانت جانشین او شد و در پایان دوران غم انگیز جمهوری آلمان، رؤیای کلاین در مورد انستیتوی ریاضی در گوتینگن به واقعیت پیوست. ولی به زودی غوغای نازیها به وقوع پیوست و برنامه ریزان و همراهان هیلبرت در دنیا پراکنده شدند و سالهای بعد از ۱۹۳۳ برای هیلبرت سالیان غربت دائمی بود.»

امی نوتر، ریاضیدانان مشهور گوتینگن و دختر ماکس نوتر، رئیس انجمن ریاضی در ۱۸۹۹ یکی از آنهایی بود که «در روی زمین پراکنده شدند.» برای من ممکن نیست که در اینجا وضعیت انجمن ریاضی آلمان و اعضایش و یا عکس العمل آنها را بعد از جنگ نسبت به نازیها تحلیل کنم. موقعی که ما برای این کنگره آماده می شدیم، برای ما روشن بود که ما «نباید فراموش کنیم». نسل من قادر به فراموشی نیستند. بسیاری از همسالان من دوستان خوبی در اطراف و اکناف دنیا دارند که اولیا و سایر اعضای بستگان آنها کشته شده اند ما باید به نسل بعد بیآموزیم که «فراموش نکنند» انجمن ریاضی آلمان فعالیت ویژه ای را در طول این کنگره به افتخار بزرگداشت قربانیان وحشت ایجاد شده توسط نازیها اعلام کرده است.

جارگن راجرز[13]: وزیر آموزش، علوم، تحقیقات، و فن آوری

صد و یک سال بعد از اولین کنگره بین المللی ریاضی، و دو سال قبل از پایان قرن، ریاضیدانان از همهٔ نقاط دنیا در برلین جمع شده اند. از طرف حکومت فدرال می خواهم ورود شما را به پایتخت قدیم و جدید آلمان خوش آمد بگویم.

چند سال قبل دو قسمت شهر و دو قسمت آلمان دوباره متحد شدند. من از شما دعوت می کنم که با تجربهٔ ما سهیم شوید که چگونه فضای جدید، جامعهٔ باز و دانشگاه مشوق پیشرفت برلین شده است. ما برگزاری کنگره را در اینجا تصدیق شما از این فضای جدید تلقی می کنیم. همچنین این کنگره اهمیت برلین را به عنوان یک مرکز علمی مورد تأکید قرار می دهد.

ما می توانیم به یک قرن از موفقیتها و پیشرفتهای بزرگ نگاه کنیم. به خصوص، در چند سال گذشته چندین مسأله حل شده است که ریاضیدانان دوران طولانی برای حل آنها جنگیده بودند. به عنوان مثال، اجازه دهید که به حلّ حدس فرما اشاره کنم ـ حادثه ای که نسبت به آن، دامنهٔ توجّه عمومی بسیار بیش از فهم عمومی است و این از ارزش آن نمی کاهد!

ریاضیات یک دانش حیاتی و بلکه شدیداً حیاتی است و به طرق گوناگون به زندگی مدرن ما حیطه دارد. اهمیت ریاضیات در ورای تخصصی بودن آن قرار دارد. **ریاضیات چیزی شبیه یک زبان عمومی است.** ریاضیات امکان ارتباط دقیق را بین علوم پایه و علوم مهندسی

و همچنین بیش از پیش بین علوم اجتماعی و اقتصاد به وجود می آورد. در کنار این، **ریاضیات فن آوری اصلی زمان ما است**. کشوری که می خواهد در مسابقهٔ علوم و کاربرد آن پیروز شود به ریاضیاتِ با کیفیتِ علمی بالاتر نیازمند است. همچنین جامعه به آموزش خوب ریاضیات محتاج است. به این دلیل، من هدفی را برای خود برگزیده ام: به همراه وزرای علوم و فرهنگ ایالتی می خواهم بر تقویت آموزش اساسی ریاضیات در آلمان تأکید کنم. برای این منظور سه نکته لازم است:

- ما باید برنامه آموزشی را مجدداً تعریف کنیم.
- ما باید شیوه آموزش معلمان را عوض کنیم.
- بالاخره به استانداردهائی از کنترل کیفی برسیم که آموزش با سطح بالای ریاضی در ایالات مختلف را یکسان کند.

ما باید کار دیگری نیز انجام دهیم که در عمل در وضعیت های خاص به وسیلهٔ معلمان انجام شده است. ولی در سطح وسیع گسترش نیافته است و آن برخورداری از ریاضیات است.

دانش ریاضی، از دیدگاه فن آوری، ارتباطات و اطلاعات اهمیت دارد. این دانشها نیروی محرکه پیشرفت ما از یک جامعهٔ صنعتی به سوی یک جامعهٔ معرفت مدار[15] است. در راستای دیگر، گسترش کامپیوتر ابزار جدیدی در اختیار ریاضیات قرار داده است که این ابزار نه فقط به عنوان وسیلهٔ کار کامپیوتر بلکه همچنین به عنوان ابزاری برای بررسی و مدل سازی از تعامل های پیچیده به کار می رود. از این رو، امروزه ریاضیدانان مجهز در مسائلی از اقتصاد، حمل و نقل و جامعه شناختی کار می کنند که تا چندی پیش از این به نظر می آمد مسایل غیرقابل حل هستند. کسی باید به مردم بگوید: ریاضیات مسائل مفصل از جمله مسائل ترافیکی و بیمه درمانی را مورد بررسی قرار می دهد و حل می کند که حل آنها مورد علاقه شدید افکار عمومی است. اجازه بدهید مثالی از برلین ارائه دهم. چندی پیش تمام سیستم حمل و نقل برلین به دقت مورد تجزیه تحلیل قرار گرفت و بعد از آن از نظر ریاضی مدل سازی شد. نتیجهٔ این بود که توانایی صرفه جویی بیش از ۱۰۰ میلیون مارک در سال فراهم آمد. به عبارت دیگر، این امکان به دست آمد که با بودجه قبلی اصلاح جدّی در سیستم حمل و نقل به وجود آید. اگر شما توجه کنید بنیاد علوم آلمان با بودجهٔ سالانهٔ حدود بیست میلیون مارک، ریاضیات را مورد حمایت قرار می دهد.

وزارتخانهٔ من و بنیاد علوم آلمان اخیراً نشان داده اند که پول تنها راه حمایت از علوم نیست. ما یک جایزه را برای دانشمندان جوان ممتاز- آنهایی را که ما می خواهیم فرصتی خاص برای کارهای علمی مستقل بیابند- ابداع کرده ایم. ما این جایزه را به اسم **امی نوتر** نامگذاری کرده ایم به طوری که می خواهیم یاد این دانشمندان بزرگ را که نقش مؤثری در ریاضیات این قرن دارند بزرگ بداریم. امی نوتر آلمان را در ۱۹۳۳ اجباراً ترک کرد، بدون آنکه در شأن خود مورد توجه علمی قرار گیرد و اساساً نام او ناشناخته است. امیدوارم که با این جایزهٔ امی نوتر، این وضع عوض شود. ریاضیات برخلاف علوم دیگر، وابسته به تحقیقات نظری، پایه ای و آزاد است. ریاضیات بر پایهٔ کنجکاوی علمی بنیانگذاری شده است و احتمالاً به عنوان قدیمی ترین علوم، بخش اساسی از فرهنگ ما است. بدین سبب می خواهم شما را مطمئن سازم که بخشی از وظیفهٔ من این است که ببینم تحقیقات پایه و نیز تحقیقات عالی ریاضی در سیاست علمی ما از اولویت بالایی برخوردار است.

هانس-جورگن اورز[16]: رئیس دانشگاه صنعتی برلین

این امر واقعیت دارد که افکار عمومی معمولاً قدرت ریاضیات را تشخیص نمی دهند. یکی از علّتهای این امر آن است که تحقیقات ریاضی نوعاً بیشتر در کتابخانه و مؤسسات انجام می شوند تا در جامعه و تلویزیون. ولی اگر ریاضیات بخواهد زنده بماند و شکوفا گردد، در طولانی مدت باید در جامعه یا حداقل در تلویزیون قابل رؤیت باشد. در این راستا، کاملاً قابل توجه است که در این کنگرهٔ بین المللی، شاید برای اولین بار سخنرانیها و برنامه های زیادی در راستای افکار عمومی تهیّه شده است. ممکن است در راهروها پوسترهائی دیده باشید، سخنرانیهائی در ساختمان اورانیا ارائه خواهند شد که در آنها به تنوّع کاربرد ریاضیات از کشف سرطان گرفته یا دیسکتهای فشرده (CD) پرداخته خواهد شد. بنابراین در این کنگره ریاضیات عمومی می شود، و این خوب و ضروری است.

ریاضیات می تواند عامل بهبود کارها در جهان شود. ولی من یک اقتصاددان و همچنین رئیس یک دانشگاه هستم. در هردو زمینه می دانم که پول هم باعث بهبود کارهای دنیا است. از اینجا می توان چنین نتیجه گرفت که بدون پول و بدون حمایت زیاد بخشهای عمومی و دولتی چنین کنگرهٔ عظیم ریاضی نمی توانست برگزار شود. از طرف دانشگاه به عنوان میزبان همهٔ شرکت کنندگان، اجازه بدهید که از همهٔ بخشهای عمومی و خصوصی که امکان این جشن بزرگ ریاضی را فراهم آوردند تشکر کنم و به همهٔ شما ورود به برلین را خوش آمد بگویم.

هانس جورج هسر[17]: معاون پارلمانی وزارت امور اقتصادی و ارائه تمبر ویژهٔ کنگره ۱۹۹۸

امسال، کنگرهٔ بین المللی ریاضی برای بیست و سومین بار تشکیل شد. اولین کنگره در ۱۸۹۷ در زوریخ برگزار شد. مطمئناً کمتر اتفاق می افتد که وزیر اقتصاد کشور میزبان در جلسه افتتاحیه شرکت کند.

به هر حال من اینجا هستم! اگرچه سرویس پست فدرال خصوصی شده است و وزارت پست از بین رفته است، مسؤلیت انتشار تمبر به عهدهٔ دولت است و به وزارت امور اقتصادی محوّل

شده است .

در تعقیب نمونه هایی از کنگره ها در مسکو در ۱۹۶۶ ، هلسینکی در ۱۹۸۷ ، ورشو در ۱۹۸۲ ، کیوتو در ۱۹۹۰ و زوریخ در ۱۹۹۴ ، تمبرهای یادگاری به عنوان نشان این کنگره ها منتشر گردید . خانم ها و آقایان امروز می خواهم این تمبر را به شما معرفی کنم . به طوری که می بینید طرح اصلی تمبر عدد ۱۱۰ است . من از یکی از ریاضیدانها در مورد خصوصیّت ویژهٔ این عدد سؤال کردم و جواب او چنین بود : «این عدد نتیجهٔ عدد مربع کامل ۱۰۰ با اضافه کردن ۱۰٪ افزایش هزینهٔ پستی اخیر است . او ادامه داد ، این عدد را می توان به صورت مجموع سه مربع دقیقاً به سه طریق زیر نمایش داد :

۱+۹+۱۰۰

۲۵+۳۶+۴۹

۴+۲۵+۸۱

هنرمند ، طراح و گرافیست مونیخ ، فوربرت هاکتلن بسط اعشاری π /۱ در حلقه های متحدالمرکز قرار داده است . اگر به دقت به تمبر نگاه کنید ، می بینید که با بزرگ شدن حلقه ها ، تقریب بسط ها دقیقتر می شود .

بیش از ۴۰۰۰ سال پیش ، بابلیها دریافتند که نسبت محیط به قطر یک دایره ثابت مشخصی است که مقدار تقریبی آن ۳ است . آنها سپس به مقدار دقیقتر ۳/۱۲۵ = $۳\frac{۱}{۸}$ رسیدند . اگرچه بابلیها دستگاه اعشاری اعداد را به کار نبردند ، با این حال ، در دستگاهی که ما به کار می بریم مقدار آنها تا اولین رقم اعشاری درست است .

تقریب ۳/۱۴۲۸۰۰ = $\frac{۲۲}{۷}$ متعلق به ارشمیدس است (۲۸۷ ـ ۲۱۲ قبل از میلاد) ذکر نام او این فرصت را به من می دهد که به دریافت کنندگان جدید مدال فیلدز که در روی آن تصویری از ارشمیدس حکّ شده است تبریک بگوییم .

در طول قرنها ، بسیاری از مردم تقلای بی خودی برای تربیع دایره یعنی ساختن دایره ای با خط کش و پرگار هم مساحت با مربع به عمل آوردند . این کوششها حتی بعد از آنکه در سال ۱۸۸۱ هرماندل نشان داد که π متعالی است یعنی تربیع دایره غیرممکن است نیز ادامه یافت . این امر ، مرا به یاد مربع بزرگ در تمبر می اندازد . اگر آن را به دقت اندازه بگیرید درمی یابید که آن تقریباً مربع است به طوری که اضلاع آن به ترتیب ۱۷۷ و ۱۷۶ در یک مقیاس مناسب است . این مربع تقریبی به تعدادی مربع دقیق تقسیم شده است که اضلاع آنها اعداد صحیح هستند . مثلاً ، مربعهای قرمزرنگ دارای اضلاع ۹۹ ، ۵۷ و ۳۴ هستند .

خانم ها و آقایان ، من باید تحسین خود را نسبت به ریاضیات بیان کنم . نه فقط چون ریاضیات می تواند چنین افزارهایی را پیدا کند ، ولی چنین اکتشافاتی دارای کاربردهایی در ساختمان شبکه ها است .

اجازه بدهید نکتهٔ دیگری را در این طرح مورد توجه قرار دهیم . به طوری که می توان دید ، تمام مربعهای کوچک رنگی هستند . اگرچه مربعهای زیادی وجود دارد ، فقط کافی است چهاررنگ به کاربرد که یادآور قضیهٔ معروف چهاررنگ است . در این شکل ، «شبه مربع» در تمبر جدید به عنوان لوگوی کنفرانس ریاضی آلمان در ۱۹۸۷ به کار رفته است .

از شما می خواهم که برای لحظه ای به ۱۹۸۷ در برلین برگردید . در آن زمان کنفرانسی در دانشگاه صنعتی برگزار گردید که فردا شما در آنجا برای جلسات کنگره بین المللی جمع می شوید . در ۱۹۸۷ برلین هنوز دوپارچه بود . ریاضیدانان از برلین شرقی نمی توانستند شرکت کنند ولی بعضی از شرکت کنندگان از مرز گذشتند تا همکاران خود را ملاقات کنند .

فقط چند سال بعد در ۱۹۹۲ کنفرانس سالانه دیگری از انجمن ریاضی آلمان در برلین برگزار شد ـ این زمان در شهر اخیراً متحد برلین کنفرانس در دانشگاه هامبولت در برلین شرقی برگزار شد . برای من و همین طور برای بسیاری از مردم ، اتحاد مجدد آلمان هنوز به عنوان یک معجزه تلقی می شود . بدون این معجزه برگزاری چنین کنگره ای نمی توانست در برلین اتفاق بیفتد .

پانویس:

1. David Mumford

۲ ـ باوهاوس[1] ، هنرستانی که در ۱۹۱۹ ، به ریاست والتر گروپیوس ، در وایمار(آلمان) تأسیس شد ، و در تدریس هنرجویان ، مطالب مربوط به «هنر محض» را با تحصیل صنایع دستی تلفیق کرد و بدینسان انقلابی در کار آموزش و هنر پدید آورد : برنامهٔ آموزشی باوهاوس با مخالفتهایی مواجه شد . این هنرستان در ۱۹۲۵ به دساو که محیط مساعدتری داشت و سپس به برلین منتقل گردید ، در سال ۱۹۳۳ دولت جدید آلمان هنرستان را یکسره برچید . امّا نظریات پایه گذاران باوهاوس که از جمله شامل طراحی در معماری ، مبلسازی ، و نساجی نیز می شد ، در سراسر جهان(مخصوصاً در امریکا) طرفداران بسیار یافته بود و امروزه بسیاری از هنرکده ها ، آن نظریات را اساس کار خود قرار داده اند(دائرة المعارف مصاحب)

3. Jackson Pollok
4. N. C. Metropolis
5. M. Grötschel
6. Urania

۷ ـ توضیح راجع به این سه وجه تمایز ، برای جامعهٔ ما که اکنون در آستانهٔ بزرگداشت سال جهانی ریاضیات هست آموزنده و مفید خواهد بود .

8. K. H. Hoffmann
9. Robert Musil
10. Video Math Festival

۱۱ ـ فن تشخیص امراض به وسیلهٔ اشعه

12. F. Hirzebebruch

۱۳ ـ این جمله را نلسون ماندلا نیز بارها اعلام کرده است که «می بخشیم ، اما هرگز فراموش نمی کنیم!»

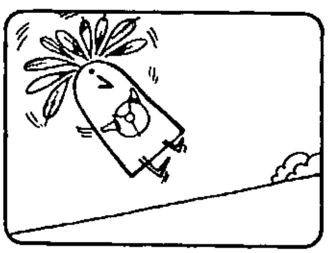
14. Jürgen Rüttgers
15. Knowledge-based
16. Hans-Jürgen Ewers
17. Hans Geörg Hauser

پارادوکسهای ریاضیات و علــوم

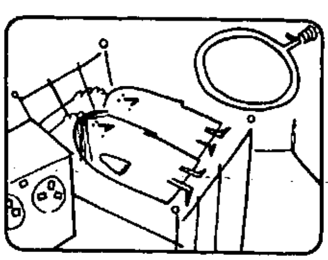
(سرگرمی برای اندیشه ورزی)

اثر دکتر مارتین گاردنر
ترجمهٔ حسن نصیرنیا

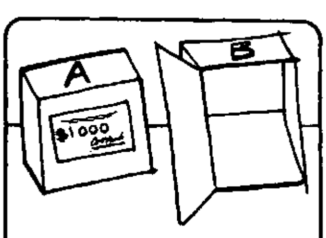
پارادوکس «نیوکام»



روزی « اُمگا »، اَبَر موجودی از فضای بیرون از منظومهٔ شمسی در زمین فرود آمد.



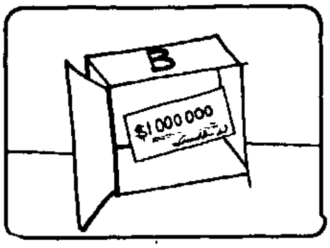
امگا ابزارهای پیشرفته ای برای مطالعهٔ مغز آدمی داشت. او می توانست با دقت بسیار پیشگویی کند که وقتی افراد در برابر دو گزینه قرار می گیرند، چگونه دست به انتخاب می زنند. امگا با استفاده از دو جعبهٔ بزرگ افراد بسیاری را مورد آزمایش قرار داد. جعبهٔ « الف » شفاف بود و همیشه ۱۰۰۰ دلار پول در آن بود. جعبهٔ « ب » مات بود. این یکی یا خالی بود یا حاوی یک میلیون دلار.



امگا به هر آزمودنی می گفت:

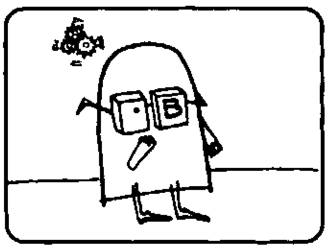
امگا:

شما دو گزینه دارید. یکی این است که هر دو جعبه را بردارید و محتوای آنها را صاحب شوید. امّا اگر من گمان می کردم که شما این کار را بکنید، جعبه ب را خالی می گذاشتم. در این صورت فقط ۱۰۰۰ دلار به دست می آوردید.



امگا:

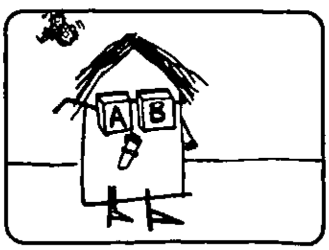
گزینهٔ دیگر شما این است که فقط جعبهٔ « ب » را بردارید. اگر من گمان می کردم که شما این کار را بکنید، یک میلیون دلار در این جعبه می گذاشتم و شما همهٔ آن را صاحب می شدید.



این مرد تصمیم گرفته است که فقط جعبهٔ « ب » را بردارد. او چنین استدلال می کند:

مرد:

من ناظر صدها آزمونی بوده ام که امگا انجام داده است. پیش بینی او در هر مورد درست بود. هرکس که هر دو جعبه را برمی داشت، فقط یک هزار دلار صاحب می شد. بنابراین، من فقط جعبهٔ ب را برمی دارم و میلیونر می شوم.



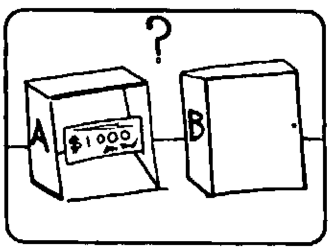
این زن تصمیم گرفته است هر دو جعبه را بردارد. او چنین استدلال می کند:

زن:

امگا قبل از این، پیش بینی خودش را کرده و اینجا را ترک کرده است. قرار نیست جعبهٔ « ب » تغییری بکند. اگر خالی باشد، خالی می ماند و اگر پر باشد، پر می ماند. بنابراین، من هر دو جعبه را برمی دارم و هرآنچه را که در اینجا هست، صاحب می شوم.

به نظر شما کدام یک بهترین تصمیم را گرفت؟ هر دو استدلال ممکن نیست درست باشد. کدام نادرست است؟ چرا؟

این یک پارادوکس جدید است و صاحبنظران هنوز راه حل آن را نمی دانند.



این یکی از جدیدترین و سردرگم کننده ترین پارادوکسهای پیشگویی متعددی است که اخیراً فلاسفه دربارهٔ آن مباحثه کرده اند. این پارادوکس را فیزیکدانی موسوم به **ویلیام نیوکام**[1] پدید آورده و به پارادوکس نیوکام معروف است. **رابرت نازیک**[2]، فیلسوفی از دانشگاه هاروارد، نخستین کسی بود که آن را منتشر و تحلیل کرد. تحلیل او زمینه ساز عمدهٔ چیزهایی شد که ریاضیدانان آنها را «نظریهٔ بازیها» و «نظریهٔ تصمیم» می گویند.

درک و فهم تصمیم مرد مبنی بر برداشتن تنها جعبه ب آسان است. برای روشنتر شدن استدلال زن به یاد آورید که امگا رفته است. جعبهٔ ب یا پر است یا خالی و قرار نیست تغییری در محتوای آن داده شود. اگر پر باشد، پر می ماند و اگر خالی باشد، خالی می ماند. پس هر دو مورد را با هم بررسی کنیم:

اگر ب پر باشد و زن فقط ب را بردارد، یک میلیون دلار را صاحب می شود. امّا اگر هر دو جعبه را بردارد، یک میلیون به اضافهٔ یک هزار را صاحب می شود.

اگر ب خالی باشد و او فقط ب را بردارد، هیچ چیز به دست نمی آورد. امّا اگر هر دو جعبه را بردارد، دست کم یک هزار به دست می آورد.

بنابراین، در هر مورد زن در صورتی که هر دو جعبه را بردارد، به اندازهٔ یک هزار دلار دستش پیش است.

این پارادوکس در حکم نوعی آزمون با کاغذ تورنسل است که مشخص می کند آیا کسی به اختیار اعتقاد دارد یا ندارد. واکنش معتقدان به اختیار به این پارادوکس ـ که طرفدار برداشتن هر دو جعبه هستند ـ در مقایسه با معتقدان به جبرگرایی ـ که طرفدار برداشتن فقط جعبهٔ ب هستند ـ تقریباً مساوی است. سایرین چنین استدلال می کنند که شرایط خواسته شده در این پارادوکس، صرفنظر از اینکه آینده کاملاً مقدّر باشد یا نباشد، تناقض آمیز است.

برای آگاهی از بحث مربوط به نظریات متضاد در این زمینه، به مقالهٔ نگارنده در بخش «بازیهای ریاضی» مندرج در مجله «ساینتیفیک امریکن»، ژوئیه ۱۹۷۳ و همچنین به مقالهٔ پرفسور نازیک در «ستون نویسندهٔ مهمان» در همان بخش مجله، مارس ۱۹۷۴، نگاه کنید.

زیرنویس:

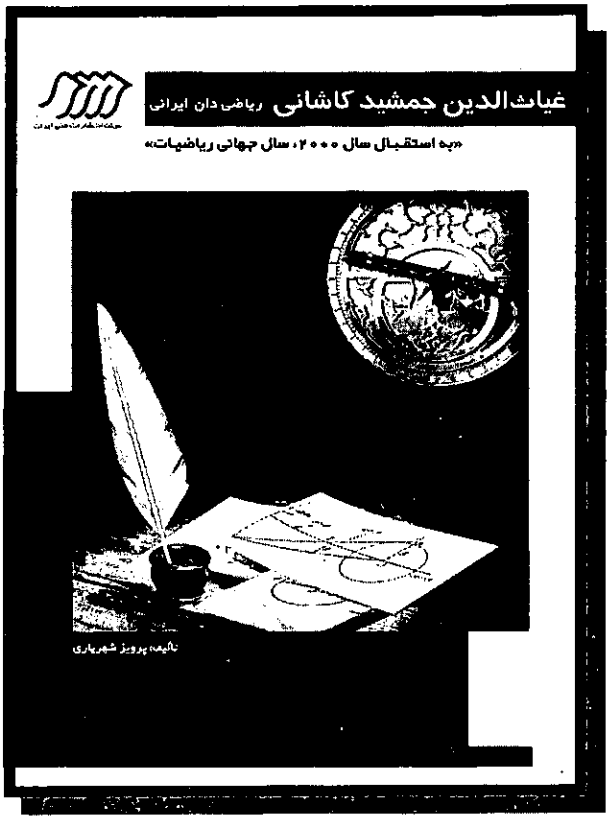
1. William Newcomb

2. Robert Nozick

منبع ترجمه:

Gardner, Martin, ***aha! Gotcha, Paradoxes to Puzzle and Delight***, W. H. Freeman & company, New York, 1989

معرفی کتاب



«به استقبال سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات»
غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضی‌دان ایرانی

تألیف: پرویز شهریاری، شرکت انتشارات فنّی ایران
تلفن: ۳۱۱۶۸۸۰-۶۴۹۵۲۸۳
چاپ اول، ۱۳۷۷، هفت + ۲۴۴ صفحه، ۱۰۰۰ تومان
شابک: ۴-۴۳-۶۲۳۲-۹۶۴

فهرست مندرجات:

مؤلف «دربارهٔ این کتاب» می‌نویسد «این کتاب، در واقع مقدمه‌ای است بر کتاب اصلی، یعنی ترجمهٔ کامل «مفتاح الحساب» و «رسالة المحیطه» غیاث‌الدین جمشید کاشانی، که به قول خواندمیر در کتاب «حبیب السیر»، بطلمیوس زمان خود بود.

اخبار

مهندس جعفر علاقه مندان، رئیس سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی و معاون پژوهشی وزارت آموزش و پرورش در «دومین همایش ستاد ملی سال جهانی ریاضیات» که در روز ۲۶ فروردین ۱۳۷۸ در دانشگاه صنعتی اصفهان برگزار شد، سخنان مبسوطی ایراد کردند که به دلیل اهمیت آن، مشروح سخنان ایشان در شمارهٔ آینده به چاپ خواهد رسید.

جامعه ریاضی ایران یار صدیقی را از دست داد

دکتر کریم صدیقی محقّق و استاد برجستهٔ ریاضیات کشور در ساعت ۱۲ ظهر چهارشنبه ۱۳۷۸/۲/۲۱ در بیمارستان نمازی شیراز درگذشت.

دکتر صدیقی در سال ۱۳۲۹ در شیراز متولد شد و تحصیلات خود را تا درجهٔ کارشناسی ارشد ریاضی در دانشگاه شیراز ادامه داده و در سال ۱۳۶۰ دکترای ریاضی را از دانشگاه بلومینگتن ایندیانای آمریکا اخذ کرد. وی یک سال در دانشگاه نوکس آمریکا تدریس کرده و سپس یک دورهٔ دو سالهٔ فوق دکتری ریاضی را در دانشگاه کالگری کانادا گذراند. دکتر صدیقی همکاری خود را با دانشگاه شیراز از سال ۱۳۶۳ آغاز کرده و در همین دانشگاه به مراتب دانشیاری و استادی ارتقاء یافت. ایشان در طول عمر کوتاه ولی پربار خود علاوه بر تربیت تعداد زیادی دانشجوی کارشناسی ارشد و دکتری ریاضی سمتهای علمی زیر را داشتند:

- عضو فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران
- عضو شورای علمی مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات
- عضو مرکز فیزیک نظری و ریاضیات سازمان انرژی اتمی ایران
- چندین دوره عضویت شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران
- عضو مرکز بین المللی فیزیک نظری (ایتالیا)
- سردبیر مجله بین المللی بولتن انجمن ریاضی ایران و مجله گلچین ریاضی
- عضو هیأت تحریریه مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی، مجله علوم و فنون دانشگاه شیراز و مجله علوم دانشگاه اهواز

دکتر صدیقی همچنین موفق به کسب عناوین و جوایز زیر شده است:

- جایزه جشنواره خوارزمی (۱۳۶۸)
- استاد نمونه کشور در رشته ریاضیات (۱۳۷۱)
- جایزه دکتر عباس ریاضی کرمانی (۱۳۷۳).

سومین گردهمائی شکوفه های ریاضی

بیـا و ساحت گلگشت را بهـاران کن
فضای کشور خود را شکوفه باران کن

سومین گردهمائی شکوفه های ریاضی در ۲۰ فروردین ۱۳۷۸، به همّت دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی و حمایت مالی ستاد ملّی سال جهانی ریاضیات برگزار گردید. هدف این گردهمائی، آشنائی دانش آموزان دورهٔ متوسطه با ریاضی و رشته های وابسته به آن، گسترش علم ریاضی و ایجاد علاقه به ریاضی و آمار در جوانان با استعداد و تشویق آنها به ادامه تحصیل در این رشته، زمینه سازی برای همکاریهای معنادارتر دانشگاه و آموزش عمومی و تقویت بنیهٔ علمی دانشگاه از طریق توجّه بیشتر به دانش آموزان و آموزش عمومی است. کمیتهٔ برگزاری این گردهمائی با اعتقاد به نقش کلیدی و سرنوشت ساز نوجوانان و جوانان عزیز در ساختن جامعه و حرکت به سوی جامعهٔ آرمانی و با امید اعتلای جامعهٔ ریاضی و پویائی آن، حضور با نشاط و تأثیرگذار شرکت کنندگان جوان گردهمائی را مغتنم شمرده و فرصتی هر چند اندک ایجاد کرد تا «شکوفه های» عزیز بتوانند با یکدیگر و با برگزارکنندگان تعامل فکری داشته باشند. برنامهٔ گردهمائی شامل معرفی پیشکسوتان، چند سخنرانی علمی، مسابقه با جایزه، میزگرد دانش آموزی، کارگاه آموزشی، اجرای موسیقی سنّتی و رابطهٔ آن با ریاضی بود. در این گردهمائی حضور استاد بیرشک، استاد غیور و استاد شهریاری به جمع شکوفه ها، شور و هیجان ویژه ای بخشید و از نظر شرکت کنندگان، یکی از محبوب ترین قسمتهای گردهمائی، تجلیل از این پیشکسوتان بود.

همچنین، در سومین گردهمائی شکوفه های ریاضی نمایشگاه کتاب با شرکت «انتشارات مدرسه» و «انتشارات فاطمی» برگزار شد. لازم به ذکر است که قبلاً از ناشران بالا درخواست شده بود که از آوردن کتابهای تست خودداری نمایند.

دومین همایش ستاد ملی سال جهانی ریاضیات

دومین همایش ستاد ملی سال جهانی ریاضیات روز بیست و ششم فروردین ماه ۱۳۷۸ با حضور تعدادی از اعضای ستاد، رؤسای گروههای ریاضی و آمار و نمایندگان انجمن ریاضی ایران و انجمن آمار ایران در دانشگاههای کشور و نمایندگان انجمنهای معلمان ریاضی استانهای کشور، در دانشگاه صنعتی اصفهان و با همکاری شهرداری اصفهان تشکیل شد.

در مراسم افتتاحیه همایش، دکتر محمد علی نجفی معاون رئیس جمهور و رئیس سازمان برنامه و بودجه یک سخنرانی با عنوان «نقش ریاضیات در توسعه» ارائه کرد که مورد توجه حاضرین قرار گرفت. دکتر نجفی در بخشی از سخنان خود گفت:

> من خوشحالم از اینکه در کشورمان ستاد ملی سال جهانی ریاضیات تشکیل شده و اقدامات مؤثر و سازنده ای نیز انجام گرفته است. از اهداف اصلی برگزاری سال جهانی ریاضیات مسلماً گشودن راه های تازه برای توسعه این شاخه از دانش بشری است و همین طور تشویق و ترغیب نخبگان و جوانان به این علم و عمومی ساختن ریاضیات و آشنا کردن عموم مردم با روش ها، اصول، ارزش و اهمیت ریاضیات در حیات بشری است.
>
> خوشبختانه، آن چیزی که تاکنون توسط ستاد ملی برنامه ریزی شده و یا به اجرا گذاشته شده دقیقاً در همین چهارچوب و بر اساس همان اهداف اصلی سال جهانی ریاضیات شکل گرفته است و من ضمن تشکر از تلاش و فعالیت کسانی که در دستگاه های مختلف به خصوص در دانشگاه ها و مراکز تحقیقاتی و آموزش و پرورش در ارتباط با این برنامه ها هستند، بار دیگر حمایت خود را از این برنامه ها اعلام می کنم و همان طور که قبلاً هم به

رؤسای سازمان برنامه و بودجه استان ها توصیه کرده ام مجدداً تأکید خواهم کرد که انشاءا ... در برگزاری برنامه ها همکاری کامل داشته باشند. به خصوص در سال جاری که ایدهٔ تشکیل ستادهای استانی مطرح است و رؤسای برنامه و بودجه استان ها می توانند در به بار نشستن این ایده نقش مؤثری ایفا کنند.

رئیس سازمان برنامه و بودجه در ادامه سخنان خود با اشاره به اهمیت به کارگیری روشهای ریاضی توسط متخصصان در علوم مختلف به ویژه فن آوری و اقتصاد گفت:

ریاضیات نقش بسیار مهمی دارد در اینکه یک کشوری به توسعه دلخواهش دست پیدا کند و آن این است که اصولاً توسعه به معنی واقعی که ما در اصطلاح برنامه ریزی از آن به عنوان توسعه پایدار، متوازن و همه جانبه یاد می کنیم نیاز به انسان هایی دارد که قدرت تحلیل و تفسیر و تبیین پدیده های اجتماعی را داشته باشند و بتوانند بر اساس یک منطق استوار و انسجام فکری، مسائل پیرامون خودشان را تجزیه و تحلیل کنند. لازمه تربیت چنین انسان هایی این است که از ریاضیات مدد بگیریم و تفکر ریاضی و منطقی را بتوانیم در تعلیم و تربیت به نحو درستی بکار گیریم.

دکتر نجفی با اشاره به اعلام سال ۲۰۰۱ به عنوان سال گفتگوی تمدنها، لازمهٔ این گفتگو را شناخت اقوام و ملل و فرهنگ و تمدن آنها دانست و گفت:

چه برای شناساندن خودمان به طرف های گفتگو که اعم از شرق و غرب اند و چه برای شناخت از آنها و داشتن یک نگاه روشن، منطقی و واقع بینانه نسبت به سایر تمدن ها، علم ریاضیات می تواند مؤثر و مفید واقع شود به خصوص اینکه فصل درخشانی از تاریخ تفکر اسلامی را موفقیت های این علم تشکیل می دهد و باز به خصوص برای ما به عنوان ایرانی چون ریاضیدانان ایرانی نقش غالبی در موفقیت ها و پیشرفت های علم ریاضی در دوران طلایی تمدن اسلام داشته اند. لذا این برای ما بسیار مهم است که از این فرصت سال جهانی ریاضیات استفاده کنیم، تاریخ ریاضیات و موفقیت های تاریخی خودمان را مورد ارزیابی قرار دهیم و بتوانیم آن را به جهانیان به نحو درست و صحیحی منعکس و منتقل بکنیم. بدین ترتیب زمینه لازم برای گفتگوی تمدن ها فراهم می شود.

بعد از سخنان دکتر نجفی وعرض خیر مقدم توسط دکتر آهون منش رئیس دانشگاه صنعتی اصفهان، مهندس علاقه مندان معاون پژوهشی وزیر آموزش و پرورش سخنرانی کردند.

پس از مراسم افتتاحیه، میزگرد تبیین برنامه های ستاد ملی و معرفی طرح ایجاد ستادهای استانی تشکیل شد. در این مراسم، برنامه های مصوب ستاد ملی تشریح و از همهٔ علاقه مندان درخواست شد تا طرحهای خود را در چارچوب این برنامه ها ارائه دهند. پس از آن، طرح تشکیل ستادهای استانی ارائه و از همکاران خواسته شد در استانهای مختلف نسبت به تشکیل این ستادها اقدام کنند.
در ادامه حاضران پیشنهادهای خود را ارائه کردند: دعوت از نمایندگان وزارت بهداشت، درمان و آموزش پزشکی برای عضویت در ستاد ملی؛ استفاده از هنرمندان برای انجام فعالیتهای نمادین؛ دعوت از ریاضیدانان ایرانی مقیم خارج برای همکاری در طرحهای ستاد ملی؛ استفاده از امکانات سازمان میراث فرهنگی برای بررسی و حفظ نقوش هندسی؛ و ابلاغ تشکیل ستادهای استانی به استانداران از طرف ریاست عالیه ستاد از پیشنهادهای مهم حاضران بود.

تشکیل سه جلسهٔ جداگانه با حضور نمایندگان انجمن ریاضی ایران، نمایندگان انجمن آمار ایران و نمایندگان انجمنهای معلمان ریاضی استانهای کشور از برنامه های دیگر همایش بود که طی آنها، برنامه های این انجمنها در راستای اهداف سال جهانی ریاضیات اعلام شد و شرکت کنندگان طرح ها و پیشنهادهای خود را ارائه کردند.

اولین همایش ریاضی دانش آموزان شهر تهران

اولین همایش ریاضی دانش آموزان شهر تهران در روز ۱۸ اردیبهشت در تالار استاد شهید مطهری واقع در فرهنگسرای خاوران برگزار شد. ایجاد انگیزه و آشنایی دانش آموزان با شیوه تحقیق و ارائه مطالب در زمینه ریاضی در آستانه سال جهانی ریاضیات از اهداف اولیه برگزاری این همایش بود.

مقدمات برپائی این همایش از مهرماه سال ۷۷ با انتشار فراخوان مقاله در زمینه ها و موضوعات مختلف ریاضی آغاز شد. در طول ۶ ماه دبیرخانه همایش پذیرای صدها مقاله دانش آموزی بود که محتوای آنها را مفاهیم و تاریخ ریاضی تشکیل می داد. این مقالات در دو مرحله گزینش شده و در نهایت هشت مقاله به مرحله نهایی راه پیدا کرده و به عنوان آثار برگزیده انتخاب شد. که در طول برنامه توسط خود دانش آموزان به حاضرین ارائه شد. در طول اجرای همایش استاد پرویز شهریاری که تاکنون یکصد جلد کتاب و دهها مقاله در زمینه علم ریاضی تألیف و ترجمه نموده اند و همچنین سرکار خانم دکتر گویا عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی گوشه ای از تجربیات ارزنده خود را در اختیار دانش آموزان قرار دادند.

در انتها به هشت اثر برگزیده و همچنین سی اثری که بالاترین امتیاز را کسب نموده بودند جوایزی به رسم یادبود اهدا شد. این همایش با همت آموزش و پرورش منطقه ۱۵ و گروه ریاضی و کامپیوتر گروه های آموزشی منطقه ۱۵ برگزار شد.

همایش دانش آموزی ریاضی در زنجان

به استقبال سال جهانی ریاضیات، روز چهارشنبه، ۷۸/۲/۱۹، به همّت «مرکز تحصیلات تکمیلی زنجان» و ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان زنجان، یک همایش دانش آموزی ریاضی برگزار گردید. دبیر این گردهمائی آقای دکتر مهری بوده و آقای دکتر محمودیان، آقای دکتر تابش، خانم دکتر گویا و خانم دکتر زمانی سخنرانان این گردهمائی بودند: در ابتدای همایش، پس از خیر مقدم توسط آقای خانبان، مدیر کل آموزش و پرورش استان و رئیس مرکز تحصیلات تکمیلی زنجان جناب آقای دکتر ثبوتی به ایراد سخنرانی پرداختند. همچنین، میزگردی با حضور خانمها میرزاخانی، بهشتی و باباعلی و آقایان ملاحی، دلیلی، جرتتی و حسام و خانم دکتر زمانی و خانم دکتر گویا تشکیل شد و طی آن، دانش آموزان شرکت کننده فرصت پیدا کردند تا با دانشجویان نخبهٔ ریاضی بیشتر آشنا گردند. در این همایش، فیلمی راجع به فرکتالها به نمایش گذاشته شد.

اولین نمایشگاه وسایل کمک آموزشی ریاضی در منطقهٔ ۸ تهران

در روز شنبه ۷۸/۲/۲۶، به همت معاونت آموزش متوسطه و گردهمائی آموزش متوسطه ادارهٔ آموزش و پرورش منطقهٔ ۸ استان تهران و در استقبال از سال جهانی ریاضیات، «اولین نمایشگاه وسایل کمک آموزشی ریاضی» افتتاح شد. بعد از سخنان رئیس محترم ادارهٔ آموزش و پرورش و معاون محترم آموزش و پرورش منطقهٔ ۸، در سخنرانی کوتاهی، خانم دکتر گویا از دانشگاه شهید بهشتی راجع به اهداف سال جهانی ریاضیات و چالشهای آموزش ریاضی در قرن بیست و یکم صحبت کردند. پس از آن، نمایشگاه توسط آقای دکتر اسرافیلیان از دانشگاه علم و صنعت افتتاح شد. در پایان، بازدید کنندگان دفتر یادبود نمایشگاه را امضا کردند.

همایش دانش آموزی ریاضی در گیلان

در روز ۲۹ اردیبهشت همزمان با سالروز حکیم عمر خیام نیشابوری و روز ملّی ریاضیات، به همّت دانشکدهٔ علوم دانشگاه گیلان و همکاری انجمن معلمان ریاضی استان گیلان، یک همایش ریاضی دانش آموزی برگزار گردید. در این همایش، ابتدا آقای دکتر ابراهیمی مدیر گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم سخنانی ایراد کردند. سپس آقای هدایت پناه دبیر انجمن معلمان ریاضی استان گیلان راجع به چگونگی تشکیل انجمن و مشکلات آموزش ریاضی به خصوص در رابطه با برنامهٔ درسیَ ریاضی نظام جدید صحبت کردند. سپس فیلم «قبّه ای برای جمشید کاشانی» به نمایش گذارده شد و در پایان، خانم دکتر گویا راجع به هدفهای سال جهانی ریاضیات و سالروز تولد خیام به عنوان سال ملی ریاضیات سخنانی ایراد کردند و چند سؤال باز پژوهشی را در رابطه با چالشهای آموزش ریاضی در قرن بیست و یکم مطرح کردند.

سخنرانیهای ماهانهٔ انجمن ریاضی

در روز چهارشنبه ۷۸/۲/۲۹ همزمان با روز ملی ریاضیات و سالروز تولّد خیام، برنامه ای در «شهر کتاب» در منطقهٔ ۶ تهران برگزار شد. در این برنامه آقای دکتر رجبعلی پور از دانشگاه شهید باهنر کرمان راجع به «حد» سخنرانی کردند.

روز ریاضیات در دبیرستان شهید باهنر منطقهٔ ۱۵ تهران

چهارشنبه ۲۹ اردیبهشت ماه سال جاری «روز ریاضیات» نام گرفته است که مصادف است با سالگرد تولد خیام ریاضیدان بزرگ ایرانی. به مناسبت این روز مراسم ویژه ای در دبیرستان نمونه دولتی شهید باهنر منطقه ۱۵ برگزار شد. در این مراسم که به همت دانش آموزان رشته ریاضی و به یاری دبیران ریاضی و این دبیرستان برپا شده بود زندگینامه خیام، مقالاتی درباره مفاهیم ریاضی و مطالب متنوع دیگر ارائه شد.

اولین همایش دست اندرکاران انجمن ریاضی ایران

همایش دست اندرکاران انجمن ریاضی ایران با حضور جمعی از پیشکسوتان ریاضیات کشور، دبیران سابق انجمن ریاضی اعضای شورای اجرایی، اعضای هیأتهای تحریریه نشریات انجمن و کمیته های مختلف این انجمن روزهای پنجم تا هفتم خردادماه ۱۳۷۸ در دانشگاه صنعتی امیرکبیر واحد تفرش برگزار شد. هدف از تشکیل این همایش نقد و بررسی فعالیتها و عملکردهای گذشته انجمن، بازنگری و تدوین اساسنامه، آئین نامه ها، نظامنامه ها و مقررات مختلف و نهایتاً تدوین رسالتها و برنامه های آتی انجمن بود.

در این همایش، شرکت کنندگان به پنج کمیته تقسیم شدند و به صورت فشرده به بحث و تبادل نظر و کار روی آیین نامه های مربوط به کمیته خود پرداختند. این کمیته ها عبارت بودند از: کمیته سیاستهای کلان، کمیته بازنگری اساسنامه، کمیته مسابقات، کمیته انتشارات و کمیته همایشها. در پایان همایش هر کدام از کمیته ها پیشنهادات خود را به صورت مدون ارائه کردند تا با استفاده از آنها شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران آیین نامه های نهایی را تدوین و تصویب کند و یا برای تصویب به مجمع عمومی انجمن ارائه کند.

بسم الله الرحمن الرحیم

Roshd
Mathematics Education Journal

No. 55 - 1999

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning

Teaching-Aids Publications Office

CONTENTS:

Managing Editor: Mohsen Goldansaz
Editor: Zahra Gooya
Executive Director: Soheila Gholamazad
Graphic Designer: Fariborz Siamaknejad

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6588

فراخوان

از خوانندگان مجله دعوت می‌شود تا به مناسبت

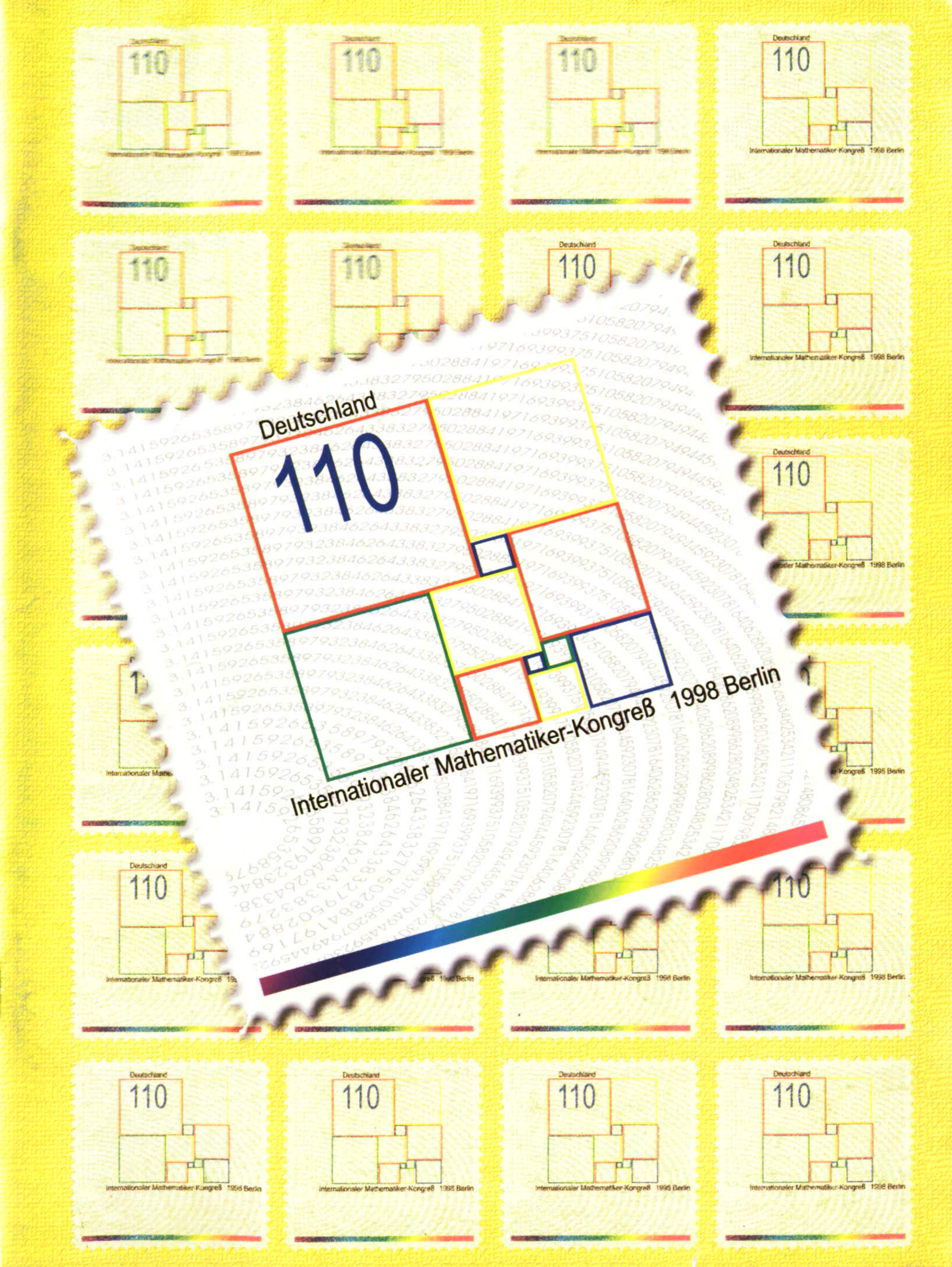
سال جهانی ریاضی- سال 2000 میلادی

و همسو با شعار همگانی کردن ریاضی، دیدگاههای خود را دربارهٔ ریاضی به شکلهای گوناگون از جمله مقاله، نوشته‌های کوتاه، شعر، طنز، کاریکاتور و نقاشی به دفتر مجله ارسال دارند.

مجموعهٔ دریافتی پس از داوری با نام صاحب اثر در سال جهانی ریاضی چاپ خواهد شد و به آثار برگزیده جوایزی داده خواهد شد.

از همهٔ خوانندگان استدعا داریم ما را در تهیّهٔ این مجموعهٔ ماندگار، یاری کنند.

سال ریاضیات ۱۳۷۹


Deutschland
110
Internationaler Mathematiker-Kongreß 1998 Berlin