



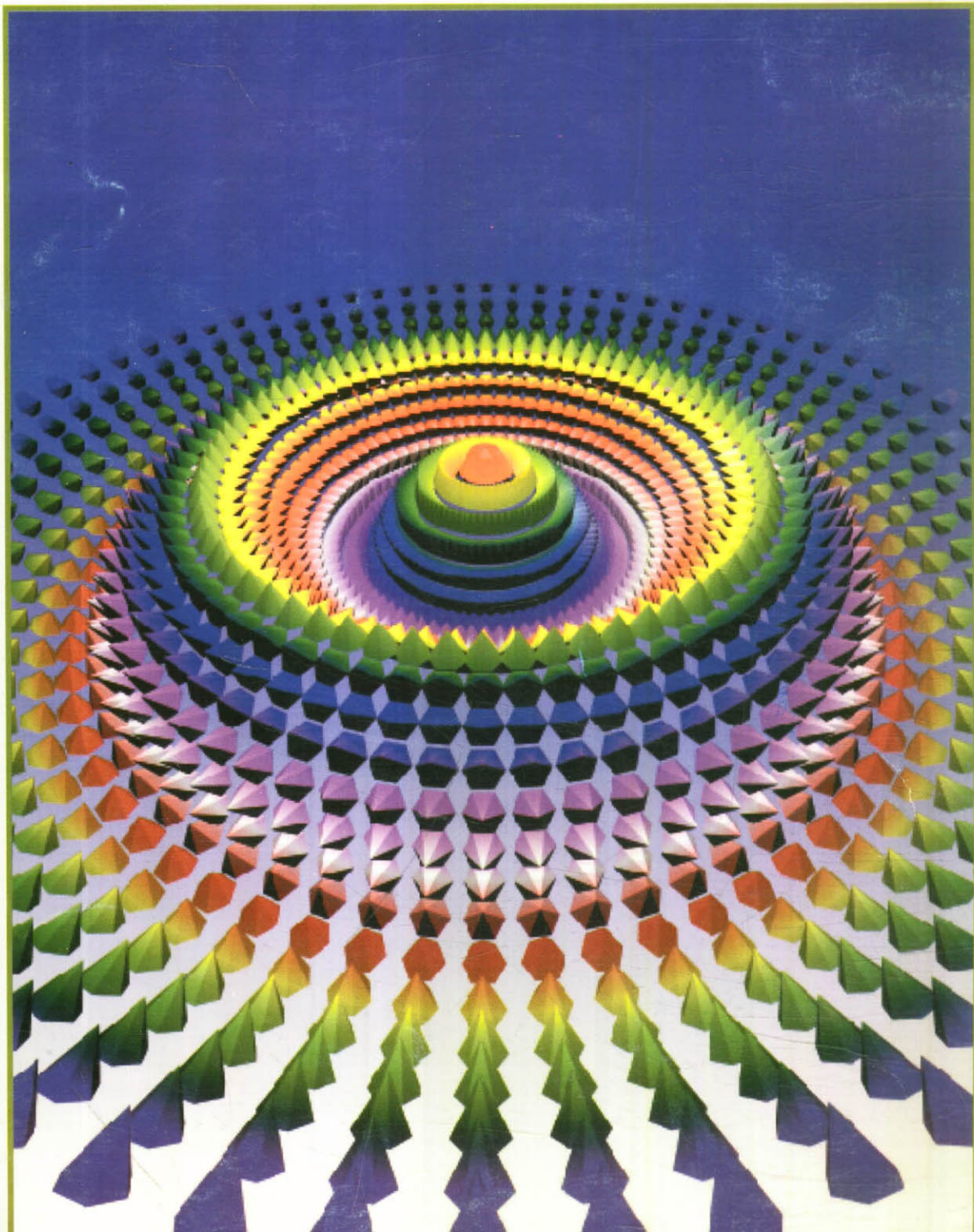
۳۲

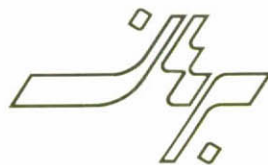
برای دانش آموزان دبیرستان

چرخ

مجله ریاضی

سال دهم ، شماره اول ، بهار و تابستان ۱۳۷۹ ، بها ۲۰۰۰ ریال





انتشارات مدرسه

وابسته به وزارت آموزش و پرورش

تمامی دبیران محترم و

دانش آموزان عزیز را در زمینه های

زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح

و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی

کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح

مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به

همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای

(برای دانش آموزان) به همراه حل آنها

● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا

ترجمه مقاله های عمومی ریاضی (مانند

تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و

اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و

لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات،

آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

هر سه ماه یک شماره منتشر می شود

■ هیأت تحریریه در حک و اصلاح و

حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.

■ مقاله های مجله با رسم الخط

انتشارات مدرسه به چاپ خواهد

رسید.

■ مقاله های وارده باید خوانا و

حتی الامکان کوتاه باشد.

■ مقاله های رسیده مسترد نمی شود.

■ استفاده از مطالب مجله در کتابها

یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ

بلامانع است.

۱	● حرف اول / سخن سر دبیر
۲	● از تاریخ پیاموزیم / پرویز شهریاری
۸	● در حاشیه مثلثات (قسمت چهارم) / احمد قندهاری
۱۴	● روش از سرگیری / عبدالحسین مصحفی
۲۱	● فضاهای برداری / حمیدرضا امیری
۲۵	● گشت و گذاری در ریاضیات معاصر / غلامرضا یاسی پور
۳۰	● آنالیز ترکیبی / میرشهرام صدر
۳۶	● در باغ تجربه ها / گفتگو با استاد معیری
۴۰	● مکان هندسی (۲۱) / محمدهاشم رستمی
۴۴	● پوریسم / دکتر احمد شرف الدین
۴۹	● کاربردهای انتگرال / سیدمحمد رضا هاشمی موسوی
۵۵	● نقش شهود در ریاضیات دبیرستانی / سیدحسین سیدموسوی
۵۹	● تابعهای صعودی و نزولی / محمدصادق عسگری
۶۳	● رامونا جان / احمد قندهاری
۶۵	● درک شهودی / علیرضا عین اللهی
۶۸	● معماهایی با ماهیت ریاضی
۷۴	● آموزش برنامه نویسی به زبان پاسکال (۶) / محمد رحیم
۷۷	● آنچه از دوست رسد...
۷۹	● مسائل برای حل
۸۸	● جواب تفریح اندیشه

حرف اول

به نظر شما مربی و معلم چگونه باید ارزشیابی کند؟ آیا جز با امتحان گرفتن راه دیگری هم سراغ دارید؟

ارزشیابی، شفاهی یا کتبی باشد، مهم نیست. آنچه اهمیت دارد این است که برای تشخیص و متمایز کردن دانش آموز پرتلاش و درس خوان از دانش آموز بی توجه و کم کار، باید معیاری صحیح وجود داشته باشد. حتی وقتی مربی و معلم از حال دانش آموزانش باخبر است، می داند کدام یک در امتحان موفق و کدام ناموفق هستند باز هم امتحان می گیرد تا حجت را تمام کرده باشد. آیا این امتحان فقط به دانش آموز، دانشجو، کتاب و درس اختصاص دارد؟ قطعاً چنین نیست؛ زیرا انسان همواره در تمامی مراحل زندگی از زمانی که خوب و بد را تمیز می دهد از سوی پروردگار عالم، در بوته امتحان و آزمایش قرار دارد. آزمون الهی، آزمونی عادلانه است که به روشهای مختلف انجام می گیرد و ما باید همیشه و در همه حال، خود را برای آزمونهای الهی آماده سازیم و البته هر کس به اندازه توانایی اش، آزمایش می شود. خداوند بلندمرتبه و والا، معلمی عادل است و از همه فصلهای کتاب آفرینش و همه بخشهای زندگی امتحان خواهد گرفت و همه اعضای ما در این امتحان شرکت دارند. امتحان چشم ما، دست ما، زبان ما، قلب ما، نیت ما و محبت ما به او هر کدام در جایگاه خود و در برهه ای از زمان صورت خواهد گرفت. معلم این کلاس عظیم الهی، پیامبر اکرم (ص) و معصومین علیهم السلام هستند که اسوه زندگی ما و چراغ هدایت بشریند.

خوشا به حال شما عزیزان که با مطالعه و پژوهش در سیره ایشان و عمل به آن در امتحان الهی سرفرازید و موجبات خشنودی و رضای پروردگار خویش را فراهم آورده اید. آفرین بر پیروان راستین مکتب سرخ ولایت که انتظار را سرلوحه امتحان خود قرار داده و با تمام وجود از این امتحان لذت می برند و ان شاء... سربلند از آن بیرون خواهند آمد. والسلام - سردبیر

۱- «وَلْيَبْلُغُوا شَيْءًا مِنَ الْخَوْفِ وَالْجُوعِ وَنَقْصٍ مِنَ الْأَمْوَالِ وَالْأَنْفُسِ وَالثَّمَرَاتِ...»

سوره بقره/ آیه ۱۵۵

«و هر آینه شما را به چیزی از بیم و گرسنگی و کاهش ثروتها و جانها و میوه ها می آزمایم...»

۲- «لَا تُكَلِّفُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا...»

سوره بقره/ آیه ۲۳۳

«هیچ کس بیش از توانش مکلف نیست...»



از تاریخ بیاموزیم (۶)

• پرویز شهریاری

ریاضیات در مصر باستان (از بوریس بولگارسکی)

دوران تمدن مصر و شکوفایی آن، به زمانی مربوط می‌شود که از ما بسیار دور است. یادگارهای فرهنگ ریاضی مصر، که از سده‌های پنجم و چهارم پیش از میلاد هم عقبتر می‌رود، به ما یاری می‌دهد بتوانیم تصور روشنی از دانش ریاضی آن زمان مصر داشته باشیم.

قلمرو مصر باستان، چندان تفاوتی با سرزمین امروزی مصر ندارد. در آن زمان هم، مثل امروز، مردم مصر در کناره‌های پایین و میانه رود نیل، یکی از طولانی‌ترین رودها در جهان، زندگی می‌کردند. از سه هزار سال پیش از میلاد، با اتحاد حکومت‌های زیادی که در سرزمین مصر بودند، حکومت متمرکزی پدید آمد که با نظام برده‌داری اداره می‌شد. اگر در آغاز، ساکنان مصر به شکار، ماهیگیری و دامپروری می‌پرداختند، بتدریج و در نتیجه ساکن شدن قوم‌های کوچ‌نشین در مرکزهای حاصلخیز، کشاورزی رونق گرفت و بتدریج به یکی از مهمترین کارها تبدیل شد. پیشرفت موفقیت‌آمیز کشاورزی، نتیجه‌ای از شرایط طبیعی دره حاصلخیز رود نیل بود. در هر سال، در فاصله اردیبهشت تا شهریور ماه، رود نیل طغیان می‌کرد و بعد از فرو نشستن آب، گل و لای فراوانی که شامل مواد معدنی و گیاهی بود، در کناره‌های رود باقی می‌گذاشت که موجب باروری زمینهای کشاورزی، بویژه برای کشت گندم بود. همین وضع، موجب شد تا مصریها، کشاورزی را به عنوان جدی‌ترین کار خود بدانند. ولی با فرو نشستن آب نیل، زمینهای غنی و حاصلخیز بدون آب می‌ماندند؛ زیرا دوره‌ای از سال آغاز می‌شد که در آن، باران بسیار کم می‌بارید. این وضع مصریها را وادار به ساختن آبپاشی برای آبیاری مصنوعی کشتزارها کرد که در زمان خود، بسیار پیچیده بود؛ به جز این، در شبکه آبیاری مصریها، آب‌انبارهایی هم پیش‌بینی شده بود.



این پدیده، مصریها را ناچار کرد، به نحوی حساب زمان را داشته باشند و از آنجا که تغییر زمان به حرکت (ظاهری) ستارگان مربوط بود، مصریها به بررسی سیاره‌ها پرداختند و فاصله زمانی بین طلوع و غروب آنها را زیر نظر گرفتند و متوجه شدند اول طلوع ستاره کاروان کش (شعرای یمانی) با آغاز بالا آمدن آب رود نیل همراه است. به همین مناسبت، مصریها فاصله زمانی بین دو طلوع این ستاره را، که ۳۶۵ روز بود، به عنوان سال انتخاب کردند. سال را به دوازده ماه ۳۰ روز تقسیم کردند و به پایان سال، پنج روز افزودند و این پنج روز را جشن می گرفتند. شبانه روز به ۲۴ ساعت تقسیم می شد؛ ۱۲ ساعت روز و ۱۲ ساعت شب. ساعت روزانه $\frac{1}{12}$

فاصله طلوع تا غروب خورشید و ساعت شبانه $\frac{1}{12}$ فاصله غروب تا طلوع خورشید بود و به همین دلیل، طول یک ساعت روز با طول یک ساعت شب، اغلب فرق داشت. البته اختلاف ساعت روز با ساعت شب، چندان زیاد نبود؛ زیرا در نزدیکیهای استوای کره زمین، طول روز با طول شب، تقریباً برابر است. برای تعیین وقت در طول روز، از ساعت آفتابی استفاده می کردند؛ ولی از حدود ۱۵۰۰ سال پیش از میلاد، ساعت‌های آبی معمول شد که برای تعیین وقت، هنگام شب هم می شد از آنها استفاده کرد. اساس ساعت آبی، ظرفی بود که در ته آن سوراخی وجود داشت. این ظرف را پر از آب می کردند و آب بتدریج از سوراخ کف آن خارج می شد. فاصله زمانی خارج شدن تمام آب از ظرف، یک واحد زمان بود.

مصریها، برای ساختن نیایشگاه‌های بزرگ، برای برپاداشتن هرمهای مشهور، برای کار مربوط به آبراه‌های پیچیده و همچنین برای بازسازی مرزهای زمینهای کشاورزی (که با هر طغیان رود از بین می رفت) نیاز به محاسبه و اندازه گیری داشت؛ همین نیازها مصریها را برای تسلط بر محاسبه و برای آشنایی شکلها و مفهومیهای هندسی آماده کرد.

آغاز پیدایش فرهنگ مصر، به چهار هزار سال پیش از میلاد می رسد. گمان می رود که آغاز خط مصری هم مربوط به همین زمان باشد. این خط در آغاز، جنبه «هیروگلیفی» داشت؛ یعنی هر مفهوم به صورت یک شکل جداگانه نشان داده می شد. ولی بتدریج،

در کنار کشاورزی، پیشه‌وری و کارهای کارگاهی هم رشد می کرد؛ مانند کوزه‌گری، جواهرسازی و پارچه‌بافی. به جز این، حرفه سنگتراشی هم بسیار پیشرفته بود و ابزارهای کشاورزی، نجاری، سلاح و ظرف را از سنگ می ساختند. از سنگ برای ساختمانها، مقبره‌ها و نیایشگاه‌ها هم استفاده می کردند. سنگ را مصریها در سرزمین خود داشتند؛ ولی مواد لازم را برای جواهرسازی و وسیله‌های خانگی (مثل طلا، سرب، مس و بعدها آهن) از کشورهای همسایه تهیه می کردند؛ از شمال سودان، از جزیره قبرس، از شبه جزیره سینا، از کرانه‌های دریای سرخ و غیره. نیاز به مواد خام سرزمینهای دور و تمایل به فروش کالاها، خود، بازرگانی را بسرعت گسترش داد و حرکت کاروانها، چه در خشکی و چه در رودخانه یا دریا قطع نمی شد. کاروانهای دریایی، مسیر خود را از طریق کرانه‌های دریای سرخ و کناره‌های آسیای دریای مدیترانه انجام می دادند.

همان طور که درباره سرزمین بابل دیدیم، در این جا هم، پیشرفت کشاورزی، کارهای کارگاهی و بازرگانی، مشاهده و آزمایش برخی خصلتهای علمی پدیده‌ها را به همراه داشت که به نوبه خود، موجب جمع شدن آگاهیهای در زمینه دانشهای طبیعی، جغرافیا، اخترشناسی و ریاضیات شد.

عامل اصلی پیشرفت کشاورزی در مصر، وجود رود نیل و طغیانهای آن بود که به نوبت و در زمانهای معینی از سال رخ می داد.





نوشته‌های هیروگلیفی، تغییر شکل داد و ساده‌تر شد. به این شکل تازه، خط «ای به راتیک» می‌گویند. در شکل، یک متن، هم با خط هیروگلیفی و هم با خط ای به راتیک داده شده است.

تأثیر ای به راتیک در هیروگلیف

نمونه‌های هیروگلیفی از عدد ۵ و ۱۲۲ را به صورت

نمونه‌های هیروگلیفی از عدد ۵ و ۱۲۲ را به صورت

نمونه‌های هیروگلیفی از عدد ۵ و ۱۲۲ را به صورت

نمونه‌های هیروگلیفی از عدد ۵ و ۱۲۲ را به صورت

برای نوشتن عددها هم همین روش را به کار می‌بردند. در

نوشته‌های هیروگلیفی از دستگاه دهدهی (عددنویسی به مبنای ۱۰)

استفاده شده است. در ضمن، برای هر مرتبه‌ای نماد ویژه‌ای وجود

داشت؛ یکان، دهگان، صدگان و غیره. واحد با نماد دهگان

با نماد $\cap$ ، صدگان با نماد $\cup$ ، هزارگان با نماد 𐍌 ، ده هزارها

با نماد 𐍎 ، صد هزارها با نماد 𐍇 ، میلیون‌ها با نماد 𐍈

و ده میلیون‌ها با نماد 𐍉 نشان داده می‌شد. همچنین اگر در

مرتبه‌ای، چند واحد آن مرتبه وجود داشت، همان نماد را در نوشته،

چند بار تکرار می‌کردند؛ یعنی قانون جمع را رعایت می‌نمودند.

برای نمونه، عدد ۵ را به صورت 𐍅 و عدد ۱۲۲ را به صورت

می‌نوشتند.

مصریها، از کسرهایی استفاده می‌کردند که با صورت واحد

بیان می‌شدند. تنها استثنا کسر $\frac{2}{3}$ بود که نمادی ویژه خود

داشت؛ کسر $\frac{1}{4}$ هم نماد ویژه‌ای داشت و

به صورت 𐍎 نشان داده می‌شد؛ همه کسرهایی دیگر را به

یاری نمادی به صورت 𐍇 معرفی می‌کردند. برای این که کسری

را (که البته صورت آن برابر واحد است) نشان دهند، این نماد را

رسم می‌کردند و عدد مخرج کسر را در زیر آن می‌نوشتند. برای

نمونه، کسر $\frac{1}{4}$ را به صورت 𐍆 نشان می‌دادند.

نوشته‌ها را روی «پاپیروس» می‌نوشتند و اغلب به صورت رنگی،

گاهی هم روی سنگ، چوب، پوست، پارچه یا پوست درخت

می‌نوشتند. متنها را بیشتر سطر به سطر و از راست به چپ و یا

ستونی از بالا به پایین یادداشت می‌کردند. برخی از پاپیروسها تا

امروز باقی مانده‌اند و می‌توانند ما را با ریاضیات مردم باستانی

مصر آشنا کنند.

از میان همه پاپیروسهای موجود، بررسی متنها دو پاپیروس،

اهمیت زیادی دارد؛ (۱) «پاپیروس ریند» که به نام صاحب نخستین

انجام می‌دادند؛ یعنی به جست‌وجوی عددی می‌رفتند که از حاصلضرب آن در بخش‌یاب، عدد بخشی به‌دست آید.

مصریها، برای بیان کسرها به‌صورت مجموعی از کسرهایی که صورتی برابر واحد داشته باشند، جدولهایی تنظیم کرده بودند. نمونه این جدولها در این‌جا داده شده است (در صفحه ۷).

این جدولها، برای حل پرسشهایی به‌کار می‌رفت که مربوط به عمل درباره کسرها بود. برای نمونه، برای تقسیم ۵ بر ۲۱، کار منجر به این ردیف عملها می‌شد:

$$\begin{aligned}\frac{5}{21} &= \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{2}{21} = \frac{1}{21} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} + \frac{1}{42} + \frac{1}{42} \\ &= \frac{1}{21} + \frac{2}{14} + \frac{2}{42} = \frac{1}{21} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7} + \frac{2}{21} \\ &= \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}\end{aligned}$$

این راه به‌ظاهر طولانی، اغلب منجر به نتیجه‌ای می‌شود که کار با آن برای مصریها، بسیار ساده‌تر از کار با کسر $\frac{5}{21}$ بود. به این مسأله مصری توجه کنید: می‌خواهیم ۷ قرص نان را بین ۸ نفر تقسیم کنیم؛ پاسخ به این صورت است:

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

یعنی باید، ۴ نان را نصف کرد، ۲ نان را هرکدام به چهار بخش برابر و ۱ نان را به هشت بخش برابر تقسیم کرد.

در پایروسها، به محاسبه‌های پیچیده‌ای روی عددهای درست و عددهای کسری برمی‌خوریم. به‌جز این، در دو پایروسی که نام بردیم، آگاهی‌هایی از سایر بخشهای ریاضیات وجود دارد. از جمله با مسأله‌هایی روبه‌رو می‌شویم که به جبر مربوط می‌شوند یا خصلت هندسی دارند.

در پایروس ریند، بخش ویژه‌ای به «محاسبه توده» اختصاص داده شده است. درواقع، این بخش، شامل مسأله‌هایی است که به معادله درجه اول یک مجهولی منجر می‌شوند. «توده» یا به زبان قبطی «هاو» همان است که ما امروز مجهول می‌نامیم. منظور از «هاو» توده‌ای گندم است که باید تعداد دانه‌های آن محاسبه شود. تکه‌ای را که پیش از این، با خطهای هیروگلیفی و هیراتیکی آوردیم، مربوط به شرح یکی از همین گونه معادله‌ها می‌شود. مضمون این

آن «ریند» و در موزه بریتانیا نگهداری می‌شود؛ (۲) «پایروس ریاضی مسکو» که به‌وسیله واسیلی سترووه (۱۸۹۱-۱۹۶۴)، تاریخ‌نویس شوروی بررسی شده است و در موزه دولتی هنر به‌نام پوشکین، در مسکو نگهداری می‌شود. البته، پیش از «سترووه» که پایروس مسکو را در ۱۹۳۰ بررسی کرد، در سال ۱۹۱۷ هم به‌وسیله «ب.آ. تورایف» بررسی شده بود. هر دوی این پایروسها در فاصله بین سالهای ۲۰۰۰ تا ۱۸۰۰ پیش از میلاد نوشته شده‌اند. احتمال می‌رود، پایروس ریند، رونوشتی از یک پایروس کهنتر، یعنی نزدیک به ۳۰۰۰ سال پیش از میلاد باشد.

پایروس ریند، که گاهی آن را «پایروس آهمس» هم می‌نامند (زیرا احتمال می‌دهند به‌وسیله «آهمس» کاتب مصری در دو هزار سال پیش از میلاد نوشته شده است)، بیشتر یک متن آموزشی درباره اقتصاد کشاورزی است؛ ولی آگاهیهای ریاضی که از این پایروس به‌دست می‌آید، چنان گوناگون است که می‌توان آن را سندی با خصلت ریاضی به‌شمار آورد.

از دو سندی که نام بردیم و سندهای دیگری که درباره ریاضیات از مصر باستان به ما رسیده است، روشن می‌شود که مصریها، نه تنها می‌توانستند عددها را بنویسند؛ بلکه درباره عملهای ریاضی، از قانونهایی پیروی می‌کرده‌اند و نمادهایی برای این عملها داشته‌اند. از جمله عمل جمع را به‌وسیله نمادی به شکل پاهای انسان نشان می‌دادند؛ از راست به چپ حرکت می‌کردند و برای عمل تفریق از همین نماد، ولی با حرکت در جهت عکس (از چپ به راست) استفاده می‌کردند. اختلاف دو مقدار با سه پیکان افقی، واژه «یعنی» یا شکلی شبیه جغد و دو نقطه پشت سرهم به معنای «برابری» بود. مصریها، عمل ضرب را با دو برابر کردنها انجام می‌دادند؛ برای ضرب ۸ در ۸، نخست ۸ را دو برابر می‌کردند، بعد حاصلضرب را دوباره دو برابر می‌کردند و سرانجام دو برابر نتیجه، ضرب اخیر را به‌دست می‌آوردند. برای به‌دست آوردن حاصلضرب ۱۵ در ۱۷، این عملها را انجام می‌دادند:

$$\begin{aligned}15(1+2 \times 2 \times 2 \times 2) &= 15 \times 1 + 15 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 15 + 30 \times 2 \times 2 \times 2 = 15 + 60 \times 2 \times 2 \\ &= 15 + 120 \times 2 = 15 + 240 = 255\end{aligned}$$

عمل تقسیم را با توجه به این که عکس عمل ضرب است،

نوشته چنین است :

توده ای، $\frac{2}{4}$ آن، $\frac{1}{4}$ آن، $\frac{1}{7}$ آن و خود آن می شود ۳۷.

حل چنین معادله هایی به این صورت انجام می شود : همه عددهای شامل مجهول، با هم جمع شده اند. در ضمن، از تبدیل کسرها به کسره های با صورت واحد هم استفاده می شود. گاهی هم برای یافتن مجهول، از روش فرضی استفاده شده است.

در پاپیروسها، به مسأله هایی هم برمی خوریم که به تصاعد های حسابی و هندسی مربوط می شوند. این مفهوما به این دلیل در ریاضیات مصری پدید آمده اند که در مسأله های مربوط به زندگی و عمل، با آنها برخورد می کردند. در این جا نمونه ای از یک مسأله را که به تصاعد حسابی مربوط می شود، می آوریم :

تعداد ۱۰۰ نان را بین پنج نفر طوری تقسیم کنید که سه نفر اول، هفت برابر دو نفر دیگر داشته باشند. تقسیم برابر انجام نگرفته است و تعداد نانهای هر نفر به مقدار مشخصی از تعداد نانهای نفر قبلی کمتر است.

در واقع، از یک تصاعد حسابی، مجموع پنج جمله اول (۱۰۰) و نسبت مجموع سه جمله اول به دو جمله آخر (۷) داده شده است.

در پاپیروس، مسأله بدرستی حل شده و پاسخ آن آمده است. در پاپیروس، تصاعد هندسی به این صورت طرح شده است :
عددهای

۷، ۴۹، ۳۴۳، ۲۴۰۱، ۱۶۸۰۷، ...

و مجموع آنها ۱۹۶۰۷ داده شده است. این یک تصاعد با قدرنسبت ۷ است و در طرح آن گفته شده است، ۷ نفر هر کدام ۷ گربه دارند، هر گربه می تواند ۷ موش بگیرد، هر موش می تواند ۷ خوشه جو بخورد و هر خوشه جو دارای ۷ دانه جو است.

در پاپیروسها، مسأله های زیادی با خصلت هندسی وجود دارد که به محاسبه مساحت و حجم زمینهای کشاورزی و ساختمانها مربوط می شود. در این زمینه هم مسأله هایی دیده می شود که پاسخ آنها با دقت محاسبه شده است و هم مسأله هایی با پاسخهای تقریبی. روشن است که مصریها، با روشهای دقیق محاسبه سطح و حجم شکلهای اساسی هندسی آشنا بودند؛ ولی اغلب ترجیح می دادند به روشهای تقریبی - که چندان دقیق نبود - متوسل شوند.

در پاپیروس مسکو، محاسبه حجم یک هرم ناقص منتظم با قاعده های مربع شکل، با دقت و بدرستی داده شده است. همچنین، در پاپیروس ریند، مساحت دایره با دقت محاسبه شده است. ریاضیدان مصری، قطر دایره را به ۹ بخش برابر تقسیم می کند و مساحت مربعی به دست می آید، که طول ضلع آن برابر ۸ بخش از این ۹ بخش قطر است. در واقع، اختلاف محاسبه ریاضیدان مصری با محاسبه ای که امروزه برای مساحت دایره می کنیم، در این است که او عدد π را برابر $\frac{3}{16}$ می گیرد.

ولی این نکته را نباید از یاد برد که همه کارهای ریاضی مصریها، جنبه تجربی دارد. در نوشته های باقیمانده از مصریها، هیچ گونه تعمیم یا استدلالی که بر پایه اثبات منطقی باشد، دیده نمی شود. آگاهی ریاضی، مربوط به جنبه هایی می شود که ضمن کار و عمل و در زندگی روزانه، در برابر آنها قرار می گرفته است. به همین دلیل است که در سندهای موجود، به قاعده های کلی بر نمی خوریم و درباره هر مسأله ای، به عنوان یک مسأله مستقل و جدا از مسأله های مشابه خود، راه حل جست و جو می شود. به همین مناسبت، نمی توانیم ادعا کنیم که در بابل یا مصر، ریاضیات به عنوان شاخه مستقلی از دانش پدید آمد؛ تنها می توانیم بگوییم، در این جاها، آگاهیهای پراکنده ای از مفهوماهای ریاضی، بتدریج روی هم جمع می شد و زمینه را برای تکامل دانش ریاضی، در دوران بعد، و نه چندان نزدیک به آنها، فراهم کرد.



جدول کسرها از بایروس ریند

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	$\frac{0}{37} = \frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296}$	$\frac{2}{71} = \frac{1}{40} + \frac{1}{508} + \frac{1}{710}$
$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$	$\frac{2}{39} = \frac{1}{26} + \frac{1}{78}$	$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$
$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$	$\frac{2}{41} = \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328}$	$\frac{2}{75} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150}$
$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$	$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$	$\frac{2}{77} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308}$
$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$	$\frac{2}{45} = \frac{1}{30} + \frac{1}{90}$	$\frac{2}{79} = \frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790}$
$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$	$\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$	$\frac{2}{81} = \frac{1}{54} + \frac{1}{162}$
$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$	$\frac{2}{49} = \frac{1}{28} + \frac{1}{196}$	$\frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{232} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$
$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$	$\frac{2}{51} = \frac{1}{24} + \frac{1}{102}$	$\frac{2}{85} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255}$
$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$	$\frac{2}{53} = \frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795}$	$\frac{2}{87} = \frac{1}{58} + \frac{1}{174}$
$\frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$	$\frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}$	$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{266} + \frac{1}{532} + \frac{1}{890}$
$\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}$	$\frac{2}{57} = \frac{1}{28} + \frac{1}{114}$	$\frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$
$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$	$\frac{2}{59} = \frac{1}{26} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531}$	$\frac{2}{93} = \frac{1}{62} + \frac{1}{186}$
$\frac{2}{27} = \frac{1}{18} + \frac{1}{54}$	$\frac{2}{61} = \frac{1}{40} + \frac{1}{214} + \frac{1}{448} + \frac{1}{610}$	$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{285} + \frac{1}{570}$
$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$	$\frac{2}{63} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$	$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$
$\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$	$\frac{2}{65} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195}$	$\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$
$\frac{2}{33} = \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$	$\frac{2}{67} = \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536}$	
$\frac{2}{35} = \frac{1}{20} + \frac{1}{70}$	$\frac{2}{69} = \frac{1}{46} + \frac{1}{138}$	

در حاشیه مثلثات

(قسمت چهارم)

معادله های مثلثاتی

• احمد قندهاری



$$ب) \quad x = 2k\pi + \pi + \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$$

k	x
۰	$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$$۲) \quad 2 \sin 2x + \sqrt{3} = 0$$

$$2 \sin 2x = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin \frac{\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

می دانیم که اگر داشته باشیم

$$\sin u = \sin \alpha$$

آنگاه داریم :

$$الف) \quad u = 2k\pi + \alpha \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

k	x
۱	$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
۲	$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$$ب) \quad u = 2k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$$

اگر $f(x)$ یک عبارت مثلثاتی باشد، برابری $f(x) = 0$ را یک معادله مثلثاتی با مجهول x می نامند. $\alpha \in D_f$ را جواب معادله گویند؛ هرگاه $f(\alpha) = 0$. منظور از حل معادله مثلثاتی، پیدا کردن همه α هایی است، که در برابری $f(x) = 0$ صدق می کنند.

۱ - معادله مثلثاتی سینوسی

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

مثال: معادله های زیر را حل کنید و جوابهای واقع در بازه

$[0, 2\pi]$ را بیابید.

$$۱) \quad 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = -\sin \frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$الف) \quad x = 2k\pi + \alpha \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$

k	x
۱	$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

را بنویسید.

$$۱) ۳ \tan\left(۲x + \frac{\pi}{۴}\right) - \sqrt{۳} = 0$$

$$\tan\left(\underbrace{۲x + \frac{\pi}{۴}}_u\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan \frac{\pi}{۶}$$

$$u = k\pi + \alpha \Rightarrow ۲x + \frac{\pi}{۴} = k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

$$۲x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲۴}}$$

$$۲) ۳ \cot ۴x + \sqrt{۳} = 0$$

$$\cot ۴x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} = -\cot \frac{\pi}{۳} = \cot\left(-\frac{\pi}{۳}\right)$$

$$\cot \underbrace{۴x}_u = \cot\left(-\underbrace{\frac{\pi}{۳}}_\alpha\right)$$

$$u = k\pi + \alpha \Rightarrow ۴x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۱۲}}$$

حالت‌های خاص در معادله‌های مثلثاتی

$$۱.) \begin{cases} \sin x = 0 \\ \tan x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi$$

$$۲.) \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cot x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$۳.) \sin x = 1 \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$۴.) \sin x = -1 \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

$$۵.) \cos x = 1 \Rightarrow x = ۲k\pi$$

$$۶.) \cos x = -1 \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi$$

$$۷.) \begin{cases} \tan x = 1 \\ \cot x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$$

k	x
۰	$\frac{۲\pi}{۳}$
۱	$\pi + \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۳}$

۲ - معادله مثلثاتی کسینوسی

$$\cos u = \cos \alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$$

مثال: معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کنید و جوابهای کلی آنها

را بنویسید.

$$۱) ۲ \cos ۲x - \sqrt{۲} = 0$$

$$۲ \cos ۲x = \sqrt{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \cos u = \cos \alpha$$

$$u = ۲k\pi \pm \alpha \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \boxed{x = k\pi \pm \frac{\pi}{۸}}$$

$$۲) \cos ۴x + \cos ۲x = 0$$

$$\cos ۴x = -\cos ۲x = \cos(\pi - ۲x)$$

$$\Rightarrow \cos \underbrace{۴x}_u = \cos \underbrace{(\pi - ۲x)}_\alpha$$

$$\text{الف) } u = ۲k\pi + \alpha \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi - ۲x$$

$$\Rightarrow ۶x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{۲k\pi + \pi}{۶}}$$

$$\text{ب) } u = ۲k\pi - \alpha \Rightarrow ۴x = ۲k\pi - \pi + ۲x$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{۲k\pi - \pi}{۲}}$$

۳ - معادله مثلثاتی تانژانتی یا کتانژانتی

$$\begin{cases} \tan u = \tan \alpha \\ \cot u = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

مثال: معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کنید و جوابهای کلی آنها

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\Delta\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\Delta\pi}{12}}$$

ب) $u = 2k\pi + \pi - \alpha$

$$\Rightarrow 4x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - 2x + \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 6x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}}$$

۳- معادله‌هایی که از راه دسته‌بندی، قابل فاکتورگیری باشند،
براحتی قابل حل هستند.

مثال: معادله $\sin x + 2\cos x + 2\sin x \cos x + 1 = 0$ را
حل کنید.

$$\sin x + 2\sin x \cos x + 2\cos x + 1 = 0$$

$$\sin x(1 + 2\cos x) + (2\cos x + 1) = 0$$

$$(2\cos x + 1)(\sin x + 1) = 0$$

الف) $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

$$\cos x = -\cos \frac{\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$$

ب) $\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}$$

۴- معادله‌هایی که به معادله درجه دوم جبری تبدیل می‌شوند.
مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$1) \cos 2x + \cos x - 2 = 0$$

می‌دانیم: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ بنابراین داریم:

$$2\cos^2 x - 1 + \cos x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$$

فرض می‌شود: $\cos x = y$

$$2y^2 + y - 3 = 0$$

$$A) \begin{cases} \tan x = -1 \\ \text{یا} \\ \cot x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

چند نکته درباره معادله‌های مثلثاتی

۱- برای حل هر معادله مثلثاتی که به صورت زیر باشد:

$$a \sin mx + b \cos mx = 0$$

باید دو طرف، معادله را بر $\sin mx \neq 0$ یا بر $\cos mx \neq 0$ تقسیم کنیم.

مثال: معادله $3\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0$ را حل کنید و
جواب کلی آن را بنویسید.

حل: دو طرف معادله را بر $\cos 2x \neq 0$ تقسیم می‌کنیم.

توجه کنید اگر $\cos 2x = 0$ ، آن گاه $\sin 2x = \pm 1$ ، آن گاه

معادله به صورت $\pm 3 = 0$ خواهد شد که درست نیست. پس در
این مسأله $\cos 2x \neq 0$.

$$\frac{3\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sqrt{3}\cos 2x}{\cos 2x} = 0$$

$$\Rightarrow 3\tan 2x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}}$$

۲- معادله‌هایی که دو طرف آن به دو نسبت مثلثاتی همنام تبدیل

می‌شوند.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\sin(4x + \frac{\pi}{3}) + \cos 2x = 0$$

$$\sin(4x + \frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$$

$$\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$$

الف) $\alpha = 2k\pi + \alpha \Rightarrow 4x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + 2x - \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$3 \tan x + 3 \cot x = 4\sqrt{3}$$

راه اول:

دو طرف معادله را در $\tan x$ ضرب می کنیم.

$$3 \tan^2 x + 3 = 4\sqrt{3} \tan x$$

$$3 \tan^2 x - 4\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$$

فرض می شود: $\tan x = y$

$$\frac{3}{a}y^2 - \frac{4\sqrt{3}}{b}y + \frac{3}{c} = 0; b' = -2\sqrt{3}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-2\sqrt{3})^2 - 9 = 12 - 9 = 3$$

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$y_1 = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$y_2 = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{الف) } \tan x = y_1 = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ب) } \tan x = y_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{6}}$$

راه دوم:

$$3 \tan x + 3 \cot x = 4\sqrt{3}$$

دو طرف معادله را بر (۳) تقسیم می کنیم.

$$\tan x + \cot x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ضرایب صفر است.}$$

$$\text{الف) } \cos x = y_1 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi}$$

$$\text{ب) } \cos x = y_2 = -\frac{3}{2} \quad \text{غیر ممکن است}$$

زیرا $-1 \leq \cos x \leq +1$

$$2) \quad 4 \sin^2 x - 2(\sqrt{2} + 1) \sin x + \sqrt{2} = 0$$

فرض می شود: $\sin x = y$

$$\frac{4}{a}y^2 - \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{b}y + \frac{\sqrt{2}}{c} = 0; b' = -(\sqrt{2} + 1)$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (\sqrt{2} + 1)^2 - 4\sqrt{2}$$

$$= 2 + 1 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2 + 1 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 1 \pm (\sqrt{2} - 1)}{4}$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} - 1}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\text{الف) } \sin x = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{ب) } \sin x = y_2 = 0 = \sin \frac{\pi}{6}$$

۶ - معادله‌هایی که به کمک تبدیل به حاصل جمع، قابل حل هستند.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \sin x$$

فرمول: $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

$$= \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}\right) = \sin x$$

$$\Rightarrow \sin 2x + \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2}}$$

۷ - معادله‌هایی که کمانهای متمم دارند و از دو نسبت مثلثاتی تشکیل شوند.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 2 \cos\left(\frac{5\pi}{\lambda} - x\right) = 3$$

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} - \frac{5\pi}{\lambda} + x\right) = 3$$

$$(x - \frac{\pi}{\lambda}) + (\frac{5\pi}{\lambda} - x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{کمانها متمم اند}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = y \quad \text{فرض می شود}$$

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) - 3 = 0$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{c}{a} = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ضرایب صفر است}$$

$$\text{الف) } \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = y_1 = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{5\pi}{\lambda}}$$

$$\text{ب) } \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = y_2 = -3 \quad \text{غیر ممکن است}$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$4\sqrt{3} \sin x \cos x = 3 \Rightarrow 2\sqrt{3} (2 \sin x \cos x) = 3$$

$$2\sqrt{3} \sin 2x = 3 \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\sin 2x = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\text{الف) } 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{6}}$$

$$\text{ب) } 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{3}}$$

۵ - معادله‌هایی که به کمک تبدیل به حاصل ضرب، قابل حل هستند.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\sin 5x - \sin 3x + \sin x = 0$$

$$\text{توجه: } \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} + \sin x = 0$$

$$2 \cos \frac{5x+3x}{2} \cdot \sin \frac{5x-3x}{2} + \sin x = 0$$

$$2 \cos 4x \sin x + \sin x = 0$$

$$\sin x (2 \cos 4x + 1) = 0$$

$$\text{الف) } \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$$

$$\text{ب) } 2 \cos 4x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 4x = -\cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \cos 4x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 4x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}}$$

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow a \times \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + b \times \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = c$$

$$\tan \frac{x}{2} = y \quad \text{فرض می شود:}$$

دو طرف معادله را در $(1 + y^2)$ ضرب می کنیم.

$$\Rightarrow a \times \frac{2y}{1 + y^2} + b \times \frac{1 - y^2}{1 + y^2} = c$$

$$\Rightarrow 2ay + b - by^2 = c + cy^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{(b+c)}y^2 - \frac{b}{2ay} + \frac{c}{(c-b)} = 0}$$

از حل این معادله درجه دوم y یعنی $\tan \frac{x}{2}$ ، سپس x محاسبه

می شود. شرط این که این معادله دارای جواب باشد، آن است

که: $\Delta' \geq 0$

$$\Delta' = b'^2 - ac = a^2 - (c+b)(c-b) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 - (c^2 - b^2) \geq 0 \Rightarrow a^2 - c^2 + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 \geq c^2}$$

مثال: به ازای چه مقادیر m معادله

$$(m-2)\sin x + (m+1)\cos x = m\sqrt{2}$$

دارای جواب است؟

حل: برای این که این معادله، جواب داشته باشد، باید،

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 + (m+1)^2 \geq (m\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 4 + m^2 + 2m + 1 \geq 2m^2$$

$$\Rightarrow -2m + 5 \geq 0 \Rightarrow -2m \geq -5 \Rightarrow m \leq \frac{5}{2}$$

۸- هر معادله مثلثاتی که به صورت زیر باشد:

$$a \sin nx + b \cos nx = c \quad (n \in \mathbb{R})$$

به دو روش زیر قابل حل است:

روش اول: دو طرف معادله را بر $a \neq 0$ تقسیم می کنیم، آن گاه

$$\Rightarrow \sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a} \quad \text{به جای } \tan \varphi, \frac{b}{a} \text{ رابه } \frac{3}{\sqrt{3}}$$

می کنیم و سپس دو طرف تساوی را در $\cos \varphi$ ضرب می کنیم. معادله حاصل به یک معادله ساده مثلثاتی تبدیل می شود.

مثال: معادله $\sqrt{3} \sin x + 3 \cos x = 3$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را بر $\sqrt{3}$ تقسیم می کنیم.

$$\sin x + \frac{3}{\sqrt{3}} \cos x = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin x + \boxed{\sqrt{3}} \cos x = \sqrt{3} \quad \text{دو طرف معادله}$$

$$\Rightarrow \sin x + \tan \frac{\pi}{3} \cos x = \sqrt{3} \quad \text{را در } \cos \frac{\pi}{3} \text{ ضرب می کنیم:}$$

$$\Rightarrow \sin x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

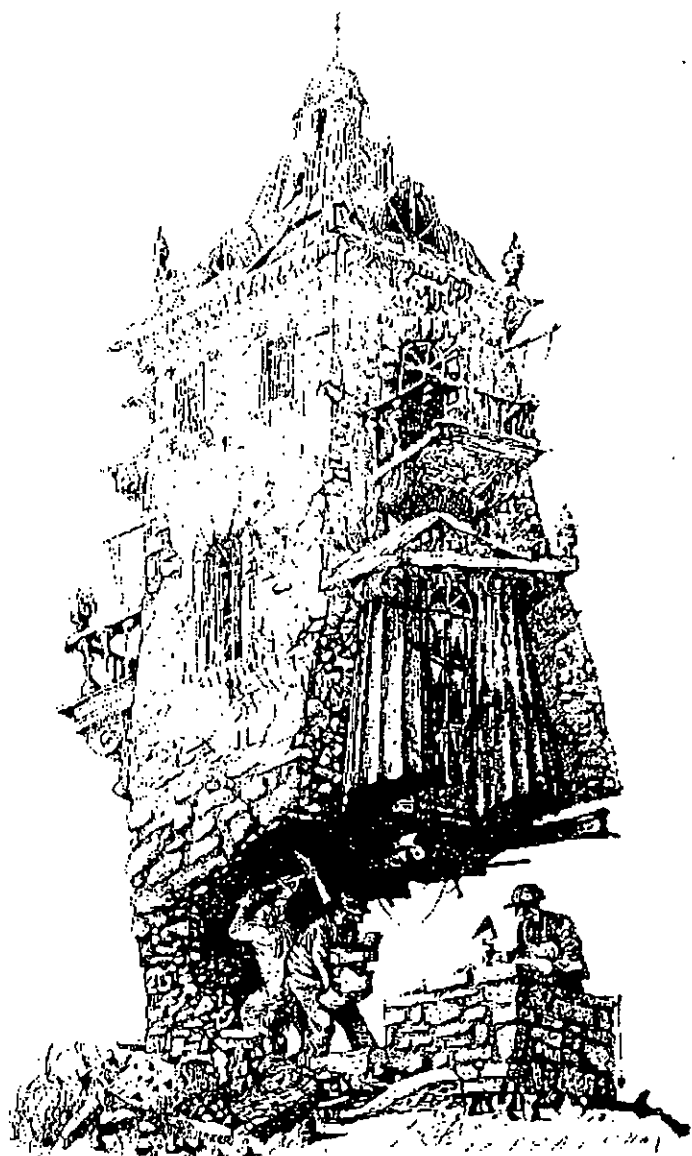
$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\text{الف) } x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi}$$

$$\text{ب) } x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}}$$

روش دوم: به جای $\sin x$ و $\cos x$ از دو فرمول زیر استفاده

می کنیم:



● عبدالحسین مصحفی

روش از سرگیری (= روش تکرار)*

و کاربرد آن در
به دست آوردن
اندازه تقریبی ریشه یک معادله

۲۲ رقم پس از ممیز به دست آورده است.**

دنباله تقریبهای یک عدد حقیقی

در ریاضیات کاربردی، زیاد پیش می آید که باید عددی حقیقی را در یک محاسبه به کار برد، در حالی که دسترسی به اندازه واقعی آن عدد ممکن نیست؛ مثلاً عددی گنگ غیر جبری یا ریشه معادله ای حل نشدنی باشد. در چنین فرایندهایی، به جای اندازه واقعی عدد، اندازه تقریبی آن را به کار می برند. برای به دست آوردن اندازه تقریبی چنین عددهایی، روشهای گوناگونی هم نشان داده شده است. در این روشها، اگر بنا باشد اندازه تقریبی عدد حقیقی α به دست آید، دنباله ای همگرا از عددهای حقیقی μ_n و از گونه

$$(\mu_n) = \mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \mu_{k+1}, \dots$$

چنان تشکیل می شود که جمله هایش بترتیب، به اندازه واقعی α نزدیکتر شوند و سرانجام حد آن، همان اندازه واقعی α باشد. این دنباله را دنباله تقریبهای عدد α ، و در حالتی که α ریشه معادله

امروزه «روش از سرگیری» یک ابزار نرم افزاری بسیار کارآمد در الگوریتمهای کامپیوتری است و در برنامه نویسیها برای کامپیوتر، کاربرد بسیار گسترده دارد. در رابطه ها و معادله های ماتریسی نیز به کار می رود. اما پیش از اینها، کاربرد روش از سرگیری در به دست آوردن اندازه تقریبی ریشه معادله ها بوده است؛ معادله هایی که با روشهای شناخته شده حل نمی شده اند. با روی کار آمدن ماشینهای حساب و کامپیوترها، این کاربرد روش از سرگیری نیز گسترش یافته است. از دیدگاه تاریخی، غیاث الدین جمشید کاشانی، ریاضیدان بزرگ ایرانی سده نهم هجری، نخستین کسی به شمار می آید که روش از سرگیری را برای حل معادله درجه سوم به کار برده است. او در اثر خود به نام «رساله در جیب و وتر» از راه به کار بردن روش از سرگیری، اندازه تقریبی ریشه معادله ای را که اکنون به صورت

$$3x - x^3 = 0.10467191\dots$$

نوشته می شود و از روی آن، مقدار سینوس زاویه یک درجه را تا

می‌برند. در روش از سرگیری، معادله داده شده $f(x)=0$ به معادله $x=g(x)$ تبدیل می‌شود. این معادله، رابطه‌ای است که در آن، متغیر x تابع تغییرهای خودش است و برای هر مقدار آغازی x_0 که به جای x گذاشته شود، یک دنباله

$$(x_n) = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots$$

را به دست می‌دهد که جمله هایش بترتیب برابرند با:

$$x_1 = g(x_0),$$

$$x_2 = g(x_1),$$

$$x_3 = g(x_2),$$

⋮

$$x_k = g(x_{k-1})$$

⋮

بنا بر مقدار x_0 و بنا بر ساختار $g(x)$ ، دنباله (x_n) ممکن است همگرا، واگرا یا تکرار جمله ثابت باشد. حالت اخیر، هنگامی است که مقدار x_0 ریشه معادله $f(x)=0$ باشد.

مثال ۱: معادله $2x-1=0$ را اگر به صورت $x=3x-1$ بنویسیم، در این صورت، بجای $0/5$ که جواب معادله است، هر عدد دیگر را مقدار آغازی x_0 بگیریم، دنباله‌ای واگرا به دست می‌آید. با مقدار آغازی $x_0=1$ داریم:

$$x_1 = 3 \times 1 - 1 = 2, \quad x_2 = 3 \times 2 - 1 = 5,$$

$$x_3 = 3 \times 5 - 1 = 14, \dots$$

و با دنبال کردن عمل، دنباله زیر را خواهیم داشت که صعودی و واگراست:

$$(x_n) = 1, 2, 5, 14, 41, 122, \dots$$

هر عدد دیگر را هم مقدار آغازی بگیریم، باز دنباله‌ای واگرا به دست می‌آید. چنان که:

$$x_0 = 0 \Rightarrow (x_n) = 0, -1, -4, -13, -40, \dots$$

$$x_0 = -0/7 \Rightarrow (x_n) = -0/7, -3/1, -10/3, \dots$$

در حالت $x_0 = 0/5$ دنباله‌ای با تکرار همین جمله به دست می‌آید:

$$x_0 = 0/5 \Rightarrow (x_n) = 0/5, 0/5, 0/5, \dots$$

مثال ۲: همان معادله $2x-1=0$ را اگر به صورت

$$x = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

بنویسیم، با انتخاب $x_0=1$ ، دنباله

داده شده $f(x)=0$ باشد، دنباله تقریبهای ریشه معادله $f(x)=0$ می‌نامند.

در دنباله تقریبهای α ، نظیر هر عدد کوچک و داده شده ε ، جمله‌ای مانند μ_k وجود خواهد داشت که:

$$|\alpha - \mu_k| < \varepsilon$$

عدد μ_k با این شرط را اندازه تقریبی α با تقریب کمتر از ε می‌نامند. هرگاه در دنباله همگرای (μ_n) ، هرچه باشد عدد طبیعی n داشته باشیم:

$$|\mu_{k+n} - \mu_k| < \varepsilon, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

حد μ_{k+n} نیز همان حد دنباله و برابر با α است و نتیجه می‌شود:

$$|\alpha - \mu_k| < \varepsilon$$

از این رو، اگر در به دست آوردن جمله‌های یک دنباله همگرای (μ_n) به جمله‌ای برسیم که تفاوت آن با جمله بعد و با جمله‌های پس از آن، کوچکتر از ε باشد، آن جمله، مقدار تقریبی α با تقریب کمتر از ε خواهد بود. برای نمونه، در دنباله

$$1/2, 1/25, 1/259, 1/2599, 1/25992,$$

$$1/259921, \dots$$

که یک دنباله تقریبهای ریشه معادله $x^3-2=0$ است، می‌بینیم که جمله‌های از پنجم به بعد همه با جمله چهارم تا چهار رقم پس از ممیز مشترکند؛ یعنی تفاوت جمله چهارم با هر یک از جمله‌های پس از خودش، از $0/0001$ کوچکتر است. بنابراین، عدد $1/2599$ اندازه تقریبی ریشه سوم با تقریب کمتر $0/0001$ است. دنباله تقریبهای هر عدد حقیقی α یکتا نیست؛ بنابر فرایندی که برای پدید آوردن دنباله می‌توان به کار برد و بنابر انتخاب جمله یکم μ_0 ، برای هر عدد α ، دنباله‌های زیادی را می‌توان تشکیل داد. از بین این دنباله‌ها و از آنها که همگرا باشند، آن را باید برگزید که شتاب همگرایی آن بیشتر و نظیر هر ε ، محاسبه تعداد کمتری از جمله‌ها لازم باشد. به این نکته هم باید توجه داشت که یک دنباله با قانون معین هم ممکن است تنها آن گاه همگرا باشد که جمله یکم μ_0 از آن بیرون از فاصله معینی انتخاب نشده باشد.

متغیر تابع تغییرهای خودش

روشهایی گوناگون را که برای به دست آوردن اندازه تقریبی ریشه یک معادله $f(x)=0$ می‌توان به کار برد، تفاوتشان در چگونگی فرایندی است که هر کدام برای پدید آوردن دنباله تقریبها به کار

به دنباله‌ای متناوب از دو جمله ثابت می‌انجامد و کارساز نیست.

انتخاب مقدار آغازی x_0

گام نخست که برداشته شد و رابطه $x = g(x)$ به صورت اثربخش به دست آمد، گام بعدی، انتخاب مقدار آغازی x_0 است. مقدار x_0 باید در فاصله‌ای باشد که قدر مطلق مشتق کوچکتر از یک است و در این فاصله هم، هر چه به اندازه واقعی x نزدیکتر باشد، اندازه خواسته شده، زودتر به دست می‌آید. برای انتخاب بهینه مقدار x_0 ، روش معینی را نمی‌توان نام برد، می‌توان دو یا سه مقدار را آزمایش کرد و دریافت که جمله‌های دنباله نظیر، کدام یک از آنها به هم نزدیکترند و همان را به کاربرد.

روش از سرگیری، سریعترین روشهای محاسبه اندازه تقریبی ریشه یک معادله به شمار می‌آید. اما هم تشکیل معادله $x = g(x)$ و هم انتخاب مقدار آغازی x_0 ، به ذوق و سلیقه شخص و به ورزیدگی و مهارت او بستگی دارد.

برنامه کامپیوتری روش از سرگیری

یک امتیاز دیگر روش از سرگیری، سادگی و کوتاهی برنامه کامپیوتری آن است. این برنامه، بیش از چند دستور عمل ندارد و می‌توان آن را به هر زبان برنامه نویسی برگرداند و روی هرگونه کامپیوتر اجرا کرد. دستور عملهای این برنامه چنین هستند:

۱- معرفی تابع $g(x)$.

۲- دستور جایگزینی $a = x_0$.

۳- محاسبه $x = g(a)$.

۴- بررسی شرط $x - a < \varepsilon$.

در صورت برقرار نبودن شرط ۴، جایگزینی $a = x$ و برگشت به دستور ۳. در صورت برقرار شدن شرط ۴، نمودن مقدار x و پایان برنامه.

چند مسأله نمونه

۱- معادله کاشانی: پیش از این یادآوری شد که کاشانی برای به دست آوردن اندازه سینوس یک درجه، محاسبه‌هایی را انجام می‌دهد و سرانجام با معادله درجه سوم زیر روبه‌رو می‌شود:

$$3x - x^3 = 0.104719$$

کاشانی استدلال می‌کند که چون مقدار x خیلی کوچک است،

مثال ۳: به دست آوردن اندازه تقریبی ریشه دوم یک عدد حقیقی و مثبت R ، هم‌ارز است با به دست آوردن اندازه تقریبی ریشه معادله

$$x^2 = R$$

و این معادله را به صورتهای گوناگون می‌توانیم به $x = g(x)$ تبدیل کنیم. از جمله:

$$1) \quad x^2 + x = x + R \Rightarrow x = 1 + \frac{R-1}{x+1}$$

$$2) \quad 2x^2 = x^2 + R \Rightarrow x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{R}{x} \right)$$

$$3) \quad 2x^2 = x^2 + R \Rightarrow x = \sqrt{\frac{x^2 + R}{2}}$$

با فرض $R=2$ و با انتخاب $x_0=1$ و با تقریب کمتر از 0.0001 ، بنابر حالت (۱):

$$x = 1 + \frac{1}{x+1};$$

$$x_1 = 1/5, \quad x_2 = 1/4, \quad x_3 = 1/41666,$$

$$x_4 = 1/41379, \quad x_5 = 1/41428, \quad x_6 = 1/414201$$

بنابر حالت (۲):

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x};$$

$$x_1 = 1/5, \quad x_2 = 1/41666$$

$$x_3 = 1/414219, \quad x_4 = 1/414213$$

بنابر حالت (۳):

$$x = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{2}}$$

$$x_1 = 1/22477, \quad x_2 = 1/32287, \dots,$$

$$x_{11} = 1/41404, \quad x_{12} = 1/414127$$

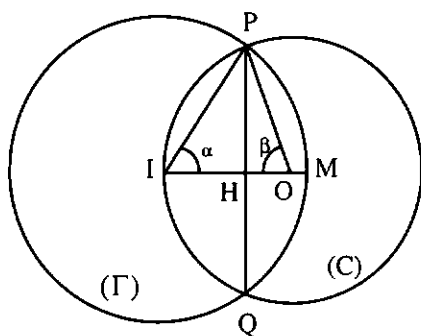
در حالت (۱) پس از ۶ بار، در حالت (۲) پس از ۴ بار و در حالت (۳) پس از ۱۲ بار عمل از سرگیری، در می‌یابیم که جواب پذیرفتنی $1/414$ است و می‌بینیم که بین سه حالت بالا، حالت (۲) بهینه است.

یادآوری می‌شود که تبدیل معادله $x^2 = R$ به معادله $x = \frac{R}{x}$

چراگاه» بیان شده و به مسابقه گذاشته شده است؛ کسی نصف چمنی دایره شکل را صاحب است، یک بز دارد، یک سر رسانی را به گردن بز می بندد و سر دیگر آن را در یک نقطه از محیط چمن ثابت می کند. درازای ریمان را چه اندازه بگیرد تا بز بیش از نیمی از مساحت چمن را نتواند چرا کند؟

به بیان هندسی: دایره (C) به مرکز O و به شعاع R داده شده است. به مرکز I واقع بر محیط دایره (C)، دایره (Γ) به شعاع r، اگر چنان رسم شده باشد که مساحت دایره (C) را نصف کرده باشد، اندازه r را برحسب R به دست آورید.

برای سادگی، شعاع دایره (C) را $R=1$ می گیریم. به فرض $\angle OIP = \alpha$ و $\angle IOP = \beta$ ، در مثلث IOP داریم:



$$2\alpha + \beta = \pi$$

$$\sin \beta = r \sin \alpha$$

و چون مساحت قطعه PIQ از دایره (C) و مساحت قطعه PMQ از دایره (Γ) را حساب کنیم و مجموع آنها را با نصف مساحت دایره (C) برابر بگیریم، به دست می آوریم:

$$\beta + r^2 \alpha - \sin \beta = \frac{\pi}{2}$$

از حذف α و r بین رابطه های بالا به دست می آید:

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \sin \beta - 2(\pi - \beta) \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

اکنون روش از سرگیری را روی این معادله، به کار می بریم و

چون IO از IP = IM و بنابر آن β از $\frac{\pi}{3}$ کوچکتر است، مقدار

آغازی β ، را یک رادیان می گیریم. در این صورت، دنباله تقریبهای β برحسب رادیان چنین به دست می آید:

مقدار x^2 خیلی کوچکتر است، و با چشم پوشی از آن، در نخستین رقم با معنای جواب معادله، تفاوتی پیش نخواهد آمد. پس با فرض $x^2 = 0$ به دست می آورد:

$$x \approx 0.1047719 \div 3 \approx 0.03$$

و نتیجه می گیرد، نخستین رقم با معنای جواب معادله ۳ و در مرتبه دوم پس از ممیز واقع است. او رقم با معنای بعدی را a می گیرد و از معادله

$$0.03a = \frac{0.1047719 + (0.03)^3}{3}$$

رقم a را برابر با ۴ به دست می آورد. او محاسبه را به همین ترتیب (و در پایه ۶۰) دنبال می کند و ۹ رقم با معنای بعدی را به دست می آورد.

هرگاه روش از سرگیری را به گونه امروزی آن و با مقدار آغازی $x_0 = 0.03$ به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$x = \frac{0.1047719 + x^2}{3}$$

$$x_0 = 0.03 \Rightarrow (x_n) = 0.03, 0.0349329, \dots$$

$$0.03493381, \dots$$

و تا ۹ رقم پس از ممیز، به عدد 0.034934812 دست می یابیم. یادآوری می شود که در روش از سرگیری، تبدیلی

$$x^2 - px + q = 0 \rightarrow x = \frac{q + x^2}{p}$$

تنها برای آن جواب از معادله کارساز است که قدر مطلقش بسیار کوچک باشد و گرنه بهتر است تبدیلی از گونه

$$x = \sqrt[p]{px - q} \quad \text{یا} \quad x = \frac{q}{p - x^2} \quad \dots$$

را به کار برد. چنان که برای معادله $x^2 + x - 3 = 0$ که جواب آن بین ۱ و ۲ واقع است، با تبدیلی $x = \sqrt[3]{3 - x}$ و با انتخاب $x_0 = 1$ ، پس از ۹ بار از سرگیری، به جواب 1.2134116 دست می یابیم.

۲- مسأله بز و چراگاه: رسم کردن دایره ای که محیط دایره داده شده ای را نصف کند، کار ساده، و مسأله های حل شدنی زیادی در زمینه آن طرح شده است و می توان طرح کرد. اما رسم کردن دایره ای که مساحت دایره داده شده ای را نصف کند، با خط کش و پرگار، شدنی نیست. این مسأله، با عنوان «مسأله بز و

از سرگیری را به کار ببریم. برای مثال، به فرض $a = \frac{1}{\lambda}$ داریم:

$$\alpha = \frac{4 \sin 2\alpha + \pi}{\lambda}$$

و چون در این حالت، اندازه x نزدیک به یک چهارم شعاع است و بنابر آن:

$$\cos \alpha \approx 0.75, \quad \alpha \approx 0.723$$

مقدار آغازی α را 0.723 می‌گیریم و دنباله تقریبهای α می‌شود:

$$0.723, 0.8881106, 0.882043, 0.8833879,$$

$$0.88331277, 0.8831783, \dots$$

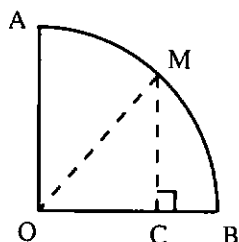
و با تقریب 0.0001 داریم:

$$\alpha = 0.8831 \Rightarrow \frac{x}{R} = 0.3652, \quad \frac{x}{2R} = 0.1826$$

۴- مسأله‌ای از خیام: روی کمان AB از ربع دایره AOB ,

نقطه M را چنان بیابید که اگر C پای عمود وارد از M بر OB باشد، داشته باشیم:

$$\frac{OA}{MC} = \frac{OC}{CB}$$



اگر راه حل جبری را به کار ببریم، با فرض $OC = x$ و با فرض این که شعاع دایره برابر یک باشد، به معادله درجه سوم زیر می‌رسیم:

$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0$$

این معادله، یک ریشه حقیقی دارد که کمی از 0.5 بزرگتر است و چون آن را به صورت

$$x = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

بنویسیم و روش از سرگیری را با مقدار آغازی $x_0 = 0.5$ به کار ببریم، تا پنج رقم پس از ممیز، به جواب $x = 0.54368$ دست می‌یابیم.

می‌توانیم راه مثلثاتی را به کار ببریم. با فرض $\angle MOB = \alpha$ و این که شعاع ربع دایره را یک بگیریم، به معادله مثلثاتی

$$1, 1/4277821, 1/2407038, 1/2358994,$$

$$1/2358969, 1/2358969$$

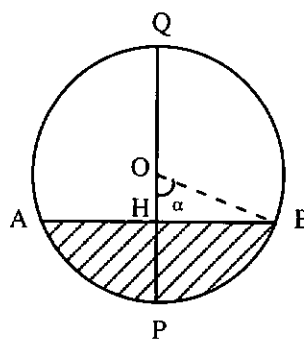
و مقدار r تا ۷ رقم پس از ممیز می‌شود:

$$r = 2 \sin \frac{1/2358969}{2} = 1/1587284$$

شعاع دایره‌ای که باید رسم شود، تقریباً $1/16$ برابر شعاع دایره داده شده است.

۳- درجه‌بندی مخزن گازوئیل: مخزن گازوئیل شوفازخانه‌ها به شکل استوانه است و معمولاً چنان نصب می‌شود که مولدهای آن در وضع افقی‌اند و لوله‌ای پلاستیکی که سطح گازوئیل درون مخزن را نشان می‌دهد، در وضع قائم قرار دارد. درجه‌بندی این لوله، در عمل خیلی ساده است؛ هر بار حجم معینی از گازوئیل را درون مخزن می‌ریزند و سطح آن را روی لوله پلاستیکی نشانه می‌گذارند. اما این درجه‌بندی به عنوان یک مسأله ریاضی، عبارت از این است که اگر نسبت مساحت قطعه‌ای از یک دایره به مساحت آن دایره معلوم باشد، ارتفاع آن قطعه، چه کسری از قطر دایره است؟

شعاع دایره را R ، ارتفاع قطعه دایره را x ، زاویه مرکزی کمان قطعه را 2α ، مساحت قطعه را S ، و نسبت مساحت قطعه به مساحت دایره را a می‌گیریم و خواهیم داشت:



$$x = R(1 - \cos \alpha)$$

$$S = R^2 \alpha - \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha$$

و به دست خواهیم آورد:

$$2\alpha - \sin 2\alpha = 2a\pi$$

از این معادله، برای مقدارهای مختلف a ، اندازه α و از روی آن ارتفاع x به دست می‌آید. برای حل این معادله نیز می‌توانیم روش

درجه معلوم است و باید اندازه μ بر حسب درجه به دست آید. بجز روشهایی که نیوتن و کسان دیگر برای حل معادله به کار بردند، ریاضیدان آلمانی کونیکس، روش از سرگیری با مقدار آغازی $\mu_0 = M$ را به کار برد و زودتر به جواب پذیرفتنی دست یافت. برای مثال، در حالت:

$$e = 0.0028433, M = 215^\circ 28' 47.7''$$

خواهیم داشت:

$$\mu_0 = 215^\circ 28' 47.7''$$

$$\Rightarrow \mu_1 = 215^\circ 23' 07.2'',$$

$$\mu_2 = \mu_3 = 215^\circ 23' 08''$$

تنها پس از سه بار عمل از سرگیری، جواب پذیرفتنی به دست می آید.
۶- سه مسأله از هفت مسأله شیخ بهایی:

$$1) \begin{cases} x + \sqrt{y} = 10 \\ y + \sqrt{x} = 5 \end{cases}$$

$$x = 10 - \sqrt{5 - \sqrt{x}}, \quad 9 > x > 10 - \sqrt{5}$$

$$x_0 = 8 \Rightarrow x \approx 8.5597593, \quad y = 2.0742933$$

$$2) \begin{cases} x + y = 10 \\ (x + \sqrt{x})(y + \sqrt{y}) = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - y \\ x = \frac{35}{y + \sqrt{y}} - \sqrt{x} \end{cases}$$

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 8 \Rightarrow x \approx 1.82119, \quad y \approx 8.17881$$

$$3) \begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = x \end{cases}$$

$$x = \frac{100}{20 + 8x - x^2}$$

$$x_0 = 3 \Rightarrow x \approx 2.8783657, \quad y \approx 7.1216343$$

یادداشتها:

* Iteration Method

* برای اطلاع بیشتر، می توانید به «کاشانی نامه» تألیف استاد ابوالقاسم قربانی، یا به نوشتار ایشان در مجله ریاضی بکان خرداد ۱۳۴۹ مراجعه کنید.

$$\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$$

می رسمیم. این معادله را به صورت

$$\cos \alpha = \frac{1}{1 + \sin \alpha} \Rightarrow \alpha = \text{Arc}(\cos \frac{1}{1 + \sin \alpha})$$

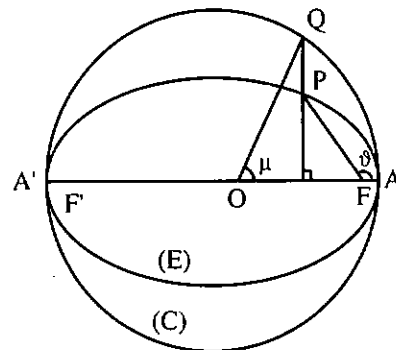
می نویسیم و روی آن، روش از سرگیری را با مقدار آغازی $\alpha_0 = 6^\circ$ به کار می بریم که جواب

$$\alpha = 57^\circ 3' 55''$$

به دست خواهد آمد. (توجه داشته باشید که مجهول x راه حل جبری با $\cos \alpha$ برابر است.)

۵- معادله کپلر: پس از آن که کپلر قانونهای سه گانه حرکت سیاره ها به دور خورشید و نیوتن قانون جاذبه عمومی را به دست آوردند، این مسأله به میان آمد که ثابت کنند از قانون جاذبه عمومی، می توان قانونهای کپلر را به دست آورد. در پی حل این مسأله، با معادله $\mu - e \sin \mu = M$

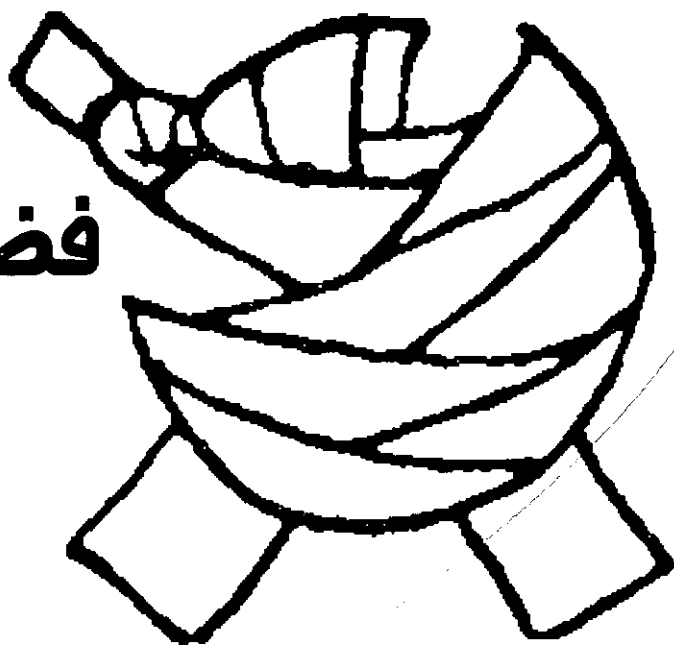
به نام معادله کپلر روبه رو شدند. در این معادله، μ بی هنجاری مرکزی، M بی هنجاری متوسط، و e خروج از مرکز مدار سیاره به دور خورشید است. اگر بیضی (E) به مرکز O و به قطر بزرگ $A'A$ مدار سیاره، F کانون این بیضی، دایره (C) به قطر $A'A$ دایره اصلی بیضی، P موضع سیاره و Q نقطه نظیر P روی دایره (C) باشد، زاویه $\angle AFP = \nu$ را بی هنجاری حقیقی و زاویه $\angle AOQ = \mu$ را بی هنجاری مرکزی نظیر موضع P از سیاره می نامند.



همچنین سیاره ای فرضی Q' را در نظر می گیرند که پیرامون دایره (C) را با حرکت یکنواخت بپیماید و با سیاره حقیقی در A و A' بر هم واقع باشند و زاویه $\angle AOQ' = M$ را بی هنجاری متوسط می نامند. در معادله کپلر، اندازه e بر حسب رادیان و اندازه M بر حسب

فضاهای برداری

و ضرب داخلی



● حمیدرضا امیری

وقتی از ضرب داخلی صحبت به میان می‌آید، معمولاً بردارهایی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ برایمان مجسم می‌شوند و حاصلضرب داخلی آنها که عددی است حقیقی؛ اما بردار، واژه‌ای است که برای ما تازگی ندارد و از قبل با آن آشنا هستیم، فضای برداری نیز باید چنین باشد که البته با حذف این مبحث (فضای برداری) از برنامه درسی دبیرستان، با این واژه زیاد مأنوس نبوده یا حداقل زیاد از آن استفاده نمی‌کنیم. ولی فضای برداری چندجمله‌ایها، فضای برداری ماتریسها، فضای برداری توابع پیوسته و... فضاهایی برداری هستند که همواره از اعضای آنها، یعنی بردارهای این فضاها، اما نه به عنوان بردار و نه حتی با نام بردار، از آنها استفاده می‌کنیم.

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا تعریف ضرب داخلی، اندازه (نُرم)، زاویه بین دو بردار و عمود بودن، که با آنها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ آشنا هستیم، قابل تعمیم است؟

و بین اعضای V و اعضای $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) عملی به نام ضرب اسکالر، به گونه‌ای تعریف شود که اولاً این عمل در V بسته باشد؛ یعنی برای هر $r \in \mathbb{R}$ و هر $u \in V$ همواره $r \cdot u \in V$ و ثانیاً خواص زیر، همگی برقرار باشند، در این صورت، V را یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ یا یک فضای برداری حقیقی می‌نامند:

(برای هر $u \in V$)

$$I) \quad 1 \cdot u = u$$

$$II) \quad (r_1 + r_2) \cdot u = r_1 \cdot u + r_2 \cdot u$$

$$III) \quad r \cdot (u_1 + u_2) = r \cdot u_1 + r \cdot u_2$$

$$IV) \quad r_1 \cdot (r_2 \cdot u) = (r_1 r_2) \cdot u$$

با توجه به تعریف فوق و تعریف جمع ماتریسی، جمع برداری در $\mathbb{R}^2$ ، $\mathbb{R}^3$ ، $\mathbb{R}^n$ ، (جمع مؤلفه به مؤلفه)، جمع چندجمله‌ایها، جمع توابع پیوسته و تعریف ضرب عدد در ماتریس،

می‌خواهیم با در نظر گرفتن اصلهایی خاص، تعریفی برای ضرب داخلی دو بردار (در هر فضای برداری) ارائه دهیم که جامع و مانع بوده و در واقع، ضرب داخلی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ حالت خاص آن باشد و همه خواص ضرب داخلی و نتیجه‌های حاصل از آن حفظ شود.

برای شروع، فضای برداری حقیقی را تعریف می‌کنیم:

اگر V مجموعه‌ای ناتهی باشد و عملی به نام عمل جمع روی V تعریف کنیم، به طوری که این عمل روی V ، دارای خواص شرکت پذیری، عضو خنثی، عضو متقابل (عضو قرینه) و جابه جایی باشد؛ یعنی:

$$I) \quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad (\text{برای هر } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ در } V)$$

$$II) \quad a + 0 = 0 + a = a \quad (0 \text{ را عضو خنثی می‌نامیم})$$

$$III) \quad a + (-a) = (-a) + a = 0 \quad (0 \text{ قرینه } a \text{ نامیده می‌شود})$$

$$IV) \quad a + b = b + a \quad (\text{برای هر } a \text{ و } b \text{ در } V)$$

نرم (طول) یک بردار

با توجه به اصل (III) ضرب داخلی و این که $(u, u) \geq 0$ نرم یا طول بردار u را با نماد $\|u\|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \quad \text{یا} \quad \|u\|^2 = (u, u)$$

تذکر: اگر u برداری از فضای برداری V باشد و $\|u\| = 1$ ، در این صورت، u را بردار یکه می نامیم و در حالت کلی، هرگاه V برداری دلخواه از فضای برداری V باشد، همواره دارای بردار یکه بوده و آن را با e_V نشان داده و از ضرب عدد $\frac{1}{\|v\|}$ در بردار V به دست می آید:

$$e_V = \frac{1}{\|V\|} V$$

مثالهایی از ضرب داخلی در فضاهای برداری

۱. فضای برداری $\mathbb{R}^n$

در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ (n تایی های مرتب) ضربی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u = (a_1^T, \dots, a_n^T)$$

$$V = (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow (u, v) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

به راحتی قابل تحقیق است، ضربی که به صورت فوق در $\mathbb{R}^n$ تعریف شد، در هر سه اصل ضرب داخلی صدق می کند، بنابراین این ضرب، یک ضرب داخلی است که در حالت خاص $n=3$ ،

برای فضای برداری $\mathbb{R}^3$ ، مثالهایی را مورد بررسی قرار می دهیم:

$$u = (1, -1, 2), \quad v = (2, 1, -4), \quad w = (-3, 0, 2)$$

$$(u, v) = 1 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times (-4) = -7 = (v, u)$$

$$(u, w) = 1 \times (-3) + (-1) \times 0 + 2 \times 2 = 1 = (w, u)$$

$$(v + w) = (-1, 1, -2)$$

$$((v + w), u) = (-1) \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 2 = -6$$

$$(((v + w), u) = (v, u) + (w, u)) \text{ همان طور که ملاحظه می کنید:}$$

ضرب عدد در n تایی، ضرب عدد در چند جمله ایها و ضرب عدد در ضابطه تابع، هریک از مجموعه های زیر، یک فضای برداری حقیقی تشکیل می دهند:

۱- مجموعه n تایی های مرتب $(\mathbb{R}^n)$ و در حالت خاص $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$.

۲- مجموعه ماتریسهای $m \times n$ (M_{mn})

۳- مجموعه چند جمله ایها $(P(t))$

۴- مجموعه توابع پیوسته روی بازه $[a, b], [C[a, b]]$

حال به تعریف ضرب داخلی در هریک از فضاهای برداری فوق و به طور کلی برای هر فضای برداری می پردازیم:

تعریف: فرض کنیم یک فضای برداری حقیقی باشد، برای هر دو عضو، از V مانند u و v ، عدد حقیقی (u, v) ، ضرب داخلی دو بردار u و v نامیده می شود؛ هرگاه در سه اصل زیر صدق کند:

$$I) ((au_1 + bu_2), V) = a(u_1, V) + b(u_2, V) \quad (\text{خاصیت خطی})$$

$$II) (u, V) = (V, u) \quad (\text{خاصیت جابجایی})$$

$$III) (u, u) \geq 0 \quad ((u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0)$$

تذکر ۱: با استفاده از اصل (I) و اصل (II) داریم:

$$\begin{aligned} (u, (aV_1 + bV_2)) &= ((aV_1 + bV_2), u) \\ &= a(V_1, u) + b(V_2, u) \\ &= a(u, V_1) + b(u, V_2) \end{aligned}$$

تذکر ۲: در حالت کلی و به استقرا ثابت می شود:

$$((a_1 u_1 + \dots + a_n u_n), V) = a_1 (u_1, V) + \dots + a_n (u_n, V),$$

$$(u, (a_1 V_1 + \dots + a_n V_n)) = a_1 (u, V_1) + \dots + a_n (u, V_n)$$

از ترکیب دو خاصیت اخیر، رابطه کلی زیر حاصل می شود:

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i u_i, \sum_{j=1}^n a_j V_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (u_i, V_j)$$

مثال: اگر V یک فضای برداری و $u, v \in V$ در این صورت:

$$((3u - 2v), (2u + 4v)) = 6(u, u) + 8(u, v) - 4(v, u)$$

$$-8(v, v) = 6(u, u) + 4(u, v) - 8(v, v)$$

$$= 1 \times 1 + 2 \times 2 + (-1) \times (-1) + 3 \times 3 + 4 \times 4 + (-2) \times (-2)$$

$$= 1 + 4 + 1 + 9 + 16 + 4 = 35 \Rightarrow \|A\| = \sqrt{35} \geq 0$$

مثال ۲: اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ داریم:

$$(A.B) = \text{tr}(B^T \times A) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{tr} \left(\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \right) = \text{tr}([0]) = 0$$

(توجه دارید که بردارهای $\vec{a} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ و $\vec{b} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ دو بردار عمود بر هم هستند!)

۳. فضای برداری تابعهای پیوسته روی

$$C[a, b] \text{ [a, b]}$$

برای هر f و g در $C[a, b]$ ضربی به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$(f.g) = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad (a \leq t \leq b)$$

توجه دارید که فضای برداری چندجمله ایها $(P(t))$ زیرفضایی از $C[a, b]$ است و همین ضرب را می توانیم روی $P(t)$ تعریف کنیم.

مثال: چندجمله ایهای $f(t) = 2t$ و $g(t) = -3t$ را در بازه $[0, 1]$ در نظر گرفته و داریم:

$$(f.g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 -6t^2 dt = -2t^3 \Big|_0^1 = -2$$

$$\|g\|^2 = \int_0^1 g(t)g(t)dt = \int_0^1 9t^2 dt = 3t^3 \Big|_0^1 = 3$$

$$\Rightarrow \|g\| = \sqrt{3}$$

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f(t)f(t)dt = \int_0^1 4t^2 dt = \frac{4}{3}t^3 \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \|f\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$e_u = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

۲. فضای برداری ماتریسهای $(M_{mn}) m \times n$

در فضای برداری ماتریسهای $m \times n$ ضربی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(A.B) = \text{tr}(B^T \times A)$$

(منظور از $\text{tr}(A)$ حاصل جمع درآیه های روی قطر اصلی A است.)

مثال ۱: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ در

این صورت داریم:

$$(A.B) = \text{tr}(B^T \times A) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{tr} \begin{bmatrix} 17 & 22 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \\ 13 & 20 & -10 \end{bmatrix} = 17 + 2 - 10 = 9$$

با کمی دقت، متوجه می شویم که حاصل $\text{tr}(B^T \times A)$ با حاصل جمع حاصلضربهای نظیر به نظیر درآیه ها، برابر خواهد بود؛ یعنی:

$$(A.B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-1) \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 1 + (-2) \times 3$$

$$= 2 + (-2) + (-4) + 15 + 4 + (-6) = 9$$

این ضرب که به دو شکل معادل در M_{mn} تعریف شد، در هر سه اصل، ضرب داخلی صدق می کند؛ بنابراین یک ضرب داخلی است و در حالت کلی در این فضا داریم:

$$(A.B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}, \quad \|A\|^2 = (A.A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

با توجه به ماتریس A در مثال ۱ داریم:

$$\|A\|^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(v, w) = 1 \times 2 + 2 \times (-4) + (-5) \times (-6) = -36$$

بنابراین بردار u بر v و w عمود است؛ ولی v و w عمود بر هم نیستند.

مثال ۲: تابعهای $f(t) = \sin t$ و $g(t) = \cos t$ را از فضای برداری $C[-\pi, \pi]$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$(\sin t \cdot \cos t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \sin^2 t \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 = 0$$

بنابراین دو تابع فوق در فضای $C[-\pi, \pi]$ بر هم عمود می‌باشند.

مثال ۳: تابعهای $f(t) = t$ و $g(t) = -t$ را در فضای برداری $C[-1, 1]$ در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$(f(t), g(t)) = \int_{-1}^1 -t^2 dt = -\frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

بنابراین، دو تابع فوق در فضای $C[-1, 1]$ بر هم عمود نمی‌باشند.

تذکر: مفهوم عمود بودن با توجه به تعریف ارائه شده، با مفهوم عمود بودن دو خط بر هم یا دو بردار بر هم، به لحاظ هندسی متفاوت است و البته در حالت خاص، یعنی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ به همان معناست که ما انتظار داریم.

مثال ۴: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ دو بردار

(ماتریس) از فضای برداری $M_{2 \times 2}$ باشند، داریم:

$$(A, B) = 2 \times 0 + 0 \times 3 + 0 \times 1 + (-1) \times 0 = 0$$

پس ماتریسهای A و B در فضای $M_{2 \times 2}$ بر یکدیگر عمودند!

مثال ۵: اگر $f(t) = t + k$ و $g(t) = t^2$ در این صورت، k را چنان بیابید که تابعهای f و g در $C[0, 1]$ بر یکدیگر عمود باشند.

$$(f, g) = \int_0^1 (t+k)t^2 dt = \int_0^1 (t^3 + kt^2) dt = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4} t^4 + \frac{k}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{k}{3} \right) = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$$

تمرین: در فضای برداری $C[0, 1]$ مقدار k را چنان بیابید که دو تابع $f(t) = -t$ و $g(t) = t + k$ بر یکدیگر عمود باشند. (جواب:

$$k = -\frac{2}{3})$$

زاویه بین بردارها در هر فضای برداری

تعریف: اگر u و v دو بردار ناصفر از فضای برداری V باشند، در این صورت، زاویه بین u و v ، زاویه‌ای است چون $0 \leq \theta \leq \pi$ که از دستور زیر به دست می‌آید:

$$\cos \theta = \frac{(u, v)}{\|u\| \times \|v\|}$$

مثال: در مثال قبل، داشتیم $f(t) = 2t$ و $g(t) = -3t$ و نتایج زیر را به دست آوردیم:

$$(f, g) = -2, \|f\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \|g\| = \sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{-2}{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3}} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \theta = \pi$$

بنابراین در فضای $P(t)$ ، زاویه بین f و g برابر است با π ، که البته اگر همین f و g را به صورت دو خط در فضای برداری $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیریم، زاویه بین آنها در $\mathbb{R}^2$ ، $\frac{\pi}{4}$ خواهد بود!

بردارهای عمود بر هم

تعریف: اگر V یک فضای برداری حقیقی و u و v بردارهایی از فضای برداری V باشند، در این صورت، دو بردار u و v را عمود بر هم می‌نامیم؛ هرگاه: $(u, v) = 0$.

تذکر ۱: با توجه به تعریف زاویه بین دو بردار، می‌توان گفت: «بردار u عمود بر بردار v است؛ هرگاه کسینوس زاویه بین آنها صفر باشد.»

تذکر ۲: بردار صفر ($\vec{0}$) در هر فضای برداری، بر هر بردار دیگر در آن فضا عمود است:

$$(\vec{0}, u) = (\vec{0} | u) = \vec{0} \cdot (u, u) = 0$$

مثال ۱: اگر فرض کنیم $u = (1, 2, 1)$ ، $v = (1, 2, -5)$ و $w = (2, -4, -6)$ بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ باشند، در این صورت داریم:

$$(u, v) = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times (-5) = 0$$

$$(u, w) = 1 \times 2 + 2 \times (-4) + 1 \times (-6) = 0$$

گشت و گذاری در

ریاضیات

معاصر

• غلامرضا یاسی پور

بر p باشد، دارای مقدار $+1$ ، -1 ، یا 0 است. این نماد، بیان قانون مورد بحث را در یک فرمول ممکن می کند:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

قضیه های زیر مکملهای قانون تقابل اند:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

قضیه اول مقرر می کند که هم نهشتی $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ زمانی

حل پذیر است که p به صورت $4k+1$ باشد. در نتیجه، $\frac{(p-1)}{2}$

زوج است و زمانی حل ناپذیر است که p به صورت $4k+3$ باشد:

در نتیجه $\frac{(p-1)}{2}$ فرد است.

معادله های دیوفانتی. فرض می کنیم $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

چند جمله ای با ضرایب صحیحی بر حسب $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشد.

معادله $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$ را در صورتی دیوفانتی «Diophantine» می نامیم که جواب صحیح آن را خواسته باشیم.

این نوع معادله را به نام ریاضیدان یونانی دیوفانت اسکندرانی «DIOPHANTOS of Alexandria» نامگذاری کرده اند.

دستگاه معادله های دیوفانتی «Diophantine equations»

$$f_1 = b_1, f_2 = b_2, \dots, f_k = b_k$$

هم ارز معادله منفرد

$$(f_1 - b_1)^2 + (f_2 - b_2)^2 + \dots + (f_k - b_k)^2 = 0$$

قانون تقابل. بررسی این پرسش که به ازای کدام یک از پیمانه های p ، عدد مفروض a مانده درجه دوم است، به کشف قانون مشهور تقابل درجه دوم انجامید، که توسط اویلر بر مبنای اطلاعات عددی گسترده ای تنظیم شد.

فرض می کنیم p و q اعداد اول و فرد باشند. در صورتی که دست کم یکی از آنها به صورت $4k+1$ باشد، آن گاه هم نهشتیهای $x^2 \equiv p \pmod{q}$ و $y^2 \equiv q \pmod{p}$ هر دو حل پذیر یا هر دو حل ناپذیرند (به عبارت دیگر، p مانده به پیمانه q است، اگر و تنها اگر q مانده به پیمانه p باشد).

اما در صورتی که هم p و هم q به صورت $4k+3$ باشند، آن گاه تنها یکی از دو هم نهشتی حل پذیر است و دیگری حل ناپذیر. اولین اثبات کامل این قانون، توسط گاوس، زمانی که هجده ساله بود، یافت شد. بعدها وی، شش اثبات دیگر از آنچه که قضیه اصلی «Theorema fundamentale» نامید، به دست داد، و از آن زمان تاکنون، روی هم رفته، بیش از پنجاه اثبات مختلف برای این قضیه به دست آمده است.

اصول گوناگونی که برای یافتن قوانین تقابل مانده های توانی بالاتر به کار رفته و زحماتی که برای این کار کشیده شده، وسیله ای قدرتمند به نظریه اعداد داده اند.

در حدود ده سال پیش از اثبات گاوس، اثباتی در مورد قانون تقابل درجه دوم توسط لژاندر «LEGENDRE» (۱۷۵۲-۱۸۳۳) انتشار یافت؛ اما این اثبات دارای رخنه بود. لژاندر نماد سودمند

$\left(\frac{a}{p}\right)$ (نماد لژاندر «Legendre symbol») را معرفی کرد، که

بسته به این که a مانده به پیمانه p یا مانده به پیمانه p و یا بخشپذیر



است؛ یعنی مجموعه‌های جواب واقع در Z دستگاه و معادله منفرد فوق یکسان‌اند.

معادله دیوفانتی

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (b, a_n, \dots, a_2, a_1 \text{ صحیح})$$

حل پذیر است؛ اگر و تنها اگر b بر $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ب.م.م. بخشپذیر باشد.

معادله مورد بحث اگر حل پذیر باشد، در این صورت، بی نهایت جواب n تایی دارد. در این مورد، بررسی حالت $n=2$ آسان است.

اگر a_1 و a_2 متباین (نسبت به هم اول) و x'_1, x'_2 یکی از جوابهای $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ باشد، آن گاه کل جوابها را می توان به صورت $x_1 = x'_1 + a_2t, x_2 = x'_2 - a_1t$ نمایش داد، که در آن t عددی صحیح است.

یک جفت جواب خصوصی را می توان از کسر تقریبی یکی

مانده به آخر عبارت کسر مسلسل $\frac{a_1}{a_2}$ به دست آورد.

$$\text{مثال: } 43x_1 + 19x_2 = b \quad \text{کسرهای تقریبی } 43/19$$

عبارت‌اند از $4/7, 9/4, 43/19$ و کسر $9/4$.

$$x'_1 = 4b, \quad x'_2 = -9b$$

را به دست می دهد؛ بنابراین جواب عمومی معادله را می توان به صورت زیر نوشت:

$$x_1 = 4b + 19t, \quad x_2 = -9b - 43t$$

به ازای $n \geq 3$ روشهای کسر مسلسل عمومی تری "general continued fraction methods" مطرح شده‌اند.

اگر دستگاهی خطی از m معادله مستقل

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1, 2, \dots, m$$

مفروض باشد و اگر $m > n$ ، در این صورت دستگاه مزبور، فرامعین «overdetermined» است و عموماً جواب ندارد.

اما اگر $m < n$ ، دستگاه فرومعین «underdetermined» است و عموماً بی نهایت جواب دارد. به طور دقیقتر، در حالت اخیر،

دستگاه برحسب اعداد صحیح $x_1, x_2, \dots, x_n$ حل پذیر است؛ اگر و تنها اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک دترمینانهای m -سطری « m -rowed determinants» ماتریس ضرایب (a_{ij}) برابر ب.م.م. دترمینانهای m -سطری ماتریس ضرایب فزوده‌ای باشد،

که از (a_{ij}) با افزودن ستون b_i ایجاد می شود.

مسئله حل عمومیترین معادله دیوفانتی درجه دوم برحسب دو مجهول x_1, x_2

$$c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 + c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33} = 0$$

با اعداد صحیح c_{ij} را می توان با تبدیل متغیرها به مسئله همسان معادله‌ای به صورت خاص

$$y_1^2 - Dy_2^2 = b$$

با اعداد صحیح D و b تحویل کرد. در این مورد، دو حالت متمایز وجود دارند.

اگر $D < 0$ ، در این صورت یا جوابی موجود نیست یا بی نهایت جواب y_1, y_2 موجود می شوند.

اگر $D > 0$ ، آن گاه معادله موسوم به معادله پل Pell's equation

$$y_1^2 - Dy_2^2 = 1$$

بجز جوابهای بدیهی $y_1 = \pm 1, y_2 = 0$ بی نهایت جواب دارد، که می توانند از جوابی مینیمال به دست آیند.

بسادگی ملاحظه می شود که معادله عمومی

$$y_1^2 - Dy_2^2 = b$$

در صورتی که b نامانده درجه دوم به پیمانه D باشد، اصلاً جواب ندارد.

مثالها:

۱. معادله $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 19$ دقیقاً دارای ۱۲ جفت جواب زیر است:

$$2, 3; -2, -3; 3, 2; -3, -2; 2, -5;$$

$$-2, 5; 5, -2; -5, 2; 3, -5; -3, 5; 5, -3; -5, 3$$

۲. $y_1^2 - 5y_2^2 = 1$ از جواب مینیمال $y'_1 = 9, y'_2 = 4$ و

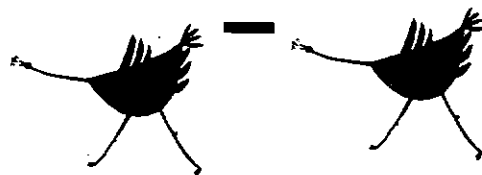
به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ کل جوابها، یعنی:

$$y_1 = \pm \left[(9 + 4\sqrt{5})^n + (9 - 4\sqrt{5})^n \right] / 2$$

$$y_2 = \pm \left[(9 + 4\sqrt{5})^n - (9 - 4\sqrt{5})^n \right] / (2\sqrt{5})$$

را به دست می آوریم.

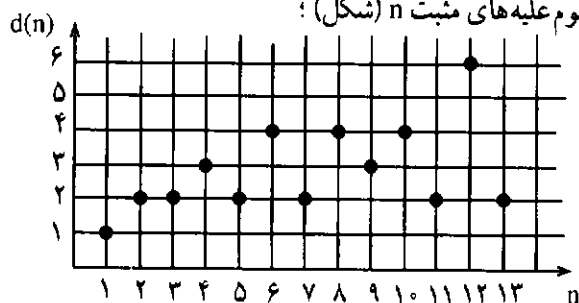
مسئله یافتن جميع مثلثهای قائم الزاویه‌ای که در مورد آنها x, y اضلاع زاویه قائمه و وتر z مضارب صحیحی از طول واحد باشند، به معادله دیوفانتی $x^2 + y^2 = z^2$ منجر می شود. جوابهای



تعریف، مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

مثالها عبارت‌اند از: $\pi(x)$: تعداد اولهای $x \geq$: تعداد $d(n)$: تعداد

مقسوم علیه‌های مثبت n (شکل):



تابع عدد نظریه‌ای $d(n)$: تعداد کل مقسوم علیه‌های مثبت n

$d(n)$: مجموع مقسوم علیه‌های مثبت n : $\sigma(n)$: تعداد

جفت‌های جواب صحیح x, y معادله $x^2 + y^2 = n$.

بعضی از این توابع، رفتاری بسیار غیرعادی از خود نشان می‌دهند: به عنوان مثال:

$$d(1)=1, d(2)=2, d(3)=2, d(4)=3,$$

$$d(5)=2, d(6)=4, d(7)=2, d(8)=4, \dots$$

با وجود این، اغلب می‌توان در مورد متوسط «average»، n مقدار اولیه تابع f ، نظمی به دست آورد.

تابع

$$[f(1)+f(2)+\dots+f(n)]/n$$

در بسیاری از حالتها، به ازای n صعودی، مانند یک تابع تحلیلی

$$n, \text{ به طور مجانبی رفتار می‌کند. به عنوان مثال, } (1/n) \sum_{k \leq n} d(k)$$

مانند لگاریتم طبیعی n نمو می‌کند. با قرار دادن:

$$[d(1)+d(2)+\dots+d(n)]/n = \ln n + R(n)$$

درمی‌یابیم که اندازه $R(n)$ نسبت به n از مرتبه‌ای کوچکتر از مورد $\ln n$ است.

بررسی متوسط‌های توابع عدد - نظری و بالاتر از آن، باقیمانده‌های $R(n)$ آنها، به ظریفترین ابزارهای آنالیز نیازمند است. این شاخه از ریاضیات، یعنی نظریه اعداد تحلیلی «analytic number theory» ذهن ریاضیدانان مشهوری را اشغال کرده که

آن، یعنی اعداد فیثاغورسی «Pythagorean numbers» را می‌توان با فرمولهای

$$x = u^2 - v^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2$$

نمایش داد، که در آنها u و v اعداد صحیح دلخواه‌اند. کوچکترین این جوابها عبارت‌اند از:

$$3^2 + 4^2 = 5^2, 5^2 + 12^2 = 13^2$$

در این موارد، تفاوت شگفت‌آوری بین حالت‌های $n=2$ و $n \geq 3$ موجود است. قضیه تو «theorem of Thue» بر این است که معادله

$$a_1 x^n + a_2 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n = b \quad (n \geq 3, a_i \neq 0)$$

با اعداد صحیح $a_1, a_2, \dots, a_n$ تنها به تعداد متناهی جواب دارد؛ مگر آن که بتوان سمت چپ آن را به عامل‌های همگن از درجات پایین‌تری با ضرایب صحیح تجزیه کرد.

معادله‌های دیوفانتی از درجه بالاتر، به مسائل عمیقی می‌انجامند که حلشان به معلوماتی از نظریه میدانهای اعداد جبری نیازمند است.

در میان این معادله‌ها، حدس فرما «Fermat's conjecture» (نیز موسوم به آخرین قضیه فرما) از توجه خاصی برخوردار بوده است: به ازای هر نمای صحیح $n > 2$ ، هیچ سه عدد صحیح ناصفر x, y, z صادق در معادله $x^n + y^n = z^n$ وجود ندارد.

در مورد این قضیه، فرما (در حدود ۱۶۳۷) در حاشیه کپی خودش از آثار دیوفانت نوشته است: «من در این مورد، اثباتی به واقع شگفت‌آور یافته‌ام؛ اما این حاشیه، کوچکتر از آن است که دربرگیرنده آن باشد.» اثبات فرما هیچ‌گاه به دست نیامد و به رغم کوششهای ریاضیدانهای مشهور، هیچ‌کس تاکنون موفق به اثبات یا عدم اثبات این حدس نشده است^۱؛ اما نتایج جزئی جالبی درباره آن به دست آمده که از آن جمله است مورد زیر: معلوم شده که حدس مزبور به ازای جمیع نماهای تا ۱۲۵۰۰۰ صحیح است.

نظریه اعداد تحلیلی، بجز تابع اولیه، یعنی $\varphi(n)$ توابع عدد-نظریه‌ای بسیار دیگری با مجموعه اعداد طبیعی به عنوان حوزه



جالب است که به ازای $k \geq 3$ ، هر عدد به قدر کافی بزرگ n ، به جمعوندهایی کمتر از $g(k)$ نیاز دارد و معلوم شده است که $239 = 4^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ بزرگترین عددی است که به ۹ مکعب نیاز دارد؛ جمیع اعداد بزرگتر، حداکثر ۸ مکعب لازم دارند و اثبات شده که از عدد طبیعی معینی به بعد، جمیع اعداد بعدی، تجزیه‌ای به حداکثر ۷ مکعب را پذیرا می‌شوند.

حدس گلدباخ «Goldbach's conjecture». به سال ۱۷۴۲، گلدباخ در نامه‌ای به اوایلر حدس زد که هر عدد زوج $n > 6$ مجموع دو عدد اول فرد است. این حدس، تاکنون نه به اثبات رسیده و نه رد شده است. بهترین نتیجه در این زمینه، از وینوگرادوف «VINOGRAOV» (متولد ۱۸۹۱)، قضیه سه اول «three primes theorem» است: هر عدد صحیح به قدر کافی بزرگ و فردی مجموع سه اول فرد است. اثبات قضیه از روشهای تحلیلی بسیار ظریفی، استفاده کرده است.

افزازها. منظور از افزاز «partition» عدد طبیعی n ، نمایش آن به صورت مجموعی از اعداد طبیعی است. تعداد کل افزازهای عدد n را با $p(n)$ نمایش می‌دهیم، که در آن تعداد جمله‌ها محدود نیست؛ جمعوندهای برابر پذیرفته می‌شود و از ترتیب جمعوندها صرف نظر می‌شود. به این ترتیب

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$

$$= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

هفت افزاز ۵ اند، و بنابراین $p(5) = 7$.

تابع $p(n)$ دارای ویژگیهای بسیار جالبی است؛ به عنوان مثال: $p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}$

و به ازای n های بزرگ:

$$p(n) \sim \left[\sqrt{\frac{4n}{3}} \right] \exp \left[\pi \sqrt{\frac{n}{3}} \right]$$

به طور عمومیتر، یکی از مسائل اصلی نظریه اعداد جمعی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد. فرض می‌کنیم A مجموعه‌ای از اعداد طبیعی و $S > 2$ عدد طبیعی مفروضی باشد؛ آیا می‌توان هر عدد طبیعی را به صورت مجموع حداکثر S عنصر A نمایش داد؟

با اوایلر در قرن هجدهم میلادی آغاز می‌شود و به طور مستقیم تا امروزه ادامه دارد. در این مورد، به تابع $\pi(x)$ ، یعنی تعداد اولهای تا (x) ، توجه خاصی معطوف شده است.

گاوس قانون مجانبی «asymptotic law» $\pi(x) \sim x / \ln x$ را حدس زد، که درستی آن تا حدود ۱۹۰۰ که توسط آدامار «HADAMARD» و دولاواله - پواسن «de la VALLEE - POUSSIN» به اثبات رسید، ثابت نشده بود.

بررسیهای اینان نشان داد که بهترین تقریب به $\pi(x)$ انتگرال

لگاریتمی «integral logarithm» $li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ است و برآورد

باقیمانده $R(x) = \pi(x) - li(x)$ به گونه‌ای تنگاتنگ با موضوع صفراهای مختلط تابع زتای ریمان «Riemann zeta - function»، یعنی، $\zeta(s) = \sum (1/n^s)$ با $s = \sigma + it$ و $\sigma > 1$ مرتبط است.

در میان مسائل توزیعی «distribution problems» بسیار دیگر، قضیه مشهور زیر است، که ابتدا توسط لژیون دیریکله «Lejeune DIRICHLET» (۱۸۰۵ - ۱۸۵۹) به اثبات رسیده است: هر تصاعد حسابی که در آن جمله اول و قدر نسبت، نسبت به هم اول باشند، شامل بی نهایت عدد اول است.

نظریه اعداد جمعی. سؤالاتی مربوط به نظریه اعداد جمعی را با استفاده از چند قضیه و مسأله خاص توضیح می‌دهیم.

قضیه فرما: هر عدد اول p با $p \equiv 1 \pmod{4}$ مجموع مربعات دو عدد طبیعی است. نمایش مزبور، غیر از ترتیب جمعوندها، یکتاست.

$$\text{مثال: } 233 = 8^2 + 13^2$$

قضیه لاگرانژ: هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع مربعات حداکثر چهار عدد طبیعی نمایش داد.

مثال: ۱۱ را می‌توان به صورت مجموع سه مربع نوشت:

$$11 = 3^2 + 1^2 + 1^2$$

۷ به چهار مربع نیاز دارد:

$$7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

مسأله وارینگ «Waring's problem» (در سال ۱۷۷۰ توسط

وارینگ مطرح، و ابتدا در سال ۱۹۰۹ توسط هیلبرت حل شد). تابع عدد - نظریه‌ای $g(k)$ ای چنان موجود است که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع حداکثر $g(k)$ توان k ام اعداد طبیعی نمایش داد.

به عنوان مثال، بنابه قضیه لاگرانژ، $g(2) = 4$ و $g(3) = 9$.



متمایزند. اگر در $\phi(x)=0$ تمام ضرایب عدد صحیح باشند، آن گاه α را عدد صحیح جبری «algebraic integer» می نامیم. فرض می کنیم V عدد جبری باشد. کوچکترین میدان $k=Q(V)$ را که شامل Q نیز V است، میدان اعداد جبری algebraic number field می نامیم. به عنوان مثال، $Q(\sqrt{3})$ شامل تمام اعداد به صورت $a+b\sqrt{3}$ می باشد، که در آنها a و b اعدادی گویا هستند. به سادگی می توان بررسی کرد که این اعداد، در واقع، تشکیل یک میدان می دهند؛ به عنوان مثال:

$$\frac{1}{a+b\sqrt{3}} = \frac{a-b\sqrt{3}}{(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})} = \frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2} = A+B\sqrt{3}$$

درجه k را به صورت درجه n (به گونه ای یکتا معین شده) هر عدد V تعریف می کنیم که به ازای آن $k=Q(V)$.

میدانهای عددی درجه دوم. در میان میدانهای از نوع خاص، میدانها (هیئتها) عددی درجه دوم «quadratic number fields» به گونه ای کاملاً مورد بررسی قرار گرفته اند. با در نظر گرفتن $V=\sqrt{d}$ ، می توان فرض کرد که d عدد صحیحی نابخش پذیر بر یک مربع است. تحت این شرط، بین میدانهای عددی درجه دوم $Q(\sqrt{d})$ با $d \equiv 1 \pmod{4}$ و با $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ تمیز قائل می شویم.

در حالت اول پایه صحیح «integral basis» میدان با

$$\omega_1=1, \quad \omega_2=(-1+\sqrt{d})/2$$

و در حالت اخیر با $\omega_1=1, \quad \omega_2=\sqrt{d}$ داده شده است. مقصود از این موضوع، آن است که هر عدد صحیح جبری $Q(\sqrt{d})$ را می توان به گونه ای یکتا به صورت $c_1\omega_1+c_2\omega_2$ با اعداد صحیح گویای c_1 و c_2 نمایش داد.



از سال ۱۹۳۰ به بعد و با استفاده از روشها و مفاهیم جدید (جگالی «density» و مرتبه ۱) به چنین مسائلی پرداخته شده است.

اعداد جبری

میدانهای اعداد جبری، عدد جبری «algebraic number» α عددی مختلط است که ریشه معادله جبری «algebraic equation» $f(x)=0$ است. در این جا:

$$f(x) = a_0x^m + \dots + a_m$$

یک چند جمله ای روی Q ، میدان اعداد گویا، با $a_m \neq 0, m \geq 1$ است؛ به عبارت دیگر، ضرایب $a_0, a_1, \dots, a_m$ گویا هستند.

عدد α ریشه بی نهایت معادله از درجه های گوناگون است؛

به عنوان مثال $\alpha=\sqrt{3}$ در معادله های

$$x^2-3=0, \quad x^2-x^2-3x+3=0, \quad x^4-9=0$$

و غیره صدق می کند. اما چند جمله ایهای دو معادله اخیر را می توان به چند جمله ایهای از درجه پایین تر تجزیه کرد:

$$x^2-x^2-3x+3=(x^2-3)(x-1)$$

$$x^4-9=(x^2-3)(x^2+3)$$

و

چند جمله ایهای از این دست را تجزیه پذیر «reducible»

می نامیم و در صورتی که تجزیه چند جمله ای f روی Q به عوامل ثابت «non-constant factors» از درجه پایین تر، البته باز هم با ضرایب در Q ، ممکن نباشد، f را روی Q تحویل ناپذیر «irreducible» می نامیم؛ به عنوان مثال، $f(x)=x^2-3$ تحویل ناپذیر است.

به ازای عدد جبری α دقیقاً یک چند جمله ای گویا -

تحویل ناپذیر «rationally irreducible Polynomial» $\phi(x)$ با ضریب پیشرو ۱، چنان وجود دارد که $\phi(\alpha)=0$. درجه عدد جبری α را به صورت درجه $\phi(x)$ تعریف می کنیم. به عنوان مثال، هر عدد گویای r جبری از درجه ۱ است؛ زیرا ریشه $x-r=0$ است، $(1+i\sqrt{3})/2$ از درجه ۲ است؛ زیرا ریشه $x^2-x+1=0$ به حساب می آید، و $\sqrt[3]{2}$ ، به عنوان ریشه $x^3-2=0$ از درجه ۳ است.

$\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$ ریشه های $\phi(x)=0$ (که یکی از آنها α است) به مزدوجها «conjugates» α موسوم و جمیعاً

آنالیز ترکیبی

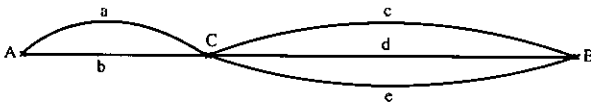
(قسمت اول)

• میر شهرام صدر

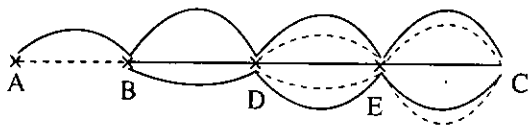
برای دانش آموزان سال دوم تاپیش دانشگاهی

اصل ضرب و اصل جمع

در زندگی روزمره، بسیاری از تصمیم گیریهای خود را براساس شمارش انجام می دهیم. برای مثال، اگر برای رفتن از منزل (نقطه A) به مدرسه (نقطه B) از محل C عبور کنید و از A تا C، ۲ راه مختلف و از C تا B، ۳ راه مختلف وجود داشته باشد، در این صورت، با توجه به شکل زیر و با شمارش، ملاحظه می کنیم که از A تا B (منزل تا مدرسه) ۶ راه مختلف وجود دارد.



اگر دو راه از A تا C را با حرفهای a و b و سه راه از C تا B را با حرفهای c و d و e مشخص کنیم، آن گاه ۶ مسیر مختلف از A تا C عبارت است از: ac, ad, ae, bc, bd, be. اکنون اگر برای رفتن از نقطه A به نقطه C، بخواهید از محلهای D و E عبور کنید و تعداد زیادی راه بین این نقاط وجود داشته باشد، آن گاه شمردن تعداد مسیرهای موجود از A تا C، از طریق B و D و E به کمک شکل، کاری طاقت فرسات. در این حالت، برای سرعت بخشیدن به محاسبات، نیازمند به مطالعه و یادگیری روشهای شمارش هستیم.



آنالیز ترکیبی، ارائه روشهای شمارش و تعداد حالتهای ممکن است؛ بدون این که هریک از حالتها شمرده شوند. این مبحث در ریاضیات، شامل جایگشتها، تبدیلهای ترکیبی است. در ریاضیات هم، مانند زندگی روزمره، با مسائلی روبه رو می شویم که برای حل آنها نیاز به شمارش پیدا می کنیم. برای مثال، می دانیم که در حال حاضر، شماره پلاک خودروها از یک عدد ۵ رقمی و یک حرف از الفبای فارسی تشکیل شده است. با این شرایط، با حرف «ب» چند خودرو را می توان شماره کرد؟ از مجموعه ۴ عضوی B، به مجموعه ۳ عضوی A چند نگاشت یک به یک و چند نگاشت پوشا وجود دارد؟ تعداد رابطه هایی که خاصیت بازتابی روی مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ داشته باشند، چندتا است؟



ضرب، می توان $5 \times 5 \times 5 = 125$ عدد سه رقمی نوشت :

رقم صدگان	رقم دهگان	رقم یکان	
انتخاب ۵	انتخاب ۵	انتخاب ۵	$5 \times 5 \times 5 = 125$
مرحله اول	مرحله دوم	مرحله سوم	

مثال. شماره پلاک خودروها، از یک عدد پنج رقمی و یک حرف از الفبای فارسی تشکیل شده است؛ به طوری که حداقل یک رقم از این عدد پنج رقمی، با رقمهای دیگر متمایز است، و شماره پلاک، فاقد عدد صفر است. با این شرایط، چند خودرو را می توان شماره گذاری کرد؟

حل. این کار در شش مرحله انجام می گیرد؛ مرحله اول که انتخاب یک حرف از الفبای فارسی است، با ۳۲ راه انجام می شود. مرحله های دوم تا ششم که انتخاب یک عدد پنج رقمی است، هر کدام با ۹ راه انجام می شوند؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\boxed{32} \quad \boxed{9} \quad \boxed{9} \quad \boxed{9} \quad \boxed{9} \quad \boxed{9}$$

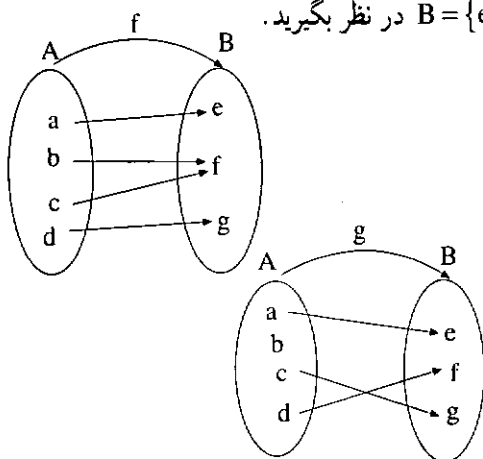
$$32 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 2^5 \times 9^5$$

از بین این اعداد، فقط ۹ تایی آنها، همه رقمهایشان تکراری است، که عبارت است از: ۱۱۱۱۱، ۲۲۲۲۲، ...، ۹۹۹۹۹. هر کدام از این عددها، می توانند با یکی از حروف الفبای فارسی بیابند؛ بنابراین تعداد خودروهایی که با شرایط مسأله می توان شماره کرد، عبارت است از:

$$2^5 \times 9^5 - 9 \times 32 = 2^5 \times (9^5 - 9)$$

نگاشت

دو تابع زیر را از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه $B = \{e, f, g\}$ در نظر بگیرید.



اصل ضرب یا اصل شمارش

هرگاه عملی در k مرحله متوالی انجام پذیرد؛ به طوری که در مرحله اول به n_1 راه مختلف، در مرحله دوم به n_2 راه مختلف، در مرحله سوم به n_3 راه مختلف، ... و در مرحله k ام به n_k راه مختلف انجام شود، در این صورت، آن عمل را می توان به $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ راه مختلف انجام داد.

مثال. در یک دبیرستان؛ ۳ کلاس جبر و احتمال مختلف و ۲ کلاس حسابان مختلف تشکیل می شود. یک دانش آموز به چند راه مختلف می تواند این دو درس را انتخاب واحد کند.

حل. عمل انتخاب واحد درسی، در دو مرحله انجام می گیرد؛ مرحله اول، دانش آموز می تواند به ۳ راه مختلف کلاس جبر و احتمال و در مرحله دوم می تواند به ۲ راه مختلف کلاس حسابان را انتخاب کند؛ بنابراین طبق اصل ضرب، دانش آموز می تواند به $3 \times 2 = 6$ راه مختلف، انتخاب واحد کند.

مثال. با رقمهای ۲، ۵، ۶، ۳ و ۱ چند عدد سه رقمی بدون تکرار رقمها می توان نوشت؟

حل. عمل نوشتن یک عدد سه رقمی، در سه مرحله انجام می گیرد؛ مرحله اول، انتخاب رقم صدگان عدد است که می تواند به ۵ راه مختلف انجام پذیرد؛ زیرا پنج عدد متمایز داریم که در این مرحله، می توان هر یک از این عددها را انتخاب کرد. اکنون در شروع مرحله دوم، چهار عدد داریم؛ زیرا یک عدد را برای رقم صدگان، در مرحله اول انتخاب کرده ایم. مرحله دوم، انتخاب رقم دهگان عدد است که می تواند به ۴ راه مختلف انجام گیرد. مرحله سوم، انتخاب رقم یکان عدد است که می تواند به ۳ راه مختلف انجام پذیرد؛ بنابراین طبق اصل ضرب، می توان $5 \times 4 \times 3 = 60$ عدد سه رقمی بدون تکرار نوشت:

رقم صدگان	رقم دهگان	رقم یکان	
انتخاب ۵	انتخاب ۴	انتخاب ۳	$5 \times 4 \times 3 = 60$
مرحله اول	مرحله دوم	مرحله سوم	

مثال. در مثال قبل، فرض کنیم رقمهای عدد سه رقمی بتوانند تکرار شوند؛ در این صورت، هر مرحله می تواند به ۵ راه مختلف انجام پذیرد؛ زیرا رقمی که برای صدگان انتخاب کردیم، می تواند برای رقم دهگان یا یکان نیز انتخاب شود؛ بنابراین طبق اصل

اصل جمع

فرض کنیم A و B دو مجموعه متناهی و جدا از هم باشند؛ یعنی $A \cap B = \emptyset$ ، بنابراین تعداد اعضای $A \cup B$ برابر با مجموع تعداد عضوهای دو مجموعه A و B است؛ یعنی:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

به عبارت دیگر، می‌توان گفت اگر دو عمل ناسازگار باشند؛ یعنی انجام همزمان آنها با هم غیرممکن باشد و عمل اول به m راه و عمل دوم به n راه انجام پذیرد، در این صورت، عمل اول یا عمل دوم (نه هر دو با هم) را به $m+n$ طریق می‌توان انجام داد.

مثال. با رقمهای ۱، ۲، ۵ و ۳ چند عدد بزرگتر از ۱۰۰ می‌توان نوشت؟

حل. عددهای بزرگتر از ۱۰۰ را که می‌توان با این اعداد ساخت، سه رقمی یا چهار رقمی می‌باشند؛ اگر مجموعه A ، اعداد سه رقمی ساخته شده با این رقمها باشند، آن‌گاه داریم:

رقم یکان رقم دهگان رقم صدگان

$$\begin{array}{|c|} \hline ۲ \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline ۳ \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline ۴ \\ \hline \end{array}$$

$$n(A) = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

اگر مجموعه B اعداد چهاررقمی ساخته شده با این رقمها باشند، آن‌گاه داریم:

رقم یکان رقم دهگان رقم صدگان رقم هزارگان

$$\begin{array}{|c|} \hline ۱ \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline ۲ \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline ۳ \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline ۴ \\ \hline \end{array}$$

$$n(B) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

چون $A \cap B = \emptyset$ ؛ یعنی عدد ساخته شده نمی‌تواند هم سه رقمی و هم چهاررقمی باشد؛ بنابراین تعداد عددهای سه رقمی یا چهاررقمی، طبق اصل جمع برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 24 + 24 = 48$$

مثال. با رقمهای ۴، ۳، ۵، ۰، ۱ و ۹ چند عدد بدون تکرار رقمها می‌توان ساخت؛ به طوری که:

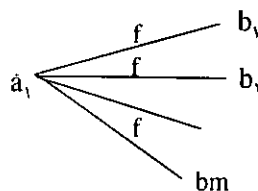
- (الف) چهاررقمی باشد.
- (ب) چهاررقمی فرد باشد.
- (ج) چهاررقمی زوج باشد.
- (د) چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، $f: A \rightarrow B$ تابعی است که در آن، $D_f = A$ ؛ یعنی تابع f روی همه عضوهای مجموعه A اثر می‌کند؛ اما $g: A \rightarrow B$ تابعی است که در آن $D_g \subsetneq A$ ؛ یعنی تابع g روی همه عضوهای مجموعه A اثر نمی‌کند. بنا به تعریف، تابع $f: A \rightarrow B$ را یک نگاشت گوییم؛ ولی تابع $g: A \rightarrow B$ نگاشت نیست.

تعریف. تابع $f: A \rightarrow B$ را یک نگاشت گوییم؛ هرگاه در این تابع $D_f = A$.

محاسبه تعداد نگاشتهای از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی

فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ، می‌خواهیم تعداد نگاشتهای $f: A \rightarrow B$ را محاسبه کنیم. برای این منظور، ابتدا تابع f را روی a_1 اثر می‌دهیم؛ $f(a_1)$ می‌تواند برابر b_1 یا b_2 یا ... یا b_m باشد؛ یعنی برای $f(a_1)$ ، m انتخاب داریم:



به همین ترتیب، برای $a_2, a_3, \dots, a_n$ ، هر کدام m انتخاب داریم؛ بنابراین:

$$\begin{array}{ccc} f(a_1) & f(a_2) & f(a_m) \\ \boxed{m} & \boxed{m} & \dots \quad \boxed{m} \end{array}$$

← n مرتبه →

در نتیجه، طبق اصل ضرب داریم:

تعداد نگاشتهای از مجموعه A به مجموعه B

$$m \times m \times \dots \times m = \underbrace{\quad}_{n \text{ مرتبه}} = m^n$$

مثال. تعداد نگاشتهایی که از یک مجموعه سه عضوی به یک مجموعه چهار عضوی می‌توان تعریف کرد، چندتا است؟

حل. فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ و

$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ، پس $n = 3$ و $m = 4$ ؛ بنابراین:

$$B \text{ به } A \text{ تعداد نگاشتهای } = 4^3 = 64$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$n(B) = 4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$$

طبق اصل جمع و با توجه به حالت‌های اول و دوم؛ تعداد
عددهای چهاررقمی زوج برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 48 + 48 = 96$$

د. در صورتی که عدد چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد،
آن‌گاه رقم هزارگان آن یکی از عددهای ۴، ۵ و ۹ است؛ بنابراین
خانهٔ مربوط به رقم هزارگان، با ۳ راه مختلف پُر می‌شود، بنابراین
داریم:

رقم یکان رقم دهگان رقم صدگان رقم هزارگان

$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

$$3 \times 5 \times 4 \times 3 = 180$$

ه. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول. رقم هزارگان عدد ۴ باشد؛ چون عدد زوج است،
پس رقم یکان باید عدد ۰ قرار گیرد، بنابراین داریم:

رقم یکان رقم دهگان رقم صدگان رقم هزارگان

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$n(A) = 1 \times 5 \times 4 \times 1 = 20$$

حالت دوم. رقم هزارگان ۵ یا ۹ باشد؛ پس خانهٔ مربوط به رقم
هزارگان، با ۲ راه مختلف پُر می‌شود؛ چون عدد زوج است، پس
رقم یکان، یکی از عددهای ۰ یا ۴ است، پس خانهٔ مربوط به رقم
یکان، با دو راه مختلف پُر می‌شود، بنابراین داریم:

رقم یکان رقم دهگان رقم صدگان رقم هزارگان

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$n(B) = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$$

طبق اصل جمع و با توجه به حالت‌های اول و دوم، تعداد عددهای
چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ و زوج، برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 20 + 48 = 68$$

و. عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن، ۰ یا ۵ باشد؛ دو
حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول. رقم یکان عدد ۰ باشد؛ بنابراین داریم:

ه. چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ و زوج باشد.
و) چهاررقمی مضرب ۵ باشد.

حل الف. عمل نوشتن یک عدد چهاررقمی در ۴ مرحله
انجام می‌گیرد؛ مرحلهٔ اول، انتخاب عدد هزارگان است؛ چون
این عدد نمی‌تواند برابر ۰ باشد، پس این مرحله با ۵ راه مختلف
انجام می‌پذیرد. اکنون در شروع مرحلهٔ دوم، پنج عدد داریم؛ پس
این مرحله با ۵ راه مختلف انجام می‌گیرد. به همین صورت،
مرحله‌های سوم و چهارم به ترتیب، با ۴ راه مختلف و ۳ راه
مختلف انجام می‌پذیرد؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

رقم یکان رقم دهگان رقم صدگان رقم هزارگان

$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$$

ب. عدد فرد، عددی است که رقم یکان آن فرد باشد؛ بنابراین
رقم یکان می‌تواند یکی از عددهای ۵، ۷، ۹ و ۱ باشد، پس
انتخاب رقم یکان با ۴ راه مختلف انجام می‌گیرد؛ بنابراین داریم:

رقم یکان رقم دهگان رقم صدگان رقم هزارگان

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

$$4 \times 4 \times 3 \times 4 = 192$$

ج. عدد زوج، عددی است که رقم یکان آن زوج باشد؛ بنابراین
رقم یکان می‌تواند ۰ یا ۴ باشد؛ دو حالت در نظر می‌گیریم:
حالت اول. رقم یکان عدد ۴ باشد؛ در این حالت، خانهٔ مربوط
به رقم یکان، با ۱ راه پُر می‌شود، بنابراین داریم:

رقم یکان رقم دهگان رقم صدگان رقم هزارگان

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

$$n(A) = 4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$$

حالت دوم. رقم یکان عدد ۰ باشد؛ در این حالت نیز خانهٔ
مربوط به رقم یکان با ۱ راه پُر می‌شود، بنابراین داریم:

رقم یکان رقم دهگان رقم صدگان رقم هزارگان

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی

فرض کنیم $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه n عضوی باشد؛ هریک از زیرمجموعه‌های A را با یک کد n رقمی شامل رقمهای 0 و 1 مشخص می‌کنیم؛ به طوری که اگر آن زیرمجموعه، شامل عضو $x_i (1 \leq i \leq n)$ باشد، i امین رقم کد عدد 1 و اگر زیرمجموعه شامل عضو x_i نباشد، i امین رقم کد عدد 0 است. برای مثال، کد $110\dots110$ زیرمجموعه زیر را مشخص می‌کند:

$$B = \{x_1, x_2, x_n\}$$

زیرا اولین، دومین و n امین رقم کد، عدد 1 می‌باشند؛ پس زیرمجموعه شامل x_1, x_2, x_n است و بقیه رقمهای کد، برابر صفرند، پس زیرمجموعه شامل بقیه اعضای A نمی‌باشد.

در حالت کلی، تعداد کدهای n رقمی که با دو عدد 0 و 1 ساخته می‌شوند، برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه n عضوی A است. برای یافتن تعداد کدهای n رقمی که با دو رقم 0 و 1 ساخته می‌شوند، کافی است n خانه مستطیل شکل در نظر بگیریم؛ واضح است که هر خانه با دو راه مختلف پر می‌شود، بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \hline \end{array}$$

← n تا خانه →

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی

$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n$$

برای مثال، کد n رقمی $111\dots1$ که همه رقمهای آن عدد 1 هستند، زیرمجموعه $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ را مشخص می‌کند که این زیرمجموعه، برابر A است و کد n رقمی $000\dots0$ که همه رقمهای آن عدد 0 هستند، زیرمجموعه $\emptyset$ را مشخص می‌کند.

تعداد رابطه‌های انعکاسی (بازتابی) روی یک مجموعه n عضوی

رابطه. مجموعه‌های A و B را در نظر می‌گیریم، هر زیرمجموعه حاصلضرب دکارتی $A \times B$ ، یک رابطه از A در B است. اگر رابطه را با R نشان دهیم، آن‌گاه $R \subseteq A \times B$. در صورتی که $A = B$ ، R را یک رابطه روی A می‌گوییم. هرگاه

رقم یکان رقم دهگان رقم صدگان رقم هزارگان

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$n(A) = 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$$

حالت دوم. رقم یکان عدد 5 باشد؛ بنابراین داریم:

رقم یکان رقم دهگان رقم صدگان رقم هزارگان

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$n(B) = 4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$$

طبق اصل جمع و با توجه به حالت‌های اول و دوم، تعداد عددهای چهاررقمی مضرب 5 ، برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 60 + 48 = 108$$

تعداد ماتریسها از مرتبه $m \times n$ که درآیه‌های 0 یا 1 دارند

فرض کنیم A یک ماتریس از مرتبه $m \times n$ باشد، این ماتریس دارای $m \times n$ درآیه است که هریک از آنها می‌توانند عدد 0 یا 1 باشند. اگر مکان هریک از درآیه‌ها را با یک خانه مستطیل شکل نمایش دهیم، هر خانه با 2 راه مختلف پر می‌شود؛ زیرا هر خانه می‌تواند با دو عدد 0 یا 1 پر شود؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & \dots & 2 \\ \hline 2 & 2 & \dots & 2 \\ \hline \vdots & & & \\ \hline 2 & 2 & \dots & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{تعداد سطرها} \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} m \\ \downarrow \end{array}$$

← تعداد ستون = n →

تعداد ماتریسهای از مرتبه $m \times n$ با درآیه‌های 0 یا 1

$$= \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{m \times n \text{ مرتبه}} = 2^{m \times n}$$

مثال. چند ماتریس 3×3 با درآیه‌های 0 و 1 می‌توان نوشت؟
حل. تعداد ماتریسها از مرتبه 3×3 با درآیه‌های 0 یا 1

$$= 2^{3 \times 3} = 2^9$$

مجموعه n عضوی A برابر 2^{n-1} است.

تعداد رابطه‌های تقارنی روی یک مجموعه n عضوی رابطه تقارنی. رابطه R روی مجموعه نتهی A ، یک رابطه تقارنی است؛ هرگاه برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم:

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

مجموعه n عضوی $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ را در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که $A \times A$ دارای n^2 عضو است و مجموعه $A_1 = \{(x_i, x_i) | 1 \leq i \leq n\}$ دارای n عضو است؛ بنابراین مجموعه $A_2 = A^2 - A_1 = \{(x_i, x_j) | i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$ دارای $n^2 - n$ عضو است و مجموعه A_2 دارای $\frac{1}{2}(n^2 - n)$

زیرمجموعه، به صورت $\{(x_i, x_j), (x_j, x_i)\}$ است. A_{ij} برای نوشتن رابطه متقارن R روی مجموعه A ، می‌توانیم هریک از عضوهای A_1 را در R قرار دهیم یا ندهیم، همچنین می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را در R قرار دهیم یا ندهیم؛ بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعه A به صورت زیر به دست می‌آید:

تعداد رابطه‌های تقارنی روی یک مجموعه n عضوی

$$= 2^n \times 2^{\frac{1}{2}(n^2 - n)} = 2^{\frac{1}{2}(n^2 + n)}$$

تذکر. برای نوشتن رابطه R که تقارنی و انعکاسی باشد، کافی است عضوهای مجموعه A_1 را در R قرار دهیم و می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را در R قرار دهیم یا ندهیم؛ بنابراین تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی مجموعه n عضوی A ، برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه

$$B = \{A_{ij} | i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$$

عضو دارد، بنابراین داریم:

تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی یک مجموعه n عضوی

$$= 2^{\frac{1}{2}(n^2 - n)}$$

R رابطه‌ای روی A باشد و $(a, b) \in R$ ، می‌نویسیم: aRb .

در صورتی که A یک مجموعه n عضوی باشد، $A \times A$ دارای n^2 عضو است و تعداد زیرمجموعه‌های $A \times A$ که همان تعداد رابطه‌ها روی A می‌باشد، برابر 2^{n^2} است.

رابطه انعکاسی (بازتابی)

رابطه R روی مجموعه نتهی A یک رابطه انعکاسی (بازتابی) است؛ هرگاه برای هر $x \in A$ ، داشته باشیم:

$$xRx \text{ یا } (x, x) \in R$$

یعنی هر عضو A ، با خودش رابطه داشته باشد. رابطه R در A ، انعکاسی نیست، هرگاه $x \in A$ ی وجود داشته باشد؛ به طوری که $(x, x) \notin R$.

مثال. مجموعه دو عضوی $A = \{a, b\}$ را در نظر بگیرید، تعداد رابطه‌های انعکاسی روی مجموعه A را مشخص کنید؟

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} \text{ حل.}$$

در صورتی که R یک رابطه انعکاسی روی مجموعه A باشد، R باید شامل دو عضو (a, a) و (b, b) باشد. همچنین R می‌تواند بجز این دو عضو، شامل عضوهای (a, b) یا (b, a) باشد.

اکنون اگر همه زیرمجموعه‌های مجموعه $B = \{(a, b), (b, a)\}$ را بنویسیم و به هریک از این زیرمجموعه‌ها، دو عضو (a, a) و (b, b) را اضافه کنیم، همه رابطه‌های انعکاسی روی A به دست می‌آید.

$$\{(a, b)\} \subseteq B; R_1 = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$$

$$\{(b, a)\} \subseteq B; R_2 = \{(a, a), (b, b), (b, a)\}$$

$$\{(a, b), (b, a)\} \subseteq B; R_3 = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$$

$$\emptyset \subseteq B; R_4 = \{(a, a), (b, b)\}$$

در حالت کلی، اگر $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه n عضوی باشد، می‌دانیم $A \times A$ دارای n^2 عضو است و تعداد

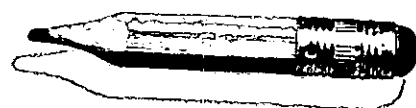
عضوهای A^2 که به صورت (x_i, x_i) هستند، برابر n است؛ بنابراین مجموعه $B = \{(x_i, x_j) | i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$

وجود دارد که دارای $n^2 - n$ عضو است. اکنون اگر به هریک از زیرمجموعه‌های B ، عضوهای مجموعه

$$A = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), \dots, (a_n, a_n)\}$$

انعکاسی روی A به دست می‌آید؛ چون B دارای $2^{n^2 - n}$ زیرمجموعه است، پس تعداد رابطه‌های انعکاسی (بازتابی) روی

تجربه‌ها در باغ



• گفت‌وگو با استاد محمدطاهر معیری

شرح حال

«محمدطاهر معیری» در آستانه سال ۱۳۰۰ خورشیدی، در «همدان» متولد و تحصیلات ابتدایی و متوسطه خود را در همان شهر به پایان رسانیده است. دو سال آخر تحصیلات متوسطه خود را در دانشسرای مقدماتی بوده و پس از این دوره، به تدریس علوم ریاضی در دبیرستانها منصوب و در جریان نخستین سال تدریس برنامه دوره دوم متوسطه را، فقط با استفاده از کتابهای موجود گذرانیده و به اخذ دیپلم کامل متوسطه رشته ریاضی نائل آمده است. در ادامه خدمت تدریس، در سال ۱۳۲۵ به یک مأموریت تحصیلی، به دانشسرای عالی اعزام و در سال ۱۳۲۸ پس از اخذ لیسانس در رشته ریاضی، دوباره برای تدریس به شهرستانها (کرمانشاه و همدان) بازگشته و به تدریس و دیگر مشاغل فرهنگی ادامه داده است. در فاصله سالهای ۱۳۲۷ تا ۱۳۳۸ خدمات خود را با تدریس، ریاست دبیرستان و سرپرستی تعلیمات متوسطه استان پشت سر گذاشته و در سال ۱۳۳۷ بنا به نظر وزارت متبوع، برای همکاری در تشکیلات آمار فرهنگی، به تهران احضار و از آن پس، تا سال ۱۳۵۸ در مشاغل پژوهشی، عهده دار مسؤولیتهایی بوده و در شکل گیری تغییرات نظام آموزشی کشور نقش داشته است. در جریان این خدمات، در سال ۱۳۴۱ فوق لیسانس «آمارشناسی» دانشگاه تهران را اخذ و در پی آن، برای یک دوره کوتاه به کارآموزی در زمینه آمار در دانشگاه کلمبیای نیویورک پرداخته است. نامبرده در مجموع، ۲۸ سال در خدمات موظف فرهنگی اشتغال به کار داشته و در عین حال، به مدت ۵۶ سال، همواره به صورت تمام وقت و پاره وقت به تدریس علوم ریاضی در دبیرستان و دانشگاه اشتغال داشته است. همچنین وی، در تألیف ۲۵ جلد کتابهای مختلف علوم ریاضی و آمار و مسائل تربیتی، از سالها قبل اشتغال داشته است، که شش جلد آنها با همکاری دیگر مؤلفان کتابهای درسی بوده و به مدت بیش



و سابقه خدمت در ارتباط با این مسأله دو جنبه مؤثر داشت: جنبه اول، اعمال قدرت، به خصوص به سبب مقید بودن خودم به نظم و انضباط، و جنبه دوم، احترام متقابل در رابطه با مستمعان خوب کلاسها بود که روی دیگران هم تأثیر سازنده باقی می گذاشت.

نام بعضی از شاگردان خود را که به مراتب بالایی علمی رسیده اند، با ذکر مشخصات علمی ایشان بیان کنید؟

از دوره طولانی تدریس افراد موفق بسیاری به یاد می آورم که اکنون گاهی آنها را در سنین بالا ملاقات می کنم و خوشحال می شوم و شاید این بهترین حاصل دوران فعالیت های ناچیزم بوده که هنوز به کار و کوشش، تشویق می کند. از چهره های برجسته دوران کارم در سازمان های بزرگ خارجی و بین المللی متعدد و فراوان به یاد می آورم که نام بردن از آنها نه میسر است و نه مجال باقی است. نظر خود را درباره تدریس ریاضیات و کتاب درسی بیان کنید؟

تدریس ریاضیات نیز مانند دیگر رشته ها از زمان پیدایش مدارس جدید در ایران، عمدتاً مبتنی بر تفریق معلم و استماع متعلم بنیاد شد و به همین ترتیب هم پایدار ماند، که آنچنان شیوه مطلوبی هم نیست. در این روش که مجال خودآموزی و تمرین را به حداقل می رساند، در کتاب درسی و در بیان معلم، چه بسیار مطالب مهم مطرح می شود که شنوندگان به آنها فقط گوش می دهند؛ در عین آن که به ماهیتها پی نمی برند؛ زیرا در شنیدن مجال تفکر و کاوش فراهم نمی آید. در چنین روند آموزشی، آنهایی هم که از پیشرفت قابل توجه بهره مند می شوند، چه بسا که فقط آنچه را که شنیده یا در کتاب درسی خوانده اند، از حفظ دارند و عموماً به مقیاس وسیعتر آنها که مستلزم دقت و ممارست در محتواست، وارد نمی شوند. در مدارس قدیم، آن فرصتی که برای بحث و تبادل نظر در مباحث مختلف وجود داشت، به دانش طلبه، عمق و وسعتی می داد که دسترسی به آن، فقط با خطابه معلم میسر نمی تواند بود. روش تدریس در مدارس امروز، حصاری دور اندیشه می کشد که در حد و مرز سخن معلم متوقف است. در دوره های چند ماهه، ساعت به ساعت و هفته به هفته، هر معلم مباحث معینی محدود به دانش و اطلاعات خود و محدود به برنامه معین عرضه می دارد و همه کوششها به آن محدود است که دورنمای امتحان و نمره امتحانی، آن را تبلیغ و تشویق می کند. در حالی که اگر معلمان مجال و امکان ارزیابی های هفتگی

از ۲۵ سال در دبیرستانهای کشور، به عنوان کتاب رسمی تدریس شده اند. معلم کهنسال، دارای دو فرزند پسر است که هر دو تحصیلات دانشگاهی (دکتری) در رشته «برق و الکترونیک» را گذرانیده و در همین بخش، مشاغل فنی حساسی را عهده دارند. در فرصت کوتاه ملاقاتی دوستانه، وقتی از خاطرات دوره کودکی و جوانی و بعد ایشان سؤال شد، پس از اندکی سکوت و تفکر چنین گفت: خوب از کدام مسائل گذشته ام سخن بگویم که یکی دو تا و بحث کوتاهی نیست. شاید هم در مقیاس عمومی، آن چنان جالب هم نباشد. آنچه بیش از همه برجستگی دارد، این است که مرحوم پدرم را در چهارده سالگی از دست دادم و پیداست که بر یک نوجوان پدر از دست داده، از همین بابت چه می گذرد. کوچکترین تأثیرش، بی گمان تغییر مسیر زندگی و مواجه شدن با سرنوشت دیگری است.

جناب استاد: دبیرستانها و دانشگاههای محل تدریس خود را بیان کنید؟

در ارتباط با اشتغال به کار در آموزش و پرورش و به مدتی کوتاه در علوم و آموزش عالی، با هزارها نکته خوب و بد، زیبا و زشت، و مشوق و ناراحت کننده مواجه شدم که بالاخره همه گذشت. از آنها گفتن امروز چه لطفی دارد؟ برای همه معلمان و استادان عزیزم، در همه عمر، ارج و احترام خاصی احساس کرده ام که نام بردن از موارد خاص را، که به راستی درخور احترام و حرمت بیشتری است، به سبب بروز مفهوم مخالف نمی پسندم. امیدوارم خدای بزرگ، زندگان را یار و نگهدار و گذشتگان را قرین رحمت فرماید. آنچه در جریان تحصیلم برجستگی خاص دارد، این است که دوره تحصیلی را دوست می داشتم. علاقه مند و جدی و سختگیر تحصیل می کردم و می توانم ادعا کنم که به همین سبب، همه استادان عزیزم روی من تأثیر خوب و به یاد ماندنی باقی گذاشته اند.

در دبیرستانها و مؤسسات مختلف تدریس کردم. به راستی هر جا انضباط و نظم، موضع قویتری داشت، پیشرفت هم بیشتر بود. چه پیشرفت تحصیلی و چه اعتلای اخلاقی و تغییر رفتار، بی گمان همه چهره های برجسته ای هم که از سالهای طولانی تدریس به یاد می آورم، آنهایی هستند که از محیط انضباطی تر مدرسه به جامعه وارد شدند. از بازیگوشی نوجوانان می پرسید؟ می توانم ادعا کنم که من شخصاً کمتر با چنین دشواری مواجه بودم؛ زیرا که روش

می‌داشتند، فعالیت‌های جاری، صورت مستمر و مداوم به خود می‌گرفت و برای متعلم هر دزس، نه فقط بر شنیده‌ها، بلکه بر فهمیده‌های درس قبل بنا می‌شد و پیشرفت بیشتر و عمیق‌تری فراهم می‌آمد، و هر نفر در جریان سال، قدم به قدم و با سیری مستمر، به ابعاد مختلف هر مبحث و موضوع درسی وارد می‌شد، و اکنون متأسفانه چنین نیست و چاره‌ای هم جز تحمل به خاطر سپردن سطحی و فراموش کردن نداریم.

مسئله کتابهای درسی هم متأسفانه در مدرسه‌داری ما، همیشه از معضلات بوده است. آن‌گاه که سیاست متمرکز آموزشی، تألیف و تدریس کتابهای درسی را آزاد و در اختیار معلمان گذاشت، گروه‌هایی هر چند بعضی با صلاحیت کافی، گرد هم جمع و کتابهایی فراهم آوردند که پشت جلد هر یک، نام چندین نویسنده، زینت‌آرای جنبه تبلیغاتی کتاب بود، و عملاً چه پیش آمد؟ آشکارا دیده شد که فصلهای مختلف کتاب، هماهنگ نیست؛ زیرا در اثر شتاب برای تألیف سریع و عرضه به متقاضیان، تهیه هر فصل کتاب را به عهده یک مؤلف گذاشته بودند و بعد از به هم پیوستن مباحثی با سلیقه و اطلاع و سبکهای مختلف، کتابهایی فراهم آمد که از لحاظ محتوا و عمق و شیوه و روش نگارش، پراکندگی فراوان داشتند. نکته دیگر آن که، در ابتدای هر سال، مؤلفان، چنین کتابهایی را به صورت انبوه، در دست، از این مدرسه به آن مدرسه، حتی از یک شهر به شهر دیگر، با توصیه و اهدای کتاب به معلمان، تلاش می‌کردند که کتابهایشان را تدریس کنند. از این طریق، هر چه و مرجی در انتخاب کتاب پدید آمد که می‌رفت تا امتیازهای برنامه‌های واحد را زیر سؤال ببرد. چنین بود که به دنبال تجربه‌های دیگری در همین زمینه، سازمان متمرکز مدیریت، لزوم تدریس کتابهای واحد را سیاست عمومی اعلام کرد و برای تألیف کتابهای درسی، دست به کار سازمان مسئولی شد که باید جست‌وجو می‌کرد و در حدی که امکان داشت، تألیف کتاب درسی را به افرادی محول می‌کرد که واجد صلاحیت لازم باشند و در عین حال، برای هر درس، کتاب واحد فراهم کنند. در این روش نیز اگر حق التألیف مناسب و متعادلی در نظر نمی‌گرفتند، دسترسی به مؤلف واجد شرط، دشوار بود و اگر دستمزد متناسب و همخوان با ارزش و اهمیت کار می‌پرداختند، توقعها گل می‌کرد و بعضاً دستهای بی‌تجربه و ناکافی به سوی امتیازها دراز می‌شد. در اثر این عوامل، می‌توان گفت که

کتابهای درسی، در هر حال، آنچه باید باشند، نبوده و عجیب آن که تجارب ناموفق را بی‌دری و متناوباً دنبال کرده‌ایم. گاه به این راه و گاه به آن راه رفته‌ایم. مرتباً آسیب یک طرفه زمان را تحمل کرده‌ایم و خطا تکرار شده است. ببخشید، بگذارید بازتر صحبت کنم. در امر تهیه کتاب درسی - که با سر نوشت میلیونها جوان و نوجوان بیگانه برخورد دارد و فقط این نیست که در نشریه‌ای کسی بخواند و یا خوشش بیاید یا نه - دو مسأله خیلی مهم است؛ صلاحیت مؤلف و فارغ بودن وی از انگیزه مادی. این هم روشن است که هر دوی این ویژگیها نسبی است، هیچ کس از صلاحیت مطلق بهره‌مند نیست، چه بسا که انسان بکلی فارغ از انگیزه مادی وجود نداشته باشد. سخن این است که هر قدر کسی به این دو ویژگی نزدیکتر باشد، برای این کار صالحتر است.

وضع تدریس ریاضیات در حال حاضر چگونه است؟

درباره وضع تدریس یا تألیف کتابهای درسی در این برهه از زمان و در حال حاضر، من شخصاً چیزی اظهار نمی‌کنم. خدا کند امروز وضع از مسائل گذشته فارغ باشد. چیزی که آشکار است و مکتوم نگاه داشتن آن خود فریبی است - زیرا به وجه روشن جلب توجه می‌کند - رقیقت شدن هر روز و هر سال محتوا و کم‌مایه‌تر شدن تحصیلات رسمی است و این برای آنها که به صورت پیگیر در کلاسهای درس متوسطه و دانشگاه مشغول تدریس بوده‌اند، تردید ناپذیر است و هر سال با توانایی کمتری مواجه شده‌ایم. در ارتباط با چنین پدیده‌ای، سخن این است که اگر عرضه و ارائه مطالب معمول در مدارس ما لازم نیست، چرا چنان پیش می‌رویم که سرانجامش برای بسیاری جوانان، شکست و ناکامی است، و اگر لازم است، چرا، هم از لحاظ معلمان و مسئولان امور آموزشی و هم از نظر جامعه میلیونی که در مدرسه سرگرم است، از این ضرورت، سطحی و بی‌توجه می‌گذریم؟ فراموش نکنید که سخنم متوجه مجموع فرآیند کار مدرسه است؛ نه آن اقلیت کمتر از ۵ درصدی که با کوشش شخصی و با شیوه‌های جنبی و کمکی توسل جستن به راستی به پیشرفتهای قابل توجه دست می‌یابند.

برای این که دانش‌آموزی در ریاضیات موفق باشد، باید چه کارهایی انجام دهد؟

در یادگیری، بی‌تردید ممارست و کنجکاوی شخصی، هزاران بار

از شنیدن مؤثرتر است. هر یک از ما وقتی به گذشته برمی گردیم، بدان جا می رسیم که همه زرفای اطلاعاتمان، حاصل مطالعات و جست و جویهای بعد از مدرسه است. هر کس آن چیزی را عمیق و فراموش نشدنی یاد می گیرد که از طریق تفکر و کنجکاوی شخصی، به آن رسیده باشد؛ نه از راه حافظه. فرزندان مادر آموزش ریاضی، در همه موارد درسی، برای رسیدن به واقعیتها از تلاش شخصی استفاده کنند. تمرین و کنجکاوی برای درک عمیق، به راستی از کوششهای چاره ساز مشکل جوانان مدرسه ای است.

به نظر شما یک کتاب درسی خوب چه ویژگیهایی باید داشته باشد؟
آن محاسنی که یادگیری، بلکه خودآموزی را تسهیل کند از حجم کتاب درسی نباید ترسید. آن جا که کتاب، بیشتر به مثال و شهود و تمرین و تکرار می پردازد و صورت جامع دارد، کثرت صفحه ها، جای نگرانی ندارد.

بیان رسا و شیرین، لازمه کتاب درسی است. قلم خوب، از ضرورت های این مسأله است. سیری منطقی که خود به خود محرک کنجکاوی و مشوق مطالعه باشد، جای کتاب درسی را در دلها باز می کند. چاپ نفیس و زیبای کتاب درسی، هر چند در رده دوم اهمیت، به هر حال علاقه مندی کودکان و نوجوانان را فراهم می آورد.

از گذاشتن شکل و تصویر زیبا در کتابهای درسی نباید امساک کرد. ارتباط مطالب از فصلی به فصل دیگر و از سالی به سال دیگر، از ضرورت های کتابهای درسی است. کتاب درسی را هر چند که باید جامع باشد، از پرگویی و تکرار هم باید دور نگه داشت. در کتابهای ریاضی، مثالها و تمرینها با سیری تدریجی باید پیش برود. نظم و نظام این سیر تدریجی تمرینها با متن، باید هماهنگی داشته باشد، از پر کردن متن با اعداد بزرگ و نامأنوس، که در زندگی به کار نمی آیند، باید احتراز کرد. مسأله های پیچیده و راه حل های منحصر به فرد و فانتزی را نباید در کتاب درسی و برای همه دانش آموزان گذاشت و به استعداد های در مقیاسهای مختلف تحمیل کرد. تمرینها تا حد امکان، به جوابهای مأنوس و قابل تحمل باید منتهی شود و ...

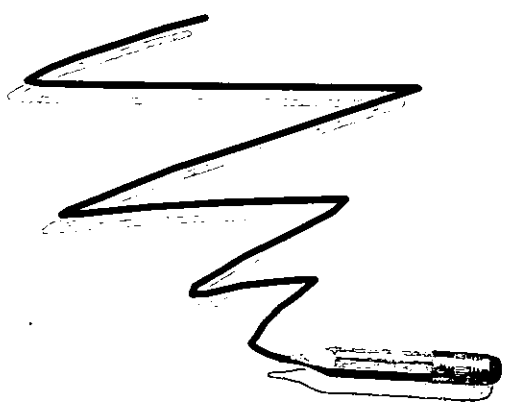
خلاصه آن که، اگر بعضی کتابها را با حوصله و فرصت کافی و با دید عمیق و جست و جوگر، سطر به سطر و صفحه به صفحه

مطالعه کنیم، به مسائل و معایب آشکاری برخورد می کنیم که خود آنها (دانش آموزان) شخصاً می گویند. کتاب درسی چه محاسنی باید داشته باشد.

آیا وجود کتابهای کمک درسی را لازم می دانید و اگر لازم اند، چه ویژگیهایی باید داشته باشند؟
وجود و ارزش کتابهای کمک درسی را نمی توان انکار کرد؛ اما نه به آن صورت که لقمه حاضر در دهان طفل بگذاریم و نه آن که بازاری و شامل خلاصه نیم بندی از برنامه و کتاب درسی باشد. تهیه متن کمک درسی، چه بسا دشوارتر از متن معین درسی باشد. این جا توانایی و ابتکاری لازم است که هم آشنایی با محتوا را لازم دارد و هم دید و نقطه نظر تربیتی و آموزشی را می طلبد. به صورت بی بند و بار، کتاب کمک درسی تهیه کردن و فارغ از انگیزه های فنی و تربیتی، کنار بساط روزنامه فروش ردیف کردن و سؤالات امتحانی را از همانها گرفتن، به راستی زیان بخش است و از انگیزه های کمک درسی دور می افتد. آشفته بازار علم فروشی را باید مهار کرد.

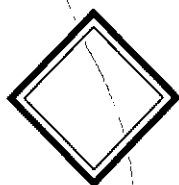
زبان، لازمه تفهیم و تفهم است و مقدم بر همه داناییهاست. بی تردید معلم ریاضی هم هر قدر به زبان و بیان مسلط تر باشد، موفقتر و سودبخش تر خواهد بود. نمونه های بسیار آن را تجربه کرده ایم.

من شخصاً خود را در هیچ زمینه و بخشی متبحر نمی شناسم. معذرت می خواهم زیاد پر حرفی کردم. شما مطالب زیادی را مطرح کرده اید؛ چه می شود کرد؟



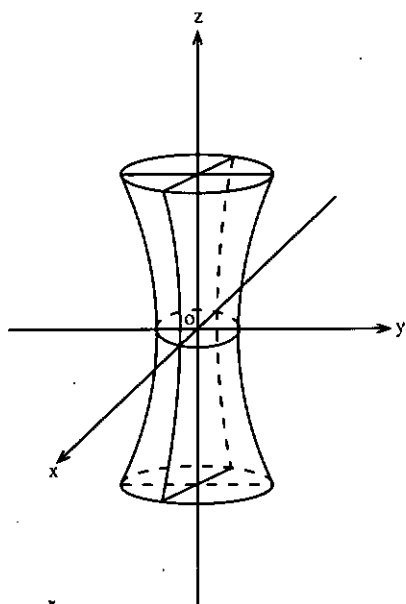
مکان هندسی

(قسمت بیست و یکم)



هذلولوی

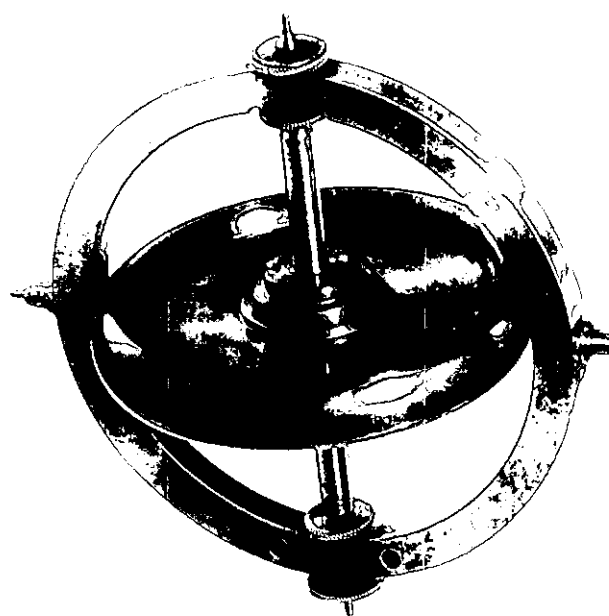
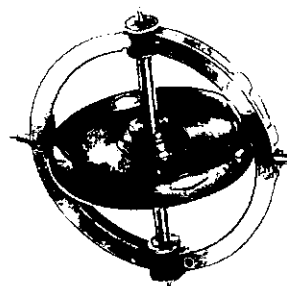
هذلولوی یکپارچه. هرگاه در معادله کلی رویه های درجه دوم که به صورت $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0$ است، ضریبهای A, B, C و L مخالف صفر، با A و B همعلامت و با C مختلف علامه باشد، با فرض $\frac{-L}{A} = a^2$ ، $\frac{-L}{B} = b^2$ و $\frac{-L}{C} = c^2$ داریم:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

این معادله، رویه ای درجه دوم را مشخص می کند که هذلولوی یکپارچه یا هذلولوی وار یکپارچه یا هذلولیگون یکپارچه نامیده می شود. این رویه، ویژگیهای زیر را دارد:

۱. صفحه های مختصات، صفحه های تقارن و مبدأ مختصات، مرکز تقارن آن است.



این معادله، رویه‌ای درجه دوم را مشخص می‌کند که هذلولوی دوبارچه یا هذلولوی واردوبارچه یا هذلولیگون دوبارچه نامیده می‌شود. این رویه ویژگیهای زیر را دارد:

۱. صفحه‌های مختصات، صفحه تقارن و مبدأ مختصات مرکز تقارن آن است.

۲. صفحه xOy را قطع نمی‌کند. مقطع آن با دو صفحه yOz

و xOz به ترتیب هذلولیهای به معادله $\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ است.

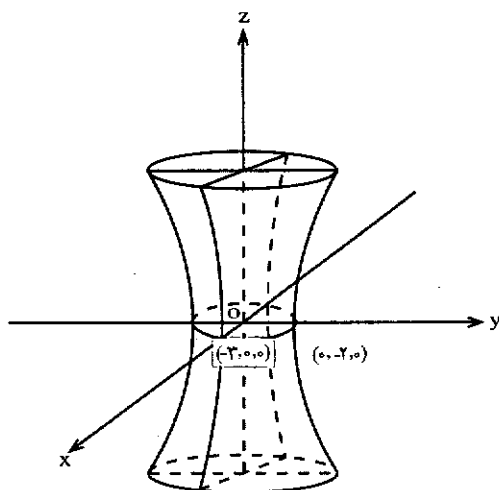
۳. اگر آن را با صفحه $z = h$ قطع دهیم، با شرط $|h| > c$

بیضیهایی به معادله‌های
$$\frac{x^2}{a^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} = 1$$

به دست می‌آید. اگر h تغییر کند، بیضیهایی به دست آمده متشابه‌اند.

مثال ۱. رویه به معادله $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ را مورد بحث و بررسی قرار دهید و نمودار آن را رسم کنید.

حل. این رویه نسبت به هریک از صفحه‌های مختصات و همچنین مبدأ مختصات متقارن است. محور x ها را در نقطه‌های $A(3, 0, 0)$ و $A'(-3, 0, 0)$ و محور y ها را در نقطه‌های $B(0, 2, 0)$ و $B'(0, -2, 0)$ قطع می‌کند. این رویه با محور z ها نقطه برخورد



۲. فصل مشترک آن با صفحه xOy ، بیضی به معادله

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{و با صفحه } yOz \text{ هذلولی به معادله } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

و با صفحه xOz ، هذلولی به معادله $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ است.

۳. اگر آن را با صفحه $z = h$ قطع دهیم، بیضی به معادله زیر

به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$$

نیمه قطرهای این بیضی $b_1 = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ و $a_1 = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$

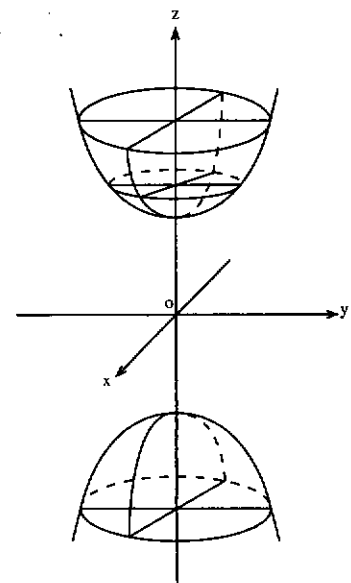
است.

این بیضی به ازاء جميع مقادیر h وجود دارد و بعلاوه از رابطه $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ دیده می‌شود که تمام بیضیهایی متشابه‌اند و کوچکترین آنها وقتی به دست می‌آید که هذلولوی را با صفحه $z = 0$ قطع دهیم. هذلولوی دوبارچه. اگر در معادله کلی رویه‌های درجه دوم

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0$$

ضریبهای A, B, C و L مخالف صفر، $-L$ با A و B مختلف‌العلامه و با C هم‌علامت باشد، با فرض $\frac{-L}{C} = c^2$ و $\frac{L}{B} = b^2$ ، $\frac{L}{A} = a^2$ داریم:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



$$a^2 = 18 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}, \quad b^2 = 12, \quad b = 2\sqrt{3},$$

$$c^2 = 9 \Rightarrow c = 3 \quad \text{محور کانونی موازی محور } x \text{ هاست.}$$

مثال ۴. معادله هذلولی وار دوبارچه ای را بنویسید که مرکزش مبدأ مختصات و محورهای تقارنش، محورهای مختصات باشد و از نقطه های $(3, 1, 2)$ ، $(2, \sqrt{11}, 3)$ و $(6, 2, \sqrt{15})$ می گذرد.

حل. معادله هذلولی وار دوبارچه را که محور کانونی اش، در امتداد محور z هاست، می نویسیم. این معادله به صورت کلی

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

نقطه های داده شده، در این معادله باید صدق کنند. بنابراین داریم:

$$\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{4}{c^2} = -1 \quad (1)$$

$$\frac{4}{a^2} + \frac{11}{b^2} - \frac{9}{c^2} = -1 \quad (2)$$

$$\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} - \frac{15}{c^2} = -1 \quad (3)$$

از رابطه های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می شود:

$$a^2 = 1, \quad b^2 = \frac{1}{2}, \quad c^2 = \frac{1}{3}$$

و از آن جا معادله هذلولی وار دوبارچه به صورت زیر است:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} - \frac{z^2}{\frac{1}{3}} = -1 \quad \text{یا} \quad x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -1$$

$$3z^2 - x^2 - 2y^2 = 1$$

مثال ۵. صفحه $z+1=0$ هذلولوی یک پارچه به معادله $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ را در یک هذلولی قطع می کند. معادله این هذلولی، نیمه قطرها و مختصات رأسهای آن را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1 \\ z+1=0 \Rightarrow z=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

ندارد. فصل مشترک آن با صفحه های $z=k$ بیضیهایی هستند که مرکزشان روی محور z ها واقع است و وقتی k زیاد شود، این بیضیهها نیز بزرگتر می شوند.

مقطعه های این رویه با صفحه هایی موازی با صفحه های yOz و xOz هذلولی هستند. این رویه، هذلولی وار یکپارچه است.

مثال ۲. مختصات مرکز و نیمه قطره های هذلولوی یکپارچه به معادله

$$2x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 8x - 6y + 12z - 10 = 0$$

را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$2(x^2 - 4x) - 3(y^2 + 2y) + 4(z^2 + 3z) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 2[(x-2)^2 - 4] - 3[(y+1)^2 - 1] +$$

$$4[(z+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}] - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-2)^2 - 3(y+1)^2 + 4(z+\frac{3}{2})^2 = 24$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{8} + \frac{(z+\frac{3}{2})^2}{6} = 1$$

$$\Rightarrow O'(2, -1, -\frac{3}{2}) \quad \text{مرکز}$$

$$a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$b^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

$$c^2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$$

محور کانونی این هذلولوی موازی محور y هاست.

مثال ۳. مختصات مرکز و نیمه قطره های هذلولی وار دوبارچه به معادله $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 12x - 6y - 21 = 0$ را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$2(x^2 - 6x) - 3(y^2 + 2y) - 4z^2 - 21 = 0$$

$$\Rightarrow 2[(x-3)^2 - 9] - 3[(y+1)^2 - 1] - 4z^2 - 21 = 0$$

$$2(x-3)^2 - 3(y+1)^2 - 4z^2 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{18} - \frac{(y+1)^2}{12} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow O'(3, -1, 0)$$

را تعیین کنید.

حل. ۱. داریم:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow a_1^2 = 25 \Rightarrow a_1 = 5$$

$$b_1^2 = 4, b_1 = 2, A(0, 0, 5), A'(0, 0, -5)$$

۲. دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{9y^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$$

$$3y^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{z^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \quad \text{مقطع یک هذلولی است.}$$

مثال ۸. به ازای چه مقداری از m ، صفحه به معادله

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \quad x + mz - 1 = 0$$

را اولاً در یک بیضی، ثانیاً در یک هذلولی قطع می‌کند.

حل. داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = -1 \\ x + mz - 1 = 0 \Rightarrow x = -mz + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-mz + 1)^2 + y^2 - z^2 = -1$$

$$\Rightarrow m^2 z^2 + 1 - 2mz + y^2 - z^2 + 1 = 0$$

$$(m^2 - 1)z^2 + y^2 - 2mz + 2 = 0$$

اولاً. برای آن که مقطع بیضی باشد، باید $m^2 - 1 > 0$ باشد؛

یعنی $m > +1$ و یا $m < -1$ باشد.

ثانیاً. برای آن که مقطع هذلولی باشد، باید $m^2 - 1 < 0$ ؛ یعنی

$-1 < m < +1$ باشد.

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$y = 0 \Rightarrow x = +4, x = -4$$

$$\Rightarrow A(4, 0, -1), A'(-4, 0, -1)$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$$

مثال ۶. هذلولی وار یکپارچه به معادله داده شده است:

۱. نیمه قطرها و مختصات رأسهای مقطع این هذلولی وار با

صفحه xOy را تعیین کنید.

۲. نشان دهید که صفحه $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ این

هذلولی وار را در خط مستقیمی قطع می‌کند.

حل. ۱. مقطع این هذلولی وار با صفحه xOy یک بیضی است.

داریم:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, z = 0$$

$$\Rightarrow a_1^2 = 25 \Rightarrow a_1 = 5, b_1^2 = 16 \Rightarrow b_1 = 4,$$

$O(0, 0)$ مرکز بیضی

$$A(5, 0, 0), A'(-5, 0, 0), B(0, 4, 0), B'(0, -4, 0)$$

۲. داریم:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1 \\ 4x - 5y - 10z - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{5(y + 2z + 4)}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{25(y + 2z + 4)^2}{16 \times 25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow y^2 + 2yz + 4y + 4z = 0 \Rightarrow y(y + 2z) + 4(y + 2z) = 0$$

$$\Rightarrow (y + 2z)(y + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y + 2z = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$$

معادله خط فصل مشترک

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$$

مثال ۷. هذلولی وار دوبارچه به معادله داده شده است.

۱. معادله مقطع این هذلولی وار با صفحه yOz را به دست

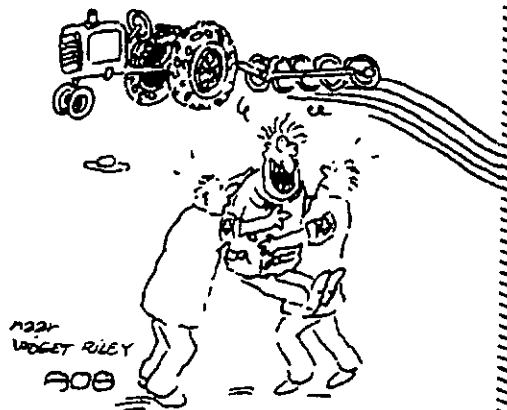
آورید. نیمه قطرها و مختصات رأسهای آن را تعیین کنید.

۲. معادله فصل مشترک این هذلولی وار با صفحه $x - 3y = 0$

پوریسم

((PORISM))

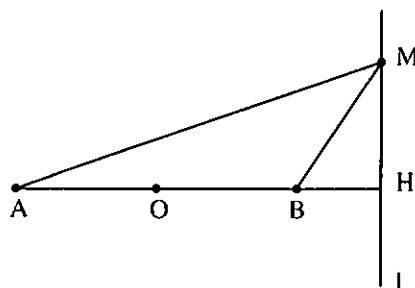
● دکتر احمد شرف الدین



چکیده

در هندسه، پوریسم، به مسأله‌ای گفته می‌شود که اگر در آن مسأله، شرط معینی برقرار باشد، دارای بی‌نهایت جواب باشد و اگر آن شرط برقرار نباشد، هیچ جوابی برای مسأله وجود نداشته باشد. در این مقاله، در مثالهای ۱ تا ۴ چند پوریسم ساده مطرح می‌کنیم تا دانش‌آموزان، مسائل پوریسم را بخوبی دریابند. سپس به شرح دو پوریسم مهم از اوایل و اشتینر می‌پردازیم. در آنالیز ریاضی، هر جواب معادله $f(x) = x$ را یک نقطه ثابت تابع f می‌نامند. اگر بخواهیم به زبان آنالیز ریاضی صحبت کنیم، می‌توانیم بگوییم پوریسم یک مسأله هندسی است که تابعی که داده‌های آن را به هم مربوط می‌کند، دارای بی‌نهایت نقطه ثابت است.

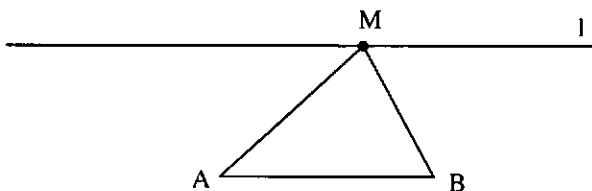
مثال ۱: در صفحه P دو نقطه A و B و خط l عمود بر خط AB مفروضند. بر خط l نقطه‌ای تعیین کنید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد.



حل: وسط پاره خط AB را نقطه O و نقطه برخورد دو خط l و AB را H می‌نامیم. اگر شرط $OH = 0$ برقرار باشد، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است و اگر این شرط برقرار نباشد، مسأله جوابی ندارد.

مثال ۲: در صفحه P خط l و دو نقطه A و B مفروضند؛ به‌طوری که دو خط l و AB موازیند. فاصله دو خط l و AB را h می‌نامیم. می‌خواهیم بر خط l نقطه M را چنان بیابیم که مساحت مثلث MAB برابر عدد معلوم s باشد.

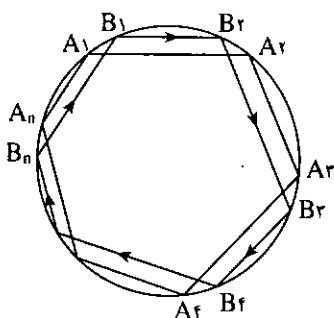
حل: طول پاره خط AB را a می‌نامیم. اگر شرط $s = \frac{1}{2}ah$ برقرار باشد، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است و اگر این شرط برقرار نباشد، مسأله دارای جواب نیست.



مثال ۳: مثلث ABC مفروض است. بر اضلاع AB ، BC و CA از این مثلث سه کمان دایره ADB ، BEC و CFA در خارج مثلث رسم شده؛ به‌طوری که بترتیب کمان درخورهای سه زاویه معلوم α ، β و γ می‌باشند.

هیچ مثلثی وجود ندارد که بر مثلث ABC محیط باشد و سه رأس آن بر سه کمان مذکور قرار داشته باشند.

مثال ۴: دایره (O) و n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ محاط در آن را در نظر می‌گیریم. در دایره (O)، n ضلعی $B_1B_2 \dots B_n$ را چنان محاط کنید که اضلاع $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots, B_nB_1$ بترتیب موازی اضلاع $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_nA_1$ باشند.

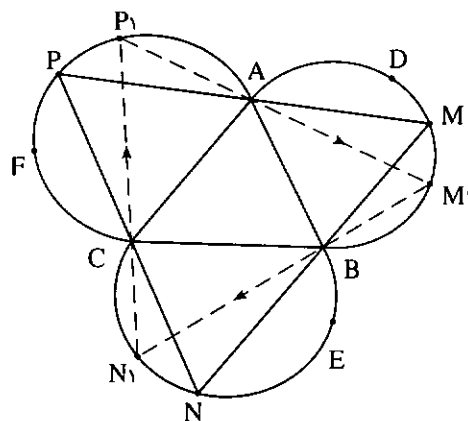


حل: اگر n زوج باشد، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است؛ یعنی هر نقطه دلخواه B_1 که بر محیط دایره بگیریم و خط B_1B_2 را موازی خط A_1A_2 رسم کنیم و سپس خط B_2B_3 را موازی خط A_2A_3 رسم کنیم و عمل ترسیمات متوالی را ادامه دهیم تا به نقطه B_n برسیم، آن‌گاه خط B_nB_1 موازی خط A_nA_1 خواهد بود. اما اگر n فرد باشد، مسأله دارای جواب نیست.

برای اثبات بر دایره (O) جهت مثبت مثلثاتی را به عنوان جهت مثبت اختیار می‌کنیم. اگر دو نقطه M و N بر محیط دایره (O) اختیار کنیم، طول کمان MN را مثبت محسوب می‌کنیم؛ در صورتی که جهت حرکت از M به N در جهت مثبت مثلثاتی باشد و در غیر این صورت، اندازه جبری کمان MN را منفی محسوب می‌کنیم.

اکنون اندازه جبری کمان A_1B_1 را بر محیط دایره جهت دار (O) به I نشان می‌دهیم. اندازه جبری کمان A_2B_2 برابر (-1) می‌باشد و اندازه جبری کمان A_3B_3 برابر (-1) است؛ یعنی برابر 1. اندازه جبری کمان A_nB_n برابر $(-1)^{n+1}$ است. اگر n زوج باشد، این مقدار برابر (-1) است و لذا اگر n زوج باشد، دو کمان A_1B_1 و A_nB_n هم‌طول و ناهمسو می‌باشند؛ پس دو خط موازی B_nB_1 و A_nA_1 موازی می‌باشند، و اگر n فرد باشد، دو کمان A_nA_1 و B_nB_1 هم‌طول و همسو می‌باشند و لذا دو خط موازی

بر مثلث ABC مثلثی چون MNP محیط کنید؛ به طوری که سه رأس M، N، P بترتیب بر کمانهای ADB، BEC، CFA قرار داشته باشند.



حل: اگر شرط

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (1)$$

برقرار باشد، می‌توان بی‌نهایت مثلث بر مثلث ABC محیط کرد؛ به طوری که سه رأس آنها بر سه کمان یاد شده قرار داشته باشند و اگر شرط (۱) برقرار نباشد، هیچ مثلثی وجود ندارد که بر مثلث ABC محیط باشد؛ به طوری که سه رأس آن بر سه کمان یاد شده قرار داشته باشند.

برای اثبات چنین می‌گوییم: نقطه دلخواه M_1 را بر کمان ADB اختیار می‌کنیم و آن را به نقطه B وصل می‌کنیم. نقطه برخورد خط M_1B را با کمان BEC به N_1 نشان می‌دهیم. سپس نقطه N_1 را به نقطه C وصل می‌کنیم و نقطه برخورد خط N_1C را با کمان AFC به P_1 نمایش می‌دهیم. از نقطه P_1 به نقطه A وصل می‌کنیم و نقطه برخورد خط P_1A را با خط M_1B به L نشان می‌دهیم. چون مقدار دو زاویه BN_1C و CP_1A بترتیب برابر β و γ می‌باشند، پس مقدار زاویه ALB برابر:

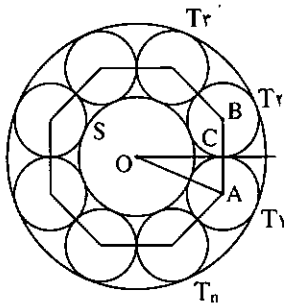
$$180^\circ - (\beta + \gamma)$$

می‌باشد. حال اگر بخواهیم که نقطه L بر کمان ADB قرار داشته باشد، باید شرط $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ وجود داشته باشد.

اگر شرط یاد شده برقرار باشد، بر مثلث ABC می‌توان بی‌نهایت مثلث محیط کرد؛ به طوری که سه رأس آن بر سه کمان ADB، BEC و CFA قرار داشته باشند و اگر شرط یاد شده برقرار نباشد،

و $B_n B_1$ موازی نیستند.

مماس داخلند، در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم چه رابطه‌ای بین r ، R و n موجود باشد تا دایره T_n بر دایره T_1 مماس گردد.

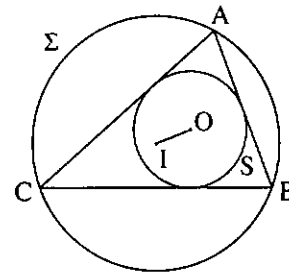


دو پوریسم مهم

در سطور آینده، دو پوریسم مهم ذکر می‌کنیم. پوریسم اول از یکی از قضیه‌های هندسی اویلر نتیجه می‌شود. پوریسم دوم از پوریسمهای بسیار جالب است که از کارهای ژاکوب اشتینر، هندسه‌دان برجسته قرن نوزدهم است.

پوریسم اویلر: دایره $S(I, R)$ محاط در دایره $\Sigma(O, R)$ داده شده است.

مثلی در دایره Σ محاط کنید که بر دایره S محیط باشد.



حل: می‌توانیم هر یک از این دایره‌ها را دایره اول تلقی کنیم که بر دایره دوم و بر آخرین دایره مماس می‌باشد. دو دایره مماس متوالی به مرکزهای A و B را که در نقطه C مماسند، در نظر می‌گیریم. خط مماس OC بر خط‌المركزین AB عمود است. برای آن که حلقه دایره‌ها پس از یک دور بسته شود؛ یعنی دایره T_n بر دایره T_1 مماس شود، باید شرط زیر برقرار باشد.

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{AC}{OA}$$

و چون $\overline{AC} = \frac{1}{2}(R-r)$ و $\overline{OA} = \frac{1}{2}(R+r)$ ، پس باید داشته باشیم:

$$(1) \sin \frac{\pi}{n} = \frac{R-r}{R+r}$$

اگر شرط (۱) برقرار باشد، حلقه دایره‌ها پس از یک دور، بسته می‌شود و مسأله دارای بی‌نهایت جواب است؛ زیرا هر نقطه از دایره S را می‌توان یک نقطه تماس دایره T_1 با دایره S دانست. به عبارت دیگر، با چرخاندن یکی از جوابها (یعنی حلقه دایره‌ها) به اندازه زاویه دلخواه، یک جواب دیگر به دست می‌آید.

تبصره: اگر بخواهیم که پس از k دور چرخیدن دور دایره S ، دایره آخری، یعنی دایره T_n ، به دایره T_1 مماس شود، باید داشته باشیم:

$$\sin \frac{k\pi}{n} = \frac{R-r}{R+r}$$

طرز رسم شکل پوریسم

می‌خواهیم دو دایره هم مرکز رسم کنیم؛ به طوری که در حلقه

برای حل این مسأله، از قضیه زیر که از آن اویلر است، استفاده می‌کنیم:

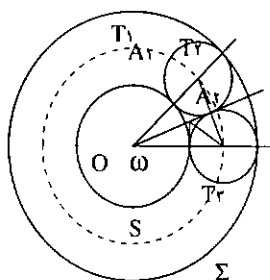
قضیه: اگر شعاع دایره محیطی یک مثلث، برابر R ، شعاع دایره محاط در آن، برابر r و طول خط‌المركزین برابر d باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$d^2 = R^2 - 2rR$$

اگر در مسأله موردنظر داشته باشیم:

$$(1) \overline{OI}^2 = R^2 - 2rR$$

آنگاه بی‌نهایت جواب داریم؛ یعنی بی‌نهایت مثلث وجود دارد که در دایره Σ محاط و بر دایره S محیط باشند و اگر رابطه (۱) بین سه مقدار R ، r و $\overline{OI}$ برقرار نباشد، مسأله دارای جواب نیست. پوریسم اشتینر: پوریسم اشتینر را ابتدا در حالت خاص (در قسمت الف) و سپس در حالت کلی (در قسمت ب) مطرح می‌کنیم. الف. دو دایره هم مرکز $S(O, r)$ و $\Sigma(O, R)$ را در نظر می‌گیریم. یک سلسله دایره‌های $T_1, T_2, \dots, T_n$ را که دوه‌دو مماس خارجند و به علاوه بر دایره S مماس خارج و بر دایره Σ



حل: برای حل، دو قضیه یاد شده زیر را به کار می گیریم:
قضیه الف. به وسیله انعکاس می توان دو دایره غیر مشخص غیر متقاطع را به دو دایره هم مرکز تبدیل کرد.

قضیه ب. دو دایره (C, R) و (C_1, R_1) را که طول خط مرکزین آنها d است، در نظر می گیریم. منعکس آنها را نسبت به یک نقطه O بترتیب دایره های (C', R') و (C'_1, R'_1) می نامیم و طول خط مرکزین دو دایره اخیر را d' می نامیم. عبارت

$$\frac{d'^2 - R'^2 - R_1'^2}{RR_1} \text{ در برابر تبدیل انعکاس پایاست؛ یعنی:}$$

$$\frac{d'^2 - R'^2 - R_1'^2}{RR_1} = \pm \frac{d'^2 - R'^2 - R_1'^2}{R'R'_1}$$

کسر سمت راست، دارای علامت $(+)$ است؛ اگر توانهای نقطه O نسبت به دو دایره (C, R) و (C_1, R_1) هم علامت باشند و در غیر این صورت، علامت کسر سمت راست $(-)$ است.

دو دایره S و Σ را به وسیله تبدیل انعکاس، به دو دایره هم مرکز تبدیل می کنیم. مسأله، به مسأله دو دایره هم مرکز برمی گردد؛ به شرط آن که حلقه دایره ها پس از یک دور چرخش به دور دایره S ، بسته شود؛ یعنی دایره T_n .

به دایره T_1 مماس شود، آن است که:

$$(1) \sin^2 \frac{\pi}{n} = \frac{(R-r)^2 - d^2}{(R+r)^2 + d^2}$$

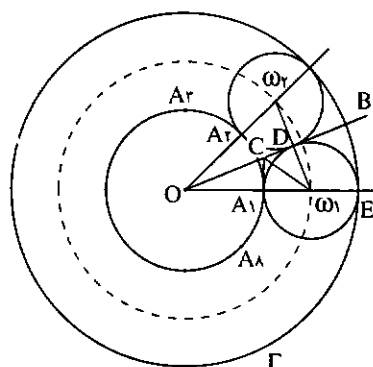
شرط آن که حلقه دایره ها پس از k دور چرخش به دور دایره S ، بسته شود، آن است که:

$$(2) \sin^2 \frac{k\pi}{n} = \frac{(R-r)^2 - d^2}{(R+r)^2 + d^2}$$

اگر رابطه (۱) یا (۲) برقرار باشد، مسأله دارای بی نهایت جواب

بین این دو دایره بتوان n دایره مساوی (مثلاً ۸ دایره) رسم کرد که دو به دو مماس باشند و به علاوه، بر دایره داخلی، مماس خارج و بر دایره خارجی، مماس داخل باشند.

یک دایره دلخواه (O) رسم می کنیم. محیط این دایره را به وسیله نقاط $A_1, A_2, \dots, A_8$ به هشت کمان مساوی تقسیم می کنیم. مماس A_1C را بر دایره (O) رسم می کنیم تا خط OB نیمساز زاویه A_1OA_2 را در نقطه C قطع کند. نیمساز زاویه A_1CB را رسم می کنیم تا خط OA_1 را در نقطه ω_1 قطع کند. عمود ω_1D را بر خط OC فرود می آوریم. چنین داریم $\omega_1A_1 = \omega_1D$ (خاصیت نیمساز). دایره ای به مرکز O و شعاع $O\omega_1$ رسم می کنیم تا خط های $OA_2, OA_3, \dots, OA_8$ را بترتیب در نقاط $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_8$ قطع کند. هشت دایره مساوی با مرکزهای $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8$ و با شعاع ω_1A_1 رسم می کنیم. نقطه برخورد خط OA_1 با دایره به مرکز ω_1 و شعاع ω_1A_1 را به E نشان می دهیم. دایره به مرکز O و شعاع OE را دایره Γ می نامیم. هشت دایره یاد شده بر دایره O ، مماس خارج و بر دایره Γ ، مماس داخلند. شکل حاصل یعنی شکل زیر، همان شکل مطلوب است.



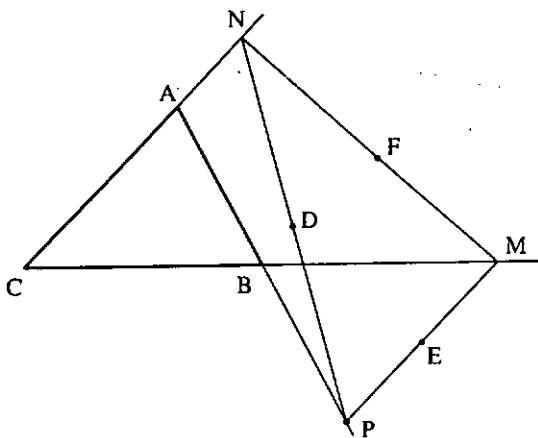
ب. دو دایره $S(O, r)$ و $\Sigma(\omega, R)$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که دایره S داخل دایره Σ باشد. یک سلسله دایره های $T_1, T_2, \dots, T_n$ را که دو به دو مماس خارجند و به علاوه بر دایره S ، مماس خارج و به دایره Σ ، مماس داخلند، در نظر می گیریم. فاصله دو مرکز را d می نامیم. چه رابطه ای باید بین R, r و d برقرار باشد تا حلقه دایره های $T_1, T_2, \dots, T_n$ پس از یک دور بسته شود؛ یعنی دایره T_n بر دایره T_1 مماس شود.

نقطه L از این محور به دست می آید. پس y تابع x است که آن را به صورت $y = f(x)$ نشان می دهیم.

اگر نقطه M_1 در جایی از خط BC انتخاب شود که نقطه L بر آن منطبق گردد، در این صورت، نقطه M_1 یک رأس مثلث محاطی مطلوب می باشد. طول نقطه M_1 جواب معادله $y = f(x)$ است. x نقطه ثابت تابع f است.

تابع f یک تابع هموگرافیک است که می توان به آسانی ضرایب آن را به دست آورد.

تبصره: در هندسه، وقتی می گویم که در مثلث ABC مثلی محاط کنید که دارای فلان خاصیت باشد، منظور آن است که سه رأس مثلث مطلوب، بر سه خط AB ، BC و CA قرار داشته باشند و دارای خاصیت مورد نظر باشند. شکل زیر، یکی از حالت های مسئله را نشان می دهد.



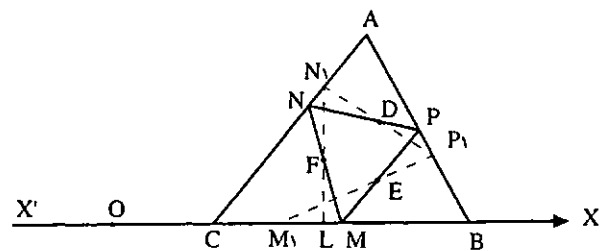
است؛ زیرا از هر یک از وضعیتهای حلقه دایره های مسئله اشتینر در حالت الف، یک جواب برای مسئله اشتینر در حالت ب حاصل می شود.

نقطه ثابت

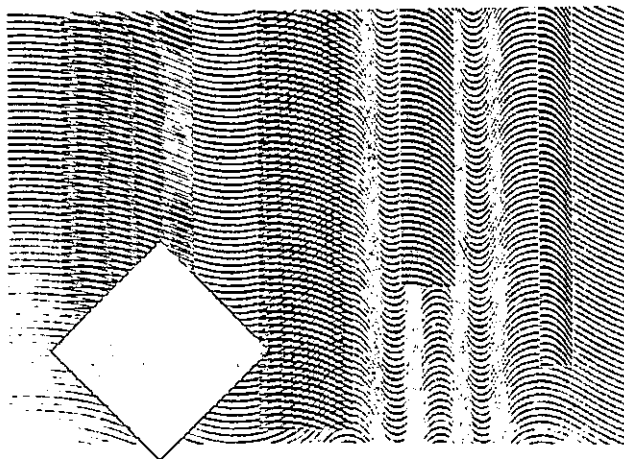
تابع f از متغیر حقیقی x را در نظر می گیریم. هر جواب معادله $f(x) = x$ یک نقطه ثابت تابع f نامیده می شود. این موضوع در آنالیز ریاضی مطرح می گردد. اگر بخواهیم مسئله پوریسم را به زبان آنالیز ریاضی بیان کنیم، می توانیم بگوییم که پوریسم یک مسئله هندسی است، که تابعی که داده های آن را به هم مربوط می کند، دارای بی نهایت نقطه ثابت است. به کمک نقطه ثابت، می توان تعداد زیادی از قضیه های هندسه، از جمله قضیه مشهور پاسکال (خاصیت شش ضلعی محاط در دایره) را ثابت کرد.

در مثال ساده و زیبای زیر، کاربردی از نقطه ثابت را برای دانش آموزان یاد می کنیم.

مسئله: در صفحه P مثلث ABC و سه نقطه D ، E و F مفروضند. مثلث MNP را در مثلث ABC طوری محاط کنید که خطوط NP ، PM و MN ترتیب از سه نقطه D ، E و F بگذرند.



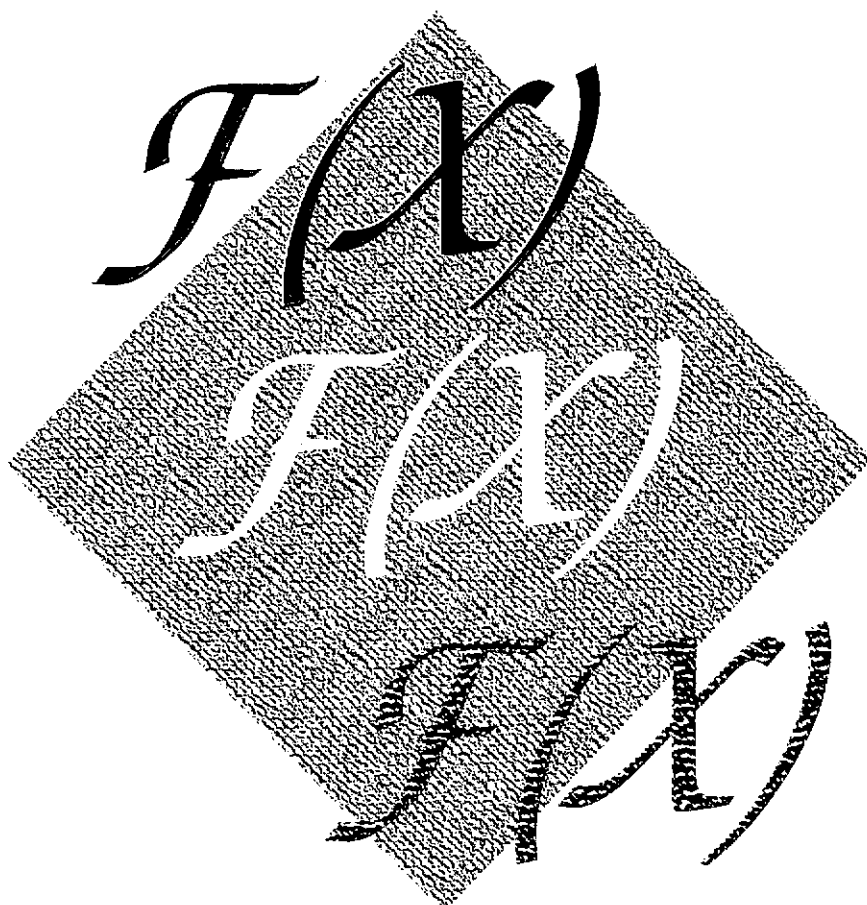
حل: محور $x'Ox$ را منطبق بر خط BC اختیار می کنیم. نقطه دلخواه M_1 را بر محور $x'Ox$ در نظر می گیریم و اندازه جبری بردار $\overrightarrow{OM_1}$ را روی محور $x'Ox$ به x نشان می دهیم. نقطه M_1 را به نقطه E وصل می کنیم و محل برخورد خط M_1E را با خط AB به P_1 نشان می دهیم. نقطه برخورد P_1D را با خط AC به N_1 و نقطه برخورد خط N_1F را با خط BC به L نشان می دهیم. اندازه جبری بردار OL را روی محور $x'Ox$ به y نشان می دهیم. به ازای هر نقطه M_1 از محور $x'Ox$ یک و فقط یک



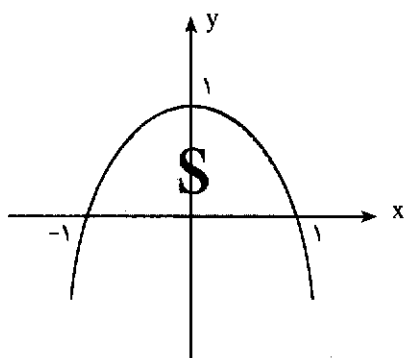
کاربردهای انتگرال

محاسبه مساحت

● سید محمد رضا هاشمی موسوی



سطح مورد نظر بالای محور x ها است :



بنابراین :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 y dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{3}(1)^3 + (1) - \left[-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) \right] \\ &= -\frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3} \text{ (واحد سطح)} \end{aligned}$$

مثال: سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطه

$y = -x^2 - x + 6$ و محور x ها و دو خط $x = -2$ و $x = 1$ را

انتگرال معین در بسیاری از مسائل کاربرد دارد، که از آن جمله می توان محاسبه مساحت، حجم حاصل از دوران، طول منحنی و تعیین تابع چگالی در احتمال و مسائل مربوط به آنالیز، مکانیک، فیزیک، شیمی و... را نام برد. در این جا به برخی از آنها اشاره می کنیم :

محاسبه مساحت

اگر تابع با ضابطه عمومی $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ ، $a < b$ پیوسته و نامنفی باشد، اندازه مساحت سطح محصور بین منحنی تابع f و محور x ها و دو خط به معادلات $x = a$ و $x = b$ که عددی معین است، از محاسبه انتگرال معین زیر به دست می آید :

$$S = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال: سطح محصور بین نمایش تغییرات تابع با ضابطه

$y = -x^2 + 1$ و محور x ها را به دست آورید.

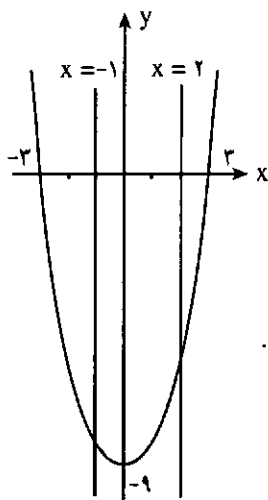
حل: برای محاسبه سطح محصور بین یک منحنی و محور x ها باید طول نقاط برخورد آن منحنی با محور x ها را به دست آوریم. بنابراین، طول نقاط برخورد منحنی با محور طولها را محاسبه می کنیم :

$$y = 0 : -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

محاسبه می کنیم:

$$y=0: x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

$$\Rightarrow -3 < -1 < 2 < 3$$



مشاهده می شود که هیچ یک از طولهای به دست آمده، بین ۱- و ۲ قرار ندارند، و چون $f(0) = -9 < 0$ و $f(1) = -8 < 0$ ، پس تمام سطح مورد محاسبه، در پایین محور x قرار دارد؛ بنابراین:

$$S = \left| \int_{-3}^3 (x^2 - 9) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3} x^3 - 9x \right]_{-3}^3 \right|$$

$$= \left| \left(\frac{27}{3} - 27 \right) - \left(-\frac{27}{3} + 27 \right) \right| = |-24| = 24 \text{ (واحد سطح)}$$

تبصره ۲. هرگاه در فاصله $[a, b]$ تابع با ضابطه عمومی $y = f(x)$ تغییر علامت دهد، قسمت یا قسمتهایی از سطح مورد محاسبه، در بالا و پایین محور x قرار می گیرد که در این صورت، باید هر قسمت از سطح را به طور جداگانه محاسبه کنیم و سپس قدرمطلق آنها را با هم جمع کنیم. به طور مثال، در شکل زیر منحنی محور x ها را در نقطه ای به طول $a < c < b$ ، قطع کرده است؛ یعنی تابع f در مجاورت نقطه ای به طول $x = c$ تغییر علامت داده است.

$$S_1 = \int_a^c f(x) dx \quad \text{بنابراین:}$$

$$S_2 = \left| \int_c^b f(x) dx \right| \quad \text{و:}$$

به دست آورید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور x ها را محاسبه می کنیم:

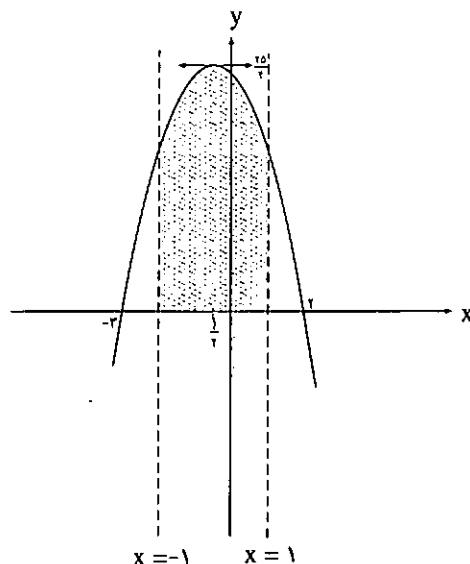
$$y=0: -x^2-x+6=0 \Rightarrow x=2, x=-3$$

$$-3 < -2 < 1 < 2 \quad \text{ملاحظه می کنیم که:}$$

مشاهده می شود که هیچ یک از طولهای به دست آمده، بین ۲- و ۱ قرار ندارند؛ پس سطح مورد محاسبه، به طور کامل در یک طرف محور x ها است و چون $f(0) = 6 > 0$ است، بنابراین تمامی سطح بالای محور x ها قرار دارد؛ پس:

$$S = \int_{-3}^2 (-x^2 - x + 6) dx = \left[-\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 6x \right]_{-3}^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 12 \right) - \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 18 \right) = 16\frac{1}{6} \text{ (واحد سطح)}$$



تبصره ۱. اگر تمام سطح مورد محاسبه، زیر محور x ها قرار داشته باشد؛ یعنی در فاصله $[a, b]$ ، $f(x) < 0$ باشد، آن گاه $\int_a^b f(x) dx$ عددی منفی است که باید قدرمطلق آن را در نظر بگیریم:

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| [F(x)]_a^b \right| = |F(b) - F(a)|$$

مثال: سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطه $y = x^2 - 9$ و محور x ها و دو خط $x = -1$ و $x = 2$ را به دست آورید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور x ها را

بنابراین :

$$S_1 = \int_{-1}^2 (x^2 - 3x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^2 = \frac{5}{6}$$

$$S_2 = \left| \int_{-1}^2 (x^2 - 3x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^2 \right| = \left| \frac{-9}{6} \right| = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = \int_{\sqrt{3}}^2 (x^2 - 3x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{\sqrt{3}}^2 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow S = \frac{5}{6} + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{15}{6} \Rightarrow S = \frac{5}{2} \text{ (واحد سطح)}$$

تبصره ۳. برای محاسبه سطح محصور بین یک خط و یک منحنی یا سطح محصور بین دو منحنی، ابتدا باید طولهای نقاط برخورد آنها را از حل دستگاه معادله‌های خط و منحنی یا دو منحنی به دست آوریم و در صورت لزوم، عرضهای نقاط برخورد را نیز محاسبه کنیم. در صورتی که طولهای نقاط برخورد (دو نقطه متوالی) a و b باشند، به یکی از دو روش زیر، سطح مورد نظر در فاصله $[a, b]$ را محاسبه می‌کنیم:

روش اول - سطح محصور بین خط و منحنی (یا دو منحنی) و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ را به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم و سطوح به دست آمده را از هم کم می‌کنیم:

$$S_1 = \int_a^b f_1(x) dx, S_2 = \int_a^b f_2(x) dx \Rightarrow S = |S_2 - S_1|$$

روش دوم - اگر معادله‌های خط و منحنی (یا دو منحنی)، دو تابع f_1 و f_2 به صورت زیر باشند:

$$y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x)$$

که در فاصله $[a, b]$ پیوسته و $f_2(x) > f_1(x)$ ، سطح مورد نظر، از دستور زیر محاسبه می‌شود:

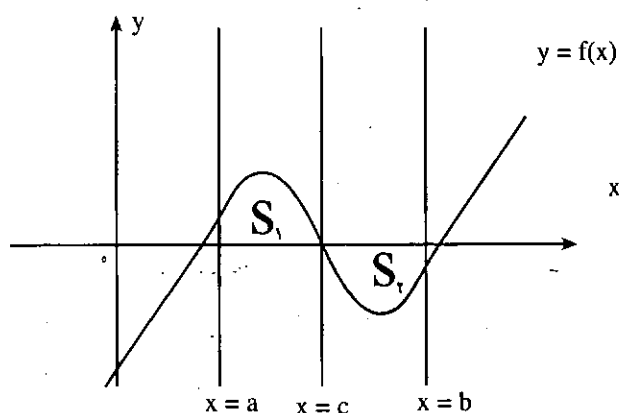
$$S = \int_a^b (y_2 - y_1) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

یعنی ابتدا $g(x) = f_2(x) - f_1(x)$ را محاسبه می‌کنیم؛ و اگر تابع اولیه $g(x)$ را $G(x)$ بنامیم، سطح مطلوب، در حالت کلی برابر است با:

$$S = \left| \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \right| = \left| \int_a^b g(x) dx \right|$$

$$S = S_1 + S_2$$

پس :



مثال: سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x$ و محور x ها و دو خط $x = -1$ و $x = 2$ را حساب کنید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور x ها را محاسبه می‌کنیم:

$$y = 0 : x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0$$

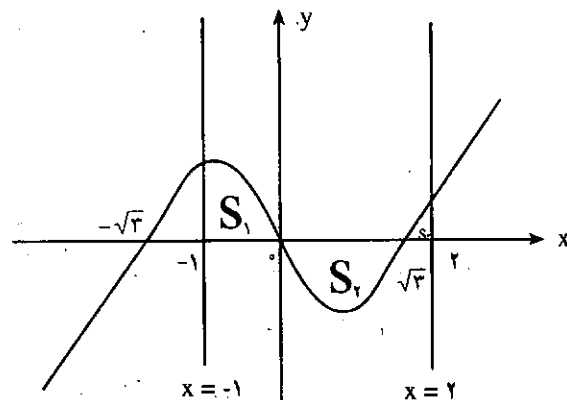
$$\Rightarrow x = 0 ; x = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} < -1 < 0 < \sqrt{3} < 2$$

مشاهده می‌شود که تابع فوق در فاصله $[-1, 2]$ در مجاورت نقاطی به طولهای $x = \sqrt{3}$ و $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد؛ یعنی دو ریشه معادله $y = 0$ بین دو مقدار $x = -1$ و $x = 2$ واقع است. با توجه به $f(-1) = 2 > 0$ و $f(1) = -2 < 0$ و $f(2) = 2 > 0$ نتیجه می‌شود:

$$S_1 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx, S_2 = \left| \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3x) dx \right|$$

$$S_3 = \int_{\sqrt{3}}^2 (x^2 - 3x) dx \Rightarrow S = S_1 + S_2 + S_3$$



$$\Rightarrow S = \int_{-7}^1 (-x^2 - 3x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-7}^1$$

$$= 0 - \left(-\frac{27}{3} - \frac{27}{2} \right) = -\left(-\frac{27}{6} \right) = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$S = \frac{9}{2} \quad (\text{واحد سطح})$$

مثال: سطح محصور بین دو منحنی به معادلات $y = x^2 - 7x + 5$ و $y = -x^2 - 3x + 1$ را محاسبه کنید.
حل:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 3x + 1 \\ y = x^2 - 7x + 5 \end{cases} \Rightarrow -x^2 - 3x + 1 = x^2 - 7x + 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad x = 3$$

(طولهای نقاط تقاطع)

$$S = \int_{-1}^3 (y_2 - y_1) dx$$

$$= \int_{-1}^3 (-x^2 - 3x + 1 - x^2 + 7x + 5) dx$$

$$= \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^3$$

$$= (-18 + 18 + 18) - \left(-\frac{2}{3} + 2 - 6 \right) = \frac{64}{3} \Rightarrow$$

$$S = 21\frac{1}{3} \quad (\text{واحد سطح})$$

تبصره ۴. هرگاه سطح محصور بین یک منحنی و محور عرضها و دو خط $y = a$ و $y = b$ را بخواهیم محاسبه کنیم، باید رابطه $x = g(y)$ را مشخص سازیم و سپس مانند محاسبه سطح محصور بین منحنی، به معادله $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ عمل کنیم.

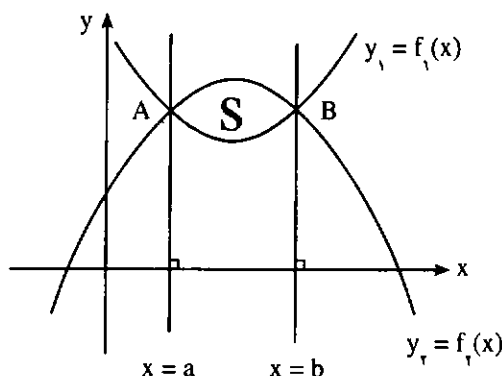
مثال: سطح محصور بین منحنی به معادله $y^2 - 5y - x + 4 = 0$ و محور عرضها و دو خط $y = 2$ و $y = 3$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا عرضهای نقاط تلاقی را به دست می آوریم:

$$x = 0 : y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y = 1, y = 4$$

(عرضهای نقاط تقاطع)

$$= |[G(x)]_a^b| = |G(b) - G(a)|$$



توجه: توصیه می شود برای سهولت در محاسبه سطح محصور بین دو منحنی، همیشه از روش دوم استفاده کنید.

مثال: سطح محصور بین منحنی تابع با ضابطه $y = -x^2 - 2x + 1$ و خط به معادله $y = x + 1$ را محاسبه کنید.
حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد خط و منحنی را به دست می آوریم:

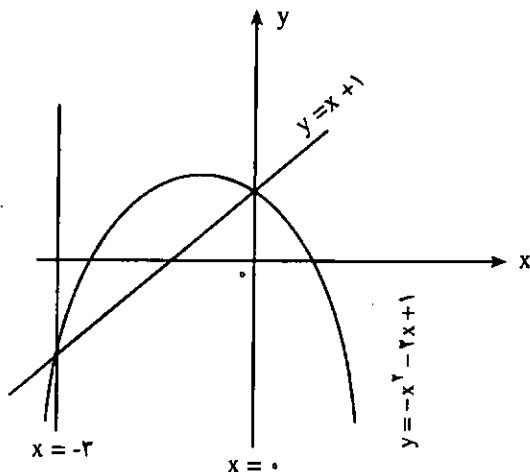
$$\begin{cases} y_1 = x + 1 \\ y_2 = -x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow -x^2 - 2x + 1 = x + 1$$

$$\Rightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3 \quad (\text{طولهای نقاط تقاطع})$$

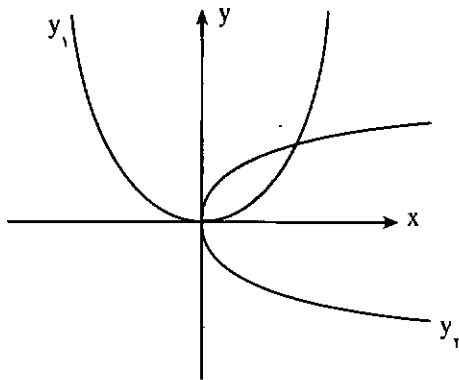
$$g(x) = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x)$$

$$= (-x^2 - 2x + 1) - (x + 1)$$

$$\Rightarrow g(x) = -x^2 - 3x \Rightarrow S = \int_{-3}^0 g(x) dx$$



(طولهای نقاط تقاطع) $x = 2p$



همچنین:

$$y_1 = \frac{x^2}{2p}, \quad y_2 = \sqrt{2px}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2p} (y_2 - y_1) dx = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx \\ &= \int_0^{2p} \left(\sqrt{2p} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2p} x^2 \right) dx = \left[\frac{2\sqrt{2p}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6p} x^3 \right]_0^{2p} \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2p}}{3} (2p)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6p} (2p)^3 \right) = \frac{2(2p)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{3} \\ &= \frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{3} \end{aligned}$$

$$S = \frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{3} = 27 \Rightarrow (2p)^{\frac{3}{2}} = 81$$

$$\Rightarrow |2p| = 9 \Rightarrow |p| = \frac{9}{2}$$

تمرین: تابع با ضابطه $y_1 = f(x) = 12x + \frac{76}{(x+3)^2}$

مفروض است. سطح محصور بین منحنی تابع f و مجانب مایل (غیرموازی با محورها) آن را از خط $x = -2$ تا خط $x = k > -2$

بیاید. همچنین مقدار $\lim_{k \rightarrow \infty} S$ را نیز حساب کنید.

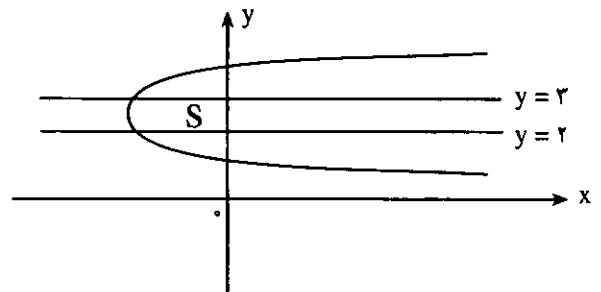
$$\Rightarrow 1 < 2 < 3 < 4$$

سطح مورد نظر در یک طرف محور عرضها است؛ بنابراین:

$$y^2 - 5y - x + 4 = 0 \Rightarrow x = y^2 - 5y + 4$$

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_1^2 x dy \right| = \left| \int_1^2 (y^2 - 5y + 4) dy \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{5}{2} y^2 + 4y \right]_1^2 \right| \\ &= \left| \left(\frac{27}{3} - \frac{45}{2} + 12 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right) \right| \\ &= \left| \frac{-13}{6} \right| = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$S = 2\frac{1}{6} \text{ (واحد سطح)}$$



مثال: اندازه سطح محصور بین دو منحنی به معادلات

$$2y^2 - 4px = 0 \text{ و } 3x^2 - 6py = 0 \text{ برابر } 27 \text{ است، } |p| \text{ برابر}$$

چيست؟

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد دو منحنی را به دست

می آوریم:

$$\begin{cases} 2y^2 - 4px = 0 \\ 3x^2 - 6py = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2px \\ x^2 = 2py \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \frac{x^2}{2p} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2p} \right)^2 = 2px \Rightarrow x^4 - 4p^2 x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 4p^2) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

با توجه به قرینه بودن دو قسمت سطح واقع در ناحیه اول و سوم (سطحهای سایه خورده)، کافی است سطح واقع در ناحیه اول را محاسبه کنیم و حاصل را دو برابر کنیم:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\sqrt{2}} (y_2 - y_1) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3) dx = \left[x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2 - \frac{1}{4} \times 4 = 1 \Rightarrow S_1 = 1 \end{aligned}$$

(سطح محصور به منحنی و خط y_2)

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^1 (y_2 - y_1) dx = \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow S_2 &= \frac{1}{4} \quad (\text{سطح محصور به منحنی و خط } y_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = 2(S_1 - S_2) = 2(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{2} \quad (\text{واحد سطح})$$



در یک کنفرانس بین‌المللی ۱۵ نماینده از قاره‌های آفریقا، آسیا، آمریکا و اروپا جمع شده‌اند. تعداد نمایندگان هر قاره با هم متفاوت است، ولی هر قاره لا اقل یک نماینده فرستاده است. آمریکا و آسیا جمعاً ۶ نماینده، آسیا و اروپا جمعاً ۷ نماینده دارند.

کدام قاره ۴ نماینده دارد؟

جواب در صفحه ۸۸

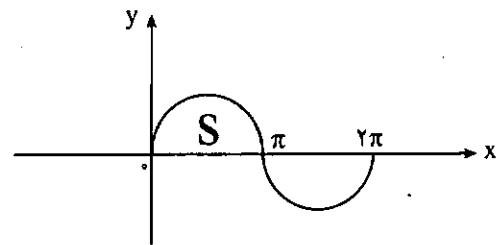
(راهنمایی: معادلهٔ مجانب مایل منحنی $y_2 = 13x$ است. پس:

$$S = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^k (y_2 - y_1) dx \right|$$

مثال: سطح محصور بین یکی از طاقهای منحنی به معادله $y = \sin x$ و محور x را محاسبه کنید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور x را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \dots$$



$$S = \int_0^\pi y dx = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi$$

$$= (1 + 1) = 2 \Rightarrow S = 2 \quad (\text{واحد سطح})$$

مثال: تمام سطح محصور بین منحنی به معادله $y = x^3$ و خطهای $2y - 4x = 0$ و $7y - 7x = 0$ را محاسبه کنید.

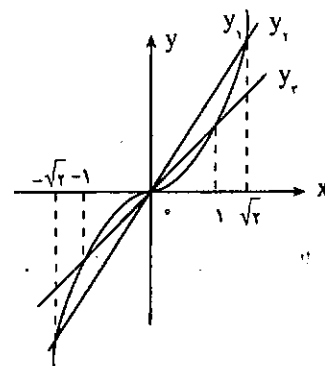
حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی $y_1 = x^3$ را با خطهای $2y - 4x = 0$ و $7y - 7x = 0$ یا $y_2 = 2x$ و $y_3 = x$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y_1 = x^3 \\ y_2 = 2x \end{cases} \Rightarrow x^3 = 2x \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} y_1 = x^3 \\ y_3 = x \end{cases} \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \pm 1$$



$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ هرگاه وقتی x در نزدیکیهای a هست، $f(x)$ در

نزدیکیهای l قرار دارد. در صورتی که مفهوم مجاورت و نزدیک بودن را به طور دقیق، تعریف نکرده ایم.

۳- در بعضی کتابها، «شهود» را به معنای اتکا کردن به یک مدل فیزیکی، برای بیان اثبات یک مسأله یا یک قضیه می گیرند؛ یعنی ابتدا با نگاه یا لمس کردن یک مدل فیزیکی، خواص یک شیء را بفهمیم.

به عنوان مثال، شاید شما متوجه شده اید که دانش آموزان در تشخیص نقطه تقاطع سه صفحه دچار اشتباه می شوند و اغلب باور کردن این مطلب که سه صفحه می تواند فقط در یک نقطه متقاطع باشند، برایشان مشکل است. در این صورت، نشان دادن گوشه اتاق، در باوراندن این مطلب کمک می کند.

البته اتکا کردن به یک مدل فیزیکی، اشکالاتی دارد که ختماً شما با آن آشنا هستید. می دانید اشیای ریاضی، اشیای ذهنی

کلمه «شهود» که بارها در کتابهای ریاضی مورد استفاده قرار می گیرد، از راز آمیزترین و مبهمترین مفاهیم ریاضیات است. در جاهای مختلف، کاربردهای کاملاً متفاوتی از آن دیده می شود.

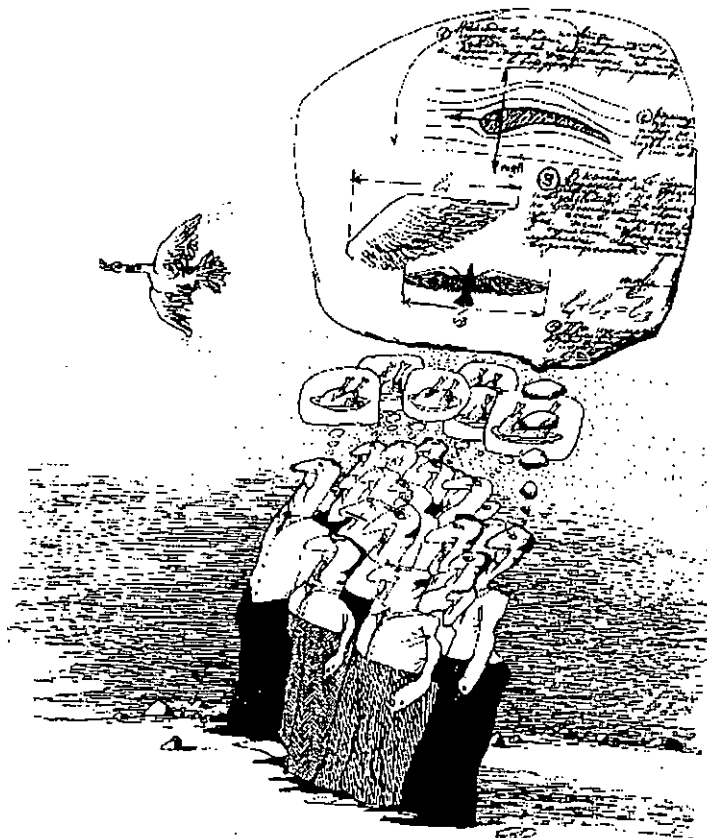
۱- کتابهای دبیرستان، «شهود» را دانشی غریزی یا احساس بدون استدلال می داند و معتقد است که با درک شهودی، درستی گزاره هایی را به طور سطحی می پذیریم و لذا ما را آماده می کند که به سوی اثبات واقعی آن خیز برداریم. این نوع برداشت از شهود، در جاهایی است که ما چند حالت خاص از یک حکم را ملاحظه می کنیم و بعد می گویم «بنابراین انتظار می رود که براساس این تجربیات، فلان چیز درست باشد». در بسیاری از حکمهایی که با استقرای ریاضی سروکار داریم، چنین برداشتی از شهود داریم.

۲- برخی کتابها، «شهود» را به معنای عدم دقت می گیرند و در این صورت، گاه جانشین خطرناک و غیر مشروعی برای اثبات دقیق است. به طور مثال، در موقع بیان مفهوم حد، می گویم

● سیدحسین سید موسوی

(ارائه شده در سومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران)

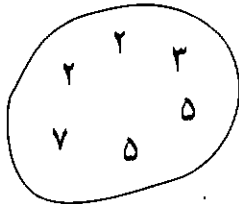
نقش «شهود» در ریاضی دبیرستانی



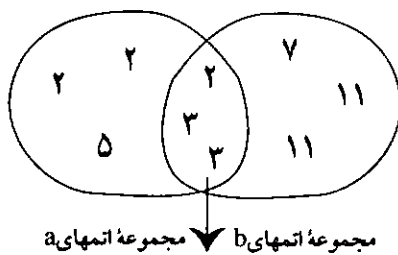
n را اتمهای آن می‌نامیم. به طور مثال :

$$2100 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$$

و نموداری مانند نمودار «ون» برای مجموعه اتمهای n در نظر می‌گیریم و در مورد $n = 2100$ داریم :



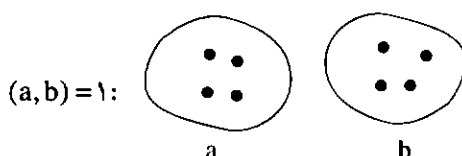
البته توجه دارید که این مجموعه، با مجموعه معمولی تفاوت دارد. بعد، اجتماع و اشتراک مجموعه اتمها را تقریباً مشابه اجتماع و اشتراک معمولی تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال :



ب.م.م = اشتراک

ک.م.م = اجتماع

حال، با این اوصاف، از نظر نموداری، می‌توان $a|b$ و $(a,b)=1$ را نشان داد.



حال، بسیاری از گزاره‌های نظریه اعداد را می‌توان با این

هستند. به طور مثال، صفحه، یک شیء، ایده‌آل و ذهنی است و هیچ شیء فیزیکی، نمی‌تواند در شرایط تعریف صفحه صدق کند؛ زیرا هر شیء صافی را که به عنوان صفحه اختیار کنیم، متناهی و سه بعدی است و نمی‌تواند به مثابه یک صفحه هندسی باشد. اما بعضی دانش‌آموزان فکر می‌کنند سطح یک میز یا یک صفحه، واقعاً یک صفحه به مفهوم ریاضی است؛ در این صورت، گاهی فکر می‌کنند امکان این که دو صفحه فقط در یک نقطه متقاطع باشند، وجود دارد.

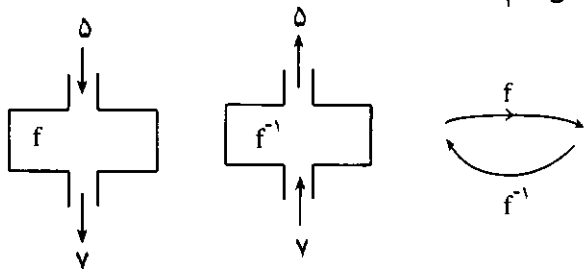
۴- شهود، پرتو غیر قابل بیانی است که افراد کمی به وسیله آن، بخشهایی از دانش ریاضی را ادراک می‌کنند، که دیگران فقط پس از سعی و تلاش فراوان، به آن دست می‌یابند. می‌دانید که بعضی از ریاضیدانان بر این عقیده‌اند که اشیای ریاضی، چیزهایی نیستند که ما آنها را می‌سازیم، بلکه چیزهایی هستند که وجود دارند و ما تنها آنها را کشف می‌کنیم؛ یعنی اشیای ریاضی، در دسترس همگان نیستند، بلکه باید در پشت دیواری در انتظار بمانند تا توسط ریاضیدانی که مورد رحمت خداوندی قرار گرفته و از شهود کافی برخوردار است، مشاهده شوند و یکی از آنها انتخاب شود.

شهود، همان چیزی است که پیشینیان ما، که در جهل و تاریکی به سر می‌بردند، می‌توانستند قضایای درستی را با استدلالهای نادرست بیان کنند.

اکنون به بیان چند مثال می‌پردازیم که چگونه می‌توان مفاهیم قضایای مجرد را به طور شهودی، در دبیرستان توضیح داد.

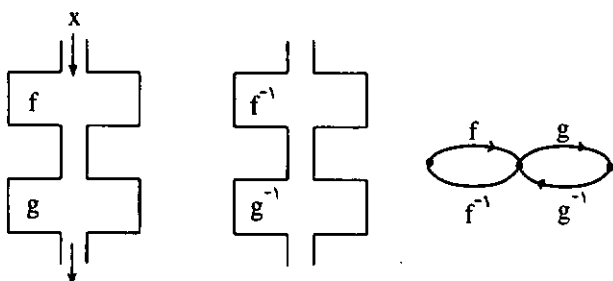
مثال ۱: همان طور که می‌دانید، نظریه اعداد، یکی از مجردترین شاخه‌های ریاضی است، که سرتاسر آن، اثبات قضیه است. مهمترین خصوصیت نظریه اعداد، این است که اشخاص آماتور را خیلی خوب جذب می‌کند؛ زیرا آنها با اطلاعات اندکی، ناگهان با مسائل بزرگ و حل نشده ریاضی مواجه می‌شوند و روح کاوشگر و ستیزه جوی آنان را تحریک می‌کند. با این اوصاف، نظریه اعداد مقدماتی در دبیرستانها تدریس می‌شود و جز تعداد معدودی علاقه مند به ریاضیات، دانش‌آموزان با این درس، راحت کنار نمی‌آیند. بنابراین، به ذهن رسید که چگونه می‌توان کاری کرد که آنان آثباتها را ببینند. از این ایده که ب.م.م و ک.م.م مانند اشتراک و اجتماع در مجموعه‌ها رفتار می‌کنند، استفاده کردم. برای این کار، ابتدا قضیه اساسی حساب را که می‌گوید، هر عدد $n > 1$ حاصل ضرب چند عدد اول است، بیان می‌کنیم و عوامل اول عدد

نمودارها نشان داد. عددی ۲ واحد اضافه می کند، f^{-1} ، ۲ واحد از هر عددی کم می کند. پس $f^{-1}(x) = x - 2$. بعد نمودارهایی به صورت زیر رسم می کنیم:



حالا فرض کنید می خواهیم قضیه زیر را برای دانش آموزان بیان کنیم.

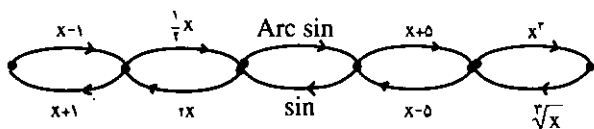
قضیه: اگر f و g وارون پذیر باشند، آنگاه $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ اثبات این قضیه را دانش آموز به سادگی می فهمد؛ ولی نمی داند چرا جای f و g در وارون عوض می شود؟ در این جا نمودارهایی به صورت زیر، علت را روشن می کند:



مسأله: وارون تابع $f(x) = (\text{Arcsin}(\frac{x-1}{2}) + 5)^3$ را به

دست آورید.

حل: ابتدا تابع f را به صورت ترکیب چند تابع می نویسیم:

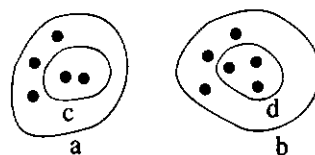


پس: $f^{-1}(x) = 2 \sin(\sqrt[3]{x} - 5) + 1$

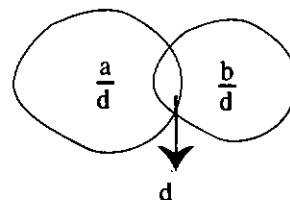
هدف ما از استفاده از شهود در تدریس ریاضیات، کنار گذاشتن استدلال دقیق نیست؛ بلکه معتقدیم در کنار استدلال و اثباتهای دقیق، سعی کنیم که دانش آموزان با مشاهده این نوع مثالها و

$$a|b \Rightarrow \begin{cases} (a,b)=a \\ [a,b]=b \end{cases}$$

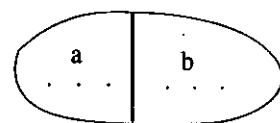
$$(a,b)=1, c|a, d|b \Rightarrow (c,d)=1$$



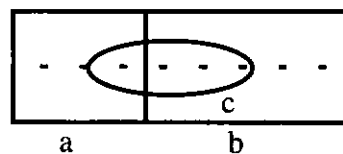
$$(a,b)=d \Rightarrow (\frac{a}{d}, \frac{b}{d})=1$$



$$c|ab, (c,a)=1 \Rightarrow c|b$$

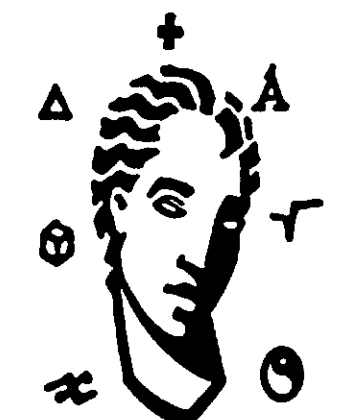


آوردن مثال برای حالتی که $(c,a) \neq 1$. با شکل زیر

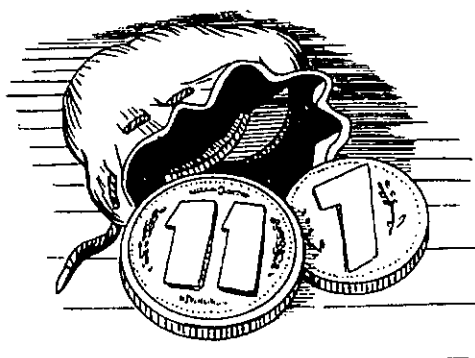


در این شکل $c|ab$ و ولی c/a و c/b

مثال ۲: هر تابع حقیقی f را می توان به منزله ماشینی تصور کرد که روی عددی عمل کرده و عددی را به دست می دهد. به عنوان مثال، عمل تابع $f(x) = x + 2$ ، افزودن ۲ واحد به هر عدد است. با این تعبیر از تابع، وارون f تابعی است که عمل f را خنثی کند؛ (یعنی عکس عمل f را انجام دهد). یعنی تابع f که به هر



تقریح اندیشه ۲



کشوری تصمیم می‌گیرد بیش از دو نوع سکه نداشته باشد، یک سکه ۷ واحدی و یک سکه ۱۱ واحدی، در این صورت بعضی پرداختها مانند ۱۵ واحد را نمی‌توان با این دو سکه انجام داد.

تعیین کنید بزرگترین مقداری که نمی‌توان با ترکیبی از این دو سکه پرداخت کرد، کدام است؟

• از کتاب تقریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکپور

جواب در صفحه ۸۸

نمودارها توانایی رسوخ به باطن این فرمولها و اشیا را به دست آورند.

من گاهی که دانش آموزان مفهوم حد را بدرستی درک نمی‌کنند، می‌گویم نگران نباشید؛ زیرا آفرینندگان حساب دیفرانسیل و انتگرال، بدون آن که مفهوم حد را به روش ϵ و δ بدانند، این مفاهیم را به کار می‌برده‌اند؛ چرا که آنان درک شهودی و احساس ریاضی را در حد اعلائی خود داشتند. آنان گاهی اثبات درستی از یک قضیه را می‌دانستند، بی‌آن که هیچ یک از این اصطلاحات منطقی و دقیق امروزی را بدانند.

بنابراین، دبیرستان باید سرزمین ریاضیات شهودی باشد؛ زیرا در ذهن دانش‌آموز، روانتر و آشنا تر است. اگر می‌خواهید نسل سالم و شادایی در آینده داشته باشیم، یکی از راه‌های آن، تأکید روی درک و استدلال شهودی در کتابهای درسی است. ما با اتکای بیش از حد به اثباتهای دقیق، نسلهایی را از دست داده‌ایم. روش صوری محض، از نظر روانی برای مبتدیان مناسب نیست. حتی ریاضیدانی که یک مقاله بسیار فنی و پیچیده را می‌نویسد، هرگز مانند نوشته‌اش رسمی و منطقی فکر نمی‌کند.

اکنون باید ریاضیاتی شهودی و قابل فهم، و آشنا و همسایه‌وار در دبیرستانها تدریس شود. ریاضیات باید درسی لذتبخش برای بچه‌های ما باشد، چرا باید مردمی که می‌توانند از ریاضیات استفاده و لذت ببرند، از آن متنفر باشند.

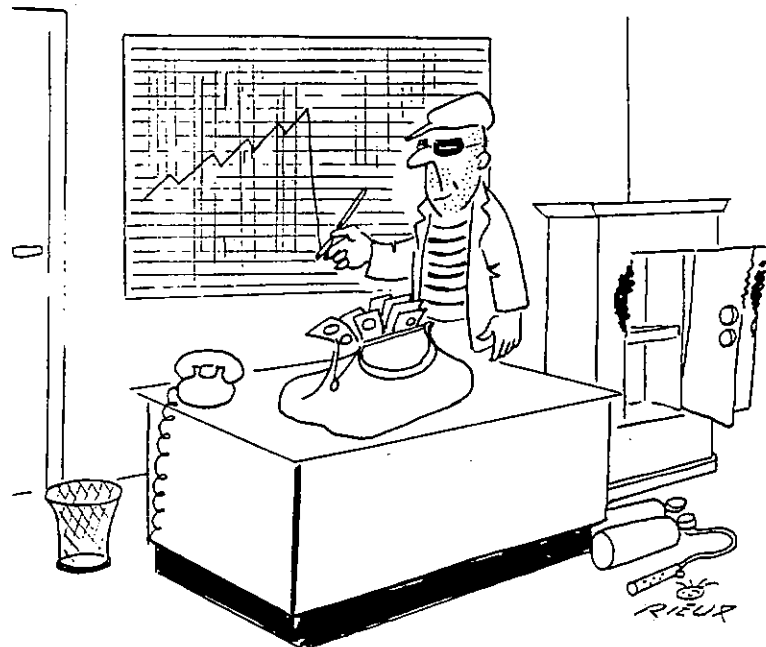
بیاید با همکاری همه استادان ریاضی دبیرستانها و دانشگاه‌هایی که مسؤولیت آماده کردن معلمان را دارند، نگذاریم نسل جوان ما که در دوران جوانی‌اش باید زندگی مفرح و شادی‌آوری داشته باشد، با ارائه ریاضیاتی خشک، صوری، زندگی پرکام آنها تلخ شود. بنابراین، همه ما وظیفه داریم که سعی کنیم در دبیرستان ریاضیاتی دوست‌داشتنی‌تر، روانتر، دلپذیرتر و شهودی‌تر عرضه شود.

تابعهای صعودی و نزولی

(کاربرد قضیه مقدار میانگین)

(قسمت پنجم)

● محمد صادق عسگری



تعریف:

تابع f را روی بازه I صعودی (اکیداً صعودی) نامند، اگر برای هر $x_1, x_2 \in I$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ (یا $f(x_1) < f(x_2)$) را نزولی (اکیداً نزولی) نامند، اگر $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ (یا $f(x_1) > f(x_2)$).
تذکر: توابع صعودی یا نزولی را توابع یکنوا می نامند.

قضیه (رابطه بین مشتق و توابع یکنوا)

فرض کنیم تابع حقیقی f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه $]a, b[$ مشتق پذیر باشد.

الف- اگر برای هر $a < x < b$ داشته باشیم $f'(x) > 0$ ، آن گاه f اکیداً صعودی است.

ب- اگر برای هر $a < x < b$ داشته باشیم $f'(x) < 0$ ، آن گاه f اکیداً نزولی است.

اثبات: الف- فرض کنیم $a < x_1 < x_2 < b$ در این صورت تابع f روی بازه $[x_1, x_2]$ در شرایط قضیه مقدار میانگین، صدق می کند. پس عدد c وجود دارد؛ به طوری که

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2$$

چون $f'(c) > 0$ و $x_2 - x_1 > 0$ ، در نتیجه $f(x_2) - f(x_1) > 0$ یا $f(x_2) > f(x_1)$ ؛ یعنی f اکیداً صعودی است.

ب- به طور مشابه در قسمت (ب) نیز داریم:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c')(x_2 - x_1), \quad x_1 < c' < x_2$$

چون $f'(c') < 0$ و $x_2 - x_1 > 0$ ، در نتیجه $f(x_2) - f(x_1) < 0$ یا $f(x_2) < f(x_1)$ ؛ یعنی f اکیداً نزولی است.

نکته ۱: در قضیه بالا اگر داشته باشیم $f'(x) \geq 0$ (یا $f'(x) \leq 0$)، در این صورت، حکم قضیه وقتی برقرار است که تعداد ریشه های معادله $f'(x) = 0$ متناهی باشد.

نکته ۲: برای تعیین فواصل یکنوایی تابع حقیقی f ، باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. جدول تعیین علامت مشتق را جدول تغییرات نمودار تابع f می گویند. همچنین نقطه ای به طول $x = c$ از دامنه تابع f را نقطه اکسترم نسبی f می گویند، هرگاه مشتق f در این نقطه، تغییر علامت دهد.

x	$-\infty$				۱
$f'(x)$	+	+	+		
$f(x)$	$-\infty$				۲

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 8x + 12} - 7$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2, 6\}$$

برای مشتق‌گیری از توابع کسری به صورت

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}, \text{ می‌توان از فرمول}$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2 + b'x + c')^2}$$

استفاده کرد. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ بنابراین داریم:

$$f'(x) = \frac{-16x^2 + 48x}{(x^2 - 8x + 12)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -16x^2 + 48x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	y
$\pm\infty$	۲
۰	۰
۳	-۶

x	$-\infty$	۰	۲	۳	۶	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+	-	-
$f(x)$	۲					۲

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x} - 4$$

$$D_f = [0, 2\pi] - \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}, \quad f'(x) = \frac{-(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

x	D_f	C
$f'(x)$	+	-
$f(x)$		$f(c)$ Max

x	D_f	C
$f'(x)$	-	+
$f(x)$		$f(c)$ Min

مثال ۳۷: حدود a را بیابید؛ به طوری که تابع $f(x) = \frac{ax-2}{x+2}$ همواره نزولی باشد.

حل: طبق قضیه، باید برای هر $x \neq -2$

داشته باشیم $f'(x) < 0$ ، در نتیجه داریم:

$$f(x) = \frac{ax-2}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2a+2}{(x+2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow 2a+2 < 0 \Rightarrow 2a < -2$$

$$\Rightarrow a < -1$$

مثال ۳۸: جهت تغییرات و نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی

توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} \quad \text{الف}$$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3x^2 - 12x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{(x-6)^2}}$$

x	$-\infty$	۰	۴	۶	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	+	+
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

x	y
$\pm\infty$	$\pm\infty$
۰	۰
۴	$-2\sqrt[3]{4}$
۶	۰

$$f(x) = 2x - \sqrt{1-x} \quad \text{ب}$$

$$D_f =]-\infty, 1] \quad f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0$$

تابع همواره صعودی است.

$$f(x) = x - \sqrt{x-1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \leq 1 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x-1 \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{5}{4}$$

قضیه (رابطه بین نامساویها و مشتق)

اگر تابعهای f و g روی بازه‌های $[a, b]$ پیوسته و روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر باشند و $f(a) = g(a)$ و نیز برای هر x ، $a < x < b$ ، $f'(x) < g'(x)$ ، آن گاه برای هر x ، $a < x < b$ ، $f(x) < g(x)$.

اثبات: تابع $h(x) = f(x) - g(x)$ را روی بازه $[a, b]$ در نظر می‌گیریم. h پیوسته است و روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است. و $h(a) = 0$ و برای هر x ، $a < x < b$ ، $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$. پس طبق قضیه، h تابعی اکیداً نزولی است. در نتیجه داریم:

$$a < x < b \Rightarrow h(a) > h(x) \Rightarrow 0 > h(x)$$

$$\Rightarrow 0 > f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$$

مثال ۴۱: نشان دهید اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ ، آن گاه برای هر x حقیقی مثبت، $(1+x)^n > 1+nx$.

حل: اگر $f(x) = 1+nx$ و $g(x) = (1+x)^n$ اختیار شوند، در این صورت این توابع روی بازه $[0, +\infty)$ پیوسته و روی $[0, +\infty)$ مشتق پذیرند و $f(0) = g(0) = 1$ و $f'(x) = n$ و $g'(x) = n(1+x)^{n-1}$. همچنین برای هر $x > 0$ داریم:

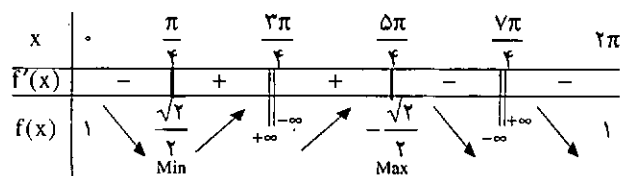
$$x > 0 \Rightarrow 1+x > 1 \Rightarrow (1+x)^{n-1} > 1$$

$$\Rightarrow n < n(1+x)^{n-1} \Rightarrow f'(x) < g'(x)$$

پس طبق قضیه برای هر $x > 0$ ، باید داشته باشیم $f(x) < g(x)$ یا $(x+1)^n > 1+nx$.

مثال ۴۲: نشان دهید اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ ، آن گاه برای هر x حقیقی مثبت داریم: $\sqrt[n]{1+x^n} < 1+x$.

حل: اگر $f(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ و $g(x) = 1+x$ اختیار شوند، در این صورت، این توابع روی بازه $[0, +\infty)$ پیوسته و روی $[0, +\infty)$ مشتق پذیرند و $f(0) = g(0) = 1$ و $f'(x) = \frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(1+x^n)^{n-1}}}$ و



x	y
0	1
pi/4	sqrt(2)/2
pi/2	1/2
3pi/4	sqrt(2)/2
pi	1
5pi/4	sqrt(2)/2
3pi/2	1/2
7pi/4	sqrt(2)/2
2pi	1

مثال ۳۹: m را بیابید به طوری که برای هر x مثبت داشته

$$mx - 1 + \frac{1}{x} \geq 0$$

حل: تابع مشتق پذیر $f(x) = mx - 1 + \frac{1}{x}$ را روی بازه $[0, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. بنا به فرض، باید داشته باشیم $y_{\min} = 0$.

$$y = mx - 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = m - \frac{1}{x^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow m - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{m}$$

اولاً $m > 0$: زیرا اگر m منفی باشد، آن گاه f می‌نیم نخواهد داشت.

$$x^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

ثانیاً نقطه $\frac{1}{\sqrt{m}}$ نقطه می‌نیم f است. در نتیجه داریم:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = 0 \Rightarrow m \times \frac{1}{\sqrt{m}} - 1 + \sqrt{m} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{m} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

مثال ۴۰: حدود x را بیابید: به طوری که تابع با ضابطه

$$f(x) = x - \sqrt{x-1}$$

حل: باید داشته باشیم $f'(x) \geq 0$ ، در نتیجه داریم:

پس طبق قضیه، برای هر $0 < x < \pi$ ، باید داشته باشیم
 $f(x) < g(x)$ یعنی: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ (**).

با توجه به روابط (*) و (**) برای هر x ، $0 < x < \pi$ داریم:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

مثال ۴۴: ثابت کنید: برای هر x ، $0 < x < \pi$ ،

$$x^2 - \frac{x^4}{6} - 1 < x \sin x + \cos x < x^2 + 1$$

حل: بنابر مثال ۴۳ داریم:

$$\begin{cases} -1 < \cos x < 1 \\ x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < \cos x < 1 \\ x^2 - \frac{x^4}{6} < x \sin x < x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{x^4}{6} - 1 < x \sin x + \cos x < x^2 + 1$$



به این دو عمل ریاضی توجه کنید که توجه به آنها خالی از تعجب نیست.

$$272 + 16 = (2 + 7) \times 2 \times 16$$

$$\sqrt{324} = 3 \times (2 + 4)$$

$g'(x) = 1$. همچنین برای هر $x > 0$ داریم:

$$x > 0 \Rightarrow \frac{x^n}{1+x^n} < 1 \Rightarrow \left(\frac{x^n}{1+x^n} \right)^{\frac{n-1}{n}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(1+x^n)^{n-1}}} < 1 \Rightarrow f'(x) < g'(x)$$

پس طبق قضیه، برای هر $x > 0$ ، باید داشته باشیم: $f(x) < g(x)$

$$\text{یا } \sqrt[n]{1+x^n} < 1+x$$

مثال ۴۳: ثابت کنید برای هر $0 < x < \pi$ ،

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم برای هر $0 < x < \pi$ ، $\sin x < x$ ، توابع

$f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ را روی بازه $[0, \pi]$ در نظر می‌گیریم.

این توابع روی بازه $[0, \pi]$ پیوسته و روی بازه $]0, \pi[$ مشتق‌پذیرند

و $f(0) = g(0) = 0$ و $f'(x) = \cos x$ و $g'(x) = 1$ چون برای هر

$0 < x < \pi$ ، داریم $\cos x < 1$ ، در نتیجه $f'(x) < g'(x)$. پس طبق

قضیه برای هر $0 < x < \pi$ ، داریم $f(x) < g(x)$ ؛ یعنی $\sin x < x$.

در قسمت دوم نشان می‌دهیم برای هر $0 < x < \pi$ ،

$x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ (*). اگر $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ و $g(x) = \sin x$

اختیار شوند.

این تابعها روی بازه $[0, \pi]$ پیوسته و روی $]0, \pi[$ مشتق‌پذیرند

و $f(0) = g(0) = 0$ و $f'(x) = 1 - \frac{x^2}{3}$ و $g'(x) = \cos x$.

بنابر قسمت اول، برای هر $0 < x < \pi$ داریم:

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) < \frac{x}{3} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) < \frac{x^2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos x}{2} < \frac{x^2}{9} \Rightarrow 1 - \cos x < \frac{x^2}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{9} < \cos x \Rightarrow f'(x) < g'(x)$$

دولتی کامباکونام شد و کمک هزینه‌ای هم دریافت می‌کرد. به دلیل اشتیاق فراوان به ریاضیات، در تمام کلاسهای درس، مشغول مطالعه ریاضی بود، در نتیجه توانست در امتحانات خود توفیق بیابد.

در سال ۱۹۰۹ ازدواج کرد و به کمک دوستانش، توانست در سال ۱۹۱۲ به عنوان محاسب در دفتر کمپانی بندری مدرس به کار مشغول شود و سالیانه، حقوقی معادل ۳۰ لیر دریافت کند.

در سال ۱۹۱۱ اولین اثر او منتشر شد و یک سال بعد، قدرت غیرعادی او در ریاضی، مورد شناسایی قرار گرفت. در سال ۱۹۱۴ به کمک چند دانشمند، از جمله هاردی، به انگلستان رفت و سه سال تمام بدون وقفه در زمینه ریاضی فعالیت کرد که نتایج آن، در آثار او منعکس است و بالأخره در سال ۱۹۲۰ با نهایت تأسف در سن ۳۴ سالگی درگذشت.

گرچه مرگ زودرس او برای ریاضیات تأسف بار است؛ ولی ترازوی بزرگ زندگی او، این بود که مدت پنج سال عدم توفیق در امتحانات کالج، نبوغ بزرگ او را منحرف کرد.

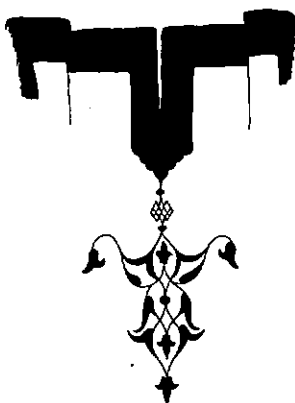
هاردی می‌گوید، در همه فرمولهای او، چیزی خیلی بیشتر از آنچه که در ابتدا به نظر می‌رسد، وجود دارد. در واقع، اگر ریشه‌های منطقی حتی ساده‌ترین دستورهای رامانوجان را جست‌وجو کنیم، می‌توان بستگیها و زیباییهای بسیار جالبی را پیدا کرد. جا دارد که این جا

هاردی (Hardy) ریاضیدان انگلیسی، یکی از برجستگان ریاضی اوایل قرن بیستم است. هاردی می‌گوید: رامانوجان هندی نیم تحصیل کرده‌ای است، ولی به علت ارزش کارش، او را ریاضیدان می‌دانم.

رامانوجان در سال ۱۸۸۷ در ارود واقع در نزدیکی شهر کوچکی به نام «کامباکونام» از توابع ایالت «مدرس» در خانواده فقیری متولد شده است.

مدت نه سال در مدرسه درس خواند. معلمهای مدرسه او را متفاوت از دیگران به شمار می‌آوردند. از داستانهای عجیبی که درباره او نقل می‌کنند، یکی این است که، پس از آن که در مدرسه با مثلثات آشنا شد، دستور اولر در رابطه بین سینوس و کسینوس، توابع مجهول القوه را پیدا کرد.

نخستین کتاب ریاضی قابل توجهی که در دسترس رامانوجان قرار گرفت، کتاب Carr تألیف «جورج شو پریج کار»، معلم سابق در کمبریج است. «وی پس از تألیف اولین جلد از کتاب خود، وارد دانشگاه کمبریج جهت اخذ لیسانس شده است.» همین کتاب توانست نبوغ رامانوجان را بیدار کند، از آن جایی که کتاب دیگری در دسترس نداشت، شخصاً درصدد برآمد که تمام دستورهای موجود در کتاب را ثابت کند. در سال ۱۹۰۳ از مدرسه دیپلم گرفت و در ژانویه سال بعد، وارد کالج



$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1+\dots}}}}}}} = 2$$

رامانوجان

Ramanujan

احمد قندهاری

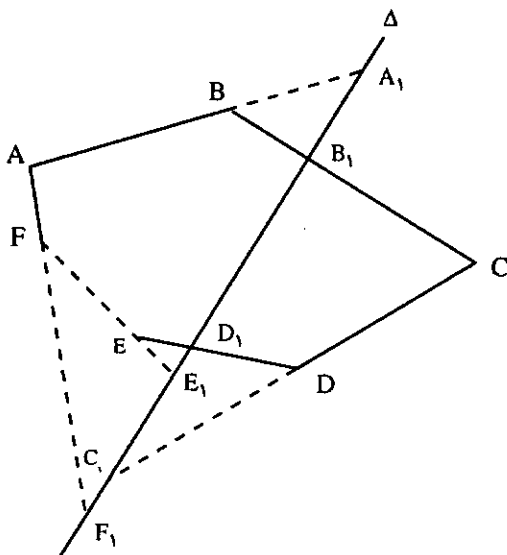
مسئله مسابقه‌ای

برهان ۳۲

چندضلعی مسطح دلخواهی به عنوان مثال، شش ضلعی ABCDEF و قاطع Δ که ضلعهای AB، BC، CD، DE، EF و FA از این چندضلعی را برتریب در نقطه‌های $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ قطع می‌کند، در نظر می‌گیریم. ثابت کنید:

$$\frac{A_1A}{A_1B} \times \frac{B_1B}{B_1C} \times \frac{C_1C}{C_1D} \times \frac{D_1D}{D_1E} \times \frac{E_1E}{E_1F} \times \frac{F_1F}{F_1A} = 1$$

آیا عکس این قضیه درست است؟



اشاره‌ای به یکی از دستورهای او بکنیم.

بسط عددهای طبیعی $n \in \mathbb{N}$ ، رامانوجان:

$$n+1 = \sqrt{(n+1)^2} = \sqrt{n^2 + 2n + 1} = \sqrt{1 + n(n+2)}$$

$$= \sqrt{1 + n\sqrt{(n+2)^2}} = \sqrt{1 + n\sqrt{n^2 + 4n + 4}}$$

$$= \sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)}}$$

$$= \sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{(n+3)^2}}}$$

$$= \sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)(n+4)}}$$

$$= \sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{(n+4)^2}}}}$$

$$= \sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{1 + (n+3)(n+5)}}$$

$$= \sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{1 + (n+3)\sqrt{(n+5)^2}}}}$$

$$= \sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{1 + (n+3)\sqrt{1 + (n+4)(n+6)}}$$

$$= \sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{1 + (n+3)\sqrt{1 + (n+4)\sqrt{1 + \dots}}}}}$$

$$\text{اگر } n=1 \Rightarrow 2 = \sqrt{1 + 1\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}}}$$

$$\text{اگر } n=2 \Rightarrow 3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \dots}}}}}$$

$$\text{اگر } n=3 \Rightarrow 4 = \sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + 6\sqrt{1 + \dots}}}}}$$

نتایج جالبی از این بسطها به دست می‌آید که از حوصله این مقاله خارج است.

منابع

۱- تاریخ ریاضیدانان نامی اریک تمپل بل، ترجمه حسن صفاری.

۲- آشنی با ریاضیات نوشته پرویز شهریاری، خرداد و تیر ۵۷، شماره ۲.

رنگهایی که قبلاً درک کرده است، به این واقعیت که «رنگ این شلوار سبز است» پی می برد.

مثال (۳)

جعبه‌ای بزرگ را تهیه کنید. قسمتی از دیواره جعبه را سوراخ کنید؛ به طوری که دست یک دانش آموز اول دبستان، بر راحتی از این سوراخ، وارد جعبه شود. بدون آن که دانش آموز ببیند، مجموعه‌ای از اشیایی که کودک با آنها آشنایی دارد، مانند توپ، شانه، قاشق، مداد، تراش و... را درون جعبه گذاشته و در آن را ببندید. اکنون از دانش آموز بخواهید که دستش را از سوراخ به داخل جعبه فرو برد و یکی از اشیاء را بردارد، سپس نام آن شیء را بگوید و شما نیز می‌توانید با مشاهده درون جعبه، به درستی یا نادرستی گفته وی پی ببرید. به نظر شما دانش آموز فوق، می‌تواند درک درستی از شیمی که برداشته است، داشته باشد؟ چرا؟

شهود «Intuitive» مترادف با شواهد، جمع کلمه شاهد به معنای دیدن و مشاهده کردن است؛ اما همان طور که در ابتدای این بخش گفته شد، مقصود از درک شهودی، بازسازی ذهنی یا

درک شهودی

• بررسی و تنظیم: علیرضا عین‌اللهی (مدیر مراکز تربیت معلم)

شناخت در مورد فضا یا دنیای اطراف ما به دو طریق گسترش می‌یابد؛ ابتدا به واسطه آنچه ما مشاهده می‌کنیم یا آنچه که احساسمان به ما می‌گوید. «پیازه» به این مفهوم، به عنوان فضای ادراک حسی اشاره می‌کند؛ اما ذهن انسان مانند یک دوربین فیلمبرداری عمل نمی‌کند. به این معنا که ذهن تنها از آنچه چشمانمان می‌بیند، فیلمبرداری نمی‌کند؛ بلکه چنین داده‌های حسی را، که توسط دیدن یا لمس کردن به دست آورده است، باید به صورت ذهنی، بازسازی کرده یا نمایش دهد.

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱)

اگر در چند صد سال پیش، به شما می‌گفتند که «زمین گرد است» یا «زمین به دور خورشید در گردش است» یا «زمین دارای نیروی جاذبه است»، آیا با توجه به مشاهدات آن زمانتان، می‌توانستید درستی این جمله‌ها را باور کنید؟ چرا؟

مثال (۲)

فرض کنید به یک کودک سه ساله، با نشان دادن وسایل رنگی، رنگهای آبی، قرمز، سبز و زرد را یاد داده باشیم. به عنوان مثال، به او بگوییم که «این توپ آبی است»، «این میز زرد است»، «این کفش قرمز است» و... حال اگر پس از مدتی، برای این کودک یک شلوار سبز بخریم و از او بپرسیم که «این شلوار چه رنگی است؟» او در پاسخ می‌گوید که سبز است؛ زیرا او با مشاهده شلوار و منطق کردن رنگ آن با یکی از



خالی از ابهام باشد.

اکنون سعی کنید با پاسخ دادن به سؤالهای زیر، این بخش را به طور دقیق مرور کنید :

۱-۱. سؤالهای دوره ای

- ۱- شناخت فضای فیزیکی ما به چند طریق گسترش می یابد؟
- ۲- پیازه به مشاهدات و احساسات ما از فضای فیزیکی چه عنوانی را نسبت می دهد؟
- ۳- آیا ذهن ما فقط از آنچه که چشمانمان می بیند، فیلمبرداری می کند؟
- ۴- اگر چند صد سال پیش به شما می گفتند که «انسان می تواند به کره ماه سفر کند». آیا شما آن را می پذیرفتید؟ چرا؟
- ۵- عددی را انتخاب کنید، آن را دو برابر کنید، به حاصل، عدد چهار را بیفزایید، نتیجه را بر دو تقسیم کنید و عدد انتخابتان را از حاصل نهایی کم کنید ؛ چه عددی به دست آورده اید؟ این اعمال را با انتخاب اعداد دیگر، دوباره تکرار کنید. از مشاهدات خود، چه نتیجه ای می گیرید؟
- ۶- آیا شهود، همان درک شهودی است؟
- ۷- هرگاه که از ادراک شهودی خود استفاده می کنیم، آیا می توانیم اطمینان کامل در زمینه درستی نتیجه گیریهای خود داشته باشیم؟
- ۸- آیا جمله زیر درست است؟
«درک شهودی، یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال است.»
- ۹- آیا مطالعه و استفاده از ادراک شهودی لازم است؟ چرا؟
- ۱۰- معلم پسر محمدحسین، از او خواسته است که مسأله ریاضی زیر را حل کند :
«کودکی از درخت منزلشان هشت سیب چید، تا آن را برای معلم و دوستانش ببرد. در بین راه، سبب سیبها از دست کودک افتاد. سه عدد از سیبها، قل خوردند و داخل دره افتادند. حال این کودک چند سیب دارد؟»
محمدحسین، که اعداد ۱، ۲، ... و ۹ را می شناسد برای حل این مسأله، از یخچال هشت سیب برمی دارد. سه عدد از سیبها کنار می گذارد و با خوشحالی جواب مسأله را اعلام می کند.
الف) آیا مثال فوق، می تواند بیانگر جمله زیر باشد؟
«درک شهودی به ما کمک می کند که مفاهیم علم ریاضی را

نمایش ذهنی است که شخص می تواند توسط دیدن یا لمس کردن به دست آورد. پس وقتی که از درک شهودی خود استفاده می کنیم، هیچ گاه نمی توانیم با اطمینان کامل در زمینه درستی نتیجه گیریهای خود بحث کنیم. بنابراین، می توانیم بگوییم که درک شهودی، یک دانش فطری یا غریزی است که استدلال در آن نقشی ندارد.

در پاسخ به این سؤال که «مطالعه و استفاده از درک شهودی چه ضرورتی دارد؟» باید بگوییم که درک شهودی، به ما کمک می کند که مفاهیم علم ریاضی را بهتر بفهمیم.

همچنین درک شهودی می تواند جرقه ای برای اثبات قسمتهای مختلف یک مسأله باشد. به عبارت دیگر، هنگامی که یک شیء خاصی را لمس می کنیم، می توانیم درکی هر چند مختصر از آن شیء خاص داشته باشیم. اگرچه کافی نباشد ؛ ولی می تواند برای شناختهای بعدی ما راهگشا باشد. اما برای رسیدن به شناخت کامل، به ابزاری قویتر نیازمندیم که همان «استدلال» است. بنابراین، باید آگاه باشید که درک شهودی، تنها یک فعالیت ادراک حسی نیست ؛ بلکه فعالیتهای ادراک حسی، نقطه شروع می باشد و کافی نیست. برای نمونه :

مثال (۴)

اگر کودک سه یا چهار ساله ای بتواند از بین چند شکل هندسی، شکل یک مثلث را تشخیص داده و نشان بدهد، ابداعاً این اطمینان را ایجاد نمی کند که او مفهوم یک مثلث را به صورت ذهنی نمایش داده و آن را درک کرده باشد.

مثال (۵)

اگر کودک سه یا چهار ساله ای بتواند مثلاً عدد (۵) را روی کاغذ بنویسد، این به آن معنا نیست که وی مفهوم عدد (۵) را درک کرده است. به نظر شما چه موقع می توانیم دریابیم که کودک دارای درک کاملی از عدد (۵) شده است؟

مثال (۶)

همان طور که مولوی می گوید :
آن یکی را کف به خرطوم افشاد
گفت همچون ناودان است این نهاد
آن یکی را دست بر گوشش رسید
آن برو چون بادبیزن شد پدید
پس آنچه که از فیل در ذهن اشخاص نمایش داده شده، درک دقیقی نیست و برای رسیدن به این درک دقیق، نیاز به روشن کردن شمع است، که شمع روشن، همان استدلال است که باید

حل مسئله مسابقه ای برهان ۳۰

طبق قضیه تقسیم با تقسیم n بر m داریم:
 $\exists q, r \in \mathbb{Z} \mid n = mq + r, 0 \leq r < m$
 واضح است که $m \leq n$ است؛ زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت:

$$m > n, b > 1 \rightarrow b^m > b^n \rightarrow b^m - 1 > b^n - 1$$

که با فرض، یعنی $b^m - 1 \mid b^n - 1$ تناقض دارد.

حال با توجه به فرض و این که $n = mq + r$ ، داریم:

$$\begin{aligned} b^n - 1 &= b^{mq+r} - 1 = \underline{b^{mq}} \cdot \underline{b^r} + b^r - \underline{b^r} - 1 \\ &= (b^{mq}b^r - b^r) + b^r - 1 \\ &= b^r(b^{mq} - 1) + b^r - 1 = b^r((b^m)^q - 1) + b^r - 1 \end{aligned}$$

$$= b^r(b^m - 1) \left[\underbrace{(b^m)^{q-1} + (b^m)^{q-2} + \dots + 1}_{F(b)} \right] + b^r - 1$$

$$= (b^m - 1)[b^r F(b)] + b^r - 1$$

و چون طبق فرض $b^m - 1$ بر $b^n - 1$ بخش پذیر است، باید باقی مانده صفر باشد.

$$\Rightarrow b^r - 1 = 0 \Rightarrow b^r = 1 \Rightarrow \boxed{r = 0}$$

$$\Rightarrow n = mq \Rightarrow \boxed{m \mid n}$$

حل از آقای عادل طاهرخانی (تاکستان)

بهرت بفهمیم.

ب) آیا محمدحسین در حل این مسئله ریاضی، از درک شهودی استفاده کرده است؟

۱۱- من از دوستم خواستم که ثابت کند:

«اگر دو واحد از دو برابر یک عدد دلخواه کم کنیم و حاصل را بر دو تقسیم کنیم و سپس یک واحد به نتیجه اضافه کنیم، باز همان عدد به دست می آید.»

دوست من ابتدا با انتخاب چند عدد به صورت زیر عمل کرد:

$$2 \times (5) - 2 = 8 \qquad 2 \times 9 - 2 = 16$$

$$8 \div 2 = 4 \qquad \text{و} \qquad 16 \div 2 = 8 \qquad \text{و} \dots$$

$$4 + 1 = (5) \qquad 8 + 1 = (9)$$

سپس او گفت که این مسئله درست است و ...

الف) آیا دوست من، از درک شهودی برای پاسخ خود استفاده کرده است؟

ب) آیا با فعالیتهای ادراکی بالا، که دوست من انجام داده است، می توانیم بگوییم که مسئله اثبات شده است؟ چرا؟

ج) آیا مثال فوق، می تواند بیانگر جمله زیر باشد؟
 «درک شهودی تنها یک فعالیت ادراک حسی نیست؛ بلکه، فعالیتهای ادراک حسی، نقطه شروع حل مسائل می باشند و کافی نیستند.»

منابع مورد استفاده

- ۱- ریچارد کولند: فعالیتهای تشخیصی و یادگیری در ریاضیات کودکان، ترجمه مصطفی کریمی، انتشارات آموزش، ۱۳۶۳.
- ۲- کتب جبر و احتمال و ریاضیات پایه دوره متوسطه.



قسمت چهارم

$$\begin{aligned}
 & 42876 + (12)^4 \times 55784 \\
 & + 2848 - 21 \div 8256 \times \\
 & 12456 + 19467 \times (12)^2 \\
 & - 148 \div 1286 + 5671 \times 141 \\
 & \times 2869 + (4971)^3 \div 2814 - \\
 & 56541 + \sqrt{187} \times (1278)^4 + 13 \\
 & + 18781 + 14789 \times (12)^6 + 777 - \\
 & 78423 - 825 \times (12)^4 - 99481 \times \\
 & 24182 + \log_{10} 1111 + (44)^3 - \\
 & 71451 \times 1427 - (12)^5 \times \sqrt{125} \\
 & \times 4895 + 141289 \times (44)^2 \div 825 \\
 & - 94947 \times 49567 \div 222 \times 147 \\
 & \times 1124 - (12)^9 =
 \end{aligned}$$



معماهای با ماهیت ریاضی

هوشنگ شرقی

(ادامه بحث معادله‌های سیاله)

دامنه تعریف اعداد حقیقی یک هذلولی می باشد؛ در این جا منظور ما به دست آوردن مختصات نقاطی از این هذلولی است که مختصات آنها با عدد صحیح (در بیشتر معماها با اعداد طبیعی) بیان شده باشد. با یک مثال ساده شروع کنیم.

مثال: تعداد نقاط با مختصات صحیح روی منحنی تابع با ضابطه

$$y = \frac{3}{x-1}$$

را به دست آورید.

حل: روشن است برای آن که y عدد صحیح باشد، لازم است که $x-1$ ، یعنی ۳ بر $x-1$ بخش پذیر باشد. اما تنها مقسوم علیه های ۳، عددهای ± 1 و ± 3 می باشند و بنابراین معادله

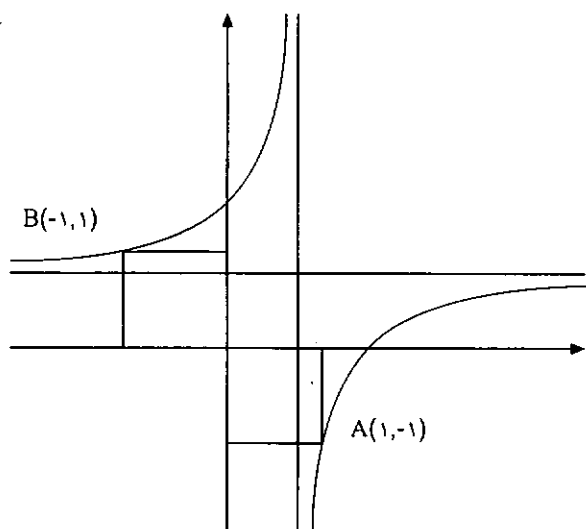
در شماره پیش، معادله های سیاله درجه اول و معماهایی بر اساس آن بررسی شد. اینک دنباله بحث:

ب- سایر معادله های سیاله: در بند الف این قسمت، معماهایی که پاسخ آنها با حل معادله های سیاله درجه اول به دست می آید، بررسی شد. اینک به انواع دیگری از معادله های سیاله و معماهایی در ارتباط با آنها می پردازیم.

- معادله سیاله هموگرافیک: فرم کلی این معادله، به صورت

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

می باشد. همان طور که می دانید، نمودار این تابع، با



مثال: تعداد نقاط با مختصات صحیح را روی منحنی تابع با

$$y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 2} \text{ را بیابید.}$$

حل:

صورت این کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 1 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ 3x - 1 \\ \underline{-3x + 6} \\ 5 \end{array}$$

و از آن جا نتیجه می‌شود:

$$y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 2} = x + 3 + \frac{5}{x - 2}$$

و چون x و y اعداد صحیح می‌باشند، لازم است که $\frac{5}{x-2}$ نیز عدد صحیح باشد و لذا تنها یکی از حالت‌های زیر می‌تواند وجود داشته باشد:

$$x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3, y = 11$$

$$x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1, y = -1$$

$$x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7, y = 11$$

$$x - 2 = -5 \Rightarrow x = -3, y = 1$$

و بنابراین چهار نقطه $A(3, 11)$ ، $B(1, -1)$ ، $C(7, 11)$ و

$D(-3, 1)$ روی منحنی تابع $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 2}$ با مختصات صحیح

چهار جواب دارد که به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2, y = 3$$

$$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0, y = -3$$

$$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4, y = 1$$

$$x - 1 = -3 \Rightarrow x = -2, y = -1$$

یعنی چهار نقطه $A(2, 3)$ ، $B(0, -3)$ ، $C(4, 1)$ و $D(-2, -1)$ با

مختصات صحیح، روی منحنی $y = \frac{3}{x-1}$ وجود دارد. در حالت

کلی، برای حل معادله $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ابتدا دوطرف معادله را در C

ضرب نموده و آن گاه، صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنیم و به کمک خارج قسمت و باقیمانده، کسر را به صورت تفکیک شده می‌نویسیم و جواب‌های صحیح آن را به دست می‌آوریم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: حل معادله سیالته $y = \frac{2x-3}{3x-2}$: دوطرف تساوی را در

۳ ضرب می‌کنیم:

$$3y = \frac{6x-9}{3x-2} = \frac{2(3x-2)-5}{3x-2} = 2 - \frac{5}{3x-2}$$

(از تقسیم $6x-9$ بر $3x-2$ ، خارج قسمت ۲ و باقیمانده -۵ به دست می‌آید.)

از برابری $3y = 2 - \frac{5}{3x-2}$ بر می‌آید

که $5 \mid (3x-2)$ و تنه‌ها مقسوم علیه‌های عدد ۵، ± 1 و ± 5 می‌باشند و بنابراین، حالت‌های زیر بررسی می‌شوند:

$$3x - 2 = 1 \Rightarrow x = 1, y = -1$$

$$3x - 2 = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$3x - 2 = 5 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$3x - 2 = -5 \Rightarrow x = -1, y = 1$$

یعنی تنها دو نقطه $A(1, -1)$ و $B(-1, 1)$ با مختصات صحیح

روی منحنی تابع $y = \frac{2x-3}{3x-2}$ وجود دارد که در شکل نیز مشخص شده‌اند.

صحیح می‌باشند و تنها جفت عددهای صحیح که حاصلضرب آنها مساوی ۸ می‌باشد، عبارت است از $(۲, ۴)$ ، $(۴, ۲)$ ، $(-۲, -۴)$ ، $(-۴, -۲)$ ، $(۱, ۸)$ ، $(۸, ۱)$ ، $(-۱, -۸)$ و $(-۸, -۱)$ ، از طرفی اگر $x + y = a$ و $x - y = b$ فرض شوند، واضح است که $a + b = 2x$ ، یعنی $a + b$ باید زوج باشد؛ پس فقط چهار زوج اول، قابل قبول می‌باشند که به دستگاه‌های معادله‌های زیر می‌انجامند:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=-4 \end{cases}$$

از حل این دستگاه‌های به زوجهای $(۳, ۱)$ ، $(۱, ۳)$ ، $(-۳, -۱)$ و $(-۱, -۳)$ برای (x, y) می‌رسیم که تنها جوابهای قابل قبول برای معادله در مجموعه اعداد صحیح می‌باشند.

مثال: پاسخهای صحیح معادله زیر را به دست آورید:

$$x^2 - y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$$

حل: به ترتیب زیر، عمل می‌کنیم:

$$(x^2 + 4x) - (y^2 + 6y) + 2 = 0$$

و با مربع نمودن عبارتهای داخل پرانتزها به دست می‌آید:

$$(x+2)^2 - 4 - (y+3)^2 + 9 + 2 = 0$$

$$(x+2)^2 - (y+3)^2 = -7$$

$$(x+2-y-3)(x+2+y+3) = -7$$

$$(x-y-1)(x+y+5) = -7$$

اکنون با توجه به این که تنها جفت عددهایی که حاصلضرب آنها -7 شود، $(۱, -۷)$ ، $(-۷, ۱)$ ، $(-۱, ۷)$ و $(۷, -۱)$ می‌باشند، به

دستگاه‌های معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x-y-1=-7 \\ x+y+5=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y-1=1 \\ x+y+5=-7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-1=-1 \\ x+y+5=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y-1=7 \\ x+y+5=-1 \end{cases}$$

که معادل با دستگاه‌های زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} x-y=-6 \\ x+y=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=-12 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=8 \\ x+y=-6 \end{cases}$$

که از حل آنها جوابهای زیر برای x و y به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-5 \\ y=-7 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-7 \end{cases}$$

وجود دارند و جالب است که این چهار نقطه رئوس یک متوازی‌الاضلاع نیز هستند که AB و CD قطرهای آن هستند.

اینک به مثال کاربردی زیر توجه کنید:

مثال: چند مستطیل وجود دارد که طولهای اضلاع آنها، اعداد طبیعی بوده و عدد مساحت آن، ۲۰ واحد از عدد محیطشان بیشتر باشد؟

حل: اگر طول و عرض این مستطیلها را x و y فرض کنیم، بر اساس فرض مسأله می‌نویسیم:

$$xy = 20 + 2x + 2y$$

و اگر از این برابری، y را بر حسب x به دست آوریم، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$y = \frac{2x+20}{x-2}$$

که یک معادله سیاله هموگرافیک می‌باشد و با روش حل مسائل قبل، به صورت زیر حل می‌شود:

$$y = \frac{2(x-2)+24}{x-2} = 2 + \frac{24}{x-2} \Rightarrow x-2 \mid 24$$

مقسوم علیه‌های عدد ۲۴ عبارت است از: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$ و با توجه به این که x و y اعدادی طبیعی هستند، تنها جوابهای قابل قبول، جوابهای زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=26 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=14 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=10 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases}$$

یعنی چهار جواب متمایز برای مسأله وجود دارد.

معادله‌های سیاله دومجنوری

معادله‌های سیاله به فرم $x^2 \pm y^2 = k$ را که در آن k عددی حقیقی می‌باشد، معادله سیاله دومجنوری می‌نامیم. هرگاه علامت بین x^2 و y^2 ، منفی باشد، حل این معادله بسادگی و با تجزیه $x^2 - y^2$ به حاصلضرب $(x-y)(x+y)$ حل می‌شود. به یک مثال توجه کنید:

مثال: پاسخهای صحیح معادله $x^2 - y^2 = 8$ را به دست آورید.

$$(x-y)(x+y) = 8$$

حل: می‌نویسیم:

چون x و y عددهای صحیح هستند، بنابراین $x+y$ و $x-y$ نیز

جواب ندارد و اگر دارای چنین عاملی نباشد، مسأله جواب دارد و پاسخ آن را با تبدیل یک یک عوامل اول به صورت مجموع دو مربع کامل و سپس ضرب آنها به کمک اتحاد جبری گفته شده، به دست می آوریم.

با یک مثال ساده، مسأله روشن می شود.

مثال: پاسخهای صحیح معادله $x^2 + y^2 = 377$ را به دست آورید.

حل: از تجزیه ۳۷۷ به حاصلضرب عوامل اول، نتیجه می شود:

$$377 = 29 \times 13$$

چون ۱۳ و ۲۹ هیچ یک به فرم $4m+3$ نمی باشند (چرا؟)، پس مسأله جواب دارد. در واقع، با کمی دقت می توان نوشت:

$$29 = 2^2 + 5^2, 13 = 3^2 + 2^2$$

و اکنون به کمک اتحاد جبری گفته شده، نتیجه می گیریم:

$$377 = 29 \times 13 = (2^2 + 5^2)(3^2 + 2^2)$$

$$= (2 \times 3 + 5 \times 2)^2 + (2 \times 2 - 5 \times 3)^2$$

$$= (16)^2 + (-11)^2 = (-16)^2 + (11)^2$$

$$= 16^2 + 11^2 = (-16)^2 + (-11)^2$$

و اگر عددها را جابه جا کنیم، نتیجه می شود:

$$377 = (2^2 + 5^2)(2^2 + 3^2)$$

$$= (2 \times 2 + 5 \times 3)^2 + (2 \times 3 - 5 \times 2)^2$$

$$= 19^2 + (-4)^2 = (-19)^2 + 4^2$$

$$= (-19)^2 + (-4)^2 = 19^2 + 4^2$$

یعنی برای x و y هشت دسته جواب به صورت زوجهای زیر وجود دارد:

$$(16, -11), (-16, 11), (16, 11), (-16, -11)$$

$$(19, -4), (-19, 4), (-19, -4), (19, 4)$$

و چون عبارت ما نسبت به x و y متقارن می باشد، لذا معکوس این زوجها نیز جواب می باشد و معادله سیاله، جمعاً ۱۶ دسته جواب در مجموعه اعداد صحیح دارد و به عبارت دیگر، روی دایره به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\sqrt{377}$ که معادله آن $x^2 + y^2 = 377$ می باشد، ۱۶ نقطه با مختصات صحیح وجود دارد. اینک به حل یک معمای تاریخی

اینک به حل یک معما می پردازیم:

معما: چند مثلث قائم الزاویه با اضلاع به طول درست (طبیعی) داریم که طول یک ضلع زاویه قائمه آنها مساوی ۵ سانتیمتر باشد؟

حل: اگر طول وتر این مثلث را a و طولهای اضلاع زاویه قائمه آن را b و c فرض کنیم، با توجه به قضیه فیثاغورس، می توان

$$a^2 = b^2 + c^2$$

نوشت:

می توان فرض کرد $c = 5$ و در نتیجه:

$$a^2 = b^2 + 25 \Rightarrow a^2 - b^2 = 25 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 25$$

اکنون می توان یکی از حالتها را در نظر گرفت:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=5 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-5 \\ a-b=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=25 \\ a-b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-25 \\ a-b=-1 \end{cases}$$

از حل این دستگاهها، جوابهای صحیح زیر برای a و b به دست می آیند:

$$\begin{cases} a=5 \\ b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-5 \\ b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=13 \\ b=12 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-13 \\ b=-12 \end{cases}$$

و چون a و b اعداد طبیعی هستند، تنها جواب قابل قبول $a=13$ و $b=12$ است؛ یعنی تنها یک مثلث قائم الزاویه با وتر ۱۳ و اضلاع زاویه قائمه ۵ و ۱۲ وجود دارد.

- معادله سیاله $x^2 + y^2 = k$ برای حل این معادله سیاله،

ملاحظات زیر الزامی است:

الف - در ریاضیات عالی، ثابت می کنند که این معادله به ازای مقادیری از k که دارای مقسوم علیه های اول به فرم $4m+3$ (یعنی اعدادی که باقیمانده تقسیم آنها بر ۴ مساوی ۳ باشد) باشند، جواب ندارد.

ب - همچنین ثابت می شود که اگر دو عامل اول p_1 و p_2 از k بتوانند به صورت مجموع دو مربع کامل نوشته شوند، حاصلضرب آنها نیز می تواند به صورت مجموع دو مربع کامل نوشته شود. برای این منظور، به اتحاد جبری زیر مراجعه می کنیم:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

که در مورد درستی آن، می توانید بسادگی تحقیق کنید.

اکنون به کمک ملاحظات بالا می توانیم به سادگی جوابهای

معادله $x^2 + y^2 = k$ را با تجزیه k به حاصلضرب عوامل اول به دست آوریم.

اگر k دارای عامل اولی به صورت $4m+3$ باشد، مسأله

می پردازیم :

اکنون اگر فرض کنیم $z + x = ty$ ، به دست می آید :

$$z - x = \frac{y}{t}$$

و از حل دستگاه دو مجهولی زیر، z و x به دست می آیند :

$$\begin{cases} z + x = ty \\ z - x = \frac{y}{t} \Rightarrow 2z = ty + \frac{y}{t} \Rightarrow z = \frac{(t^2 + 1)y}{2t} \end{cases}$$

$$2x = ty - \frac{y}{t} \Rightarrow x = \frac{(t^2 - 1)y}{2t}$$

ما برای آن که x و z عددهای طبیعی باشند، لازم است که y مضرب $2t$ باشد؛ یعنی $y = 2kt$ و از آن جا به دست می آید :

$x = k(t^2 - 1)$ و $z = k(t^2 + 1)$ ، به ازای جمیع مقادیر k و مقادیر مختلف t ، سه تایی های مختلف x ، y و z به دست می آیند.

یکی از این سه تایی ها که به ازای $k = 1$ حاصل می شود، سه تایی معروف، $x = t^2 - 1$ ، $z = t^2 + 1$ و $y = 2t$ می باشد که تساوی معروف زیر را به دست می دهد :

$$(t^2 + 1)^2 = (t^2 - 1)^2 + (2t)^2$$

که به ازای $t = 2$ سه تایی معروفتر $(3, 4, 5)$ را به ما می دهد. کشف سه تایی اخیر را به شاگردان فیثاغورس نسبت داده اند. با کمی محاسبه، می توان فرمولهای پیش گفته را کلیت بیشتری بخشید و به سه تایی $z = m^2 + n^2$ ، $x = m^2 - n^2$ و $y = 2mn$ رسید که به ازای اعداد صحیح m و n ، اعداد صحیح مختلفی برای x ، y و z به ما می دهند و در واقع، حالت کلی تر به شکل $z = k(m^2 + n^2)$ ، $x = k(m^2 - n^2)$ و $y = 2kmn$ می باشد.

از دستورهای بالا، بلافاصله نتیجه می شود که هیچ مثلث قائم الزویه ای با اضلاع به طول اعداد طبیعی وجود ندارد که طول وتر آن، به فرم $4m + 3$ باشد؛ مثلاً هیچ مثلث قائم الزویه ای وجود ندارد که طولهای اضلاع آن، اعدادی طبیعی بوده و وتر آن به طول ۳۹ باشد.

تعمیم معادله سیاله فیثاغورسی به صورت حل معادله سیاله $x^n + y^n = z^n$ در حالت کلی می باشد، و این، مسأله ای بسیار جالبتر و تاریخی تر از مسأله قبل می باشد. بی پر دو فرما، ریاضیدان بنام فرانسوی که در سالهای ۱۶۰۱ تا ۱۶۶۵ میلادی می زیسته است و آثار و قضایای بسیاری منسوب به او می باشد، در حاشیه نسخه ای از کتاب دیوفانتوس، در کنار یکی از مسائل، نوشته ای

معمای اعداد فیثاغورسی

یافتن سه تایی هایی که در رابطه معروف $x^2 + y^2 = z^2$ صدق کنند، از معماهای قدیمی ریاضی می باشد. یکی از معروفترین این سه تایی ها که در ذهن اکثر دانش آموزان نقش بسته است، $(3, 4, 5)$ می باشد. یعنی ۳، ۴ و ۵ می توانند طولهای اضلاع مثلث قائم الزویه ای باشند که بدیهی است طول وتر آن ۵ می باشد.

$(3^2 + 4^2 = 5^2)$ یکی از حالت های خاص حل این معادله، آن است که با معلوم بودن طول وتر مثلث قائم الزویه، طولهای اضلاع زاویه قائمه را به شرط طبیعی بودن آنها، بیابیم. طول وتر می تواند عددی طبیعی یا جذر یک عدد طبیعی باشد.

مثال: چند مثلث قائم الزویه وجود دارد که طول وتر آن مساوی $\sqrt{26}$ باشد؟

حل: در واقع، منظور مسأله، یافتن جوابهای طبیعی معادله سیاله $x^2 + y^2 = 26$ می باشد و چون عدد ۲۶ به فرم $4m + 3$ نمی باشد، بنابراین قابل تبدیل به صورت مجموع دو مربع کامل می باشد که با کمی دقت، نتیجه می شود $26 = 5^2 + 1^2$ ؛ یعنی یک مثلث قائم الزویه (و تنها یکی) با اضلاع زاویه قائمه ۵ و ۱ وجود دارد که طول وتر آن $\sqrt{26}$ باشد. اگر در مثال قبل، طول وتر $\sqrt{27}$ می بود، با توجه به این که $27 = 4m + 3$ ($m = 6$) لذا مطابق قضیه گفته شده، معادله سیاله $x^2 + y^2 = 27$ جواب صحیح (طبیعی) ندارد و لذا هیچ مثلث قائم الزویه با وتر $\sqrt{27}$ وجود ندارد که طولهای اضلاع آن اعدادی طبیعی باشند.

تمرین: طولهای اضلاع زاویه قائمه مثلثهای قائم الزویه ای را به دست آورید که طولهای اضلاع زاویه قائمه آنها عددهایی طبیعی بوده و طول وتر آنها مساوی ۱۳ یا ۱۵ یا ۱۷ یا $\sqrt{47}$ باشد.

اکنون حالت عام معادله سیاله $x^2 + y^2 = z^2$ را بررسی می کنیم و می خواهیم سه تایی های صحیح (یا طبیعی) را به دست آوریم که در رابطه فوق صدق می کنند. طی قرنهای این معادله و شکل تعمیم یافته آن، ذهن ریاضیدانان بسیاری از ملل مختلف را به خود مشغول داشته است. برای حل این معادله، راه حل های بسیاری ارائه شده است. یکی از این راه حلها چنین است :

می نویسیم: $y^2 = z^2 - x^2$ و در نتیجه :

$$y^2 = (z - x)(z + x)$$

$$۳) \quad 2xy + 3x + 4y - 1 = 0$$

$$۴) \quad 4x^2 - 9y^2 = -5$$

$$۵) \quad x^2 - y^2 + 4x - 2y - 2 = 0$$

$$۶) \quad x^2 + y^2 = 250$$

$$۷) \quad x^2 + y^2 + 2x + 4y - 67 = 0$$

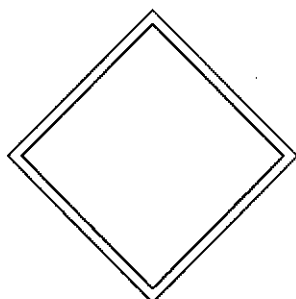
۲- چند مستطیل با اضلاع به طولهای عدد طبیعی وجود دارد که عدد مساحت آنها ۲۰ واحد از عدد محیط آنها بیشتر باشد؟

۳- ثابت کنید در دایره‌ای به شعاع ۱۳۷۹ نمی‌توان هیچ مستطیلی با اضلاع به طولهای عدد طبیعی، محاط کرد.

۴- با کنار هم قرار دادن تعدادی مربع کوچک به ضلع واحد، یک مربع بزرگ ساخته‌ایم. اکنون با چیدن ۱۳۷۵ مربع دیگر به دور این مربع بزرگ (به طریق مناسب) مربع دیگری حاصل شده است. مربع اولیه، شامل چند مربع کوچک بوده است؟ آیا ممکن است با چیدن ۱۳۷۸ مربع کوچک به دور یک مربع، مربع دیگری ایجاد شود؟

۵- چند مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد که طولهای اضلاع آنها اعدادی طبیعی بوده و طول یک ضلع زاویه قائمه آنها مساوی ۲۴ باشد؟

۶- در یک میهمانی، صاحبخانه اعلام می‌کند که با چند نوع نوشیدنی و چند نوع بستنی از میهمانان پذیرایی می‌کند؛ به طوری که تعداد انتخابهای کسی که می‌خواهد یک نوشابه و یک بستنی صرف کند، ۷ انتخاب بیش از تعداد انتخابهای کسی است که می‌خواهد تنها یک نوشابه یا یک بستنی صرف کند. تعداد نوع بستنی و نوشابه‌ای که در این میهمانی سرو می‌شود، چند تا است؟



چنین به جای گذاشت: «تجزیه یک مربع مفروض به مجموع دو مربع» حاشیه‌ای که فرما بر آن نوشت، این بود: «تجزیه یک مکعب به مجموع دو مکعب یک توان چهارم به مجموع دو توان چهارم، یا به طور کلی هر توان دلخواه به مجموع دو توان با قوه‌های همانند، ولی بزرگتر از دو غیرممکن است، و من یقیناً برهان تحسین‌آمیزی برای آن یافته‌ام؛ اما این حاشیه، تنگتر از آن است که گنجایش درج آن را داشته باشد.» به زبان ساده‌تر و با بیان ریاضی، معادلهٔ سیالۀ $x^n + y^n = z^n$ به شرط $n > 2$ هیچ جواب غیرصفر صحیح برای x, y, z ندارد. این که آیا فرما به راستی، اثبات درستی از این قضیه در اختیار داشته است یا خیر، معمای لاینحل می‌باشد؛ ولی تنگی حاشیه کتاب (!) باعث گردید که در طی بیش از سه قرن متمادی، ریاضیدانان و ریاضی‌خوانان بسیاری، به اثبات این قضیه ترغیب شوند که تلاشهای همهٔ آنها اگر به حل کامل این قضیه منجر نشد؛ اما باعث کشف یافته‌های بسیاری در نظریهٔ اعداد شد.

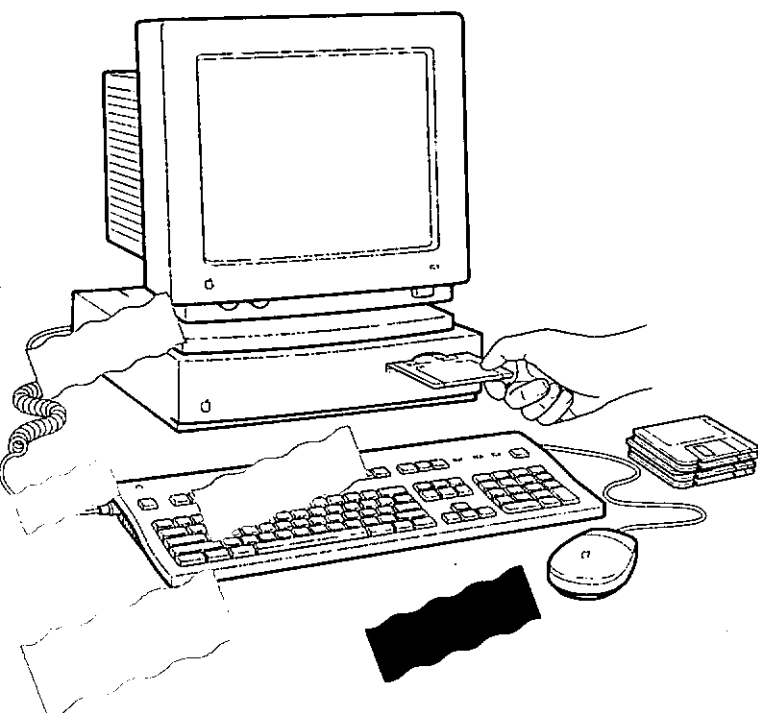
در حالت‌های خاص $n=3, 4, 5, 7$ برهانهای مختلفی در همان سالهای نخست (تا سال ۱۸۳۹) ارائه گردید؛ ولی اثبات قضیه در حالت کلی، مشتاقان دانش ریاضی و نظریهٔ اعداد را تا سال ۱۹۹۳ میلادی (۱۳۷۲ شمسی) چشم‌انتظار باقی گذاشت. طی این سالها از ریاضیدانان نامی تاریخی خوانان مبتدی، بسیاری در چهار گوشهٔ عالم، برای اثبات قضیه تلاش نمودند، تا این که در این سال، آندرو وایلز راه حلی برای آن ارائه نمود که در همان زمان رخنه‌ای در آن پیدا شد و این رخنه نیز در سال ۱۹۹۴ (شهریور ۱۳۷۳) توسط وایلز و یکی از شاگردان او به نام تیلر، برطرف شده و اثبات قضیه کامل شد و به این ترتیب، به افسانۀ نفوذناپذیری آخرین قضیهٔ فرما پایان داده شد. در پایان، این بخش و با هدف کار بیشتر روی مباحث ارائه شده، چند تمرین ارائه می‌شود:

تمرین

۱- تعداد نقاط با مختصات صحیح را روی منحنی هریک از روابط زیر به دست آورید:

$$۱) \quad y = \frac{2x-1}{3x+4}$$

$$۲) \quad y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x+1}$$



آموزش

برنامه نویسی

به زبان پاسکال (۷)

● محمد رحیم

مقدمه

در شماره پیش، مبحث ساختارهای کنترلی را شروع کردیم و به دستور IF پرداختیم. در این شماره، دستور IF را کامل می کنیم. قبل از پرداختن به دستور IF، ابتدا چند تابع کتابخانه ای مترجم پاسکال را معرفی می کنیم تا بتوانید از قابلیت های مترجم پاسکال بیشتر بهره مند شده و برنامه هایتان را ساده تر و آسان تر بنویسید.

معرفی چند تابع کتابخانه ای

مترجم پاسکال، دارای توابع کتابخانه ای متعددی است. برای جلوگیری از سردرگمی در نحوه استفاده از این توابع، آنها دسته بندی شده اند. این دسته بندیها در قالبهایی به نام «یونیت» شکل گرفته اند. در واقع، یونیتها متشکل از توابعی هستند که دارای عملکرد و جهت گیریهای مشابه هستند. برای مثال، یونیت Crt، شامل توابعی است که به نحوی به صفحه نمایش مربوط می شوند و نیز یونیت Graph شامل توابع گرافیکی است و به کمک آنها می توان از قابلیت های گرافیکی سیستم استفاده کرد. با مراجعه به کتابهای راهنمای مترجم پاسکال

یا منوی Help مترجم پاسکال، می توانید به کلیه یونیتها و توابع موجود در آنها دسترسی پیدا کرده و توضیحات مربوط به هر یک را به همراه مثال ببینید.

توابع محاسباتی:

ABS(x) : محاسبه قدر مطلق

sin(x) : تابع سینوس

cos(x) : تابع کسینوس

exp(x) : تابع نمایی e^x

SQR(x) : تابع مجذور

SQRT(x) : تابع جذر

Arc tan(x) : تابع آرک تانژانت

Ln(x) : تابع لگاریتم طبیعی

PI : تابع محاسبه عدد π (3.1415)

یادآوری: در مترجم پاسکال، تابع توان

یا عملگر $^$ آن وجود ندارد؛ ولی می توان

برای محاسبه a^x از توابع exp(x) و

Ln(x) به طریق زیر استفاده کرد:

$$y = a^x \Rightarrow \text{Ln} y = x \text{Ln} a$$

$$\Rightarrow y = e^{x \text{Ln} a}, \quad a > 0$$

بنابراین، برای محاسبه a^x کافی است که

Exp(x * Ln(a)) را محاسبه کنیم.

توابع مربوط به کارکتر، کد اسکی^۲ و رشته^۳:

ord(x) : این تابع یک کارکتر را به

عنوان ورودی می گیرد و خروجی آن

کد اسکی آن کارکتر است.

chr(x) : این تابع، کد اسکی یک

کارکتر را به عنوان ورودی گرفته و خروجی

آن کارکتر است.

length(x) : ورودی این تابع، یک

رشته است و خروجی آن طول رشته

می باشد.

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱):

var

x, y: real;

BEGIN

x := 2;

y := SQR(x);

write ln('y =', y);

y := SQRT(x);

write ln('y =', y);

y := ABS(cos(3 * PI / 4));

write ln('y =', y);

END.

خروجی برنامه فوق چنین است :

y = 4

y = 1.41

y = 0.707

مثال (۲):

var

Acode:byte;

Ch: char

S:string;

BEGIN

Acode:=ord('a');

Ch:=chr(65);

S:='pascal';

writeln('ASCII code of "a"

is ',Acode);

writeln('65 is ASCII code

of ',ch);

writeln(s,'has a length of',

length(s));

END.

خروجی برنامه فوق چنین است :

ASCII code of 'a' is 97

65 is ASCII code of A

pascal has a length of 6

در شماره‌های بعد، تعداد دیگری از توابع کتابخانه‌ای را معرفی خواهیم کرد.

دستور Else

در شماره گذشته، دستور IF را توضیح دادیم. حال این دستور را با Else کامل می‌کنیم. گفتیم که در دستور IF، جواب شرط هنگامی اجرا می‌شود که شرط برقرار باشد. اگر دستور IF شامل Else هم باشد، در صورت عدم برقراری شرط، جواب شرط اجرا نمی‌شود، ولی در عوض، دستور (یا

دستورهایی) که در ذیل Else آمده‌اند، اجرا خواهند شد و پس از آن، برنامه روال عادی خود را طی خواهد کرد.

در دستور IF می‌توانیم بیش از یک شرط داشته باشیم. برای مقایسه شرطها از عملگرهای $<$ ، $>$ ، $=$ ، $<=$ ، $>=$ و

$=$ و برای ترکیب شرطها از عملگرهای and، or، xor و not استفاده می‌کنیم.

شکل کلی دستور IF...Else چنین است :

IF شرط then

دستور

else

دستور ;

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در صورت وجود Else، دستور ماقبل آن (که متعلق به IF است) باید بدون ; بیاید.

Else همانند IF، می‌تواند یک دستور را تحت پوشش قرار دهد. برای تحت پوشش قراردادن بیش از یک دستور، باید بلوک فرعی تشکیل داد؛ یعنی :

IF شرط then

Begin

دستور ۱ ;

دستور ۲ ;

;

دستور n ;

end

else

begin

دستور ۱ ;

دستور ۲ ;

;

end;

همان‌طور که در بالا مشاهده می‌شود، پیش از Else، end بدون ; آمده است.

توجه داشته باشید که در الگوی فوق، یا دستورهایی تحت IF اجرا می‌شوند و یا دستورهایی تحت else، و اجرای همزمان دستورهایی IF و else ممکن نیست. پس از اجرای دستورهایی تحت IF یا else، برنامه به سراغ خطوط بعدی برنامه خواهد رفت.

به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال (۳):

var

x:Integer;

BEGIN

write('Enter a number:');

Readln(x);

IF x mod 2=0 then

writeln('number is even.')

else

writeln('number is odd.');

END.

برنامه فوق، زوج^۵ یا فرد بودن عدد را بررسی می‌کند. اگر عدد زوج باشد، پیغام می‌دهد که number is even و در غیراین صورت (یعنی اگر فرد باشد) پیغام number is odd را صادر می‌کند. زوج یا فرد بودن عدد توسط شرط $x \bmod 2 = 0$ کنترل می‌شود. توجه داشته باشید که در دستور ماقبل else علامت ; نیامده است.

مثال (۴): برنامه‌ای بنویسید که ضرایب

معادله^۶ $ax^2 + bx + c = 0$ و $(a > 0)$ را از ورودی بگیرد و ریشه‌های حقیقی آن را (در صورت وجود) محاسبه کرده و در خروجی چاپ کند.

var

a,b,c: Integer;

d,x1,x2: Real;

BEGIN

مثال (۷):

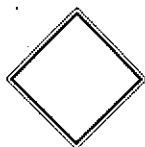
```

var
  a,b,c:Real;
BEGIN
  write('Enter a,b,c:');
  Readln(a,b,c);
  IF a < b + c then
    begin
      IF b < a + c then
        IF c < a + b then
          writeln('a,b,c are
            sides of a triangle');
        end
      else
        writeln('This is not
          triangle.');
```

توجه داشته باشید که اگر در مثال فوق، بلوک فرعی حذف شود، else به آخرین IF تعلق خواهد داشت. در واقع، قاعده کلی این است که در مجموعه‌ای از IF ها و else های تودرتو، هر else متعلق به نزدیکترین IF است.

واژه‌نامه ریاضی و کامپیوتر

۱. واحد، یونیت Unit
۲. عملگر Operator
۳. کداسکی ASCII code
۴. رشته String
۵. زوج Even
۶. فرد Odd
۷. IF تودرتو یا متداخل Nested IF



```

IF (a < b + c) and (b < a + c)
  and (c < a + b) then
    writeln('a,b,c are sides of a
      triangle');
  END.
همان طور که در مثال فوق مشاهده می‌شود،
دستور IF لزوماً با else همراه نیست؛ گرچه
می‌توانست آن را هم داشته باشد؛ برای
مثال:
```

```

else
  writeln('This is not triangle.');
```

```

var
  a,b,c:Real;
BEGIN
  write('Enter a,b,c:');
  Readln(a,b,c);
  IF a < b + c then
    IF b < a + c then
      IF c < a + b then
        writeln('a,b,c are
          sides of a triangle');
```

END

برنامه فوق می‌تواند دارای else باشد. در این مثال، به دلیل ماهیت صورت مسأله، فرقی نمی‌کند که else برای کدام IF بیاید. اگر else را برای اولین IF در نظر بگیریم، داریم:

```

write('Enter a,b,c:');
Readln(a,b,c);
d:=b*b-4*a*c;
IF d>=0 then
  BEGIN
    x1:=(-b+SQRT(d))/(2*a);
    x2:=(-b-SQRT(d))/(2*a);
    writeln('x1=',x1:7:2);
    writeln('x2=',x2:7:2);
  END
else
  writeln('Equation has no
    Root');
```

در برنامه فوق، پس از گرفتن ضرایب، دلتا محاسبه می‌شود. اگر شرط مثبت یا صفر بودن دلتا برقرار باشد ($d \geq 0$) ریشه‌ها محاسبه شده و سپس در خروجی چاپ می‌شوند؛ در غیر این صورت، برنامه پیغام می‌دهد که معادله دارای ریشه نیست. در برنامه فوق، خط پیش از else (یعنی END) بدون علامت؛ آمده است.

همان طور که قبلاً گفته شد، در دستور IF، می‌توان ترکیبی از شرطها را مورد استفاده قرار داد. در این صورت، هریک از شرطها باید داخل پرانتز قرار گیرند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۵): برنامه‌ای بنویسید که اعداد a، b و c را بگیرد و معین کند این سه عدد می‌توانند طول ضلعهای یک مثلث باشند یا نه.

```

var
  a,b,c: Real;
BEGIN
  write('Enter a,b,c:');
  Readln (a,b,c);
```

آنچه از دوست رسد...

با عرض سلام خدمت دانش‌آموزان و خوانندگان مجله ریاضی برهان

دوستان گرامی! هر روز، نامه‌های پرمحتوا و مقاله‌ها و مسأله‌های شما در دفتر مجله به دستمان می‌رسد. خداوند بزرگ را سپاسگزاریم که توفیق خدمت به شما عزیزان را به ما ارزانی داشته است. از همگی شما عزیزان تقاضا داریم که مجله را نقادانه بررسی کنید و پیشنهادات و انتقادات خود را به این منظور که مجله برای دانش‌آموزان مفیدتر باشد برای ما ارسال نمایید. در این شماره مجله مسائل درس‌هایی که در ترم اول به دانش‌آموزان مقاطع مختلف تحصیلی ارائه می‌گردد با حل تشریحی آمده است.

نام تعدادی از خوانندگان محترم مجله که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان: علی اکبر فرزام (خرم‌آباد)، داریوش وحدت (بجنورد)، امین صدری (اصفهان)، علی شفیعی (رشت)، محمدرضا ملاخلیلی مبینی (دانشگاه شهید بهشتی تهران)، همکار محترم آقای علی اصغر قبدیان (نیشابور)، علی باقری (شهر مقدس قم)، بهمن افسری (تهران)، عبدالرضا حسین پور (بندر کیان‌شهر)، هادی آفرینش (آذربایجان شرقی)، عمار جاهد عین‌الدین (تبریز)، سیدضیاءالدین حسینی (نور)، یاسین اسماعیلی (مشهد مقدس)، حسین صالحی کیاسری (ساری)، رضا خواجوی‌نیا (اصفهان)، جواد عبادپور (تهران)، محمدحسین قزلسفلو (مینودشت)، مجتبی دهقانی (فارسان)، سامان جهانی (تهران)، همکار ارجمند آقای میرزا مهدی ابراهیمی (مشهد مقدس)، ضرغام منفرد (نورآباد ممسنی)، ایمان

یوسفی، سعید مرادی هزارآبادی و علی مشهدی رمضان (تهران)، همکار ارجمند آقای علیرضا معتمدی (مینودشت)، همکار ارجمند آقای مراد کریمی شهماروند (شهرکرد)، آرش دبیرزاده (اصفهان) و خانم‌ها: سروناز سرایی‌پور (تبریز)، نسیم قدمی (سنندج)، مرتضی نژاد (قاین)، معصومه پناهی (تهران)، مهسا بخشایی (کرج)، سودابه کلبادی نژاد (کلوگاه)، نگین پاکدل و شیما حسن‌پور (مشهد مقدس) و خانم فریدونی (دانشگاه خواجه نصیر طوسی). از همه شما عزیزان به پاس ارسال مقاله، مسائل همراه با حل، حل مسأله مسابقه‌ای و انتقادات و پیشنهادات سازنده سپاسگزاریم. در صورت امکان از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه‌ای مجله استفاده خواهیم کرد و مقاله‌های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه، چاپ خواهیم کرد.

جناب آقای محمد مولایی (دیواندره) و سرکار خانم مریم حسین‌زاده (فومن) به شما عزیزان توصیه می‌کنیم ارتباط خود را با مجله برهان حفظ کرده و سری کتابهای کوچک ریاضی انتشارات مدرسه را که تاکنون ۲۳ عنوان آن چاپ شده است، از نمایندگی انتشارات مدرسه در شهر خودتان بخواهید که این کتابها در هر زمینه‌ای برای شما مطلب دارد و در زمینه هندسه، دایره المعارفهای هندسه، تألیف آقای محمدهاشم رستمی را از همان نمایندگی تهیه فرمایید، ان شاء... که مفید واقع شود.

همکار محترم جناب آقای علیرضا معتمدی (مینودشت)، از آن‌جا که مسائل ارسالی جنابعالی می‌تواند برای دانش‌آموزان مفید واقع شود، دو مسأله از آن را در زیر می‌آوریم:

۱. ثابت کنید اگر $P(A) = 1$ ، آن‌گاه $P(A \cap B) = P(B)$.

مسأله. ثابت کنید، اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای

$$P(A - B) + P(A - B') = P(A) \quad S$$

حل. چون $(A - B')$ و $(A - B)$ دو پیشامد ناسازگار

هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} P(A - B) + P(A - B') &= P[(A - B) \cup (A - B')] \\ &= P[(A \cap B') \cup (A \cap B)] \\ &= P[A \cap (B' \cup B)] = P(A) \end{aligned}$$



از یک محصول به دو صورت مایع و پودر استفاده می‌شود.

در یک تحقیق نتایج زیر به دست آمده است:

- $\frac{1}{3}$ اشخاصی که از آنان سؤال شده پودر مصرف نمی‌کنند؛
- $\frac{2}{7}$ اشخاصی که از آنان سؤال شده مایع به کار نمی‌برند؛
- ۴۲۷ نفر مایع و پودر را توأمأ مورد استفاده قرار می‌دهند؛
- $\frac{1}{5}$ اشخاصی که از آنان سؤال شده از این محصول استفاده

نمی‌کنند. در این تحقیق از چند نفر سؤال شده است؟

• از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکبور

جواب در صفحه ۸۸

حل. چون $A \cap B \subseteq B$ بنابراین $P(A \cap B) \leq P(B)$ (۱).

از طرفی می‌دانیم: $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$ ، بنابراین داریم:

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq 1 + P(B) - 1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(B) \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$$

۲. چند جمله‌ای ناصفر $f(x)$ را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$f(2x) = f'(x)f''(x)$$

حل. فرض کنیم $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

چون $f(x)$ ، $f'(x)$ و $f''(x)$ به ترتیب از درجه‌های n ، $(n-1)$

و $(n-2)$ هستند و $f(2x) = f'(x)f''(x)$ بنابراین داریم:

$$n = (n-1) + (n-2) \Rightarrow n = 3$$

پس $f(x)$ چندجمله‌ای درجه سوم است،

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \text{با توجه به رابطه}$$

$$f(2x) = f'(x)f''(x) \quad \text{داریم:}$$

$$8ax^3 + 6bx^2 + 2cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b)$$

با توجه به برابری بالا نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ 8a = 18a^2 \\ 6b = 6ab + 12ab \\ 2c = 4b^2 + 6ac \\ d = 2bc \end{cases}$$

$$\text{پس از حل دستگاه داریم: } f(x) = \frac{4}{9} x^3$$

جناب آقای مجتبی دهقانی (فارسان)، از آن جا که مقاله ارسالی

شما حاوی مسائل قابل استفاده برای دانش آموزان است، یک مسأله

از آن در زیر آمده است:

احمد قندهاری

محمد هاشم رستمی

حمیدرضا امیری

میرشهرام صدر

هوشنگ شرقی

سید محمد رضا هاشمی موسوی

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

۱- اگر $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, x \geq 2\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{R}, x < -2\}$

حاصل $A' \cap B'$ را با هم مقایسه کنید.

۲- کوچکترین عددی را بیابید که اگر در عبارت $5^{12} \times 3^7 \times 2^8$ ضرب نشود، حاصل، مربع کامل می‌شود.

۳- حاصل عبارت تواندار $N = \frac{11 \times 63 \times 5^7 \times 3^5 \times 2^7}{7 \times 5^2 \times 3^3 \times 2^2}$ را بیابید.

۴- حاصلضرب دو عدد متوالی برابر 120 می‌باشد، تعیین کنید که مجموع آن دو عدد، اول است یا مرکب؟

۵- حاصل عبارت زیر را تعیین کنید:

$$K = \frac{5^{-1} + 5 \times 3^{-2}}{15 \times 3^{-1} + 5^{-2} \times 3^2}$$

۶- کسر متناهی مولد عدد اعشاری $2/1234$ را بیابید.

۷- عبارت $T = \frac{x^2-1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x+1} + \frac{x^1-1}{x+1}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟ سبب در حوزه تعریف، حاصل T را بیابید. در آخر، معادله $T=0$ را حل کنید.

۸- ثابت کنید که عبارت $2^7 \times 13^7 + 8$ بر $2^7 \times 13^7 + 2$ بخش پذیر است.

۹- معادله توانی زیر را حل کنید:

$$2^{11+7} + 3 \times 2^8 = 2^4$$

۱۰- اگر $a^7 + b^7 = ab + 2(a+b) - 2$ ، حاصل عبارت

$$\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} + 2}$$

ریاضیات ۳

۱- به ازای چه مقادیر m ، سه جمله‌ای درجه دوم $(m+5)x^2 + (m-5)x + m-11$ به ازای تمام مقادیر x همواره متغی است؟

۲- حدود k را طوری تعیین کنید که معادله $\frac{5-x}{k} = \frac{k}{x+y}$ دارای جوابهای حقیقی باشد.

۳- یک به یک و پوشای تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بررسی کنید.

$$f(x) = 3x - |x|$$

۴- اولاً، ثابت کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وارون پذیر است و $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

ثانیاً، ضابطه وارون آن را به دست آورید.

۵- اگر فریضه نقطه $A(2\alpha - \beta, \alpha + 2)$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم، نقطه $B(3\alpha + \beta, \beta + 2)$ باشد، مقادیر α و β را مشخص کنید.

۶- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = |x| - x + 1$ را وقتی $x \in [-2, 2]$ باشد، رسم کنید.

۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس در دوی مجهول X را طوری

تعیین کنید که داشته باشیم $A^T - 2AX + I = O$ (I ماتریس واحد مرتبه ۲ است).

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد و $a \neq \pm 1$ و $a \neq 0$ را طوری به دست آورید که داشته باشیم:

$$(A^T)^{-1} = 2I$$

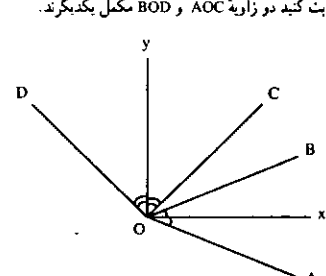
۹- ثابت کنید اگر $a > 0$ و $a^2 + 9b^2 = 2ab$ باشد، آن گاه:

$$\log \frac{2a+2b}{2} = \frac{\log a + \log b}{2}$$

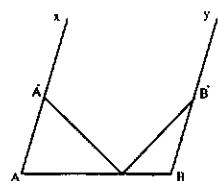
۱۰- معادله $2 \log 2 + \log(x^2 - 1) - \log(2x - 1) = 0$ را حل کنید.

هندسه ۱

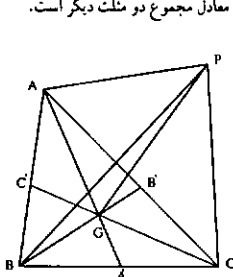
۱- اگر Ox نیمساز زاویه AOB ، Oy نیمساز زاویه COD و $\angle xOy = 90^\circ$ باشد، ثابت کنید دو زاویه AOC و BOD مکمل یکدیگرند.



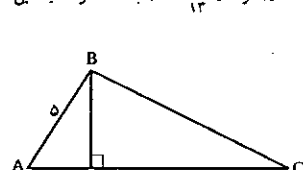
۲- پاره خط AB داده شده است. از A و B دو نیمخط موازی دلخواه Ax و By را رسم می‌کنیم. نقطه‌ای مانند M روی پاره خط AB در نظر می‌گیریم. روی Ax ، طول $AA' = AM$ و روی By ، طول $BB' = BM$ را جدا می‌کنیم و از A' و B' به M وصل می‌کنیم. ثابت کنید $\angle A'MB' = 90^\circ$ است.



۳- اگر نقطه G محل تلاقی سه میانه مثلث ABC را به نقطه‌ای مانند P واقع در خارج این مثلث وصل کنیم، ثابت کنید یکی از سه مثلث PGA ، PGB و PGC ، معادل مجموع دو مثلث دیگر است.



۴- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. اگر $AB = 5 \text{ cm}$ و $CH = \frac{144}{13} \text{ cm}$ باشد، اندازه محیط این مثلث را تعیین کنید.



$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 9x + 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

مفروض است، مجموعه نقاط نایب‌نگی تابع f را بیابید.

۶- ثابت کنید معادله $x^2 + x + 1 = 0$ دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

۷- معادله‌های مجانبهای قائم‌تابع به معادله

$$y = \frac{(x^2 - 2x + 2)\sqrt{x}}{x(x^2 - 2)(x-1)^2(x+2)}$$

را بیابید.

$$A = \text{اگر در تابع به معادله } \frac{(u-v)x^2 - 2(h-v)x}{x-u} = y = 2, y = \frac{(u-v)x^2 - 2(h-v)x}{x-u}$$

افقی باشد، u و h را بیابید.

$$A = \text{تابع به معادله } \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

در $f(x)$ مشتق‌پذیر است، مقدار n را بیابید.

$$A = \text{اگر در تابع به معادله } \frac{x}{1+x^2}, f(x) = \frac{x}{1+x^2}, x > 1$$

را بیابید.

هندسه تحلیلی و جبر خطی پیش دانشگاهی

۱- تصویر قائم‌بردار a بر $b = -i + j + k$ را بیابید.

۲- نقطه $P(-1, 2, 1)$ و خط $L: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ را بیابید که از نقطه P عبور کرده و در محل تلاقی‌اش با خط L ، بر آن عمود باشد.

۳- معادله صفحه‌ای را بیابید که از نقطه $P(2, -1, 0)$ گذشته و بر دو صفحه به معادله‌های $x - y - z = 1$ و $2x + y + z = -1$ عمود باشد.

۴- بر خط D به معادله $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ نقطه‌ای را بیابید که از صفحه به معادله $4x - 3y = 1$ به فاصله ۳ باشد.

۵- اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند و $M = AA^T - BB^T$ ثابت کنید M متقارن است.

۶- اگر $x + y + z = 0$ بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای درمیان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix} = a^3$$

۷- اگر A ماتریس $n \times n$ و وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید:

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

۸- اگر بردارهای $(2, 1, 2)$ و $(1, 0, 2)$ و $(3, 2, 2)$ بستگی خطی داشته باشند، مقدار a را بیابید.

۹- اگر $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ و $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ نگاشتهای خطی باشند، ثابت کنید $f \circ g$ نگاشته خطی است.

۱۰- منحنی به معادله $x^2 - y^2 = 1$ مفروض است. معادله منحنی تبدیل‌یافته توسط ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را بیابید.

۱۱- نگاشت خطی f با ضابطه $f(x, y, z) = (x - y, y + z)$ مفروض است، هسته و بعد آن را مشخص کنید.

۱۲- نگاشت خطی f با ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ مفروض است، آیا

یک به یک است؟ ثابت کنید.

۱۳- خاصیت پوشش‌دهی برای نگاشت خطی f با ضابطه $f(x, y, z) = (x, y - z)$ بررسی کنید.

۱۴- خاصیت یک به یکی و پوشش‌دهی برای نگاشت خطی f با ضابطه

تابع در از $x = -1$ دارای ماکزیمم یا مینیمم برابر -2 باشد.

۱۲- جدول تغییرات و نمودار تابع $y = x(2 - x^2)$ را رسم کنید.

۱۳- معادله خط قائم بر منحنی تابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ را در نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر آن بنویسید.

حسابان ۱

۱- تابع به معادله

$$f(x) = (a-1)x^2 + (a-2)x^3 + (ab-a)x + (a-b+2)$$

مفروض است. a و b را چنان بیابید تا اولاً، تابع f فرد باشد. ثانیاً، تابع f زوج باشد.

۲- ثابت کنید عبارت $(x^2 + x^2 - 2x + 1)^5 - (x^2 - 2x)^5$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است.

۳- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند و $\alpha^5 + \beta^5 = k$ ، آن‌گاه $\alpha^{10} + \beta^{10}$ را بر حسب k بیابید.

۴- اگر منفرهای دو تابع به معادله‌های $f(x) = x^2 + 5x + 2$ و $g(x) = ax^2 + bx + 6$ ساری باشند، مقدار عددی $(a+b)$ را بیابید.

۵- اگر منحنی تابع به معادله $f(x) = x^2 + mx^2 - 2$ در نقطه ماکزیمم نسبی بر محور x ها مماس باشد، مقدار m را بیابید.

۶- ثابت کنید:

$$\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} + x - 5}{\sqrt{x+6} - 2}$ را بیابید.

۸- تابع به معادله

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b|x|, & x < 1 \\ x - \frac{y}{x}, & x = 1 \\ a \sin(x-1) + b[x+1], & x > 1 \end{cases}$$

مفروض است، a و b را چنان بیابید تا این تابع در $x=1$ پیوسته باشد.

۹- اگر f تابعی یک به یک و دایره‌ناهم باشد، $g^{-1}(x)$ ، $g(x) = \frac{y+f(x)}{y-f(x)}$ را بیابید.

۱۰- در تابع به معادله $f(x) = \sin^2 \sqrt{x} + \cos^2 \frac{1}{x}$ ، $f'(x)$ را بیابید.

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱- به کمک تعریف حد دنباله ثابت کنید حد دنباله $\left\{ \frac{2n+1}{n-2} \right\}$ ، $n > 2$.

۲- مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+2)(k+6)}$ را بیابید.

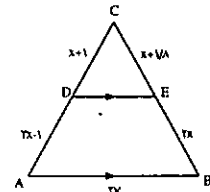
۳- با استفاده از تعریف حد تابع، ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

۴- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b + \sqrt{16x^2 - 12ax + 1}) = 5$ ، a و b را بیابید.

۵- تابع با ضابطه

۵- در شکل، $DE \parallel AB$ است. اندازه محیط مثلث CDE را به دست آورید.



۶- اندازه ضلع مربع و هشت ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتیمتر را تعیین کنید.

۷- ثابت کنید مثلث میانه‌ای هر مثلث، با آن مثلث متشابه است. نسبت تشابه را تعیین کنید (مثلث میانه‌ای هر مثلث، مثلثی است که رأسهای وسطهای ضلعهای آن مثلث می‌باشد. این مثلث را مثلث اول نیز می‌نامند).

۸- نسبت حجم مکعب محاط در کره‌ای به شعاع R را به حجم آن کره، تعیین کنید.

۹- هر مربع القاعده منتظمی داده شده است. اگر ضلع قاعده این هرم ۱۲ cm و اندازه h بالشی $2\sqrt{3}$ cm باشد، اندازه سطح جانبی و حجم این هرم را بیابید.

ریاضیات ۵

۱- اگر $A = \{x | x \geq 2\}$ و $B = \{x | -1 < x \leq 3\}$ باشد، $A \cup B$ را به صورت فاصله نشان دهید.

۲- در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 2 \\ -x + 4, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$ ، مقادیر $f(2)$ ، $f(3)$ و $f(1 + \sqrt{2})$ را بیابید.

۳- دایره دایره‌ای به معادله $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 1}$ را به دست آورید.

۴- اگر $g(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ و $f(g(x)) = \frac{1}{x^2} + 1$ باشد، تابع $f(x)$ را تعیین کنید.

۵- اگر $f(2x-1) = 2x^2 - 2x + 1$ باشد، حد $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow \sqrt{2}$ تعیین کنید.

۶- اندازه a و b را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{(b-1)x^2 + x^2 + 2} = -1$ باشد.

۷- مطلوب است محاسبه:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{4x+1}}{x - \sqrt{4x+1} - 6}$$

۸- مقدار a را در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x > -1 \\ 3, & x = -1 \\ -x + 1, & x < -1 \end{cases}$ طوری تعیین کنید که این تابع در $x = -1$ پیوستگی راست داشته باشد.

۹- مشتق هریک از تابعهای زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف. } y = (\sqrt{2x^2 + 1} - x + 1)^3$$

$$\text{ب. } y = \sin x^2 \cos^3 x$$

۱۰- اگر $U = (\sqrt{x} - \sqrt{x-2})^2$ و $V = (\sqrt{x} + \sqrt{x-2})^2$ باشد، $U' \cdot V + V' \cdot U$ را محاسبه کنید.

۱۱- در تابع $y = ax^2 + bx - 3$ ضرایب a و b را چنان بیابید که این

۶- جمله مستقل از x را در بسط دو جمله ای $(x^2 + \frac{1}{x})^{15}$ بیابید.
۷- اگر α و β ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، معادله درجه دومی بیابید که ریشه های α^2 و β^2 باشند.
۸- نمودار سهمی $y = x^2 + 3x^2 + 3x$ را رسم کنید، سپس به کمک آن نمودار تابع یا ضابطه $y = |x^2 + 3x^2 + 3x|$ را رسم کنید.
۹- نمودار تابع یا ضابطه $y = 2(\frac{x}{2})^{1-1}$ را رسم کنید.
۱۰- همه مجانبهای منحنی به معادله $y = \frac{3x^2 + 2x^2}{x^2 - 3x^2 + 3x}$ را به دست آورید.

الف. جدول فراوانی داده های بالا را تشکیل دهید.
ب. میانگین، انحراف معیار و ضریب تغییرات داده های بالا را به دست آورید.
ج. چندبر فراوانی و نمودار دایره ای را برای نمونه بالا به دست آورید.
۲- می خواهیم از بین ۱۰ نفر کوهورد که ۲ نفر آنها برادر هستند، یک گروه بشود ۵ نفری تشکیل دهیم. مطلوب است محاسبه احتمال آن که:
الف. ۲ برادر در گروه باشند.
ب. فقط یکی از برادرها در گروه باشند.
۳- ۴۰٪ مردم حداقل دارای تحصیلات تا دیپلم هستند و ۳۰٪ آنها شغل دولتی دارند. ۲۰٪ افراد با تحصیلات کمتر از دیپلم نیز دارای شغل دولتی هستند. چند درصد مردم شغل دولتی دارند؟
۴- مقدار m را به قسمی تعیین کنید که سه خط به معادله های $y = (m+1)x$ و $y = 2x - 1$ و $y = mx - m + 2$ از یک نقطه بگذرند.
۵- با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$f(x,y,z) = (x, 2y, y+z)$ بررسی کنید.
۱۵- نگاشت خطی f با ضابطه $f(x,y) = (2x-y, x+2y)$ مفروض است. ضابطه f^{-1} را بیابید.
۱۶- دستگاه معادلات زیر را به روش گوس حل کنید.
$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y-2=0 \\ x+3y-2z=1 \end{cases}$$

۱۷- مفادیر ویژه و بردارهای ویژه نگاشت خطی f با ضابطه $f(x,y) = (5x-2y, 2x-y)$ را به دست آورید.

ریاضی عمومی ۱

۱- فرض کنید برای نمرات درس ریاضی ۲۰ نفر دانش آموز دبیرستانی، داده های زیر به دست آمده باشد:

۱۸/۵	۱۵	۱۹/۵	۱۲	۱۵
۱۱	۱۰	۲۰	۱۷	۹
۱۵	۱۱/۵	۱۳	۱۴	۱۸
۱۷	۱۶	۱۱	۷	۱۰/۵

حل تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

۱-

$$\begin{aligned} A &= \{x|x \in \mathbb{Z}, x \geq 2\} = \{2, 3, 4, \dots\} \\ A' &= \{x|x \in \mathbb{Z}, x < 2\} \\ B &= \{x|x \in \mathbb{R}, x < -2\} \\ B' &= \{x|x \in \mathbb{R}, x \geq -2\} \\ A' - B &= \{-2, -3, -4, \dots, -1, 0, 1\} \\ A' \cap B' &= \{-2, -3, -4, \dots, -1, 0, 1\} \\ A' - B &= A' \cap B' \end{aligned}$$

۲- کوچکترین عدد برای b برابر $5 \times 3 \times 2 \times 1$ است، زیرا:

$$\begin{aligned} b.a &= (5 \times 3 \times 2 \times 1)(5^2 \times 3^2 \times 2^2) \\ &= 5^3 \times 3^4 \times 2^3 = (5^2 \times 3^2 \times 2^2)^2 = k^2 \\ N &= \frac{11 \times 63 \times 5^7 \times 3^5 \times 2^7}{7 \times 5^2 \times 3^2 \times 2^2} \\ &= 11 \times 9 \times 5^{5-2} \times 3^{5-2} \times 2^{7-2} \\ &= 11 \times 3^2 \times 5^3 \times 2^5 \\ &= 11 \times 3^2 \times 5^3 \times 2^2 \end{aligned}$$

۳- دو عدد متوالی را x و $x+1$ در نظر می گیریم، پس:

$$\begin{aligned} x(x+1) &= 930, \quad x(x+1) = 30 \times 31 \Rightarrow x = 30 \\ \text{(عددا اول)} &= 31 \Rightarrow 31 \times 32 = 992 \\ \text{مجموع دو عدد, } &30 + 31 = 61 \text{ است که عددی اول می باشد.} \end{aligned}$$

$$K = \frac{5^{-1} + 5 \times 3^{-1}}{15 \times 3^{-1} + 5^{-1} \times 3^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{5} + \frac{5}{3}}{\frac{15}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{3+25}{15}}{\frac{75+1}{15}} = \frac{28}{76} = \frac{7}{19} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{7}} = 7 \end{aligned}$$

۴- کسر متناهی مولد عدد اعشاری $2/1234$ را به x نشان می دهیم:

پس:

$$\begin{aligned} x &= 2/1234; \quad 1000x = 21234/237 \\ 10000x &= 212342/237 \\ 10000x - 1000x &= 212342/237 - 21234/237 \\ &= 212342 - 21234 = 191108 \\ 9900x &= 191108; \\ x &= \frac{191108}{9900} = \frac{20911}{2475} \quad \text{(کسر مولد)} \end{aligned}$$

۷- مقدار T به ازای ریشه منخرج کسرهای نامعین است: یعنی T به ازای $x = \pm 1$ تعریف نشده است. با فرض $x \neq \pm 1$ ، حاصل T را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} x = \pm 1: T &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2-1} \\ &= \frac{(x-1)(x^2-x+1) + (x-1)(x^2+1)}{x^2-1} \\ T &= x^2 + x + 1 - (x^2 - x + 1) + x - 1 \\ &= x^2 + x + 1 - x^2 + x - 1 + x - 1 = 3x - 1 \\ T = 0: \quad 3x - 1 &= 0; \quad 3x = 1; \quad x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۸- عبارت $(27x^{12} + 8)$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} 27x^{12} + 8 &= 3^3 x^{12} + 2^3 \\ &= (3x^4)^3 + 2^3 \\ &= (3x^4 + 2)((3x^4)^2 - (3x^4) \cdot 2 + 2^2) \end{aligned}$$

چون عبارت $(27x^{12} + 8)$ دارای عامل $(3x^4 + 2)$ می باشد: پس، بر آن بخش پذیر است.

$$\begin{aligned} 9- \text{ با فرض } a &= 2^3, \text{ معادله به صورت زیر نوشته می شود:} \\ 2^3 \times 2^2 + 3 \times 2^3 &= 24; \quad 16a + 3a^2 = 24 \end{aligned}$$

پس:

$$3a^2 + 16a - 24 = 0; \quad (3a + 12)(a - 2) = 0;$$

۱۰- از فرض $x = 1$:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= ab + 2a + 2b; \\ 2a^2 + 2b^2 + 8 &= 2ab + 4a + 4b \\ (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 4a + 2) &+ (b^2 - 2b + 2) = 0; \\ (a-b)^2 + (a-2)^2 + (b-2)^2 &= 0; \\ (a-b) = 0, \quad a-2 &= 0, \quad b-2 &= 0 \end{aligned}$$

پس:

$$\begin{aligned} a = b = 2: \quad \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b} + 2} \\ = \frac{\sqrt{2 \times 2 \times 2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

ریاضیات ۳

۱- برای آن که سه جمله ای درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره منفی باشد، کافی است $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد: بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta &= (m-5)^2 - 4(m+5)(m-11) \\ &= m^2 - 10m + 25 - 4m^2 + 44m - 20m + 220 \\ &= -3m^2 + 14m + 245 \\ &= -3m^2 + 14m + 245 < 0 \end{aligned}$$

و برای حل نامعادله درجه دوم فوق ریشه های آن را به دست آورده و آن را تعیین علامت می کنیم:

$$\begin{aligned} -3m^2 + 14m + 245 &= 0 \\ \Delta &= 14^2 - 4(-3)(245) = 3124 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{r}} - 1 = \frac{1}{r} \Rightarrow a^{\frac{1}{r}} = \frac{r}{r-1} \Rightarrow a = \pm \sqrt[r]{\frac{r}{r-1}}$$

$$ra^{\frac{1}{r}} + rb^{\frac{1}{r}} = rab \quad -1$$

$$\Rightarrow (ra + rb)^{\frac{1}{r}} - 1 rab = rab$$

$$\Rightarrow (ra + rb)^{\frac{1}{r}} = 1 + rab$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ra+rb}{r}\right)^{\frac{1}{r}} = ab$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{ra+rb}{r}\right)^{\frac{1}{r}} = \log ab$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \log\left(\frac{ra+rb}{r}\right) = \log a + \log b$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{ra+rb}{r}\right) = \frac{\log a + \log b}{\frac{1}{r}}$$

$$\Rightarrow r \log\left(\frac{ra+rb}{r}\right) = \log(r^r a + r^r b) = \log(r^r (a+b)) = \log(r^r) + \log(a+b) = 1 + \log(a+b)$$

$$\Rightarrow \log(r^r (a+b)) = \log(r^r a + r^r b)$$

$$\Rightarrow r \log r + \log(a+b) = \log(r^r a + r^r b)$$

$$\Delta = 16 - 9(-2) = 32, x = \frac{r \pm \Delta}{-A}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{r}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$$

تنها پاسخ قابل قبول $x = \frac{r}{2}$ است: زیرا به ازای $x = -\frac{1}{2}$ و $x^{\frac{1}{r}} - 1 < 0$ و $x - 1 < 0$ و در نتیجه $\log(r^r a + r^r b) = \log(r^r (a+b))$ هر دو بی معنی می شوند.

هندسه ۱

۱- با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\widehat{AOC} + \widehat{BOD} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{BOC} + \widehat{COD}$$

$$= \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{BOC} + \widehat{COD}$$

$$= \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD}$$

$$= \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} = 180^\circ$$

۲- مثلثهای $\widehat{BMB'}$ و $\widehat{AMA'}$ در رأسهای A و B منتهای السانین

هستند و $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$ است. بنابراین داریم:

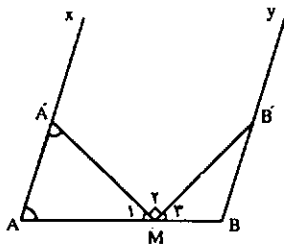
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{M} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{M} + \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{M} + \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{M} + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{M} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$



۳- می دانیم اگر خطی از محل برخورد میانه های یک مثلث بگذرد، فاصله یک رأس مثلث از آن خط مساوی مجموع فاصله های دو رأس دیگر از آن خط است؛ یعنی در شکل زیر داریم:

$$-1 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -1, [x] = -x$$

$$\Rightarrow y = 2x - x + 1 = y = x + 1$$

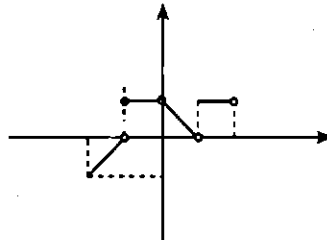
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1, [x] = -x$$

$$\Rightarrow y = 2x - x + 1 = y = 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0, [x] = x \Rightarrow y = -x + 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1, [x] = x$$

$$\Rightarrow y = x - x + 1 = y = 1$$



$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+1c & b+1d \\ -a+1c & -b+1d \end{bmatrix}$$

$$A^T - 2AX + I = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(a+1c)-2 & 1(b+1d)+1 \\ -1(a+1c)-2 & -1(b+1d)+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+1c-2 & b+1d+1 \\ -a-1c-2 & -b-1d+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b+1d = -1 \\ -2b+1d = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2-1 & a-1 \\ a-1 & a^2-1 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^{-1} = \frac{1}{|A^T|} \begin{bmatrix} a^2-1 & a-1 \\ a-1 & a^2-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(a^2-1)^2} \begin{bmatrix} a^2-1 & a-1 \\ a-1 & a^2-1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{a^2-1} = 1$$

$$m = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{-2} = \frac{-12 \pm 8}{-2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{20}{-2} = -10$$

$$\begin{array}{c|ccc} m & -\infty & -10 & +\infty \\ \hline -2m^2+12m+16 & - & 0 & - \end{array}$$

و با توجه به جدول تعیین علامت فوق، لازم است که $m < -10$ یا $m > \frac{20}{-2}$ و با توجه به آن که باید $a < 0$ باشد، $m < -10$ است و از اشتراک این دو مجموعه جواب، مجموعه مقادیر m به دست می آید:

$$\boxed{m < -10}$$

$$\frac{0-x}{k} = \frac{k}{x+1} \Rightarrow (x+1)(0-x) = k^2 - 1$$

$$\Rightarrow 0x - x^2 + x - 1 = k^2 - 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x + k^2 - 2 = 0$$

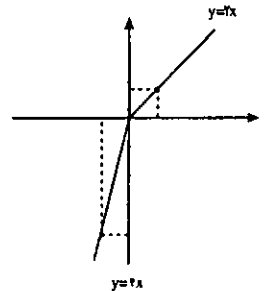
$$\Delta = 1 - 4(k^2 - 2) = 1 - 4k^2 + 8 = 9 - 4k^2$$

$$\Rightarrow 9 - 4k^2 \geq 0 \Rightarrow 4k^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow k^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$$

۴- با رسم نمودار تابع، به سادگی می توان یک به یک و پوشایی آن را تحقیق کرد.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-x, & x \geq 0 \\ 2x+x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases}$$



و با توجه به نمودار، روشن است که تابع f ، هم یک به یک و هم پوشاست. ۴- ابتدا ثابت می کنیم که f یک به یک است و بنابراین معکوس پذیر است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 2x_1^2 + 2x_1 = x_2^2 - 2x_2^2 + 2x_2$$

$$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1^2 + 2x_1 = x_2^2 - 2x_2^2 + 2x_2$$

$$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1^2 + 2x_1 = x_2^2 - 2x_2^2 + 2x_2$$

$$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1^2 + 2x_1 = x_2^2 - 2x_2^2 + 2x_2$$

$$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$

$$\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

برای تعیین ضابطه تابع معکوس، x را از ضابطه تابع بر حسب y به دست می آوریم و سپس جای x و y را باهم تعویض می کنیم.

$$y = x^2 - 2x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow y - 1 = x^2 - 2x^2 + 2x - 1$$

$$\Rightarrow y - 1 = (x - 1)^2 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{y - 1}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{y - 1} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 1} \end{cases}$$

۵- فرم نقطه $A(x, y)$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم نقطه $B(y, x)$ است. بنابراین با توجه به فرض مسئله، می توان نوشت:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = \beta + 2 \\ \alpha + 2 = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = \beta + 2 \\ \alpha + 2 = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = 0, \alpha = 1$$

ریاضیات ۵

۱- با توجه به تعریف فاصله داریم:

$$A = [2, +\infty[\quad B =]-1, 3]$$

$$\Rightarrow A \cup B = [2, +\infty[\cup]-1, 3] =]-1, +\infty[$$

۲- داریم:

$$f(3) = (3)^2 + 1 = 10$$

$$f(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^2 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$f(-1) = -1 + 2 = 1 \quad f(-\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} + 2$$

$$\Rightarrow f(-\sqrt{2}) \times f(1) = (\sqrt{2} + 2) \times 1 = 16 + 2\sqrt{2}$$

۳- دامنه تعریف این تابع، اشتراک دامنه تعریف

دو تابع $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ و $f_2(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ است؛ بنابراین داریم:

$$D_{f_1}: \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ -x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ -(x+1)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{f_1} = R \\ D_{f_2} = \{-1\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$$

$$= R \cap \{-1\} = \{-1\}$$

۴- داریم:

$$f(g(x)) = \frac{1}{x} + 1 = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + 1$$

$$= (g(x))^{\frac{1}{2}} + 1 \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 1$$

$$= x\sqrt{x} + 1, \quad x \geq 0$$

۵- داریم:

$$f(2x-1) = (2x-1)^2 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow$$

$$\text{حد } f(x) = \text{حد } (x^2) = (\sqrt{x})^2 = 2$$

$$x \rightarrow \sqrt{2} \quad x \rightarrow \sqrt{2}$$

۶- چون حد سر داده شد، عدد معین شده است، پس صورت و

مخرج کسر، هم درجه اند؛ یعنی $a = 6$ است. از طرفی داریم:

$$\frac{7}{b-1} = -1 \Rightarrow b-1 = -2 \Rightarrow b = -1$$

۷- الف. با توجه به $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{(x - \frac{\pi}{2})(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

ب. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1} - 6} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 6} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6 - \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1} - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x-1} + 6)}{(\sqrt{2x-1} - 6)(\sqrt{2x-1} + 6)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(x-5)(\sqrt{2x-1} + 6)}{V(x-5)(2 + \sqrt{2x-1})}$$

$$= \frac{-2(\sqrt{2} + 6)}{V(2 + \sqrt{2})} = \frac{-2\sqrt{2}}{V} = \frac{-2}{V}$$

۸- شرط آن که تابع f در $x = -1$ پیوستگی راست داشته باشد، آن

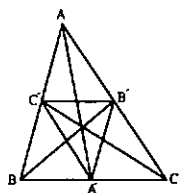
۹- مثلث ABC را در نظر گرفته، میانه‌های AA', BB', CC' را

رسم می‌کنیم. مثلث A'B'C'، مثلث میانه‌های مثلث ABC نامیده می‌شود.

می‌دانیم پاره خط واصل بین وسطهای هر ضلع هر مثلث، برابر نصف اندازه

ضلع سوم مثلث است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$$

بنابراین دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه و نسبت تشابه آنها برابر $\frac{1}{2}$

است.

نکته. مثلث A'B'C'، مجانب مثلث ABC نسبت به مرکز ثقل G

(محل برخورد میانه‌های مثلث ABC) و نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ است؛ زیرا

داریم:

$$\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{GC'}{GC} = \frac{1}{2}$$

بنابراین این دو مثلث متشابه‌اند.

۱۰- شعاع کره را R، ضلع مکعب را a و قطر مکعب را d فرض

می‌کنیم. می‌دانیم که $d = a\sqrt{3}$ و $d = 2R$ است؛ بنابراین داریم:

$$a\sqrt{3} = 2R \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{حجم مکعب} = a^3 = \frac{AR^3}{\sqrt{3}}$$

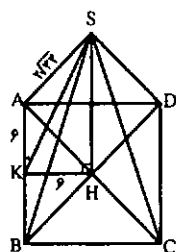
$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow \frac{\text{حجم مکعب}}{\text{حجم کره}} = \frac{AR^3}{\sqrt{3}} \div \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{A}{4\sqrt{3}\pi}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}\pi}$$

۱۱- هرم SABCD را در نظر می‌گیریم. SH ارتفاع هرم و SK یک سهم

هرم را رسم می‌کنیم. در مثل قائم‌الزاویه SAK داریم:



$$SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ cm}$$

و در مثل قائم‌الزاویه SKH داریم:

$$SH = \sqrt{SK^2 - HK^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

ارتفاع هرم

از آنجا خواهیم داشت:

سهم هرم $\times$ محیط قاعده $= \frac{1}{3} \times$ سطح جانبی هرم

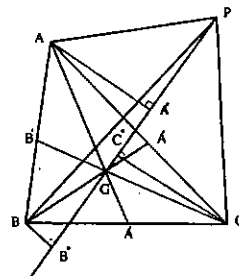
$$= \frac{1}{3} \times 24 \times 10 = 80 \text{ cm}^3$$

ارتفاع $\times$ سطح قاعده $= \frac{1}{3} \times$ حجم هرم

$$= \frac{1}{3} \times 12^2 \times 8 = 384 \text{ cm}^3$$

$$CC'' = BB'' + AA''$$

از آنجا خواهیم داشت:



$$\frac{1}{3} PG \cdot CC'' = \frac{1}{3} PG \cdot BB'' + \frac{1}{3} PG \cdot AA''$$

$$\Rightarrow S_{POC} = S_{PBO} + S_{PAG}$$

۱۲- با استفاده از رابطه‌های تری در مثل قائم‌الزاویه داریم:

$$AB^2 = AH \cdot AC$$

$$\Rightarrow 5^2 = AH(5 + \frac{12}{13})$$

$$\Rightarrow AH^2 + \frac{12}{13} AH - 25 = 0 \Rightarrow AH = \frac{25}{13}$$

$$\Rightarrow AC = AH + HC = \frac{25}{13} + \frac{12}{13} = 13$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$$

$$\text{محیط مثلث} = AB + AC + BC = 5 + 13 + 12 = 30$$

۱۳- نخست اندازه x و سپس اندازه ضلعهای مثلث CDE را معاینه می‌کنیم.

$$\triangle ABC \sim \triangle DEB \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$$

$$\Rightarrow \frac{5+1}{2x-1} = \frac{x+1}{2x}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x = 2x^2 + 2 + 2x - 1 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow 0.75x = 1.5 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow CD = x+1 = 3, \quad DA = 2x-1 = 3$$

$$CE = x+1/2 = 2.5$$

$$EB = 2x = 4, \quad CA = CD + DA = 3 + 3 = 6$$

از طرفی داریم $\frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB}$ ؛ یعنی:

$$\frac{3}{6} = \frac{DE}{12}$$

$$\Rightarrow DE = 6 \Rightarrow \text{محیط مثلث CDE}$$

$$= CD + DE + CE \Rightarrow \text{محیط مثلث CDE}$$

$$= 3 + 6 + 3 = 12$$

۱۴- در دایره‌ای به شعاع R، اندازه ضلع هر n ضلعی منتظم محاطی، برابر است با:

$$C_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

بنابراین داریم:

$$C_7 = 2 \times 12 \times \sin \frac{180^\circ}{7} = 24 \sin 25^\circ$$

$$= 24 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

$$C_8 = 2 \times 12 \times \sin \frac{180^\circ}{8} = 24 \sin 22.5^\circ$$

$$= 24 \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}-\sqrt{2}$$

نکته. به روش دیگر نیز مسئله را می‌توان حل کرد.

$$\Rightarrow x(3x+2m)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{2m}{3} \end{cases}$$

$$x=0 \Rightarrow y=-2$$

$x=0$ نمی تواند طول ماکزیمم نسبی باشد: زیرا عرض ماکزیمم نسبی است: پس $x = -\frac{2m}{3}$ طول ماکزیمم نسبی است و عرض آن ۰ است.

$$M = \left| -\frac{2m}{3} \right| \text{ در معادله تابع } = -\frac{4m^2}{9} + \frac{4m^2}{9} - 2$$

دو طرف را در ۲۷ ضرب می کنیم:

$$-4m^2 + 4m^2 - 2 \times 27 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 = 2 \times 27 \Rightarrow m^2 = 27 \Rightarrow m = 3$$

فرض می کنیم $x = \frac{\pi}{9}$ و حاصل عبارت برابر A باشد: یعنی:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = A$$

دو طرف را در $2 \sin x$ ضرب می کنیم:

$$2 \cos x \sin x + 2 \cos 3x \sin x$$

$$+ 2 \cos 5x \sin x + 2 \cos 7x \sin x = 2A \sin x$$

هر جمله سمت چپ را بنایه فرمول

$$2 \cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$$

به حاصل جمع تبدیل می کنیم:

$$\sin 2x - \sin 0 + \sin 4x - \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x$$

$$- \sin 2x + \sin 4x - \sin 6x = 2A \sin x$$

$$\sin 4x = 2A \sin x$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sin 4x}{2 \sin x} = \frac{\sin \frac{4\pi}{9}}{2 \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{1}{2}$$

زیرا: $\sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9}$

$$\frac{\frac{4\pi}{9} + \frac{\pi}{9}}{2} = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-5) + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+5} - 3} = \frac{0}{0} \quad 7$$

صورت و مخرج را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می کنیم:

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-5) + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+5} - 3} \times \frac{(x-5) - \sqrt{x+1}}{(x-5) - \sqrt{x+1}}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 10x + 25 - (x+1))(\sqrt{x+5} + 3)}{(x+5 - 9)(x-5 - \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 11x + 24)(\sqrt{x+5} + 3)}{(x-4)(x-5 - \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-4)(x-3)(\sqrt{x+5} + 3)}{(x-4)(x-5 - \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{-5(3+3)}{-2-2} = \frac{15}{2}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = a + b \text{ حد راست}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = a \sin \theta + b \cos \theta = 2b \text{ حد چپ}$$

$$f(1) = \left[1 - \frac{1}{1} \right] = \left[-\frac{5}{2} \right] = -2.5$$

$$y' = \frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow N \text{ مماس در } m = \frac{2}{(-2+1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow N \text{ قائم در } m = -2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = -2(x - 1)$$

$$\Rightarrow -2(x+2) = y = -2x - 4$$

حسابان ۱

۱- یک تابع کسری الجمله به معادله $n \in \mathbb{N}$

وقتی فرد است که ضرایب توانهای زوج x و عدد ثابت معادله تابع مساوی صفر باشد. و وقتی این تابع زوج

است که ضرایب توانهای فرد x مساوی صفر باشد.

$$f(x) = (a-1)x^2 + (a-2)x^3 + (ab-a)x + (a-b+2)$$

$$\text{حل اولی: } \begin{cases} a-2=0 \\ a-b+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$$

$$\text{فرد باشد: } \begin{cases} a-1=0 \\ ab-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{حل ثانیا: } \begin{cases} a-1=0 \\ ab-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

۲- می دانیم $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ بخش پذیر است: پس عبارت:

$$(x^2 + x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 2x)$$

$$(x^2 + x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 2x) = 2x + 1$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x = 1$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = k \text{ می رسانیم: } \alpha^2 + \beta^2 = k$$

$$\alpha^{10} + \beta^{10} + 2\alpha^5\beta^5(\alpha^5 + \beta^5) = k^2$$

$$\alpha^{10} + \beta^{10} + 2(\alpha\beta)^5(k) = k^2, \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$\alpha^{10} + \beta^{10} + 2(-1)^5 k = k^2$$

$$\Rightarrow \alpha^{10} + \beta^{10} = k^2 + 2k$$

۳- ریشه های حقیقی معادله α و β

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = k$$

$$\alpha^{10} + \beta^{10} + 2\alpha^5\beta^5(\alpha^5 + \beta^5) = k^2$$

$$\alpha^{10} + \beta^{10} + 2(-1)^5 k = k^2$$

$$\Rightarrow \alpha^{10} + \beta^{10} = k^2 + 2k$$

۴- اگر صفرهای تابع در هم درجه مساوی باشند. باید ضرایب آنها متناسب باشند: یعنی:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{0} = \frac{c}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{1} \\ b = \frac{10}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = 9$$

۵- طولهای ماکزیمم نسبی و می نیم نسبی در حالت کلی ریشه های ساده مشتق است.

$$f(x) = x^2 + mx^3 - 2$$

$$f'(x) = 2x + 3mx^2 = 0$$

است که $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ باشد. بنابراین باید دانسته باشیم:

$$(-1)^2 + a(-1) = 2 \Rightarrow -1 - a = 2 \Rightarrow a = -3$$

۹- با استفاده از دستورهای معادله مشتق داریم:

$$\text{الف) } y = (\sqrt{2x^2 + 1} - x + 1)^2$$

$$\Rightarrow y' = 2(\sqrt{2x^2 + 1} - x + 1) \cdot (\frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} - 1)$$

$$\text{ب) } y = \sin x^2 \cdot \cos^2 x$$

$$y' = (\sin x^2)' \cdot \cos^2 x + (\cos^2 x)' \cdot \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = (2x \cos x^2) \cdot \cos^2 x + 2(-\sin x) \cos^2 x \cdot x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x^2 \cos^2 x \cdot \cos^2 x - 2x \sin x \cos^2 x \sin x^2$$

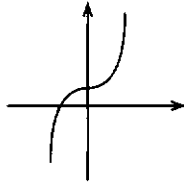
است.

۶- اگر $f(x) = x^2 + x + 1$ ، آن گاه $f'(x) = 2x + 1 > 0$ ؛ چون تابع f پیوسته است و $f'(x) > 0$ ، پس این تابع در $\mathbb{R}$ صعودی اکید است.

$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$ ؛ یعنی شروع نمودار تابع از ربع سوم است و $\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty \end{cases}$

یعنی پایان منحنی در ربع اول است. بنابراین، نمودار تابع چنین است:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$



به طوری که ملاحظه می شود، نمودار تابع، محور x ها را فقط و فقط در یک نقطه قطع می کند. پس معادله $x^2 + x + 1 = 0$ فقط و فقط یک ریشه حقیقی دارد.

$$y = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x}}{x(x^2-4)(x-1)^2(x+2)} \quad ۷-$$

$$x(x^2-4)(x-1)^2(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = +2 \\ x = -2 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$x = -2$ و $x = -1$ غیرقابل قبول اند؛ زیرا داخل رادیکال صورت را منفی می کنند $x = 0$ ، $x = 2$ ، $x = 1$ قابل قبول اند؛ زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot (x^2-4)(x-1)^2(x+2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x}}{x(x^2-4)(x-1)(x+2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} y = \infty$$

پس خطوط مجانبهای قائم، عبارتند از: $x = 0$ ، $x = 2$ ، $x = 1$.

$$y = \frac{(a-2)x^2 - 2(b-2)x}{x-5} \quad ۸-$$

یک تابع کسری گویا. وقتی مجانب افقی دارد که درجه صورت از درجه مخرج بیشتر نباشد.

$$a-2=0 \Rightarrow a=2$$

$$y = \frac{-2(b-2)x}{x-5}$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \lim y = \frac{-2(b-2)}{1} = 2$$

$$-b+4=1 \Rightarrow b=3$$

$$f(x) = \begin{cases} x^n \cdot \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad ۹-$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \cdot \cos \frac{1}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \cdot \cos \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{تابع کراندار}) \times 0$$

$$\xrightarrow{\text{قاعده ادغام}} f(n) - f(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{n+5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{5}$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{5}$$

$$\text{ب) } \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+6} \right) :$$

$$f(k) = \frac{1}{k+5}, \quad S_n = \sum_{k=1}^n (f(k) - f(k+1))$$

$$\xrightarrow{\text{قاعده ادغام}} f(n) - f(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{n+6} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+6} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{6}$$

$$\text{تعداد کل} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = -2 \quad ۳-$$

باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < 1 - x < \delta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} + 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} + 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} + 2 \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^2 + x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |(x-1)(x+2)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-1)| \times |(x+2)| < \varepsilon$$

حال یک همسایگی یک طرفه به مرکز ۱ و به شعاع ۱ را در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} x \rightarrow 1^- \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x - 1 < 1 \Rightarrow |x + 2| < 3$$

$$|x - 1| \times 3 < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| \times 3 < \varepsilon$$

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 0 < 1 - x < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\delta \leq \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b + \sqrt{16x^2 - 12Ax + 1}) = 5 \quad ۴-$$

$$ax + b - \sqrt{16x^2 - 12Ax + 1} = 5$$

$$ax + b - 2x + 1 = 5$$

$$(a-2)x + (b+1) = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ b+1=5 \Rightarrow b=4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 9x^2 + 5x + 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad ۵-$$

اول، پیوستگی تابع را در $\mathbb{Z}$ بررسی می کنیم.

مقدار تابع در اعداد صحیح: حد تابع در اعداد صحیح

$$2x^2 - 9x^2 + 5x + 1 = 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x^2 + 5x = 0$$

$$x(2x^2 - 9x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 1, \frac{5}{2}$$

پس این تابع در $x = 0$ و $x = 1$ ، در مجموعه $\mathbb{Z}$ پیوسته است. از طرفی این

تابع در $(\mathbb{R} - \mathbb{Z})$ پیوسته است؛ پس مجموعه نقاط پیوستگی تابع $\mathbb{Z} - \{0, 1\}$

$$2b = -2 \Rightarrow b = -1, \quad a + b = -2$$

$$\Rightarrow a - \frac{2}{3} = -2 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x \quad ۹-$$

$$g(x) = \frac{y+y}{y-y} \Rightarrow g^{-1}\left(\frac{y+y}{y-y}\right) = x$$

$$g^{-1}\left(\frac{y+y}{y-y}\right) = f^{-1}(y)$$

$$\frac{y+y}{y-y} = x \Rightarrow 2x - yx = y + y$$

$$\Rightarrow y(1+x) = 2x - y$$

$$y = \frac{2x-y}{1+x}$$

$$g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{2x-y}{1+x}\right)$$

$$f(x) = \sin^2 \sqrt[3]{x} + \cos^2 \frac{1}{x} \quad ۱۰-$$

$$u = \sqrt[3]{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$v = \frac{1}{x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin^2 u + \cos^2 v$$

$$f'(x) = 2(u' \cos u) \sin^2 u$$

$$+ 2(v' \sin v) \cos^2 v$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cos \sqrt[3]{x}\right) \sin^2 \sqrt[3]{x}$$

$$+ 2\left(-\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\right) \cos^2 \frac{1}{x}$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-2} = 2 \quad ۱-$$

باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \exists n \geq M$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2n+1}{n-2} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2n+1-2n+4}{n-2} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{5}{n-2} \right| < \varepsilon$$

$$|n-2| = n-2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2$$

$$\frac{5}{n-2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n-2}{5} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n-2 > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} + 2$$

$$M \geq \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} + 2 \right\rceil + 1$$

۲-

$$\frac{y}{(k+2)(k+6)} = \frac{a}{k+2} + \frac{b}{k+6} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{y}{(k+2)(k+6)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+6} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+5} \right) + \left(\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+6} \right) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+5} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+6} \right)$$

$$\text{الف) } \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+5} \right) :$$

$$f(k) = \frac{1}{k+2}, \quad S_n = \sum_{k=1}^n (f(k) - f(k+1))$$

پس: $n \geq 2$ یا $n \geq 1$

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \quad x > 1 \quad (f^{-1})'(\frac{1}{5}) = ? \quad -10$$

$$\frac{1}{5} = \frac{x}{1+x} \Rightarrow 2+x = 5 \Rightarrow x = 3$$

$$x = 3, \quad \frac{1}{5} = \frac{1}{f(3)} \Rightarrow f(3) = 5$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow f'(3) = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

داریم $\frac{1}{f'(b)} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{5}{-4}$ روی منحنی f باشد: $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(3)}$ پس:

$$(f^{-1})'(\frac{1}{5}) = \frac{1}{f'(3)}$$

$$(f^{-1})'(\frac{1}{5}) = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$$

هندسه تحلیلی و جبر خطی

$$u = \frac{a, b}{|b|} = \frac{-2-1+1}{1+1+1}(-i+j+k) = -1$$

$$= i-j-k$$

$$2. \quad \begin{cases} x=2t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases} \quad \text{معادله پارامتری خط}$$

$$u = (2, -1, 1)$$
 بردار هادی خط

فرض کنیم $P(2t, -t, 1)$ پای عمود و بردار هادی خط l به صورت

$$\vec{u} \cdot \vec{p} = 0 \quad u = (2, -1, 1) \quad p = (2t, -t, 1)$$

$$u \cdot p = 0 \Rightarrow (2, -1, 1) \cdot (2t, -t, 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2 = -\frac{1}{2} = p \cdot (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

۳- بردار نرمال صفحه خواسته شده. از ضرب خارجی بردارهای نرمال صفحه‌های داده شده به دست می‌آید.

$$N = N_1 \times N_2 = (i-j-k) \times (i+j+k) = -3j+3k$$

$$N = (-3, 3, 0) \quad P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{معادله صفحه} \quad -3(y+1)+3(z-1)=0$$

$$\Rightarrow -3y+3z=2$$

$$\begin{cases} x=-1-1 \\ y=2t \\ z=t+1 \end{cases} \quad -4$$

$$\Rightarrow p(-1-1, 2t, t+1)$$

$$\frac{|(-1-1)-2(2t)+3(t+1)-1|}{\sqrt{16+9}} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1-1 \\ y=2t \\ z=t+1 \end{cases} \rightarrow p_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow p_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۵- کافی است ثابت کنیم $M^T = M$

$$M^T = (AA^T - BB^T)^T$$

$$\Rightarrow M^T = (AA^T)^T - (BB^T)^T$$

$$= (A^T)^T A - (B^T)^T B$$

$$= AA^T - BB^T = M$$

$$\xrightarrow{(C_1+C_2)+C_3} \begin{bmatrix} a+x+y+z & y & z \\ a+x+y+z & a+y & z \\ a+x+y+z & y & a+z \end{bmatrix} \rightarrow 6$$

$$\xrightarrow{1+y \leftrightarrow 2} \begin{bmatrix} a & y & z \\ a & a+y & z \\ a & y & a+z \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_2, -R_1+R_3} \begin{bmatrix} a & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = a^T$$

۷- می‌دانیم $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ از طرفی داریم:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \Rightarrow |A|A^{-1} = A^*$$

$$\Rightarrow |A|A^{-1}| = |A^*| \Rightarrow |A|^{|A|^{-1}} = |A^*|$$

$$\Rightarrow |A|^{|A|^{-1}} \times |A|^{-1} = |A^*| \Rightarrow |A^*| = |A|^{|A|^{-1}-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a=0 \quad -A$$

$$9. \quad (fog)(x+y) = f(g(x+y))$$

$$\text{خطی } g = f(g(x) + g(y))$$

$$\text{خطی } f = f(g(x)) + f(g(y))$$

$$= fog(x) + fog(y)$$

$$\text{ب) } fog(rx) = f(g(rx)) = f(g(x))$$

$$\text{خطی } f = rf(g(x)) = rfog(x)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad -10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y = x \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -x \end{cases}$$

$$x^T - y^T = 1 - \frac{x-y}{y-x} = (Y)^T - (-X)^T = 1$$

$$\Rightarrow Y^T - X^T = 1$$

$$f(x, y, z) = (x-y, 2y+z) \Rightarrow f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$k_f = \{(x, y, z) | f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) | (x-y, 2y+z) = (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$$

در $\mathbb{R}^3$ هرگاه $2y+z=0$ و $x-y=0$ یک صفحه بوده و محل برخورددو صفحه، یک خط است: پس k_f یک خط بوده و بُعد آن ۱ است.۱۲- کافی است هسته f را مشخص کنیم و اگر $k_f = \{0\}$ نگاشت

۱-۱ است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=y=0 \Rightarrow k_f = \{(x, y) | x=y=0\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(0, 0)\}$$
 یک به یک است: f

۱۳- برای پوشش بودن $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ باید $2-2=0$ باشد.

$$k_f = \{(x, y, z) | (x, y-z) = (0, 0)\} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

و چون محل برخورد دو صفحه متقاطع درفضا، یک خط و بُعد آن ۱ است: پس نگاشت پوشش است.

۱۴- نگاشت $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک به یک است. اگر پوشش باشد و

بکس: پس:

$$k_f = \{(x, y, z) | (x, 2y, y+z) = (0, 0, 0)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow k_f = \{(x, y, z) | x=y=z=0\}$$

$$= \{(0, 0, 0)\}$$

پس نگاشت یک به یک و در نتیجه پوشش است.

$$f(x, y) = (2x-y, x+2y) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad -15$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{5} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x, y) = (\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y, -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad -16$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x = -1 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 \\ x + 2y - 2z = 1 \Rightarrow z = 2 \end{cases}$$

$$f(x, y) = (2x-2y, 2x-y) \quad -17$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$\text{راستای ویژه: } (a-\lambda)x + by = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)x - 2y = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow (2-1)x - 2y = 0$$

$$\Rightarrow x = 2y \quad \text{راستای ویژه متناظر با}$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow (2-2)x - 2y = 0$$

$$\Rightarrow y = x$$

راستای ویژه متناظر با

ریاضی عمومی ۱

۱- الف. اگر بخواهیم داده‌ها را در ۵ دسته طبقه‌بندی کنیم:

$$\frac{20-7}{5} = \frac{\text{تعداد دسته‌ها}}{\text{طول دسته‌ها}}$$

$$\frac{13}{5} = 2/5$$

دسته‌ها	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
۱	۷-۹/۶	۸/۳	۲	۶۵/۲۴
۲	۹/۶-۱۲/۲	۱۰/۹	۶	۵۸/۲۱
۳	۱۲/۲-۱۴/۸	۱۳/۵	۲	۰/۵۲
۴	۱۴/۸-۱۷/۴	۱۶/۱	۶	۲۶
۵	۱۷/۴-۲۰	۱۸/۷	۲	۸۷/۶۱
		$n=20$	$\Sigma f_i x_i = 28$	$\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 = 238$

ب.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n} = \frac{28 \cdot 10^0}{20} = 14/10 = 1.4$$

$$s^2 = \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{238}{20} = 11.9$$

$$s = \sqrt{11.9} = 3.45$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{3.45}{1.4} = 2.46$$

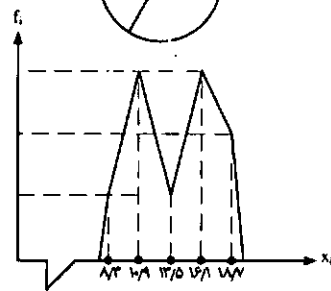
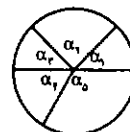
$$\alpha_1 = \frac{f_1}{n} \times 360^\circ = \frac{8}{20} \times 360^\circ = 144^\circ$$

$$\alpha_2 = \frac{f_2}{n} \times 360^\circ = \frac{10}{20} \times 360^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha_3 = \frac{f_3}{n} \times 360^\circ = \frac{13}{20} \times 360^\circ = 234^\circ$$

$$\alpha_4 = \frac{f_4}{n} \times 360^\circ = \frac{16}{20} \times 360^\circ = 288^\circ$$

$$\alpha_5 = \frac{f_5}{n} \times 360^\circ = \frac{18}{20} \times 360^\circ = 324^\circ$$



۲- الف.

$$n(A) = \binom{10}{2} \times \binom{10}{2} = 45 \times 45 = 2025$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2025}{4050} = \frac{1}{2}$$

$$n(B) = \binom{10}{1} \times \binom{10}{1} = 10 \times 10 = 100$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{100}{4050} = \frac{2}{81}$$

۳- فرد دارای شغل دولتی است:

فرد دارای تحصیل بالاتر از دیپلم است:

فرد دارای تحصیل کمتر از دیپلم است:

$$P(E_1) = 0.4, P(E_2|E_1) = 0.3$$

$$P(E_1) = 0.6, P(E_2|E_1) = 0.7$$

$$P(E) = P(E_1)P(E_2|E_1) + P(E_2)P(E_2|E_1)$$

$$P(E) = 0.4 \times 0.3 + 0.6 \times 0.7 = 0.58$$

$$\begin{cases} (1) y = mx + x \\ (2) y = mx - m + 2 \\ (3) y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow x = -m + 2$$

اگر $x = -m + 2$ را در معادله‌های (۲) و (۳) جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y = m(-m + 2) - m + 2 \\ y = 2(-m + 2) - 1 \end{cases} \Rightarrow y = -m^2 + m + 2$$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$n = 1: 1^r = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^r \Rightarrow 1 = 1$$

$$n = k: 1^r + 2^r + 3^r + \dots + k^r$$

$$= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^r = \frac{k^r(k+1)^r}{2^r}$$

$$n = k+1: 1^r + 2^r + 3^r + \dots + k^r + (k+1)^r$$

$$= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^r = \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

به‌دو طرف فرض استقراء $(k+1)^r$ را اضافه می‌کنیم:

$$1^r + 2^r + 3^r + \dots + k^r + (k+1)^r$$

$$= \frac{k^r(k+1)^r}{2^r} + (k+1)^r$$

$$= \frac{k^r(k+1)^r + 2^r(k+1)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k^r + 2^r)}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

$$= \frac{(k+1)^r(k+2)^r}{2^r}$$

بنابراین، معادله جدید با توجه به x_1, x_2 و x_3 به صورت زیر است:

$$x^2 - \left(\frac{b^2 - 2ac}{a}\right)x + \frac{c^2}{a} = 0$$

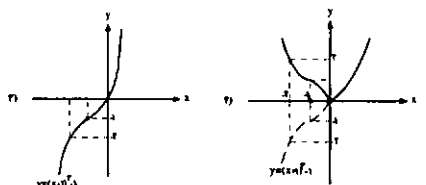
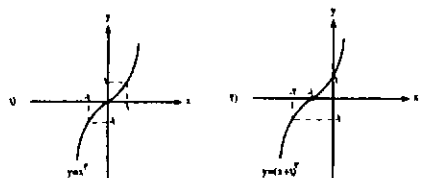
$$a^2 x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$$

$$y = (x^2 + 2x + 1) - 1$$

$$\Rightarrow y = (x+1)^2 - 1$$

نکته. برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = (x+1)^2 + \beta$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:۱. نمودار تابع با ضابطه $y = x^2$ را رسم می‌کنیم:۲. اگر $\alpha > 0$ آن‌گاه نمودار را به اندازه α واحد در جهت محور x هابه سمت چپ و اگر $\alpha < 0$ نمودار را به اندازه α واحد در جهت محور x ها

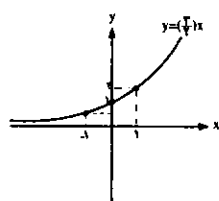
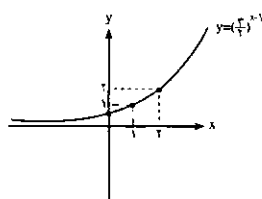
به سمت راست انتقال می‌دهیم.

۳. اگر $\beta > 0$ آن‌گاه نمودار حاصل از مرحله ۲ را در جهت محور y هابه اندازه β واحد به سمت بالا و اگر $\beta < 0$ آن‌گاه نمودار حاصل از مرحله۲ را در جهت محور y ها به اندازه β واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.۹- برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$ مراحل زیر را

انجام می‌دهیم:

۱- نمودار تابع با ضابطه $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ را به کمک نقطه بانی رسم می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -\infty & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} \\ \infty & \frac{1}{4} \end{array}$$

۲- برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$ کافی است نمودارمرحله ۱ را در جهت محور x ها به سمت راست یک واحد منتقل کنیم.

$$x_1 x_2 = \alpha^2 \beta^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{3x^7 + 2x^7}{-3x^7 + 9x^7 - 9x^7} \left| \frac{x^7 - 3x^7 + 3x^7}{3x + 9} \right.$$

$$\frac{9x^7 - 7x^7}{-9x^7 + 27x^7 - 27x^7}$$

$$\frac{2 \cdot x^7 - 27x^7}{2 \cdot x^7 - 27x^7}$$

$$y = 3x + 9$$

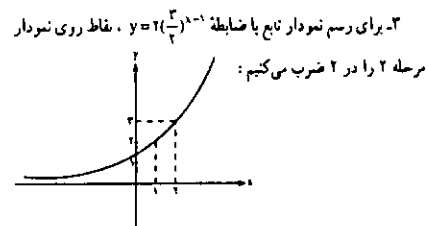
معادله مجانب مایل

۳- برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 2\left(\frac{x}{3}\right)^{3-1}$ ، نقاط روی نمودار

مجانِب قائم $\begin{cases} y \rightarrow \pm\infty \\ x^3 - 3x^2 + 3x = 0 \end{cases}$

معادله مجانب قائم $x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$

مجانِب مایل وجود دارد $\begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$



جوابهای تفریح اندیشه

جوابهای تفریح اندیشه
جوابهای تفریح اندیشه
جوابهای تفریح اندیشه
جوابهای تفریح اندیشه
جوابهای تفریح اندیشه

بنابراین بزرگترین مبلغ غیر قابل پرداخت، ۵۹ می‌باشد.

○ پاسخ ۳:

اشخاص مورد سؤال به چهار دسته تقسیم می‌شوند:

A: آنهایی که از محصول استفاده نمی‌کنند

B: عده‌ای که آن را فقط به صورت مایع به کار می‌برند

C: تعدادی که از محصول به هر دو صورت استفاده می‌کنند

D: عده‌ای که آن را فقط به صورت پودر به کار می‌برند

برحسب داده‌ها داریم:

$$\frac{1}{3} = A + B \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} = A + D$$

افراد مورد سؤال و $\frac{1}{5} = A$ کل افراد مورد سؤال و $C = 427$ از آنجا:

$$B = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} \quad \text{و} \quad D = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$A + B + D = \frac{427}{105} \Rightarrow C = \frac{61}{105}$$

$$427 \cdot \frac{61}{105} = \frac{427 \times 61}{105} = 245$$

پس تمام افراد مورد سؤال ۲۴۵ نفر می‌باشند.

پرداخت کنیم:

$$11, 22, 33, 44, 55, 66, \dots$$

با اضافه کردن یک سکه ۷ واحدی پرداختهای زیر ممکن است:

$$7, 18, 29, 40, 51, 62, 73, \dots$$

و با دو سکه ۷ واحدی:

$$14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, \dots$$

و غیره...

بالاخره با ده سکه ۷ واحدی:

$$70, 81, 92, \dots$$

و با ۱۱ سکه ۷ واحدی بخشی از حالت اول تکرار می‌شود، مانند:

$$77, 88, 99, \dots$$

عده‌های حاصل از این یازده دنباله کاملاً با هم متفاوتند زیرا دو عدد ۷ و ۱۱ نسبت به هم اول می‌باشند.

همچنین یازده دنباله بالا که قدر نسبتشان ۱۱ می‌باشد، همه عده‌های صحیح بعد از ۷۰ را دربردارند.

اما عده‌های یازدهمین دنباله در مکانهایی قرار می‌گیرند که به

وسیله ۱۰ دنباله قبلی خالی مانده‌اند، و اولین جای خالی نزدیک به

۷۰ که به وسیله این دنباله پر نمی‌شود ۱۱ واحد کمتر از ۷۰ یعنی

$$70 - 11 = 59 \text{ است.}$$

○ پاسخ ۱:

نمایندگان آسیا را در نظر می‌گیریم. چون مجموع نمایندگان دو قاره آمریکا و آسیا جمعاً ۶ نفر است، اگر به فرض آمریکا لااقل یک نماینده فرستاده باشد، آسیا می‌تواند ۴، ۳، ۲، ۱ یا ۰ نماینده داشته باشد. برای آسیا عدد ۳ غیرممکن است، چون در این صورت تعداد نمایندگان آمریکا و آسیا یکسان می‌شود. $3 + 3 = 6$ بنابراین چهار مورد ممکن است اتفاق بیفتد:

۱- اگر نماینده آسیا یک نفر باشد به ناچار نماینده آمریکا ۵ نفر و نماینده اروپا ۶ نفر خواهند بود، پس ۳ نفر برای آفریقا می‌ماند و این هم غیرممکن است زیرا یک قاره ۴ نماینده فرستاده است.

۲- اگر ۲ نفر از آسیا آمده باشند، از آمریکا ۴ نفر و از اروپا ۵ نفر باید شرکت کرده باشند و همین‌طور ۴ نفر از آفریقا که این هم غیرممکن است زیرا یک عدد دو بار تکرار می‌شود.

۳- اگر از آسیا ۵ نفر و از آمریکا یک نفر و از اروپا ۲ نفر و از آفریقا ۷ نفر باشند این امر غیرممکن است، چون نماینده هیچ قاره‌ای ۴ نفر نخواهد بود.

۴- بالاخره ۴ نفر از آسیا ۲ نفر از آمریکا ۳ نفر از اروپا و ۶ نفر از آفریقا باید آمده باشند که این، تنها مورد ممکن است.

○ پاسخ ۲:

با سکه ۱۱ واحدی می‌توانیم مقادیر زیر را به طور کامل

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

دایرةالمعارفهای هندسه

این سری کتاب مجموعه کاملی است از تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه که با بهره‌گیری از منابع متعدد ایرانی و خارجی تدوین و تألیف شده است.



دایرةالمعارف هندسه جلد ۵

مؤلف: محمد هاشم رستمی / ناشر: انتشارات مدرسه

جلد پنجم دایرةالمعارف هندسه رابطه‌های متری در مثلث، مثلث و دایره‌های: محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر است که ۵ بخش دارد: رابطه‌های متری در مثلث، رابطه‌های متری در مثلث و دایره محیطی، رابطه‌های متری در مثلث و دایره محاطی، رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی، رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های دیگر.



دایرةالمعارف هندسه جلد ۶

مؤلف: محمد هاشم رستمی / ناشر: انتشارات مدرسه

جلد ششم دایرةالمعارف هندسه، رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه شامل ۸ بخش است: مثلث متساوی الاضلاع، مثلث متساوی الساقین، مثلث قائم الزاویه، مثلث با زاویه منفرجه؛ و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر. مطالعه این کتابها را به همه دبیران، دانشجویان و دانش‌آموزان رشته ریاضی توصیه می‌کنیم.



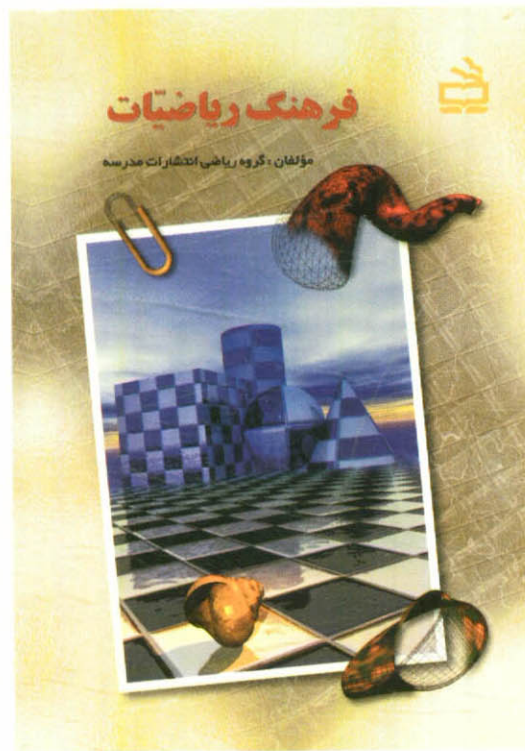
ورودی به نظریه اعداد

مؤلف: حمیدرضا امیری / ناشر: انتشارات مدرسه

این کتاب که بیست و سومین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است به موضوع نظریه اعداد پرداخته و این شاخه از ریاضیات که از قدیمی‌ترین شاخه‌های ریاضی محسوب می‌شود در این کتاب به شکل ساده و قابل فهمی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در این کتاب از مسائل حل شده کلیدی و دو مجموعه پرسشهای چهارگزینه‌ای با حل تشریحی استفاده شده است.

توجه: از سری کتابهای گروه ریاضی انتشارات مدرسه، کتابهای زیر در دست چاپ است:

- ۱- ورودی به آمار / دکتر عین‌الله پاشا - هندسه تحلیلی / محمد هاشم رستمی
- ۳- ترکیبیات / حمیدرضا امیری - میر شهرام صدر - سری کتابهای ریاضی از مدرسه تا دانشگاه
- ریاضی سال اول (۱ و ۲) / ریاضی سال دوم (۳ و ۴) / جبر و احتمال / حسابان ۱ و ۲ / ریاضی ۵ / ریاضی عمومی ۱ و ۲ / پیش‌دانشگاهی / حساب دیفرانسیل ۱ و ۲ / پیش‌دانشگاهی / ریاضیات گسسته / پیش‌دانشگاهی / هندسه تحلیلی و جبر خطی / پیش‌دانشگاهی



انتشارات مدرسه منتشر کرده است

فرهنگ ریاضیات

دبیرستانی

شامل:

- کلیه تعریف ها، قضیه ها، اصطلاحات و واژگان ریاضی با توضیح کامل و مثال
- فرهنگ واژگان انگلیسی - فارسی و فارسی - انگلیسی
- مقدمه ای در فلسفه ریاضی
- زندگی نامه ریاضیدانان
- هر تعریف یا قضیه یا اصطلاح را به راحتی می توانید بر اساس حروف الفبای فارسی بیابید و اطلاعات دقیق آن را به همراه مثال مطالعه کنید.



کد ۸۷۴/۱



انتشارات مدرسه