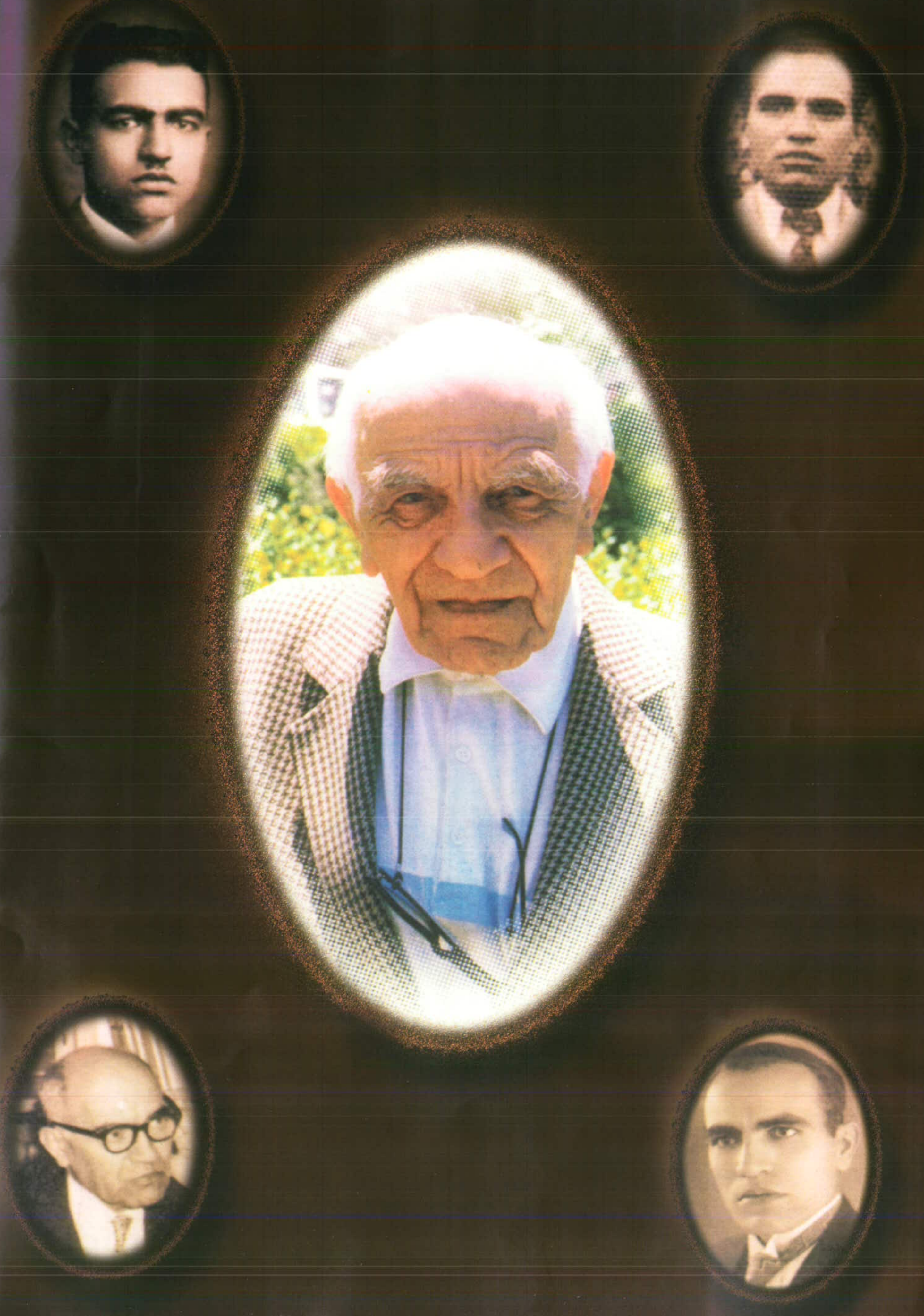
رشد آموزش ریاضی

سال چهاردهم / شماره ۵۲ / تابستان ۱۳۷۷ / ۲۰۰ تومان



بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی

شماره مسلسل ۵۲ / سال تحصیلی ۷۸ – ۱۳۷۷ / تابستان ۱۳۷۷

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

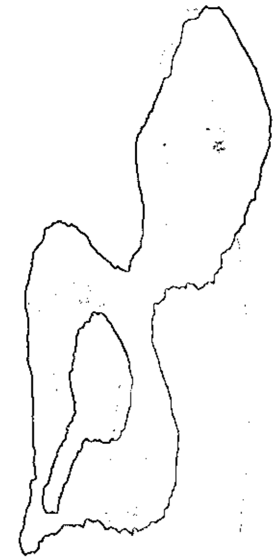
دفتر انتشارات کمک آموزشی

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۸ – ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین: ۹ – ۸۸۳۱۱۶۰ (داخلی ۴۳۲)
تلفن دفتر مجله: ۸۳۵۲۷۹

چاپ: شرکت افست (سهامی خاص)

- مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته ها و حاصل تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، بویژه معلمان مقاطع مختلف را، در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد.
- مطالب باید یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر، پیوست باید در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله باید روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- اصل مقاله های ترجمه شده باید به پیوست، ارسال شود.
- در متنهای ارسالی باید تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویسها و منابع باید کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.
- مجله در رد، قبول، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مختار است.
- آرای مندرج در مقاله ها، ضرورتاً مبین نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله های دریافتی در هر صورت (رد یا قبول) بازگشت داده نمی شود.

یادداشت سردبیر



تیم ایران در سی و نهمین المپیاد بین المللی ریاضی که در کشور تایوان برگزار گردید، در بین هفتاد و شش کشور شرکت کننده مقام اول را هم به صورت تیمی و هم به صورت انفرادی کسب کرد. این موفقیت برای هر ایرانی غرورآفرین و شادی بخش بود.

پیروزی تیم المپیاد ریاضی در دلهای بعضی آرزوهای بسیاری را پروراند و در دلهای بعضی دیگر، دغدغه و نگرانی ایجاد کرد. دستهٔ اول سرمست از این پیروزی، آرزو می کردند بتوان این موفقیت را تبدیل به یک الگوی عمومی کرد و چشم خود را به روی کمبودهای آموزش ریاضی در دورهٔ عمومی ـ حداقل برای مدتی کوتاه ـ بست! و گروه دوم با نگاه بدبینانه، گناه عدم موفقیت ریاضی دانش آموزان در آموزش عمومی را به گردن سرمایه گذاری برای پرورش این ستاره ها انداختند!؟

در چند شمارهٔ گذشته، در رابطه با عملکرد ریاضی دانش آموزان ایرانی در سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم خاطرنشان کردیم که «موفقیت عزیزان، در المپیادهای ریاضی نشان می دهد توانائیم و عدم موفقیت دانش آموزانمان در تیمز هشدار می دهد که ناتوانیم.» با این پیروزی جدید، مورد اول بیشتر تقویت شده است. امّا چه باید کرد؟ آیا می توان ناتوانائی های مورد دوم را با این توانائی ها جبران کرد؟

نه می توان تنها به وجود چند ستارهٔ درخشان دلخوش بود و توقّع داشت که نور و گرمای آنها روشنی بخش تمام جامعه باشد و تمام کمبودها را جبران کند و نه می توان تصوّر جامعه ای بدون ستاره را داشت!؟ در حالی که جامعهٔ آموزشی ـ ریاضی موظف به حمایت از نخبگان بالقوه و بالفعل است، مسئولیّت اعتلای آموزش ریاضی در سطح عمومی را نیز عهده دار می باشد. عمومی کردن ریاضی که یکی از شعارهای سال جهانی ریاضیات است، از طریق اعتلای آموزش ریاضی در دورهٔ عمومی امکان پذیر است. اگر الگوهای موفّق با دقّت و درایت و توانمندی علمی ـ پژوهشی تجزیه و تحلیل شوند، می توان از آنها در پیدا کردن رویکردهای مناسب به یادگیری ریاضی استفاده برد. امّا جان کلام این است که به جای *مغرور شدن یا احساس ضعف کردن*، بهتر است که برای انجام پژوهشهای اصیل در جهت حلّ مشکلات آموزش ریاضی در دورهٔ عمومی قدم پیش گذاریم! و یکی از مهمترین قدمهائی که می توان و می باید برداشت، تربیت آموزشگران ریاضی و معلم ـ محقّق در سطح وسیع است. جامعهٔ آموزشی ـ ریاضی ایران گاهی بر اساس باورها و پیشداوری ها و گاهی بر اساس داده های حاصل از تجربه های شخصی، با نظرات افراطی ـ تفریطی در مورد وضعیت ریاضی در آموزش عمومی ایران به قضاوت می نشیند و بسیاری از اوقات، نتیجهٔ چنین قضاوتی یا ***آسوده خاطری بی دلیل*** و یا ***ناامیدی نگران کننده*** است.

آموزشگران ریاضی مسئولیت انجام مطالعات بنیادی و کاربردی را با هدف اعتلای آموزش ریاضی دورهٔ عمومی عهده دار خواهند بود. آنها می توانند جامعهٔ آموزشی را آگاه کنند که دوران یکسان سازی آموزشی به سر آمده است و باید با توجّه به گوناگونی و تفاوتهای فردی یادگیرندگان و با درنظر گرفتن هدفهای وسیعتر آموزش عمومی، به تقویت خلاقیتها و نوآوری ها در یادگیرندگان ریاضی پرداخت. به ثمر رسیدن چنین تلاشی نیازمند تربیت نیروی انسانی در این زمینه است تا آنها بتوانند با استفاده از یافته های پژوهشی بین المللی و ملّی، در تهیّه و تنظیم برنامهٔ درسی، انتخاب محتوا، روشهای تدریس و روشهای ارزشیابی ریاضی، به تحقّق هدف عمومی کردن ریاضی جامهٔ عمل بپوشانند.

مطمئناً هیچ زمانی، جامعه سراسر ستاره نخواهد شد ـ که نیازی هم به آن نیست! امّا با همگانی کردن ریاضی به طور اصولی و ایجاد انگیزه و اعتماد به نفس در یادگیرندگان ریاضی و از طریق ایجاد تحوّل در برنامهٔ درسی، روشهای ارزشیابی و آموزشهای قبل و ضمن خدمت معلّمان ریاضی، می توان جامعه ای از نظر ریاضی توانا تربیت کرد که نه تنها نخبگان را مانع رشد خود نخواهد دید بلکه ظرفیتهای بهره مندی از توانائیهای این ستاره ها را نیز در خود بالا خواهد برد.

به امید آنروز!

اعطای دکترای افتخاری ریاضی به استاد بیرشک و اولین همایش انجمنهای علمی

گزارشگر: زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

به پیشنهاد دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی و تصویب هیأت رئیسهٔ دانشگاه، طی مراسمی که از ساعت ۸ تا ۱۰ صبح روز ۷۷/۴/۳ در سالن ابوریحان بیرونی دانشگاه برگزار گردید، دکترای افتخاری ریاضی به استاد احمد بیرشک اعطا شد. این مراسم با حضور جناب آقای دکتر حبیبی معاون اول ریاست محترم جمهوری، جناب آقای دکتر معین وزیر فرهنگ و آموزش عالی و معاونان ایشان، اعضای شورایعالی انقلاب فرهنگی، چند تن از نمایندگان مجلس شورای اسلامی، بعضی از رؤسا و استادهای دانشگاهها و مدعوین انجمنهای علمی ایران تشکیل شد. پس از تلاوت آیاتی از قرآن مجید و پخش سرود جمهوری اسلامی ایران، جناب آقای دکتر ندیمی ریاست محترم دانشگاه شهید بهشتی، پس از خیرمقدم به مدعوین و تسلیت رحلت حضرت ختمی مرتبت محمد مصطفی(ص) و امام حسن مجتبی(ع) و امام رضا(ع)، ضمن تجلیل از مقام علمی استاد بیرشک، به جنبه های خودانگیختگی و خودساختگی استاد بیرشک اشاره کردند و تأکید نمودند که این ویژگی ها، انگیزه بخش یادگیری جوانهای ایران است. آقای دکتر ندیمی به کار عظیم و ماندنی *گاهشماری* استاد بیرشک، به *زیادت طلبی علمی* و *بسنده خواهی* ایشان در دنیای مادّی اشاره کردند و در ادامه متذکّر شدند که «جامعهٔ علمی ما دوران سختی از بحران هویت را می گذراند و بر استادهای خیراندیش و آگاه ما لازم است که در هویت یابی جامعه، منشاء اثرات مهّم باشند. علم چاره اندیش و چاره ساز برای هویت یابی جامعه و سپس تصمیم سازی و تصمیم گیری برای جامعه از ضرورتهای زمان ماست.» ایشان در خاتمه، تقارن این مراسم را با نخستین همایش انجمنهای علمی ایران در جهت کمک به هویت یابی جامعه به فال نیک گرفتند.

بعد از آقای دکتر ندیمی، آقای دکتر فرهودی، معاون محترم پژوهشی وزارت فرهنگ و آموزش عالی، پس از خیر مقدم به بزرگان شرکت کننده در این مراسم، به ویژگیهای علمی قرن بیستم اشاره کردند. ایشان در ادامهٔ سخنان خود اشاره نمودند که «رشد علمی در قرن بیستم به اندازهٔ رشد علمی در طول تاریخ بوده است و نقش انجمنهای علمی، در ارتباط آزاد اندیشه های علمی و تخصّصی، بستری مناسب برای شناخت استعدادهای بالقوهٔ جامعه و شرکت در برنامه های توسعهٔ ملّی بسیار تعیین کننده می باشد.» ایشان سپس با اشاره به تاریخ تشکیل انجمنهای علمی در اواخر قرن هفدهم میلادی و گسترش انجمنهای علمی ـ تخصّصی در زمینه های مختلف در سراسر دنیا که بیش از ۳۰۰٫۰۰۰ عضو دارند، به تشریح دوره های سه گانهٔ تشکیل انجمنهای علمی در ایران پرداختند. به گفتهٔ دکتر فرهودی، اولین دورهٔ تشکیل انجمنهای علمی در ایران با «انجمن فیزیک و شیمی ایران» در سال ۱۳۱۰ در گروه فیزیک و شیمی دانشسرایعالی تهران آغاز شد. سپس «کانون مهندسین ایران در سال ۱۳۲۰ شکل گرفت و پس از آن، انجمنهای وکلای ایران و پزشکی به ترتیب تأسیس شدند. دومین دوره به فاصلهٔ سالهای ۱۳۳۰ تا ۱۳۵۷ برمی گردد که در آن فاصله، ۱۳ انجمن علمی در گروه علوم پایه تشکیل شدند. از سال ۱۳۶۲ که صدور مجوّز برای تشکیل انجمنها به وزارت علوم و آموزش عالی محول گردید دورهٔ سوم تشکیل انجمنهای علمی در ایران آغاز شد. و در سال ۱۳۶۶، آئین نامهٔ تشکیل انجمنها

خوشه‌چین خرمن فضل بزرگان بوده‌ام

به تصویب رسید. این آئین نامه در سال ۱۳۷۰ مجدداً بازبینی شد و مسؤلیت صدور مجوز به عهدهٔ وزارتخانه های فرهنگ و آموزش عالی، علوم پزشکی و ارشاد اسلامی محوّل گردید. تا به حال ۶۷ انجمن علمی توسط وزارت فرهنگ و آموزش عالی مجوّز تشکیل گرفته اند. آقای دکتر فرهودی، مهم ترین فعالیتهای انجمنهای علمی از سال ۱۳۶۲ به بعد را چنین خلاصه کردند:

- مشاوره با دولت در زمینه های تخصّصی؛
- انجام پروژه ها؛
- رابطه با صنعت؛
- نشر مجله ها و بولتن ها
- برقراری ارتباط با مجامع علمی بین المللی؛
- ایفای نقش در آموزشهای دبیرستانی، دانشگاهی، و فنّی- حرفه ای.

آقای دکتر فرهودی تأکید کردند که انجمنهای علمی باید نقش برجسته تری در استمرار حیات جامعهٔ علمی ایفا کنند. ایشان سپس به طور خلاصه به مهمترین موانع رشد و توسعهٔ انجمنهای علمی از جمله موارد زیر اشاره کردند:

- ضعف مالی انجمنهای علمی؛
- عدم وجود دبیرخانهٔ مشترک برای انجمنهای علمی؛
- نبود بستر قانونی برای تسهیل فعالیتهای انجمنهای علمی؛
- و بالاخره عدم سهولت برقراری ارتباط با انجمنهای علمی بین المللی.

آقای دکتر فرهودی در خاتمه، حضور آقای دکتر حبیبی را مغتنم شمرده و از ایشان درخواست کردند که برای ایجاد بستری مناسب در جهت انجام فعالیتهای انجمنهای علمی تلاش بیشتری صورت گیرد.

سخنران سوم آقای دکتر معین وزیر محترم فرهنگ و آموزش عالی بودند. ایشان پس از برشمردن ویژگیهای ایام رحلت پیامبر گرامی اسلام و دو فرزند همام پیامبر، به صبر قهرمانانهٔ امام حسن مجتبی(ع) و نکته های آموزندهٔ فراوان آن اشاره کردند و یادآور شدند که بر خود لازم می دانند از دو معلّم بزرگوار تاریخ ایران دکتر علی شریعتی و شهید دکتر مصطفی چمران یادی نمایند. ایشان سپس با اشاره به حضور با معنای مردم در انتخابات ریاست جمهوری، گسترش مشارکتهای مردمی و نهادینه کردن آنها به خصوص در محیطهای علمی و دانشگاهی را هم آرمانی و هم ممکن و شدنی خواندند.

آقای دکتر معین با توجه به ویژگیهای قرن بیستم که دقت و سرعت می باشند، خاطرنشان ساختند که توسعهٔ علمی به سرمایه و برنامه و علاوه بر اینها، به عزم و اراده نیاز دارد، همچنان که استعدادهای علمی فراوان در جامعه حکایت از توانائیهای بالقوه در جامعه دارد. آقای دکتر معین انقلاب اسلامی را دعوت در بازگشت به خویشتن خواندند و تأکید کردند که برای نهادینه کردن مشارکت، خلاقیت و نوآوری، باید از سطح نوآوری های پراکنده به سطح نوآوری های خودانگیخته و سامان یافته حرکت کرد و در این راستا، فرهنگ پژوهشگری، فرهنگ با مبنا و فرهنگ با هم اندیشیدن باید جایگزین سلیقه های فردی شوند. ایشان سپس به نقش انجمنهای علمی و رسالت آنها در ایجاد چنین فرهنگی پرداختند و گفتند «انجمنهای علمی خودانگیخته مناسب ترین مصداق تحقّق جامعهٔ مدنی و محلّ مناسبی برای گفتمان هستند.» وزیر فرهنگ و آموزش عالی، تقویت و تعمیق کار انجمنهای علمی را در این مرحلهٔ حسّاس از حیات مملکت، از وظایف مهّم وزارتخانهٔ متبوع دانست و این تقویت و تعمیق را گامی در جهت پاسخگوئی به گفتمانهای جامعهٔ مدنی و تقویت بنیه های علمی کشور دانست و بر حمایت از تخصّصی تر شدن انجمنهای علمی و پرهیز از هر نوع سختگیریهای غیرمنطقی تأکید کرد.

به گفتهٔ آقای دکتر معین، «فرهنگستان علوم جهان اسلام می تواند کانونی برای انتقال تجارب نو در زمینه های علمی و فن آوری باشد» و در این راستا، بزرگ داشتن قدیمان علوم و هموار کردن راه برای پژوهشگران جوان هر دو از واجبات است. ایشان سپس با اشاره به زندگی پربار استاد بیرشک، بزرگترین اثر او را زندگی عاشقانه اش در راه پاسداری از علم و هنر این مملکت دانست و در خاتمه، از دانشگاه شهید بهشتی برای برگزاری مراسم با شکوه ارج گذاری به پیشکسوتان علوم تشکر کرد.

در دنبالهٔ مراسم، آقای دکتر حبیبی، معاون اوّل ریاست محترم جمهوری پس از اشارهٔ به رحلت پیامبر اسلام(ص) و امام حسن(ع) و امام رضا(ع)، در دو زمینهٔ انجمنهای علمی و ادای احترام به استاد بیرشک به صحبت پرداختند. ایشان به دنبال صحبتهای آقای دکتر فرهودی راجع به تاریخ پیدایش انجمنهای علمی، به دلیل ارتباطی که انجمنهای علمی می توانند با جامعهٔ علمی

خوشه‌چین خرمن فضل بزرگان بوده‌ام

داشته باشند، نقش این انجمنها را برجسته خواند و توجّه بیشتر دانشگاههای کشور و آموزش عالی را به این مهّم جلب کرد. ایشان ضمن ضرورت ایجاد روحیهٔ کارهای گروهی، از جمله وظایف انجمنهای علمی را بررسی وضعیّت رشته های علمی در جهان، شناسائی تنگناهای علمی در رشته های مختلف و ایفای نقش مشاوران برجسته برای دانشگاهها، شورایعالی انقلاب فرهنگی و مراجع تصمیم گیری، دستیابی سریع به اطّلاعات تازه و اشاعهٔ آنها و توجه به تقدّم تحقیق بر آموزش و استفاده از نتایج پژوهشی در آموزش اشاره کرد. در قسمت دوم، آقای دکتر حبیبی استاد احمد بیرشک را جامع جمیع فعالیّتهائی که یک انجمن علمی باید انجام بدهد دانست. ایشان اشاره کردند «استاد بیرشک، فعالیتهای گسترده ای را یک نفری شروع کردند و سپس تعداد زیادی دور شمع وجود ایشان جمع شدند و کارهای ارزنده ای ارائه کردند. ایشان در ادامه چنین گفتند: «تجلیل از هر دانشمندی و در هر کشوری، به واقع هیچ چیزی به آن دانشمند اضافه نمی کند زیرا دانشمند چیزی جز اندیشهٔ یافتن حقیقت ندارد و تاریخ ثابت کرده است که در این راه، آب و نانی هم وجود ندارد! البتّه هیچ اشکالی ندارد که برای این کار، دستمزد مناسبی دریافت شود. دستمزد دیگر شهرت است که دانشمند از آن هم کمتر برخوردار می شود و دانشمندان معمولاً گمنام هم هستند. پس دو انگیزهٔ مادّی یکی مال و منال و دیگری شهرت، برای دانشمند وجود ندارد.»

آقای دکتر حبیبی خاطرنشان ساختند که این گونه تجلیلها در اواخر فعالیّت علمی، به شخص چیزی نمی رساند امّا رفتار و نتایج علمی را به جوانترها می آموزد. ایشان تأکید کردند که در جمهوری اسلامی ایران، باید کاری کرد تا دانشمندان در فاصله ای از حیات علمی خود مورد تجلیل قرار گیرند که جوانترها از رفتار علمی آنها بیشتر انگیزه بگیرند.

آقای دکتر حبیبی استاد بیرشک را از این مقوله مستثنی کردند و گفتند «ایشان هنوز با نشاط فعّالیت می کنند و هرکس با استاد بیرشک حرکت کند، وسط راه می نشیند و دیگری مشعل را برمی دارد تا همراه ایشان بدود!» ایشان این تجلیل را جهت ارائهٔ الگو به جامعه گرامی داشتند و گفتند «یکی از راههای خوب جلوگیری از تهاجم فرهنگی عدم احساس تنگ دستی، کم بینی و حقارت است که معرّفی الگوهای برجسته مانع ایجاد چنین احساسهائی می شود. اشکال این است که دانشمند داریم و نمی دانیم که داریم!» به نظر آقای دکتر حبیبی، نحوه و زمان تجلیلها در آینده باید به گونه ای باشد تا جامعه بتواند از این بزرگان بهرهٔ بیشتری ببرد و شاید زمان مناسب، حول و حوش خدمت رسمی آنها باشد.

آقای دکتر حبیبی پیشنهاد کردند که انجمنهای علمی افرادی را که به مقام الگوئی رسیده اند معرفی کنند و مقالات پژوهشی همکاران یک استاد را به صورت کتاب و به عنوان یادنامهٔ آن استاد چاپ کنند که گاهی این یادنامه ها، از مجلات علمی هم باارزش تر هستند. ایشان در خاتمه، تجلیل از استاد بیرشک را از جمله ارزنده ترین کارهای دستگاههای علمی خواندند و ضمن آرزوی سلامتی و نشاط علمی برای استاد بیرشک، سایر دانشگاهها را به انجام فعالیّتهای مشابه دعوت کردند.

پس از این سخنان، متنی به عنوان زندگی نامهٔ استاد بیرشک توسط آقای دکتر ذکائی عضو هیأت علمی دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی قرائت شد و ضمن آن، به ویژگیهای متفاوت استاد از جمله ویژگیهای علمی، ایمان، دین باوری، وطن دوستی و صداقت ایشان اشاره شد. آقای دکتر ذکائی گفتند که بیرشک اسم با مسمّائی است و زیبندهٔ شخصیّت استاد است. ایشان سپس به اختصار، جلوه هائی از زندگی استاد بیرشک را بدینگونه برشمردند:

«هر روز که از عمر پربرکت استاد می گذرد، خود را متعهّدتر به جامعه می داند. به قول خودشان، کار-درمانی می کنند. بیمارند امّا تظاهر به سلامت می کنند. روزانه بین ۱۲ تا ۱۴ ساعت کار می کنند و باز می گویند «تنبل شده ام! نمی توانم درست کار کنم!»

استاد بیرشک در ۴ بهمن ۱۲۸۵ در تهران دیده به جهان گشودند. سرمایهٔ ایشان علاقه به مملکت، علاقه به مردم و درستکاری بود.

- در سال ۱۳۱۹ نخستین کتاب هندسهٔ ایشان چاپ شد.

- در سال ۱۳۳۶، ترجمهٔ کتاب تاریخ علم توسط ایشان جایزهٔ بهترین کتاب سال را نصیب خود کرد.

- استاد در سال ۱۳۳۸، «انجمن ملی مدارس هماهنگ» را پایه گذاری کردند.

خوشه‌چین خرمن فضل بزرگان بوده‌ام

ـ استاد در سال ۱۳۴۲ گفتند «دستگاه کنونی تعلیم و تربیت به فرد وابسته است و این شیوه، آموزش مملکت را بـه مـشـکـل انداخته است.»

پس از آن، ایشان بـه تـأسـیـس **گروه فرهنگی هدف** در تهران پـرداخـتـنـد کـه دانش آموختگان با فرهنگ و بـا تـوانـش، بهترین تأئید بر موفقیّت فعالیتهای این گـروه فرهنگی غیر وابسته به فرد بودند.

ـ «بنیاد دانشـنـامهٔ فارسی» در سـال ۱۳۷۰، رسماً کار خود را شروع کرد. استاد در سال ۱۳۷۲، به عنوان استاد نـمـونـه از ریاست جمهـوری وقـت آقـای هـاشـمـی رفسنجانی، لوح تقدیر دریافت کردند.

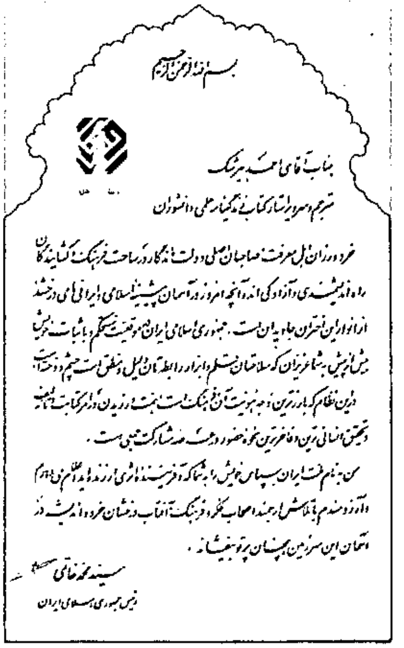
ـ استاد بیرشـک بـیـش از ۱۲۰ کتـاب تألیفی و ترجمه ای دارند که تا به حال انجام داده اند، قرآن چهار زبانی است که به زبانهای انگلیسی، فرانسه و فارسی تـرجـمـه شـده است.

در ادامه، مراسـم اعـطـای دکـتـرای افتخاری ریاضی به استاد بیرشک با حضـور آقای دکتر حبیبی، آقای دکتر معیـن، آقـای دکتر ندیمی، آقای دکتر گرجی استاد برجستهٔ آموزش عالی کشور و آقای دکتر شریعتمداری برگزار شد. در این لوح آمده بود:

«طبق مصوبهٔ ۱۳۷۷/۳/۱۷، دانشگاه شهید بهشتی با مباهات تمام، درجهٔ دکترای افتخاری ریاضیّات را به شما اهدا می کند.»

استـاد لـوح را بـوسـیـدنـد. سـپـس شرکت کنندگان به پا خاسته و بیش از ۵ دقیقه برای ایـشـان دسـت زدنـد و احـسـاسـات قدرشناسانهٔ خود را ابراز نمودند. آنگاه لوح تقدیری از طرف شرکت کتابیران به اسـتـاد بیرشک تقدیم شد و کتاب «بیرشک نامه» نیز که به همّت دانشگاه شهید بهشتی تهیّه شده بود، توسط ریاست محترم دانشگاه به استاد اهدا شد.

در خاتمه، استاد بیـرشـک بـا وجـود مشکلـی کـه چـنـد مـاه قـبـل بـه خـاطـر زمین خوردگی پیدا کرده بودند، ایستاده بـه سخنرانی پرداختند که خلاصـهٔ آن در اختیار خوانندگان عزیز قرار می گیرد:



بسم الله الرحمن الرحیم

جناب آقای احمد بیرشک

مترجم و صورتگر آثار کتاب ماندگار علمی دانشوران

خرد ورزان اهل معرفت، صاحبان اصلی دولت ماندگار در ساحت فرهنگ و گشایندگان راه اندیشمندی و آزادگی اند و آنچه امروز در آسمان پیشینهٔ اسلامی ایرانی ما می درخشد از انوار این اختران جاویدان است. جمهوری اسلامی ایران موقعیت مستحکم و با ثبات خویش را بیش از پیش به شما عزیزان که سلاحتان قلم و ابزار رابطه تان دلیل و منطق است [illegible] و در این نظام که بارزترین وجه هویت آن فرهنگ است همت ورزیدن در امر کتابت، ترجمه و تحقیق انسانی ترین و فاخرترین نحوهٔ حضور و عرصهٔ مشارکت مدنی است.

من به نام ملت ایران سپاس خویش را به شما که آفرینندهٔ آثاری ارزنده اید اعلام می دارم و آرزومندم با تلاش ارجمند اصحاب فکر و فرهنگ، آفتاب درخشان خرد و اندیشه در آسمان این سرزمین همچنان پرتو افشاند.

سید محمد خاتمی

رئیس جمهوری اسلامی ایران

به نام خدا. زبانم از بیان مکنونات دلم در محضر کسانـی کـه ایـن بـزرگـواری را فرموده اند، عاجز است. اجازه می خواهـم خود را به حضار محترم مـعرّفی کنم! امّا از زبان سعدی بزرگترین شاعر دوران:

گلی خوشبوی در حمّام روزی
رسید از دست محبوبی به دستم
بدو گفتم که مشکی یا عبیری
که از بوی دلاویز تو مستم
بگفتا من گِلی ناچیز بودم
ولیکن مدّتی با گُل نشستم
کمال همنشین در من اثر کرد
وگرنه من همان خاکم که هستم

دو فرزندم در همین دانشگاه به درجات عالیه رسیدند. دانشگاهی که سرلوحهٔ آن «زندگی یعنی امید به آینده» بود. «من که باشم که بر این خاطرهای عاطر گذرم!؟» دانشگاه چیست و وظایف آن کدام است؟ دانشگاه بزرگترین هدیه ای است که جوامع به تمدّن تقدیم داشته اند. متأسفانه مادیّات در دانشگاهها قوی تر از معنویات هستند.

علم فی نفسه خشک است. جوان وقتی پخته شد قدم در دانشگـاه مـی گـذارد. آیـا استادها در پرورش آنها موفق هستند؟ اجازه بدهید نظر خودم را بگویم! آنها موفّق نیستند زیرا معنویات در دانشگاه نیست. چـگـونـه می توان معنویات را وارد دانشگاهها کـرد؟ دانشگاهها باید به رنگی درآیند که وقتی جوان از دانشگاه رفت، آن رنگها را به خود گرفته باشد و متخلّق به صفات نیکو شود.

رساله های ریاضی و نجومی ماهانی

نویسنده: یان پ. هوخندایک
دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه اوترخت (هلند)
مترجم: محمّد باقری ـ بنیاد دائرة المعارف اسلامی

مقدمه

دانشمندان ایرانی در میراث ریاضیات و نجوم دورهٔ اسلامی سهم مهمی داشته اند. طی سده های پیش از ظهور اسلام، ایران از مراکز علم نجوم بود. در قرن دوم هجری که خلفای اسلامی به علوم توجه کردند، نجوم ایرانی هنوز زنده بود و سرانجام نجـوم دورهٔ اسلامی شد. در حوالی سال ۱۶۰ هجری منجمان هندی به دربار خلفا دعوت شدند و در حوالی ۱۷۵ هجری نخستین متنهای ریاضی و نجـومـی یونان به عربی ترجمه شد. به هر حال، نقش هندیان و یونانیان نباید موجب شود که ریشه های ایرانی نجـوم دورهٔ اسلامی را از نظر دور بداریم.[1]

پس از قرن اول هجری، دانشمندان ایرانی تبار در سایر نواحـی جهان اسلام به کار پرداختند؛ بنابراین، تاریخ ریاضیات و نجوم ایران را نمی توان از تاریخ ریاضیات و نجوم کلِّ جهان اسلام جدا دانست. طبق برآورد من، بیش از یک سوم کلِّ دستاوردهای دانشمندان دورهٔ اسلامی مرهون ریاضیدانان و منجمان ایرانی است.

برخی از آثار منجمان و ریاضیدانان مهم ایرانی به خوبی شناخته شده است. اما بسیاری از این آثار هنوز مطالعه نشـده و دوره هـای عظیمی از تاریخ بویژه، دورهٔ پیش از اسلام و سه قرن اول پس از ظهور اسلام همچنان در پردهٔ ابهام باقی مانده است. از منابع نجوم ایرانی پیش از اسلام تقریباً هیچ چیز باقی نمانده است و بسیاری از جزئیات آنها را باید به کمک زایچه هایی که در قرن سوم هجری طبق روشهای کهن ایرانی محاسبه شده اند بازسازی کرد. گرچه تاکنون ریاضیدانان و تاریخنگاران معتبر کارهای زیادی در این زمینه انجام داده اند[2]، به هیچ وجه کار به پایان نرسیده است. به علاوه، بیشتر آثار ریاضیدانان و منجمان آغاز دورهٔ اسلامی گم شده است. ولی منابع زیادی از این دوره به صورت نسخه های خطی عربی بر جا مانده است. بنابراین، اطلاعات زیادی از این دوره قابل دستیابی است. پژوهشگران معاصر کارهای زیادی در این باره کرده اند و بسیار کارها نیز باقی مانده است. بسیاری از منابع خطی منتشر نشده اند و در سراسر جهان پراکنده اند. برای بررسی جدی علوم در زمینهٔ تاریخی و فرهنگی خود، نخست باید به این متنها دست یافت. پس تاریخ ریاضیات و نجوم سه قـرن نخست دورهٔ اسلامی تا حد زیادی دست نخورده مانده است.

در این گفتار می خواهم به عنوان نمونه ای از این موارد، آثار یک ریاضیدان و منجم ایرانی از اوایـل دورهٔ اسلامی، یعنی ابو عبداللـه محمد بن عیسی ماهانی را که اهل ماهان در نزدیکی کـرمـان بـود، بررسی کنم. به پیشنهاد آقای باقری از تهران، ویرایشی از متن عربی آثار ماهانی را همراه با ترجمهٔ انگلیسی آنها فراهم کرده ام و امیدوارم که این ویرایش زمانی به فارسی ترجمه و در ایران منتشر شود. البتـه ماهانی تنها یکی از صدها دانشمند است و این ویرایش کار بـسـیـار کوچکی در زمینهٔ تاریخ کلی ریاضیات و نجوم جهان اسلام اسـت. در اینجا مروری بر آثار ماهانی خواهم کرد و نقش او را در تـاریـخ ریاضیات و نجوم اوایـل دورهٔ اسلامی نشان خواهم داد. ماتـیـاس ویسر، دانشجوی من در اوترخت، کارگاهی را تنظیم کرده است که نشان می دهد چگونه می توان از این مطالب در مدرسه استفاده کرد.

به نظر من تاریخ ریاضیات رشته ای صرفاً دانشگاهی نیست، بلکه برای مقاصد دیگری نیز به کار می آید. می توان به دانشجویان و دانش آموزان رابطهٔ بین آنچه را که می آموزند و آثار دانشمندان قرنهای گذشته را نشان داد. به این ترتیب، آنها از میراث فرهنگی و معنوی خود در علوم آگاهی خواهند یافت.

نخستین سؤال ما این است: ماهانی در چه زمانی می زیست؟[3] در منابع موجود پاسخی نمی توان یافت. تنها به مجموعه ای از نه رصد نجومی ماهانی دسترسی داریم که از طریق ابن یونس، منجم مصری (درگذشتهٔ ۳۹۹ هجری)، به ما رسید است. ماهانی این رصدها را بین سالهای ۲۳۹ و ۲۵۲ هجری برای آزمودن زیج ممتحن و پیشنهاد اصلاحات در آن انجام داده است. زیج ممتحن مجموعه ای از جدولهای نجومی بود که در حدود سال ۲۱۰ هجری در بغداد به خواست خلیفه مأمون فراهم شد. این جدولها مبتنی بر نظریهٔ نجومی بطلمیوس و مشخصه های جدید حاصل از رصدهای جدید انجام شده در بغداد بود.[4]

سؤال بعدی این است: ماهانی در کجا می زیست؟ ابن قفطی زندگینامه نویس (قرن هفتم هجری) می گوید که ماهانی در بغداد به سر می برد. درستی این گفته را می توان بر اساس رصدهای نجومی او نشان داد. از مقایسهٔ زمانهای خسوف و کسوف که ماهانی ثبت کرده است با محاسبات امروزی، می توان نشان داد که او در محلی حدود ۴۵ درجه در شرق گرینویچ رصد می کرده است. ماهانی اشاره هایی به ارتفاع ستارگان بالای افق و محاسبات به اسطرلاب دارد. با استفاده از این اطلاعات می توان نشان داد که عرض جغرافیایی محل زندگی او بین ۳۲ و ۳۶ درجه بوده است. پس احتمالاً این رصدها همان طور که ابن قفطی گفته در بغداد انجام شده است. در حال حاضر از زندگی ابن قفطی بیش از این اطلاعی در دست نداریم. می توان امیدوار بود که در آینده در منابع منتشر نشده اطلاعات بیشتری یافته شود.

ماهانی در دوره ای می زیست که چه از لحاظ تاریخ نجوم و چه از لحاظ تاریخ ریاضیات قابل توجه است. برخی از آثار مهم ریاضیات یونان (مثل اصول اقلیدس و مجسطی بطلمیوس) تازه به عربی ترجمه شده بود و آثار دیگری (مثل دربارهٔ کره و استوانه از ارشمیدس و مقاطع مخروطی آپولونیوس) در دست ترجمه به عربی بود. ثابت بن قره، ریاضیدان اهل حران در سوریه، نقش مهمی در این نهضت ترجمه داشت؛ بنابراین، بررسی رابطهٔ او با ماهانی قابل توجه است. ثابت بن قره در سال ۲۲۱ هجری به دنیا آمد و در سال ۲۸۸ هجری درگذشت. هنگامی که ماهانی نخستین رصد ثبت شده اش را در بغداد انجام می داد، ثابت بن قره فقط ۱۸ سال داشت. پس احتمالاً ماهانی از ثابت بن قره مسن تر بود. چنان که خواهیم دید، این دو علایق مشترکی داشتند و ماهانی دست کم در یکی از آثارش از ثابت بن قره الهام گرفته است. ثابت بن قره یک مورد استثنایی است زیرا بسیاری از آثارش برجا مانده و همهٔ اینها به صورت متن عربی یا ترجمه منتشر شده است.[5] اما به عکس، تنها بخشهایی از آثار ماهانی به دست ما رسیده که اغلب آثار هنوز منتشر نشده است.

آثار موجود ماهانی

۱ـ شرح ماهانی بر مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس.

۱ـ بر اساس منابع متعدد، ماهانی شرحی بر مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس نوشته است. رسالهٔ کوتاهی از ماهانی دربارهٔ نسبتها در اصول اقلیدس در شش نسخهٔ خطی موجود است و ممکن است این رساله (بخشی از) شرح او باشد. این رساله کوتاه و در عین حال بسیار عمیق است. در اینجا می خواهم دربارهٔ برخی از مطالب این رساله بحث کنم زیرا به این ترتیب می توان تصور درستی از سطح کار ماهانی به دست آورد. محتوای ریاضی این رساله در نوشتارهای تاریخی معاصر بررسی نشده است.

در آغاز توضیحی دربارهٔ مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس و نظریهٔ نسبتها در یونان باستان عرضه می کنم.

نظریهٔ اقلیدس دربارهٔ نسبتها بسیار پیچیده است زیرا به نسبتهای گویا و گنگ یک جا می پردازد. یونانیها وجود اعداد گنگ را به خاطر مشکلات نهفته در این مفهوم، نمی پذیرفتند. اما آنان دریافته بودند که برخی نسبتهای بین پاره خطها (مثل قطر و ضلع مربع) را نمی توان به صورت نسبت بین دو عدد طبیعی بیان کرد. بنابراین، نظریهٔ نسبتهای خود را بر اساس مفهوم مقدار که عام تر از مفهوم عدد است بیان کردند. مقدار می تواند عددی طبیعی، پاره خط، سطح، حجم یا حتی یک فاصلهٔ زمانی باشد.

در مقالهٔ پنجم اصول[6]، اقلیدس سه تعریف عرضه می کند که در این بحث مهم است و من آنها را به زبانی امروزی بیان می کنم:

(تعریف ۴) دو مقدار A و B دارای نسبت اند اگر مضرب صحیح mA موجود و از B بزرگتر باشد و مضرب صحیح nB هم موجود و از A بزرگتر باشد.

(تعریف ۵) فرض کنید A و B دو مقدارند که می توانند نسبتی داشته باشند و نیز فرض کنید C و D دو مقدار دیگر باشند که بتوانند نسبتی داشته باشند. نسبت A به B با نسبت C به D برابر است، هرگاه به ازای همهٔ مضربهای mC، mA و nD، nB داشته باشیم: اگر $mA>nB$ آنگاه $mC>nD$، اگر $mA=mB$ آنگاه $mC=nD$، اگر $mA<nB$ آنگاه $mC<nD$.

(تعریف ۷) نسبت A به B بزرگتر است از نسبت C به D اگر مضربهای mC، mA و nD، nB موجود باشند چنان که $mA>nB$ اما $mc\leq nD$.

این تعریفها برای همهٔ ریاضیدانان خوشایند نبود. به گفتهٔ ماهانی، ثابت بن قره اشاره ای دارد[7] حاکی از اینکه معرفت نسبتها به وسیلهٔ عددها و آنچه اکنون الگوریتم اقلیدسی خوانده می شود (ثابت بن قره

می گوید: برخی قضایای مقالهٔ دهم اصول) نیز ممکن است. ماهانی تعریفهای دیگری بر اساس همین نظر عرضه می کند و سپس ثابت می کند که تعریفهای جایگزین او با تعریف های ۵ و ۷ اقلیدس هم ارز است. تعریف های جایگزین ماهانی با مفهوم امروزی کسرهای مسلسل مرتبط است. مثال زیر (که ماهانی آن را نیاورده است ولی در یونان باستان شناخته شده بود) می تواند به درک تعریف ماهانی کمک کند. مربع ABCD را به ضلع $a=AB$ و قطر $b=AC$ رسم کنید. در اینجاست نسبت $\frac{a}{b}$ مورد نظر است (شکل ۱).

نخست به تعداد دفعات ممکن، a را از b می کاهیم. روشن است که این کار را یک بار می توان کرد:

نقطهٔ E را روی AC چنان اختیار کنید که $AE=AB=a$. سپس اگر EF را عمود بر AE رسم کنیم، خواهیم داشت $a_1 = EC = EF = FB < a$. پس $b = n_1 a + a_1$ و $0 < a_1 < a$ که در آن $n_1 = 1$.

اکنون می خواهیم به تعداد دفعات ممکن، a_1 را از a بکاهیم. چون FEC نیمی از یک مربع است، داریم

$$\frac{b}{a} = \frac{FC}{FE} = \frac{a-a_1}{a_1}$$

پس $(a-a_1) = 1 \cdot a_1 + a_2$ که در آن $0 < a_2 < a_1$، و بنابراین، $a = n_2 a_1 + a_2$ که در آن، $0 < a_2 < a_1$ و $n_2 = 2$.

اگر G را روی FC چنان اختیار کنیم که $FG = a_1$ و GH را عمود بر BC رسم کنیم تا AC را در H قطع کند، خواهیم داشت $GH = GC = a_2$. چون شکلهای ABFE و FGHE متشابهند، داریم $\frac{AB}{BF} = \frac{FG}{GH}$ یا $\frac{a}{a_1} = \frac{a_1}{a_2}$.

در نتیجه، این روند بدون نهایت ادامه می یابد، یعنی $a_1 = 2a_2 + a_3$ که در آن $0 < a_3 < a_2$، و $a_2 = 2a_3 + a_4$ که در آن $0 < a_4 < a_3$، و مانند آن.

چون این روند پایان ندارد، نسبت $\frac{a}{b}$ گنگ است. در ریاضیات امروزی، مثلاً می نویسیم $b = a\sqrt{2}$ و می گوییم که بسط آن به صورت کسر مسلسل عبارت است از $\sqrt{2} = 1 + 1/(2 + 1/(2 + \cdots))$. از این روند می توان برای یافتن مقدار تقریبی $\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{a}$ استفاده کرد، مثلاً

$$\sqrt{2} \cong 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+1}}} = \frac{24}{17}$$

ماهانی همین روند را برای مقادیر دلخواه $\frac{a}{b}$ که در آن $a \neq b$ به صورت زیر در نظر می گیرد:

فرض کنید مثل مورد قبل، $a<b$. ابتدا عدد طبیعی n_1 را چنان می یابیم که $b = n_1 a + a_1$، $0 < a_1 \le a$.

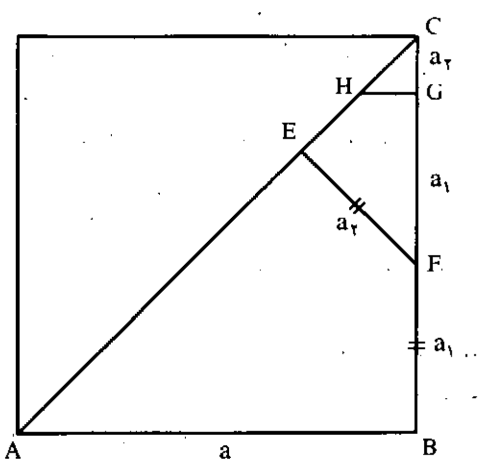
اگر $a = a_1$، داریم $a = 1a_1$ و روند به پایان می رسد. اگر $a > a_1$، عدد طبیعی n_2 را می توان چنان یافت که $a = n_2 a_1 + a_2$، که $0 < a_2 \le a_1$.

اگر $a_1 = a_2$، روند به پایان می رسد. اگر $a_1 > a_2$، روند را می توان ادامه داد و a_3 را یافت و این کار را تکرار کرد. به این ترتیب، ماهانی برای هر نسبت $\frac{a}{b}$ یک رشته عدد طبیعی n_1، n_2، ... می یابد که می تواند پایان دار یا بی پایان باشد. اگر نسبت $\frac{a}{b}$ برابر باشد با $\frac{p}{q}$ که p و q اعداد طبیعی اند، روند پایان دار است و آخرین جملهٔ باقی مانده (a_k) بزرگترین اندازهٔ مشترک a و b است. اگر a و b عددهای طبیعی باشند، a_k بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنهاست. اگر روند پایان نیابد، ریاضیدان امروزی می تواند عدد حقیقی q را چنان تعریف کند که $b=qa$ و بسط آن به صورت کسر مسلسل چنین باشد

$$q = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\vdots}}}$$

فرض کنید که برای نسبت $\frac{c}{d}$ که $c<d$ یک رشته عدد m_1، m_2، ... می یابیم.

تعریف ماهانی از نسبتهای مساوی چنین است: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اگر دو رشتهٔ n_1، n_2، ... و m_1، m_2، ... یکی باشند. پس این دو رشته باید تعداد عناصرشان برابر باشد و به ازای هر i باید داشته باشیم $m_i = n_i$. ماهانی سپس ثابت می کند که:



شکل ۱

۱ـ اگر طبق تعریف خود او $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ، آن گاه طبق تعریف اقلیدس نیز $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

۲ـ اگر طبق تعریف اقلیدس $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ آن گاه طبق تعریف خود او نیز $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

در اینجا مجال آنکه برهانهای ماهانی را به تفصیل بیاورم نیست. این برهانها در ویرایش آثار او منتشر خواهد شد. مسأله ای که در اینجا مطرح می شود این است که این تعریف و برهانها از آن خود اوست یا نه از جمله روش یافتن تقریبهایی برای نسبت $\frac{a}{b}$ با ساختن رشته ای از اعداد n_1 ، n_2 و غیره، به صورتی که در بالا ذکر شد و در یونان باستان با نام کاهش دو سویه شناخته شده بود. اقلیدس در قضیهٔ دوم مقالهٔ دهم اصول ثابت می کند که اگر رشته عددهای n_i بی پایان باشد، $\frac{a}{b}$ گنگ است[8]. او در قضیهٔ سوم فرض می کند که $\frac{a}{b}$ گویا باشد، آن گاه از رشته اعداد n_i برای یافتن بزرگترین مقدار مشترک a و b استفاده می کند. بر اساس اشاره ای از ارسطو، تاریخ نگاران معاصر بر آنند که تعریف ماهانی در مقطعی از یونان باستان شناخته شده بود[9]. اما در آثار باقی مانده از ریاضیات یونان، نظریه ای مبتنی بر این تعریف یا نظیر آنچه ماهانی آورده است دیده نمی شود. تا زمانی که مدارک تازه ای در این مورد یافته نشود، می توان پذیرفت که برهان فوق ابداع خود ماهانی است. شاید او تا حدی از ریاضیات هندی الهام گرفته بود؛ در ریاضیات هندی، روش یافتن n_1 ، n_2 و غیره برای نسبت $\frac{a}{b}$ «ساینده» خوانده می شود و برای حل معادله های سیاله ای به صورت $bx \pm c = ay$ به ازای مقادیر صحیح مفروض a ، b و c به کار می رود[10]. اما ریاضیدانان هندی به برهانهایی نظیر آنچه ماهانی عرضه کرده است، توجهی نداشتند.

تعریف ماهانی را ریاضیدانان بعدی دورهٔ اسلامی نیز به کار بردند. در نوشتارهای معاصر[11]، ماهانی به عنوان پدید آورندهٔ این تعریف ذکر می شود اما این هم اضافه می شود که ابن هیثم (۳۵۴ تا ۴۳۰) نخستین ریاضیدانی بود که ثابت کرد این تعریف با تعریف اقلیدس هم ارز است. این ادعای غریب از آنجا ناشی شده است که پلوای (plooij) تاریخ نگار علم اهل هلند که در سال ۱۹۵۰ کوشید تا رسالهٔ ماهانی را بخواند، تنها به نسخهٔ پاریس دسترسی داشت. این نسخه تقریباً ناخواناست، بنابراین پلوای تنها توانست مقدمهٔ ماهانی و تعریف اول او را بخواند و دیگر هیچ[12].

ماهانی برای حالت $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ هم تعریفی عرضه می کند. در همهٔ نسخه هایی که دیده ام، تعریفِ داده شده در آغاز رساله نادرست است که این ناشی از اشتباه کاتبان است. ولی من تعریف درست ماهانی را بر اساس برهانی که در رساله آمده است، بازسازی کرده ام. هیچ ردّی از این نوع تعریف در یونان باستان دیده نمی شود. بنابراین، به نظر می رسد که کار ماهانی کاملاً بدیع بوده است.

اکنون تعریف ماهانی را به زبان امروزی و با نمادگذاری جدید بیان می کنم. چون متن ماهانی خیلی فشرده است، توضیحهای من مفصل تر از آن است که ماهانی آورده، ولی ماهیت اندیشه های او را بی تغییر نگاه داشته ام.

می خواهیم دو نسبت $\frac{r_2}{r_1}$ و $\frac{s_2}{s_1}$ را مقایسه کنیم.

گام صفر:

اگر $r_1 < r_2$ و $s_1 < s_2$ ، می توانیم $\frac{r_1}{r_2}$ را با $\frac{s_1}{s_2}$ مقایسه کنیم.

پس ماهانی بدون نقض عمومیت می پذیرد که دست کم یکی از نامساویهای $r_1 \le r_2$ یا $s_1 \le s_2$ برقرار است.

گام ۱:

چهار حالت متمایز ممکن است پیش بیاید:

۱ـ اگر $r_1 = r_2$ و $s_1 = s_2$ ، طبق تعریف قبلی داریم $\frac{r_2}{r_1} = \frac{s_2}{s_1}$.

۲ـ اگر $r_1 < r_2$ و $s_1 \le s_2$ ، طبق تعریف $\frac{r_2}{r_1} > \frac{s_2}{s_1}$.

۳ـ اگر $r_1 \le r_2$ و $s_1 < s_2$ ، طبق تعریف $\frac{r_2}{r_1} < \frac{s_2}{s_1}$.

۴ـ اگر $r_1 > r_2$ و $s_1 > s_2$ ، به سراغ گام ۲ می رویم.

گام ۲:

اکنون می توانیم دقیقاً یک عدد صحیح n_2 بیابیم چنانکه $r_1 = n_2 r_2 + r_3$ ، $s_1 = n_2 s_2 + s_3$ و $r_3 > 0$ ، $s_3 > 0$ و چنان که دست کم یکی از دو نامساوی $r_2 \ge r_3$ یا $s_2 \ge s_3$ برقرار باشد.

باز هم در اینجا چهار حالت متمایز قابل تشخیص است:

۱ـ اگر $r_2 = r_3$ و $s_2 = s_3$ ، طبق تعریف قبلی داریم $\frac{r_2}{r_1} = \frac{s_2}{s_1}$.

۲ـ اگر $r_2 < r_3$ و $s_2 \ge s_3$ ، طبق تعریف $\frac{r_2}{r_1} < \frac{s_2}{s_1}$.

۳ـ اگر $r_2 \ge s_3$ و $s_2 < s_3$ ، طبق تعریف $\frac{r_2}{r_1} > \frac{s_2}{s_1}$.

۴ـ در حالتی که $r_2 > r_3$ و $s_2 > s_3$ ، به سراغ گام ۳ می رویم[13].

گام ۳:

می توانیم دقیقاً یک عدد صحیح n_3 بیابیم چنانکه $r_2 = n_3 r_3 + r_4$ ، $s_2 = n_3 s_3 + s_4$ و $r_4 > 0$ ، $s_4 > 0$ چنانکه دست

کم یکی از دو نامساوی $r_4 \le r_3$ و $s_4 \le s_3$ برقرار باشد.

اکنون می توانیم با گذاشتن r_3 به جای r_1 و r_4 به جای r_2، تمامی روند را از گام ۱ تا گام ۳ تکرار کنیم. اگر این روند در گام ۱ به پایان نرسد، در گام ۲ باقیماندهٔ جدید r_5 به دست می آید. اگر روند در گام ۲ به پایان نرسد، در گام ۳ باقیماندهٔ r_6 به دست می آید و تمامی روش را دوباره تکرار می کنیم الی آخر.

سپس ماهانی ثابت می کند که اگر طبق تعریف او $\frac{s_2}{s_1} > \frac{r_2}{r_1}$، آن گاه طبق تعریف اقلیدس نیز $\frac{s_2}{s_1} > \frac{r_2}{r_1}$، و برعکس. در اینجا هم مجال بیان برهان ماهانی نیست. برهانها در ویرایش آثار ماهانی منتشر خواهد شد.

در نوشتارهای معاصر، عمر خیّام نخستین عرضه کنندهٔ تعریفها و برهانهای مشابه ذکر شده است[14]. اکنون می توان این ادعا را تصحیح کرد. ظهور این گونه ریاضیات انتزاعی در آغاز ریاضیات دورهٔ اسلامی، دو قرن پیش از خیّام، مایهٔ شگفتی است.

شرح ماهانی بر مقالهٔ دهم اصول

ماهانی شرحی بر مقالهٔ دهم اصول اقلیدس نوشته است. متأسفانه تنها آغاز این شرح موجود است. چنانکه قبلاً گفته شد، ریاضیدانان یونانی عددهای گنگ را نمی پذیرفتند، ولی نسبتهای گنگ را در هندسه قبول داشتند. اقلیدس در مقالهٔ دهم اصول این نسبتها را با اصطلاحات ریاضی پیچیده ای به تفصیل دسته بندی کرده است. او در مقالهٔ هشتم، این نظریه را در بررسی نسبتهای خاصی به کار برده است که عبارتند از نسبت بین ضلع پنج ضلعی منتظم و شعاع دایرهٔ محیطی و نسبت بین اضلاع بیست وجهی منتظم و دوازده ضلعی منتظم و شعاع کرهٔ محیط بر آنها.

همین قدر می توان گفت که منظور ماهانی در شرح خود این بود که نشان دهد چگونه با معرفی اعداد گنگ می توان این نظریه را ساده کرد و بسط داد. ماهانی اعداد گنگی را نظیر «جذر ۲» و «جذر جذر ۲» معرفی می کند که مقادیر عددی نسبتهای پاره خطهایی هستند که اقلیدس در مقالهٔ دهم اصول آنها را مطالعه کرده است. او همچنین اعداد گنگی را مانند «کعب ۲» و «کعب کعب ۲» ذکر می کند که مقادیر عددی نسبتهایی که اقلیدس آورده است نیستند. ماهانی می گوید که ترکیبها، مجموعها و تفاضلهای این عبارتها نیز جالبند. سپس می افزاید که قضایای مقالهٔ دهم اصول را با محاسبات عددی بیان خواهد کرد. متأسفانه این محاسبات در بخش بر جای مانده، موجود نیست.

بلافاصله پس از بخش حاوی شرح ماهانی، نسخهٔ عربی شامل متنی با عنوان «محاسبهٔ منفصل از مقالهٔ دهم کتاب اقلیدس و خلاصهٔ محاسبهٔ دو جمله ای» (حساب المنفصل من مقالة العاشره من کتاب اقلیدس و جملة حساب ذی الاسمین) است که نویسندهٔ آن معلوم نیست که دقیقاً حاوی همان چیزی است که ماهانی وعده اش را داده بود، یعنی مجموعه ای از محاسبات که با برخی قضایای مقالهٔ دهم معادلند. در نمادگذاری جبری نوین، متن مذکور نشان می دهد که چگونه می توان عبارتهایی مثل $\sqrt{p \pm \sqrt{q}}$، $\sqrt{\sqrt{p} \pm \sqrt{q}}$ یا $\sqrt{\sqrt{p} \pm q}$ را که در آنها p و q گویا هستند، ساده کرد. با این حال، این متن طولانی است و شامل غلطهای مختلفی است و با توجه به سبک نگارش آن، نمی تواند نوشتهٔ خود ماهانی باشد. اصطلاحات موجود در آن نشان می دهد که اثری از اوایل دورهٔ ریاضیات اسلامی است. مثلاً در این متن آمده است که «جذر شش منهای جذر ۲۴» برابر است با «جذر سه و جذر سه منهای جذر سه». این عبارت معانی مختلفی می پذیرد و تعبیر درست آن را که $\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3-\sqrt{3}}$ است با مطالعهٔ متن می توان یافت. در متنهایی نظیر جبر ابوکامل (حدود ۳۰۰ هجری) و کرجی (حدود ۴۱۵ هجری) اصطلاحها بدون ابهام است. پس متنی که نویسنده آن معلوم نیست، احتمالاً در اوایل دورهٔ ریاضیات اسلامی، شاید به دست یکی از شاگردان ماهانی نوشته شده و به عنوان محصول تدریس ماهانی به اثری از خود ضمیمه شده است[15]. در این متن از معادلات درجهٔ دوم برای محاسبه استفاده شده و حتی یک معادلهٔ درجهٔ چهارم در متن آمده است. بنابراین، متن مذکور از لحاظ تاریخی بسیار قابل توجه است.

متن عربی بخش موجود از شرح ماهانی و متنی که مؤلف آن معلوم نیست هنوز منتشر نشده است. ترجمهٔ روسی آنها به وسیله گ. پ. ماتویفسکایا و نیز خلاصه ای از آنها به انگلیسی انتشار یافته است[16]. متن عربی آنها با ترجمهٔ انگلیسی در ویرایش آثار ماهانی منتشر خواهد شد.

اثر گمشدهٔ ماهانی دربارهٔ معادله های درجهٔ سوم

شهرت ماهانی در نوشتارهای معاصر عمدتاً به خاطر یکی از آثار اوست که اکنون گم شده ولی به وسیلهٔ ریاضیدانان بعدی ذکر شده است. این اثر شرح او بر رسالهٔ در باب کره و استوانهٔ ارشمیدس است. ارشمیدس در قضیهٔ ۴ مقالهٔ دوم این رساله نشان می دهد که چگونه می توان کرهٔ مفروضی را با یک صفحه به دو قسمت کرد چنانکه جمع دو قسمت مذکور به نسبت مفروضی باشد. ارشمیدس در حل خود می پذیرد که پاره خط مفروض AB را می توان در نقطه X چنان تقسیم کرد که $\frac{AX^2}{R} = \frac{S}{BX}$ که در آن S یک پاره خط مفروض و R یک مستطیل مفروض است. ارشمیدس در رسالهٔ «در باب کره و استوانه» راه حل این مسأله را ذکر نکرده است. ولی آن را در اثر دیگری به کمک مقاطع مخروطی حل کرده و راه حل او مانند

راه‌حلهای دیگر یونانیان به شرحی از ائوتوکیوس[17] که به وسیلهٔ اسحاق بن حنین (۲۱۵ـ۲۹۸ هجری) به عربی ترجمه شد راه یافته است.

به نوشتهٔ عمر خیام[18]، ماهانی گفته است که مسألهٔ ترسیم x می‌تواند به معادله‌ای جبری به صورت «مکعب و عدد برابر است با چند مجذور» تحویل شود، در واقع با اختیار کردن AB=a، AX=x و RS=c، خواهیم داشت $x^2(a-x)=c$، پس $x^3+c=ax^2$. این کهن‌ترین معادلهٔ درجهٔ سومی است که در ریاضیات دورهٔ اسلامی سراغ داریم. به نوشتهٔ عمر خیام و دیگران، ماهانی پس از مدتها تأمل نتوانست این معادله را حل کند. عمر خیام می‌گوید که ماهانی نتوانست جواب این معادله را به کمک مقاطع مخروطی بیابد، ولی به نظر من ماهانی علاقه‌ای به حل آن با مقاطع مخروطی نداشت؛ زیرا اگر واقعاً می‌خواست برای مسألهٔ ارشمیدس جوابی به کمک مقاطع مخروطی بیابد، ممکن بود کسی به او تذکر دهد که چنین راه حلی در شرح ائوتوکیوس نقل شده است. عمر خیام می‌گوید که ابوجعفر خازن که در قرن چهارم هجری می‌زیست، نخستین کسی بود که این معادله را به کمک مقاطع مخروطی حل کرد[19]. هندسه‌دانان بعدی (از جمله خود عمر خیام) نظریه‌ای کلی برای حل معادله‌های درجهٔ سوم با مقاطع مخروطی پدید آوردند. بدون کار ماهانی، پیوند میان جبر و مقاطع مخروطی به این زودی مورد توجه واقع نمی‌شد. بنابراین، کار ماهانی نقطهٔ آغاز پیدایش حوزهٔ کاملی در ریاضیات بود.

حوالی سال ۱۵۰۰ میلادی، راه‌حل جبری معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+pr=q$ (که در آن r، p و q مثبت هستند) به وسیلهٔ شیپیونه دلفرو ریاضیدان ایتالیایی یافته شد. اندکی بعد از این کشف، انواع دیگر معادله‌های درجهٔ سوم نیز حل شد و راه‌حل همهٔ انواع آن در سال ۱۵۴۵ در کتاب کاردانو به نام فن کبیر[20] انتشار یافت. معادلهٔ $x^3+pr=q$ که در آن p و q مثبتند یک جواب حقیقی به صورت زیر دارد:

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\frac{q^2}{2}}-\frac{q}{2}}$$

شرح ماهانی بر مقالهٔ دهم اصول نشان می‌دهد که او به مجموعها و تفاضلهای ترکیبهای جذر و کعب علاقه‌مند بود. پس این سؤال مطرح می‌شود که چرا او راه‌حل جبری معادلهٔ درجهٔ سوم را نیافت.

به این سؤال می‌توان چنین پاسخ داد: در مورد معادلهٔ $x^3+c=ax^2$ که در آن a و c مثبتند، فرمول جبری، ریشه‌های حقیقی را به صورت مجموع دو ریشهٔ مختلط می‌دهد[21]. عددهای مختلط در ریاضیات دورهٔ اسلامی کاملاً ناشناخته بودند و گرچه در قرن شانزدهم در ایتالیا پدید آمدند، با این حال، تا قرن نوزدهم درک نشدند. راه‌حل جبری بر حسب ریشه‌های مختلط نمی‌توانست برای ماهانی مفهومی داشته باشد و برای محاسبهٔ عددی ریشه‌های x و ترسیم هندسی آنها به کاری نمی‌آمد. پس این مسأله برای ماهانی حل نشدنی بود.

جای تأسف است که $x^3+c=ax^2$ نخستین معادلهٔ درجهٔ سوم سه جمله‌ای بود که به وسیلهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی مطالعه شد. اگر ارشمیدس مسألهٔ حل نشدهٔ دیگری از خود بر جای می‌گذاشت که به $x^3+px=q$ که در آن p و q مثبتند قابل تحویل بود، شاید ماهانی می‌توانست راه‌حل جبری برای آن بیابد و در این صورت، تاریخچهٔ جبر دورهٔ اسلامی چهرهٔ دیگری می‌یافت.

رسالهٔ ماهانی در مثلثات

ماهانی رسالهٔ کوتاهی دربارهٔ مثلثات کاربردی نوشته که بخشی از آن در یک نسخهٔ خطی در استانبول به جا مانده است و یکی از مسائل آن را پاول لوکی[22] به آلمانی ترجمه کرده است، ولی بقیهٔ مسائل آن هنوز منتشر نشده است. یکی از این مسائل منتشر نشده را در اینجا به عنوان مثال می‌آورم.

مفروضات: (۱) میل خورشید، یعنی کمانی بر کرهٔ آسمان بین خورشید و استوانه‌ای آسمانی؛ (۲) سمت خورشید، یعنی زاویهٔ بین تصویر قائم آن بر افق و نقطهٔ مشرق؛ و (۳) عرض جغرافیایی محل

مطلوب: یافتن اینکه چه ساعتی از روز است.

متن مذکور حاوی یک ترسیم هندسی و یک محاسبه است. برای رعایت اختصار، تنها خلاصهٔ محاسبه را به بیان امروزی می‌آورم. فرض می‌کنیم که خورشید در شرق نصف النهار است، یعنی محاسبه برای صبح انجام می‌شود. ابتدا محاسبه را برای حالتی که میل خورشید صفر باشد، یعنی برای آغاز بهار یا آغاز پائیز انجام می‌دهیم.

فرض کنید α سمت خورشید و $\varnothing$ عرض جغرافیایی محل باشد. منظور از Sin و Cos (با حروف اول بزرگ) سینوس و کسینوس تعریف شده در دایره‌ای به شعاع R است. ماهانی R را برابر با ۶۰ می‌گیرد. داریم $\mathrm{Sin}x = R\cdot\sin x$ و $\mathrm{Cos}x = R\cdot\cos x$ که در آن Sin و Cos نشانهٔ تابعهای سینوس و کسینوس به معنی امروزی آن است. ماهانی ابتدا x را از فرمول زیر به دست می‌آورد:

$$\mathrm{Sin}x=\mathrm{Cos}\alpha\cdot\frac{\mathrm{Cos}\varnothing}{R}$$

سپس t را از فرمول زیر پیدا می‌کند:

$$\mathrm{Sin}t=R\cdot\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}x}$$

پس t عبارت است از زمانی سپری شده از طلوع آفتاب بر حسب درجه، و $90-t$ زمان باقی مانده تا ظهر است. این زمان بر حسب «درجهٔ زمان» به دست می‌آید. هر یک درجهٔ زمانی متناظر است با یک درجه چرخش روزانهٔ (ظاهری) کرهٔ آسمان حول زمین. پس ۱۵ درجه معادل یک ساعت است.

اگر میل خورشید صفر نباشد[۲۳]، ماهانی ξ را از رابطهٔ زیر محاسبه می کند.

$$\mathrm{Sin}\xi = \left(\frac{\mathrm{Sin}\delta \cdot \mathrm{Sin}x}{\mathrm{Cos}x}\right)\frac{R}{\mathrm{Cos}\delta}$$

پس $90 - t \pm \xi$ زمان باقی مانده تا ظهر است. در اینجا، علامت مثبت برای میل جنوبی و علامت منفی برای میل شمالی به کار می رود.

این محاسبات از لحاظ ریاضی درست است و فرمولهای حاصل شده با فرمولهای «قضیهٔ کتانژانت» برای مثالهای کروی نامشخص معادلند. اما نتوانسته ام نحوهٔ یافتن این فرمولها را توسط ماهانی و منطق حاکم بر ترسیمهای هندسی او را بازسازی کنم. بر من روشن نیست که آیا او از ریاضیدانان یونانی یا هندی تأثیر پذیرفته بود یا خیر. منجّمان هندی پیش از ظهور اسلام به این نوع مسأله ها علاقه مند بودند، اما راه حل ماهانی را در هیچ یک از آثار آنها نیافته ام. در عین حال، بسیاری از آثار ریاضی و نجومی هندی متعلق به آن دوره هنوز منتشر نشده اند یا به آسانی قابل دسترسی نیستند[۲۴]. مطالب بسیاری در تاریخچهٔ مثلثات آغاز دورهٔ اسلامی نامعلوم است، اما این متن از ماهانی بی شک سند جالبی است زیرا حاوی راه حلهای درست برای مسأله های بسیار دشوار مثلثاتی است.

این رسالهٔ مربوط به مسأله های مثلثاتی، ناقص است. افتادگی هایی دارد و عنوانش مربوط است به مسأله ای (یافتن سمت خورشید در زمان مفروض) که در متن موجود هیچ به آن پرداخته نشده است.

آثار گمشدهٔ ماهانی

یک اثر گمشدهٔ ماهانی را قبلاً ذکر کرده ایم: شرح او بر رسالهٔ «در باب کره و استوانهٔ» ارشمیدس، فهرستی از باقی آثار گمشدهٔ ماهانی که به وسیلهٔ سایر ریاضیدانان یا در آثار زندگینامه ای ذکر شده است، در پی می آید. این آثار در ویرایش آثار ماهانی به تفصیل بیشتر مورد بحث قرار خواهند گرفت.

- رساله ای دربارهٔ عرض سیارات در **الفهرست ابن ندیم** (قرن چهارم هجری) ذکر شده است[۲۵].
- احتمالاً ماهانی رساله ای در **تصحیح زیج ممتحن** نوشته است. ابن یونس بخشهایی از این اثر را حاوی رصدهای ماهانی و تحلیلهای ماهانی از برخی خطاهای زیج ممتحن، نقل کرده است[۲۶].
- در یک رساله به نام **رساله در اثبات اصل موضوع اقلیدس** که مؤلف آن معلوم نیست آمده است که: «کندی، ثابت بن قره، بنوموسی و ماهانی» روی این اصل موضوع کار کرده اند[۲۷].
- دو زندگینامه نویس، ابن ندیم و ابن قفطی، رساله ای از ماهانی را دربارهٔ ۲۶ قضیه از مقالهٔ اول اصول اقلیدس ذکر کرده اند که آنها را می توان به طور مستقیم ثابت کرد. شاید این رساله به اثر او دربارهٔ اصل توازی مربوط باشد.

ابراهیم بن سنان، نوهٔ ثابت بن قره می گوید که ماهانی رساله ای دربارهٔ تربیع سهمی، یعنی ترسیم مثلثی (یا مربعی) هم مساحت با قطعهٔ مفروضی از سهمی نوشته بود[۲۸]. به نوشتهٔ ابراهیم بن سنان، راه حل ماهانی آسان تر از راه حل ثابت بن قره بود. ارشمیدس در مقدمهٔ رسالهٔ در باب کره و استوانه (که ثابت بن قره ترجمهٔ عربی آن را اصلاح کرد) می گوید که این مسأله را حل کرده است. راه حل ارشمیدس به یونانی موجود است ولی این راه حل به عربی برگردانده نشد. پس ثابت بن قره و ماهانی می دانستند که ارشمیدس این مسأله را حل کرده بود ولی جزئیات آن را نمی دانستند و می توان حدس زد که آنها می کوشیدند که خود راه حلی برای این مسأله بیابند. راه حل دشوار ثابت بن قره موجود است[۲۹]، ولی راه حل آسانتر ماهانی مفقود شده است.

- به نوشتهٔ هروی هندسه دان که در قرن چهارم هجری می زیست[۳۰]، ماهانی رسالهٔ اکرمنلائوس (حدود ۱۰۰ سال پیش از میلاد را که اثری یونانی در هندسهٔ کره بود بازنویسی کرد. ماهانی برای این منظور از ترجمهٔ ضعیفی از اکر که از ترجمه ای سریانی فراهم شده بود استفاده کرد. وی دو مقالهٔ اول اکر و آغاز مقالهٔ سوم آن را بازنویسی کرد. اما منلائوس در قضیهٔ ۵ مقالهٔ سوم قضیهٔ دشواری در هندسهٔ کروی را بدون توضیح پذیرفته است[۳۱]. ماهانی نتوانست متن منلائوس را که شاید به طور نامفهومی ترجمه شده بود به صورت معنی داری در آورد. بنابراین، بازنویسی او در همین جا متوقف شد. بعدها اکر مستقیماً از یونانی ترجمه شد و در قرن چهارم هجری ابونصر عراق هندسه دان توانست فرض منلائوس را ثابت کند[۳۲].

این بررسی کارهای گمشده و موجود، روشن می کند که ماهانی روی دشوارترین مسائل ریاضی عصر خود کار کرد. او یکی از بهترین ریاضیدانان نظری زمان خود و در عین حال رصد کنندهٔ نجومی بسیار ماهری بود.

از کار ماهانی چه چیز دیگری می توان دربارهٔ تاریخ ریاضیات در فرهنگ دورهٔ اسلامی آموخت؟ برای من شگفت انگیزتر از همه این است که ماهانی همهٔ این کارهای دشوار را در مرحلهٔ آغازین سنت علمی دورهٔ اسلامی انجام داد. آن هم تنها چند سال بعد یا حتی شاید قبل از آنکه از ریاضیات یونان، آثار ارشمیدس و آپولونیوس به عربی ترجمه شود. این سطح بالای کار، نیازمند توضیحی است. برخی تاریخ نگاران علم، قرن سوم هجری را به عنوان قرن ترجمه و تقلید از ریاضیات یونانی و هندی محسوب می دارند. اما فواد سزگین بر آن است که ریاضیدانان و منجمان مسلمان در قرن سوم هجری توانایی کامل کار خلّاق را داشتند، زیرا پذیرش علوم هندی و شاید مقداری از علوم یونانی بین منجمان ایرانی قبل از دو قرن اولیهٔ اسلام و طی این دو قرن، زمینه را مساعده کرده بود. این نکته می تواند به توضیح علت ظهور ریاضیدانانی نظیر ماهانی در قرن سوم هجری کمک کند.

زیرنویسها:

۱ـ دربارهٔ این موضوع نگاه کنید به:

F. Sezgin. Geschichte des arabischen Schrifttums, vol. 6. Astronomy, p. 13.

۲ـ برای این موارد نگاه کنید به:

D. Pingree, The Thousands of Abū Ma'shar. London: The Warburg Institute, 1968

E. S. Kennedy, D. Pingree. The Astrological History of Māshāllāh. Cambridge: Harvard University Press, 1971

J. J. Buckhardt. B. L. van der Waerden. The Astronomical System of the Persian Tables I, Centaurus, 13 (1968), pp. 1-28

B. L. van der Waerden, The Astronomical System of the Persian Tables II, Centaurus, 30 (1987). pp. 197-211.

۳ـ دربارهٔ ماهانی نگاه کنید به:

F. Sezgin. Geschichte des arabischen Schrifttums, vol. 5, Leiden 1974, pp. 260-262, vol. 6, Leiden 1978, pp. 155-156

و کتاب فارسی زیر:

ابوالقاسم قربانی، زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۶۵، ص ۴۳۱ـ۴۳۵ (شمارهٔ ۱۳۶).

۴ـ مواضع خورشید، ماه و سیارات را می توان به روش ریاضی بر اساس نظریهٔ زمینمرکزی پیش گویی کرد، هر چند که این نظریه از دیدگاه فیزیک امروز نادرست است.

۵ـ برای اطلاع از آثار ثابت بن قره نگاه کنید به:

F. Sezgin, Geschichte des arabischen Schrifttums, vol. 5, Leiden 1974, pp. 264-273, vol. 6, Leiden 1978. pp. 163-170

آثار ریاضی ثابت بن قره به روسی نیز ترجمه شده است:

B. Bosenfeld. Sabit ibn Korra. Matematicheskie Traktaty, Moscow: Nauka, 1984.

آثار نجومی او ویراسته و به فرانسه ترجمه شده است:

Thabit ibn Qurra. Oeuvres d'Astronomie, etabli et traduit Par Regis Morelon, Paris, Les Belles Lettres. 1987.

۶ـ ترجمهٔ انگلیسی اصول را می توان در کتاب زیر یافت:

T. L. Heath. Euclid's Elements. second edition. New York: Dover reprint, 1956, 3 vols.

۷ـ شاید این اشاره را در تحریر خود از اصول آورده باشد.

۸ـ در اینجا از اصطلاحات امروزی ریاضی استفاده می کنیم. در ترجمه های عربی اصول، اصطلاحهای «متباین» و «غیرمشترک» به کار رفته است.

۹ـ ارسطو در طوبیقا اشاره ای دارد مبنی بر این که مقادیر نسبت یکسانی دارند اگر antanairesis یکسانی داشته باشند. اسکندر آفرودیسی مفسّر توضیح می دهد که این همان anthyphairesis است. نگاه کنید به:

T. L. Heath. Mathematics in Aristotle. pp. 80-83.

در منبع زیر نیز بحث جالبی پیرامون نوشتارهای امروزی دربارهٔ موضوع خواهید یافت:

B. Vitrac. Euclide. Les Elements. volume 2; Livres Va Ix, Paris: Presses Universitaires de France, 1994, pp. 515.523.

۱۰ـ مثلاً نگاه کنید به

B. L. vander Waerden. Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. New York: Springer, 1983, pp. 113-120.

۱۱ـ

A. P. Juschkewitsch. Mathematik im Mittelalter. Leipzig 1964. pp. 250-251, or the French translation: A. P. Youschkevithch. Les mathematiques arabe. Paris: Vrin. 1976. pp. 83-84.

۱۲ـ نگاه کنید به:

E. B. Plooij, Euclid's conception of ratio and his definition of proportional magnitudes as criticized by Arabian commentators. Rotterdam 1950. pp. 50-51.

نسخه ای از این اثر در کتابخانهٔ آیت الله مرعشی نجفی در قم موجود است.

۱۳ـ این حالتها را با عددهای حقیقی به آسانی می توان بیان کرد. اگر در گام ۱، $r_2 < r_1$ و $s_2 < s_1$، داریم $\frac{r_1}{r_2} > 1$ و $\frac{s_1}{s_2} > 1$ سپس n_1 بزرگترین عدد صحیحی است که $\frac{r_1}{r_2} > n_1$ و $\frac{s_1}{s_2} > n_1$ داریم $\frac{r_3}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} - n_1$ و $\frac{s_3}{s_2} = \frac{s_1}{s_2} - n_1$. در حالت ۲، $\frac{s_3}{s_2} \leq 1$ و $\frac{r_3}{r_2} > 1$، بنابراین $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_2} + n_1 > \frac{s_3}{s_2} + n_1 = \frac{s_1}{s_2}$، الی آخر.

۱۴ـ

A. P. Juschkewitsch, Mathematik im Mittelater. leipzig 1964, pp. 251-252, or the French translation: A. P. Youschkevitch. Les mathematiques arabes. Paris: Vrin, 1976, pp. 84-86.

۱۵ـ عادل انبوبا در مقاله ای به نشانی زیر، این متن را از خود ماهانی دانسته است:

-Algebro Arabe all IX- et X- siecle. apercu general, in Journal for the History of Arabic Science 2 (1978), pp. 63-100. especially pp. 79, 96.

۱۶ـ نگاه کنید به:

G. P. Matvievskaya, Desyataya Kniga "Nachal" Evklida v srednenevovykh Arabskikh kommentariyakh, in: S. Kh. Sirazdinov (ed.), Matematika astronomiya v trudakh unhenykh srednevekogo voctoka, Tashkent: Fan, 1977, pp. 9-14; G. P. Matvievskaya. Nekotorye Arabskie kommentarii k decyatoi knige "Nachal: Evklida, in S. Kh. Sirazdinov (ed.), Matematika na Srednevekovom Vostoke. Tashkent, 1978, pp. 3-87 (translation of anonymous text): (P. P. Matvievskaya. The Theory of Quadratic Irrationals in Medieval Oriental mathematics, in: D. A King, G. Saliba, ed., From Deferent to Equant: A Volume of studies in the History of science in the Ancient and Medieval Near East in Honor of E. S. Kennedy, New York Academy of Sciences, 1987, pp. 253-277, see esp. pp. 258-260, 271.

۱۷ـ مثلاً نگاه کنید به:

T. L. Heath. A history of Greek mathematics. Oxford: Clarendon Press, 1921, Vol. 2, pp. 43-50.

اما اشارهٔ هیت به معادلهٔ درجهٔ سوم در آثار ارشمیدس نابجاست زیرا ارشمیدس این معادلات را به کار نمی برد.

۱۸ـ نگاه کنید به جبر خیام در:

F. Woepcke. L'Algebre d'Omar Alkhayyami, Paris 1851, Arabic text p.2, translation p. 2;

ویکه در صفحات ۹۶ـ ۱۰۳ از منبع مجهول المؤلف دیگری نام می برد. برای اشاره ای به ماهانی که در رسالهٔ کوچکی از عمر خیام آمده نگاه کنید به: غلامحسین مصاحب، حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر، تهران، ۱۳۳۹، ص ۶۷، صفحات ۷ و ۱۵۹ این اثر را هم ببینید.

۱۹ـ احتمال دارد که ابوجعفر خازن راه حل خود را با ترکیب بازنویسی جبری ماهانی از مسأله و راه حل با مقاطع مخروطی در شرح اتوتوکیوس بر رسالهٔ «در باب کره و استوانهٔ ارشمیدس»، یافته باشد.

۲۰ـ مشخصات ترجمهٔ انگلیسی این اثر چنین است:

Girolamo Cardano, Ars Magna or the rules of algebra, translated and edited by T. Richard Witmer, New York: Dover 1993, reprint of the 1968 edition.

در مورد حل معادلهٔ درجهٔ سوم در قرن شانزدهم میلادی، نگاه کنید به:

B. L. vander waerden. A history of algebra from al-khwarizmt to Emmy Noether, New York: Springer, 1985, pp. 52-62.

۲۱ـ معادلهٔ $x^3 + c = ax^2$ را در نظر می گیریم که در آن a و c مثبتند و داریم $\Delta = C - \frac{4a^3}{27}$. این معادله ریشه های حقیقی دارد اگر و تنها اگر $0 \leq \Delta$. اگر $0 = \Delta$، معادله یک ریشهٔ مضاعف $x = \frac{2}{3}a$ دارد (و یک ریشهٔ منفرد $x = -\frac{a}{3}$). اگر $0 > \Delta$، ریشه های معادله عبارتند از:

$$x = \frac{a}{3} + w^i \sqrt[3]{\frac{\sqrt{c}}{2}\sqrt{\Delta} + Q} - w^{3-i} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{c}}{2}\sqrt{\Delta} - Q}$$

که در آن $Q = \frac{1}{27}a^3 - \frac{c}{2}$ و $w = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ که یک ریشهٔ سوم واحد است. ریشهٔ منفی به ازای $i = 0$ و دو ریشهٔ مثبت که مورد علاقهٔ ماهانی بود به ازای $i = 1, 2$ به دست می آید.

۲۲ـ این ترجمه در پایان نامهٔ او به سال ۱۹۴۱ آمده است که در سال ۱۹۹۸ به وسیلهٔ «مؤسسهٔ تاریخ علوم عربی و اسلامی» در فرانکفورت منتشر خواهد شد. برای خلاصه ای از حل آن نگاه کنید به:

P. Luckey. Beitrage zur Erforschung der islamischen Mathematik I, Orientalia 17 (1948), pp. 500-502.

۲۳ـ میل خورشید را می توان از جدول پیدا کرد، یا بر اساس طول دایرة البروجی خورشید (λ) با فرمول $\delta = \sin\lambda \sin\varepsilon$ محاسبه کرد که آن، ε میل دایرة البروج است. منجمان مأمون در قرن سوم هجری نشان دادند که $\varepsilon = 23°35'$. مقدار λ را به راحتی می توان از تاریخ روز در سال شمسی تخمین زد؛ در آغاز بهار $\lambda = 0$ و λ تقریباً یکنواخت افزایش می یابد.

۲۴ـ برای مروری بر ریاضیات و نجوم هند نگاه کنید به:

D. Pingree. History of Mathematics and astronomy in India, in C. G. Gillipsie (ed.), Dictionary of Scientific Biography, vol. 15. New York: Scribners Sons. 1978. pp. 533-633.

۲۵ـ الفهرست ابن ندیم، ترجمهٔ رضا تجدد، تهران، ۱۳۴۶، ص ۴۸۹؛ تاریخ الحکماء ابن قفطی، ترجمهٔ کهن فارسی، به کوشش بهین دارائی، تهران، چاپ دوم، ۱۳۷۱، ص ۳۸۸.

۲۶ـ نگاه کنید به:

C. Caussin, Le liere la grande table hakemite, Notices et extraits: (Paris, Bibliotheque National) 7 (1804), pp. 16-240: pp. 83-97 is an extract from this work of al-Mahani.

۲۷ـ نسخهٔ استانبول، جارالله (در کتابخانهٔ سلیمانیه) شمارهٔ ۱۵۰۲، برگ ۲۶ پ، سطر ۷. این رسالهٔ مجهول المؤلف به دنبال رسالهٔ ماهانی دربارهٔ نسبتها آمده است.

۲۸ـ ا. س. سعیدان، رسالهٔ ابن سنان، کویت، ۱۴۰۳ قمری، ص ۲۹، ۵۷.

۲۹ـ برای اطلاع از مراجع نگاه کنید به:

F. Sezgin. Geschichte des arabischen Schrifttums. vol. 5, pp. 269 no. 10, pp. 293-4 no. 1

در مورد ابراهیم بن سنان نیز نگاه کنید به اثر فوق الذکر از سعیدان.

۳۰ـ دربارهٔ هروی نگاه کنید به:

F. Sezgin. Geschichte des arabischen Schrifttums vol. 5, p. 329.

برای اشارت بیشتر هروی به ماهانی و اطلاعات بیشتر دربارهٔ بازنویسی ماهانی از اکر بتلانوس نگاه کنید به:

M. Krause, Die spharik can Menelaus in der verbesserung van Abu Nase Jraq, Berlin 1936, pp. 24-32.

۳۱ـ این قضیه می گوید اگر D, C, B, A چهار نقطه بر دایرهٔ عظیمه ای از کره باشند، p نقطه ای غیر واقع بر این دایرهٔ عظیمه باشد و دایره های عظیمهٔ PA، PB، PC و PD دایرهٔ عظیمه دیگری را در نقاط D′, C′, B′, A′ قطع کنند، آن گاه

$$\frac{\sin AB \cdot \sin CD}{\sin AC \cdot \sin BD} = \frac{\sin A'B' \cdot \sin C'D'}{\sin A'C' \cdot \sin B'D'}$$

۳۲ـ نگاه کنید به:

Krause. pp. 65-66.

مصاحبه با خانم گیل بوریل

مترجمان:
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی
فرامرز رسولی، دانشگاه تربیت مدرس

گیل بوریل[1] در سال ۱۹۹۶ رئیس «شورای ملّی معلمان ریاضی» (NCTM)[2] شد. او مدرک کارشناسی و کارشناسی ارشد خود را در ریاضی به ترتیب از دانشگاههای مارکوت[3] و لویولا[4] واقع در شیکاگو دریافت کرد. بوریل بیش از بیست و پنج سال معلم ریاضی دبیرستان در حومهٔ شهر میلواکی بوده است و در این مدّت، همه چیز از مقدمات جبر تا حسابان را تدریس کرده است. او علاقهٔ ویژه‌ای به آمار دارد و تاکنون، از طریق انجمن آمار آمریکا بر روی چندین برنامهٔ سواد آموزی کمّی کار و مطالعه کرده است که یکی از این برنامه ها، پروژهٔ «ریاضیّات مشتق شده از داده ها»[5] است. در حال حاضر، بوریل به عنوان محقّق در «مرکز تحقیقات آموزشی» دانشگاه ویسکانسین مشغول کار است. او در این مرکز، بر روی برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ راهنمائی به اسم «ریاضی در متن»[6] مشغول کار بوده است.

او در سال ۱۹۸۵ به عنوان برندهٔ «جایزهٔ ریاست جمهوری برای تدریس ریاضیات و علوم»[7] و در سال ۱۹۸۶ به عنوان «آموزشگر نمونهٔ ریاضی ویسکانسین»[8] معرّفی شد. در سال ۱۹۹۴ میلادی، بوریل به عنوان عضو افتخاری اتحادیهٔ آمار آمریکا انتخاب شد. او چندین مقاله دربارهٔ آموزش آمار و ریاضی، کتابهای درسی و مواد درسی نوشته است.

در جلسه های مشترک ریاضی در بالتیمور، بوریل بیانیهٔ مشترک «انجمن ریاضی آمریکا» (AMS)[9]، «اتحادیهٔ ریاضی آمریکا» (MAA)[10] ـ «شورای ملّی معلمان ریاضی» (NCTM) را با عنوان «آموزش ریاضی از پیش دبستانی تا پایهٔ دوازدهم در قرن بیست و یکم»[11] را قرائت خواهد کرد. سخنرانی او در ساعت ۱۱ و ده دقیقهٔ صبح روز پنجشنبه، ۸ ژانویه ۱۹۹۸ است.

مصاحبهٔ زیر توسط نویسندهٔ ارشد «نوتیسز»[12]، آلین جکسون انجام شده بود.

جکسون: در سال ۱۹۸۹، «شورای ملی معلمان ریاضی» (NCTM) اولین مجموعه استانداردهای خود را منتشر کرد که مورد توجّه زیادی قرار گرفت و باعث ترغیب سایر حوزه های درسی به تهیّهٔ استانداردهای درسی برای آن حوزه ها شده است. در حال حاضر، یکی از عمده ترین پروژه های NCTM، به روز کردن این استانداردها است. می توانید انگیزهٔ انجام این پروژه را توضیح دهید؟

بوریل: اولین استانداردهای NCTM به منظور محصول نهائی تهیّه نشده بود. همانطور که ما به یادگیری دربارهٔ چگونگی یادگیری و درک کودکان ادامه می دهیم و همانطور که چهرهٔ ریاضیات دائماً در حال تغییر است، تعلیم و تربیت نیز باید تطوّر یابد. زمانی که استانداردهای تجدید نظر شده آماده شوند، از ظاهر شدن استانداردهای اولیه یازده سال گذشته است و در طول آن یازده سال، ما هم خیلی یاد گرفته ایم. ما بیش از آنچه که قبلاً می دانستیم، الآن دربارهٔ راههای انتخاب و تنظیم برنامهٔ درسی ای که به کودکان در یادگیری کمک خواهد کرد می دانیم. در عرض ده سال گذشته، تکنولوژی به طور بی سابقه ای تغییر کرده است و آن تغییر بر ریاضیاتِ مهمّی که کودکان نیاز به یادگیری آن دارند، تأثیر گذاشته است. به ساختن اتصالات قوی تری بین قسمت های پایه های مختلف نیاز هست. ما همچنین تشخیص می دهیم که هر زمان شما اولین پیش نویس چیزی را انجام می دهید، ممکن است که نیازمند تقویت آن باشید و این مورد قطعاً دربارهٔ استانداردهای NCTM نیز وجود دارد.

جکسون: در حال حاضر، شبکه ای از گروه ها مشغول به روز کردن جنبه های مختلف این استانداردها هستند. می توانید به طور خلاصه دربارهٔ فعالیت این شبکه توضیح دهید؟

بوریل: این یک تلاش چندین لایه ای است. اول برای هر مجموعه از پایه های درسی پنج نویسنده درنظر گرفته شده است: پیش دبستانی تا پایهٔ دوم، پایهٔ سوم تا پنجم، پایهٔ ششم تا هشتم و پایهٔ نهم تا دوازدهم. جوآن فرینی ماندی[13] سرپرست کل نویسندگان می باشد. مری لیند کواست[14] نیز رابط بین نویسندگان و قسمتهای دیگر انجمن می باشد. از آنجائیکه قصد داشتیم نقطه نظرات گروههای دیگری که در ارتباط با ریاضی بودند را نیز داشته باشیم، لذا کارمان را با نام «اتحادیهٔ گروههای مرور کننده»[15] (ARG) شروع کردیم. ما از طریق برگزار کنندگان کنفرانس های علوم ریاضی[16]، از سازمانها خواستیم که اگر لازم بدانند، یک ARG تشکیل دهند که وظیفهٔ آن، جواب دادن به سؤالاتی باشد که نویسندگان استانداردها مایل به جمع آوری هستند. در آخر، دوازده ARG تشکیل گردید. سرپرست ARG برای «انجمن ریاضی امریکا» (AMS) راجرهو[17] است.

بیشتر ARGها بنحوی در ارتباط با آموزش ریاضی می باشند. سعی داریم این شبکه را چنان گسترش دهیم که انجمنهای دیگری همچون انجمن اولیاء و مربیان (PTA) را نیز دربرگیرد، تا بتوانیم از نقطه نظرات والدین، مردم و دیگر کسانی که علاقه ای به ریاضی دارند، استفاده کنیم. همچنین کسانی که دانش قوی در زمینهٔ تکنولوژی یا برابری فرصتهای آموزشی دارند نیز در فهرست حامیان ما قرار گرفته اند.

جکسون: اگر اجازه بدهید، می خواهم دربارهٔ اثبات ریاضی که بیشتر ریاضیدانان آن را یکی از مهمترین مسائل آموزشی ریاضی می دانند، از شما سؤال کنم. آیا این یکی از جنبه های مهم استانداردهای به روز شده می باشد؟

بوریل: دقیقاً نمی توانم بگویم که نویسندگان این استانداردها هنوز چه چیزهایی می خواهند بنویسند اما می توانم بگویم که بیشتر ما معتقد هستیم که «اثبات» یکی از مهمترین اجزای ریاضی است. در نتیجه به نظر می رسد که این باور در کارهای آنها بازتاب داشته باشد. به خصوص اگر گروههای مرور کنندهٔ انجمن ریاضی امریکا نیز تقویت شود که من یقین دارم چنین خواهد شد.

جکسون: بعضی از مردم احساس کردند که استانداردهای اولیه فاقد تأکید لازم بر اثبات است.

بوریل: در استانداردهای اولیه، جدولهایی را نوشته بودیم که در یک طرف فهرست موضوعات مورد تأکید را نشان می داد و در طرف دیگر، موضوعاتی که تأکید کمتری داشتند را فهرست کرده بودیم. بعضی مردم اینطور برداشت می کردند که کلمهٔ «تأکید کمتر» به معنای عدم آن می باشد. برای مثال، در استانداردهای اولیه یکی از موضوعاتی که به پیشنهاد ما می تواند حائز اهمیت کمتری باشد، «اثبات دو ستونی»[18] بود. این بدان معنا نیست که این نوع اثبات اصلاً اهمیت ندارد. و باید دور ریخته شود! در دبیرستانهای سنتی، دانش آموزان در درس هندسه در بیشتر موارد، بیشتر وقت خود را در طول سال، صرف اثبات موضوعات پیش پا افتاده می کردند و برای اثبات، آنها را در قالبهای «اثبات دو ستونی» می گذاشتند، بدون اینکه بدانند که چه چیزی را دارند اثبات می کنند. روش اثبات دو ستونی به هیچ عنوان یک ایدهٔ بی اهمیت و طرد شده در استانداردها نمی باشد، بلکه هدف این است که به جای اینکه از دانش آموزان بخواهیم مرتباً موضوعات را از این طریق به اثبات برسانند، به درستی بفهمند که اصلاً اثبات به چه معنا و منظوری می باشد.

ما حدود سه چهارم دانش آموزان را از این موهبت محروم کردیم و این افراد ترکیبی را به وجود آوردند که واقعاً از ریاضی ترسیده بودند.

یکی از چیزهایی که دوست دارم ببینم، سعی در ایجاد یک بنیان محکم برای استدلال موجه است که باید از دورهٔ ابتدایی شروع شود تا دانش آموزان یاد بگیرند که قضاوتهای ریاضی واری بر اساس شواهد و مدارک انجام دهند و درکی از این که واقعاً اثبات چیست داشته باشند. ما قبلاً این بنیان را خیلی خوب بنا نکرده بودیم. قبل از آن که کودکان شروع به صورت بندی (فرموله کردن) فرآیندهای استدلالی خود بکنند، ما نیاز به یک تأکید قوی بر استدلال کردن و تفکر به عنوان یکی زمینهٔ لازم داریم.

جکسون: در دههٔ ۱۹۸۰ «اصلاحات آموزش ریاضی» در انگلستان معرفی شد. در سال ۱۹۹۵، «انجمن ریاضی لندن»[19] با همکاری دو مؤسسهٔ دیگر گزارشی به نام «دست و پنجه نرم کردن با مسألهٔ ریاضی» را در مورد این اصلاحات آموزشی منتشر کردند. این گزارش نقّادانه راجع به کاهش سهولت تکنیکی و فقدان درک

دانش آموزان از اثبات بود. به نظر می رسد که این گزارش شبیه بعضی از انتقادهایی است که در امریکا راجع به اصلاحات آموزش ریاضی می شود. آیا شما بین این دو شباهت می بینید؟ آیا آنچه در انگلستان اتفاق افتاد در به روز کردن استانداردهای NCTM مؤثر است؟

بوریل: دانش عمیقی دربارهٔ این اصلاحات یا این گزارش ندارم، اما نسبت به این چیزها نگران هستم. برای نمونه، مردم کالیفرنیا مرتباً اعلام می کنند که به خاطر اجرای این استانداردها عملکرد دانش آموزان در درس ریاضی افتضاح بوده است. فردی پرسید که مردم از کجا می دانند این استانداردهای جدید واقعاً مورد اجرا قرار گرفته اند و در کاهش عملکرد دانش آموزان مؤثر بوده اند؟ در نتیجه مشخص شد که حقیقتاً هیچ کس نمی دانست که آیا این اصلاحات در کلاس درس به کار گرفته شده بودند یا به نظر می رسید که آنها مدرک واقعی برای گفته های خود نداشتند. در بیشتر موارد، فقط یک نفر چیزی شنیده بود یا کسی عبارتی خوانده بود و از این شنیده یا گفته تفسیر نادرستی کرده بودند. جمع آوری چنین مدارکی کار بسیار سختی است. نزدیک ترین مدرکی که در امریکا داریم، «سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم» (TIMSS) است. این مطالعه نشان می دهد، بیشتر معلمان چیزهایی در مورد

ما نیازمند یک تأکید واقعی بر توسعهٔ حرفه ای درازمدت و هماهنگ شده (ضمن خدمت) و همچنین برنامه های قوی پیش از خدمت معلمان هستیم تا معلمان را برای تدریس ریاضی ای که کودکان نیاز به دانستن آن دارند آماده کند.

اصلاحات آموزش ریاضی می دانند، اما وقتی صحبت از به کارگیری این اصلاحات پیش می آید، جز چند تکنیک مجزا از هم کار دیگری برای حرکت به سمت مراحل برتر تفکر و استدلال که پیام واقعی استانداردها است انجام نشده است. برای ابراز این عقیده در مورد تأثیر این اصلاحات نیاز به مدارک و شواهد بهتری داریم.

هیچگاه یک دوران طلایی در آموزش ریاضی نداشته ایم. بعد از اسپاتنیک که خود من نیز در آن شرکت داشتم، دانش آموزان فوق العاده ای را تحویل جامعه دادیم. با این حال ما تمام انرژی خود را روی فقط چند دانش آموز متمرکز کردیم. ما حدود سه چهارم دانش آموزان را از این موهبت محروم کردیم و این افراد ترکیبی را به وجود آوردند که واقعاً از ریاضی ترسیده بودند. آنها، بعدها نمی توانستند به بچه هایشان در درس ریاضی کمک کنند چرا که از نظر آنها بسیار سخت بود و اصلاً خودشان قبلاً آنرا نفهمیده بودند. ما نمی توانیم دوباره کارها را به همان شیوه ادامه دهیم. امروزه هر کسی بایستی آنچنان از دانش ریاضی برخوردار باشد که بتواند در جهانی که زندگی می کند، کارکرد داشته باشد.

جکسون: عقیدهٔ «ریاضی برای همه»[22] هدف اصلی این استانداردها می باشد. آیا در این چارچوب می تواند اطمینان دهد، افراد تیزهوش و بااستعداد در ریاضی نیز آنچه که نیاز دارند، بدست خواهند آورد؟

بوریل: دانش آموزانی که در ریاضی تیزهوش هستند، بخشی از کل هستند. فکر می کنم که بسیار مهم باشد که برای شکوفا ساختن و به وجود آوردن چالش برای این گونه دانش آموزان، راههایی پیدا کنیم. این کافی نیست که آنها فقط به وسیلهٔ خودشان شکوفا شوند. آنها نیازمند راهنمایی، کمک و فرصت ها هستند. این قطعاً احتیاج به یک اولویت دارد.

جکسون: آیا این بخشی از استانداردهای به روز شده خواهد بود؟

بوریل: البته! دقیقاً نمی توانم بگویم که چگونه این امر محقق خواهد شد. ولی NCTM طوری این استانداردها را تجدیدنظر می کند تا دانش آموزان مستعد شناسایی و آموزش داده شوند.

جکسون: آیا فکر می کنید که از زمانی که شما ریاضی تدریس کرده اید، توانایی های ریاضی دانش آموزان کاهش یافته است؟

بوریل: نه! من فکر نمی کنم. وقتیکه من معلمی را شروع کردم، فقط دو کلاس مقدمات حسابان و دو کلاس جبر سال دوم داشتیم. تعداد دانش آموزان ورودی به مدرسه نسبت به آن زمان تغییری نکرده است. وقتیکه آن مدرسه را ترک کردم، دو کلاس حسابان چهار کلاس مقدمات حسابان و شش کلاس جبر سال دوم وجود داشت. در خلال آن زمان حداقل ظرفیت کلاسهای ریاضی پیشرفته را به دو برابر رساندیم و دانش آموزانی که من داشتم، همگی در درس ریاضی از استدلال و تفکر استفاده می کردند. سؤالاتی می کردند که مجبور می شدم برای یافتن جوابهای آنها به کتابهایم رجوع کنم یا با دیگر همکاران در میان بگذارم و این در حالی بود که

در شروع تدریس، چنین حالتی اصلاً وجود نداشت.

جکسون: می خواهم در مورد دانش های قبلی و ویژگی های یک معلم از شما سؤال کنم. خیلی از مردم نگران هستند که معلمان به اندازهٔ کافی زمینهٔ علمی برای تدریس به روش سنتی یا روشهای توصیه شده در اصلاحات را ندارند. آیا شما فکر می کنید که این نگرانیها قابل توجیه است؟

بوریل: من فکر می کنم این نگرانیها بسیار قابل توجیه هستند. خود من همیشه در این فکر بوده ام که ما بدون اینکه معلمان را برای این کار آماده کنیم، از آنها انتظارات بیش از حدی داشته ایم و به زبان دیگر، بیش از آنچه که به آنها داده ایم از آنها خواسته ایم. ما معلمان بسیاری داریم که برای تدریس ریاضی تأئید شده نیستند. رشتهٔ فرعی حدود ۳۷ درصد از دبیران ریاضی در دبیرستانها آموزش ریاضی یا ریاضی است و حدود ۸۹ درصد از معلمان از معلمان کلاسهای ۵ تا ۸ از چنین آموزشهائی محروم بوده اند. این بدان معناست که این معلمان از حداقل زمینهٔ علمی در ریاضی برخوردار هستند. در بسیاری از مدارس در ایالتهای مختلف برای تدریس ریاضی پیش دبستانی تا پایهٔ هشتم (سوم راهنمایی) تمام چیزی که شما نیاز دارید، فقط گذراندن یک یا دو درس عمومی ریاضی است. آنوقت از این معلمان می خواهیم که از حساب فراتر رفته و ریاضی گسسته، آمار و احتمالات، جبر و هندسه را تدریس کنند اما ما واقعاً برای تدریس این مطالب به آنها زمینهٔ علمی لازم را نداده ایم! این وضعیت بسیار ترسناک است.

در حال حاضر، در بسیاری از مدارس با کمبود معلم ریاضی روبرو هستیم. برای مثال، شهر میلواکی شدیداً به معلم ریاضی نیاز دارد. خودم شخصاً خبر دارم که در دو منطقهٔ حومهٔ شهری، آگهی برای استخدام دبیر با مزایای بالا منتشر کردند ولی هیچکس پیدا نشد. بنابراین، برای جبران این کمبود از دبیران بازنشسته استفاده می کنند. نیاز به دبیران ریاضی که از دانش ریاضی قابل قبولی برخوردار باشند و بدانند که چگونه تدریس کنند، موضوع بسیار نگران کننده ای شده است. این موارد نشان می دهد که ما نیازمند یک تأکید واقعی بر توسعهٔ حرفه ای درازمدت و هماهنگ شده (ضمن خدمت) و همچنین برنامه های قوی پیش از خدمت معلمان هستیم تا معلمان را برای تدریس ریاضی ای که کودکان نیاز به دانستن آن دارند آماده کند.

جکسون: در سال جاری کلینتون پیشنهاد تهیه و توسعهٔ یک آزمون ملی ریاضی برای پایهٔ هشتم را داد. کنگره برای آن بودجه تصویب نکرد و ممکن است که این از بین برود. بنظر شما آیا این یک پیشنهاد خوب است؟

بوریل: فکر می کنم این ایده یک فرصت عالی بوجود آورد اما دارای پیامدهای زیانباری جدی است. این ایده ممکن است یک برنامهٔ مشترک برای انتخاب مطالب مهم ریاضی که دانش آموزان باید تا پایهٔ ۸ بدانند را فراهم کند و انتظارات بالائی را از کودکان در سراسر ایالات متحده ایجاد کند و بازخوردهائی بدهد که برای معلمان و والدین مفید باشد با این حال ما باید مکانیزمهای حمایتی لازم را برای معلمان مدارس فراهم کنیم تا دانش آموزان، زمینهٔ

اگر می توانستیم امکانات را برای تهیه استانداردهای مناسب و بالا بردن موفقیت دانش آموزان در درس ریاضی بسیج کنیم، تصور کنید که چقدر در علم ریاضیات پیشرفت می کردیم.

علمی مناسب برای موفقیت در آزمون ها را داشته باشند. اگر می توانستیم امکانات را برای تهیه استانداردهای مناسب و بالا بردن موفقیت دانش آموزان در درس ریاضی بسیج کنیم، تصور کنید که چقدر در علم ریاضیات پیشرفت می کردیم.

این خطر بالقوه وجود دارد که اگر دانش آموزان در درس ریاضی پیشرفت نکنند و ما نیز برای کمک به آنها و معلمانشان دخالت نکنیم، بار دیگر با معلمان شرمنده و مدارس شرمنده ای که در آنجا دانش آموزان دارای عملکرد پائینی هستند مواجه خواهیم شد. ما در حال حاضر، می دانیم که بعضی از ایالت ها از لحاظ عملکرد ریاضی بسیار ضعیف هستند. نیازی نداریم که برای گرفتن این اطلاعات، آزمون دیگری را تهیه و اجرا کنیم. در نتیجه، با برگزاری آزمون مجدد ممکن است هم به سرزنش کردن یکدیگر بپردازند یا آنکه نتیجهٔ آزمون، ما را قادر سازد که مدارس و مناطق آموزشی را رتبه بندی کنیم. ولی فکر نمی کنم که هدف این آزمون، چنین چیزی بوده باشد. بنابراین اگرچه از یک طرف ممکن است چیزهای خوب و مهیجی از این نتایج حاصل شود ولی از طرف دیگر این نتایج مستعد سوء استفاده هستند.

جکسون: با شروع سال ۱۹۶۸، دولت برای یک مطالعه و

تحقیق بسیار گسترده بنام «پروژه تکمیلی»[23] بودجه ای را تصویب نمود. این پروژه، یک بیلیون دلار هزینه دربرداشت و حدود سی سال بطول انجامید. هدف این پروژه بررسی چگونگی تأثیر روشهای تدریس و فلسفه های [آموزشی] مختلف بر عملکرد دانش آموزان بود. آنچه که آنها یافتند این بود که روش سنتی «آموزش مستقیم» از روشهای دیگر مؤثرتر و مفیدتر بود. آیا با این پروژه آشنا هستید؟

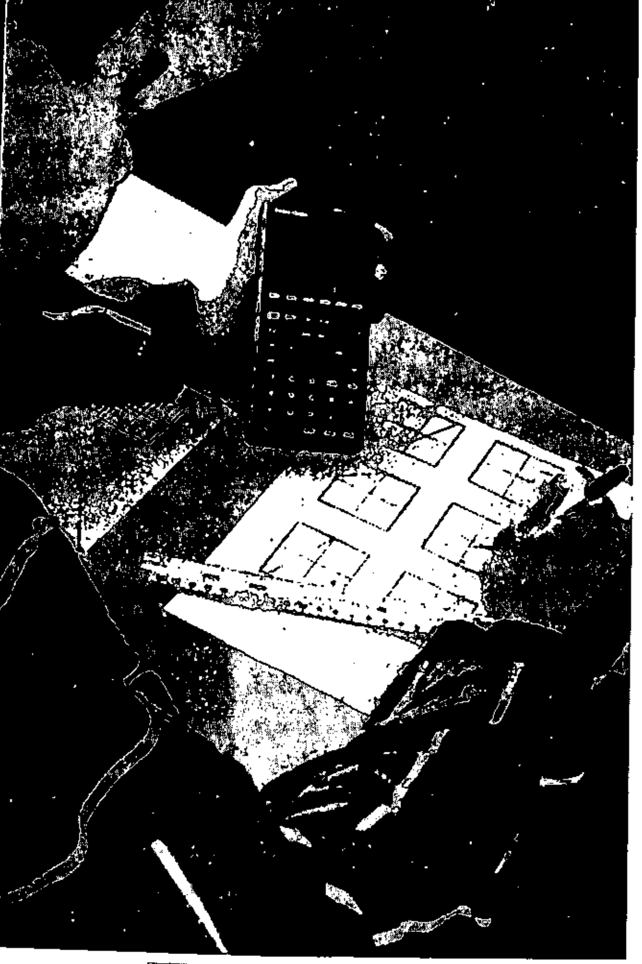
بوریل: تا حال خبری از آن نشنیده ام. من معتقدم که در برنامه ریزی درسهای ریاضی باید از استراتژی های مناسب برای قادر کردن دانش آموزان به یادگیری استفاده کنیم و این بدان معناست که گاهی اوقات من بعنوان معلم باید بایستم و سخنرانی کنم. گاهی اوقات دانش آموزان من نیازمند جستجو مطلب توسط خودشان هستند و گاهی آنها نیازمند این هستند که به تنهایی کار کنند. بعضی از مسایل ریاضی بهتر است که به طور تیمی که هر کس وظیفهٔ خاصی دارد انجام شوند، بعضی دیگر از مسایل به صورت کار تیمی خوب هستند وقتی که دانش آموزان دربارهٔ بهترین راههای حل مسأله به بارش ذهنی[24] می پردازند و شما نیاز دارید که بعضی مسایل را فقط به وسیلهٔ خودتان حل کنید. پس گفتن این که یک روش به تنهایی روش درستی است صحیح نمی باشد. یافته های پژوهشی نشان می دهد. که هر کسی بطریقی مطلب را درک می کند و یاد می گیرد و تأکید اصلاحات نیز بر همین نکته است. مثلاً دربارهٔ احتمالات بدفهمی[25] داشته باشد و با آن بدفهمی به کلاس من بیاید و من نیز تمام چیزهای صحیح و درست دربارهٔ احتمالات را به او بیاموزم بدون اینکه با بدفهمی های او برخورد کرده باشم ـ مسلماً هیچ توفیقی در آموزش این مطلب کسب نکرده ام. در نتیجه، یک سال بعد راههای درستی را که به آنها آموخته بودم رها می کنند و دوباره تأکید می کنم که یافته های پژوهشی این مطلب را تأئید می کنند. آنها به بدفهمی های خود بازمی گردند و بر اساس آنها تصمیم گیری می کنند. اگر ما تفکر و استدلالی را که دانش آموزان در موقعیتهای ریاضی می آورند توسعه ندهیم، هیچگاه قادر نخواهیم بود که آنها را به سمت چیزی بیش از بدفهمی هایشان حرکت دهیم.

جکسون: آنچه که شما دربارهٔ آن صحبت می کنید، درک و تصور و قوهٔ تمیز بالایی را از جانب معلمان طلب می کند چرا که نه تنها بایستی خود دانش آموزان را از نظر درک مفاهیم ریاضی بشناسند بلکه بایستی تا آن حد از دانش ریاضی برخوردار باشند که هم متوجه بدفهمی ها شوند و هم راههایی را پیدا کنند که بتوان از طریق آنها، دانش آموزان را به سمت ایدهٔ درست راهنمایی کنند.

بوریل: همینطور است. برای من به عنوان یک معلم خیلی راحت تر است که برای انجام این امر، از یک روش استفاده کنم ـ روشی که خود با آن ریاضی را درک کرده ام، یا روش کتاب. اما اگر روش یادگیری کودکان با آنچه که من می دانم یا کتاب می گوید فرق داشته باشد، بایستی آمادگی آن را داشته باشم که روش خود را تغییر دهم. باید به قدر کافی ریاضی بدانم تا آزادی انجام این تغییر را داشته باشم. وقتی به دانش آموز گوش می دهید، آنها سؤالهائی از شما می کنند که آن سؤالها شما را به مسیرهای مختلف می کشاند و شما به عنوان معلم، نیازمند دانستن این هستید که آیا آن مسیرها به پایان یکسان در ریاضی می رسد؟ و شما باید تصمیم بگیرید که آیا آن مسیرها از نظر ریاضی، سودمند هستند یا خیر؟ شما برای این تصمیم گیری ها، نیازمند دانستن مقدار زیادی ریاضی بدانید تا بتوانید آن انتخابها را بکنید تا به دانش آموزان کمک کند که چه چیزهایی را باید یاد بگیرند.

زیرنویسها:

1. Gail Burrill
2. National council of Teachers of Mathematics (NCTM)
3. Marquette
4. Loyola
5. Data Driven mathematics
6. Mathematics in context
7. Presidential Awardee for Teaching Mathematics and science
8. Wisconsin Distinguished Mathematics Educator
9. American Mathematical society (AMS)
10. Mathematical Association of America (MAA)
11. k-12 Mathematics Education in the Twenty-first century
12. Notices
13. Joan Ferrini-mundy
14. Mery Lindquest
15. Association Review Groups
16. Conference Board of Mathematical sciences
17. Roger Howe
18. Two-column proof
19. London Mathematical society
20. Third International mathematics and science study
21. Sputnik
22. mathematics for all
23. Project Follow-Through
24. Brainstorm
25. misconceptions



چگونه تسلط بر تکنولوژی می تواند کلاسهای ریاضی را تغییر دهد؟

نویسنده: سارا جینی هالیستر دیوس
مترجم: شهرناز بخشعلی زاده
گروه ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف

مقدمه

در راستای یکی از هدف های مجله که آشنا ساختن معلمان عزیز ریاضی با تجربه های تدریس است، مقالهٔ زیر به سفارش هیأت تحریریه توسط سرکار خانم بخشعلی زاده کارشناس محترم گروه ریاضی ترجمه شده است. این تجربه در نوع خود بدیع است و نویسنده این تجربه را نه به عنوان یک تمرین عادی تدریس در کشورش بلکه به عنوان یک نوآوری که به طور طبیعی با مقاومتهای زیادی نیز روبه رو شده است معرفی می کند. بحث تکنولوژی و چگونگی حضور و نقش آن در یادگیری ریاضی همچنان یکی از موضوعهای بحث انگیز در سراسر دنیا است. آشنائی با تجربه های موفق به غنای بحثها می افزاید.

مجلهٔ رشد ریاضی در اینجا فرصت را غنیمت شمرده و مأخذ این نوشته را حضور خوانندگان عزیز معرفی می نماید:

«رهبری آموزشی» مجلهٔ «اتحادیهٔ نظارت و توسعهٔ برنامهٔ درسی» (ASCD) است. این اتحادیه در نیمهٔ جنگ جهانی دوم به وجود آمد و در هرسال، ۸ شماره از مجلهٔ «رهبری آموزشی» را منتشر می کند. مخاطب اصلی این مجله رهبران آموزشهای ابتدائی، راهنمائی و متوسطه است. با این حال، برای هر علاقه مندی در زمینهٔ نظارت، برنامهٔ درسی و رهبری مدارس مفید است. این مجله دیدگاههای مختلف را ارائه می کند امّا دیدگاههای ارائه شده الزاماً مورد تأیید اتحادیّه نیستند. هر شماره شامل سه قسمت: متن اصلی، تحقیق و توسعه است. در هر شماره، عنوان متن اصلی بر روی مجله نوشته می شود و مقاله ها اغلب دارای تصویرهائی از کلاسهای درس واقعی هستند. با نگاه کردن به شماره های مختلف، فرصت مناسبی ایجاد می شود تا روند تغییرات آموزشی در جامعهٔ آمریکا دیده شود. همچنین، می توان متوجه شد که تا چه اندازه انتظارات جامعه تحت تأثیر حرکتهای اجتماعی و سیاسی بوده است.

در طول پنج سال، یک معلم مدرسهٔ راهنمایی مریلند و دانش آموزانش یاد گرفتند که از گنجینهٔ تکنولوژی های جدید استفاده نمایند. آنها این تکنولوژی های جدید را در برنامهٔ درسی بین رشته ای خود به کار بردند و به یادگیری ادامه دادند ـ یک بایت در هر زمان.

شش سال پیش، وقتی که من شروع به تدریس ریاضیات کردم، فقط از یک شکل تکنولوژی استفاده کردم: ماشین حسابی که عملیات ابتدایی را انجام می داد. همان ماشین حسابی که در طول به اتمام رسانیدن دورهٔ دانشگاهی از آن استفاده می کردم. (من در سال ۱۹۹۰ فارغ التحصیل شدم.) به نظر می آمد که انقلاب تکنولوژی تا اواخر دههٔ ۱۹۸۰ و اوایل ۱۹۹۰، مدارس عمومی را مورد تأثیر قرار نداده بود.

زمانی که به عنوان یک همکار در مدرسهٔ راهنمایی ایستُن[1] در نزدیکی ساحل ایسترن[2] در مریلند شروع به کار کردم، دیگر نمی توانستم یک کلاس ریاضی را بدون کامپیوتر، برنامه های

واژه‌پردازی، ماشین حسابهای گرافیکی (رسام) (که به وسیلهٔ پول اعانه و اهدائی محلی خریداری شده بودند)، طرحهای گرافیکی، آزمایشگاههای وابسته به کامپیوتر برای ماشین های حسابگر از نوع خاص[3] و چاپگر رنگی و صفحه نمایش تصور کنم، تا پایان سال، دانش‌آموزان من که یک مخلوط نامتجانس از نژادها، مذاهب، خانواده های با درآمدهای مختلف، سطوح توانایی مختلف بودند، یک جهش بزرگ به سوی هدفهای تکنولوژی قرن ۲۱ که توسط وزارت آموزش و پرورش آمریکا در سال ۱۹۹۵ [4] شرح داده شده بود، برداشتند. چگونه ما شروع کردیم؟ چگونه در طی ۵ سال اینگونه عمل کردیم؟ یک بایت در هر زمان.

آموزش تکنولوژی و واژگونی نقش

چون من هیچگونه آموزش تکنولوژی در دبیرستان و یا کالج نداشتم، به منابع مدرسه و آموزش مجانی جهت افزایش مهارتهایم روی کردم. تمام ۵ نظام مدرسه ای در تگزاس و مریلند که با آنها کار کرده ام، به معلمان آموزش برنامه های واژه پردازی[5] و تکنولوژی اداری از قبیل مایکرو سافت ورد[6] و گراف پرو[7] که هر دو برای استفاده کننده راحت هستند[8] را ارائه می کنند. این آموزش مقداری زمان لازم دارد ولی بیشتر سیستم های مدرسه ای به معلمان امتیازاتی اعطا می کنند که ارزش صرف وقت را دارند. به علاوه، برنامه های کامپیوتری اداری، معلمان و کارمندان را قادر می سازند تا از وقتشان با سودمندی بیشتری استفاده نمایند. من بر تمام این برنامه ها از طریق کار درسی و آزمایش و خطای مستقل تسلط پیدا کردم. سپس قادر شدم تا از وقتی که کامپیوتر برایم صرفه جویی نمود، برای کمک به دانش‌آموزان، همفکری با همکاران و ارتباط با خانواده ها استفاده کنم و از زمانی که شروع به تولید و ذخیرهٔ طرحهای درس و نمرات را در کامپیوتر کردم، کلاس درس من بیشتر جنبهٔ حرفه ای پیدا کرد.

در یک نگاه بازنگرانه، این یک اشتباه بود اگر همانطور که من استفاده از تکنولوژی را یاد گرفتم، آنها را با دانش‌آموزانم نیز در میان نمی گذاشتم. دانش‌آموزان از جمله بهترین منابع برای یک نوآموز کامپیوتر می باشند و آنها معمولاً با بزرگسالان به همان اندازه صبورند که با همکلاسیهایشان.

من بیش از پیش، سال تحصیلی ۹۷-۹۶ را در ایستُن با ابزار تکنولوژی شروع کردم. علاوه بر برنامه های اداری و واژه پردازی، ماشین حسابهای گرافیکی[9] و تلویزیونها و ویدئوهای متصل به کامپیوتر و نرم افزارهای برنامهٔ درسی کامپیوتری و آزمایشگاههای مبتنی بر ماشین حساب نیز داشتم. ما همچنین دسترسی به اینترنت[10] نیز داشتیم.

من مهارتی در رابطه با داخل و خارج این دستگاهها نداشتم، ولی دراین زمان به دانش‌آموزانم اجازه دادم تا به همراه من یاد بگیرند.

در برخی موارد، آنها معلم بودند که این خود یک تجربهٔ خوش‌آیند و فروتنانه بود. در این فرآیند، کلاس درس بطور واقعی دانش‌آموز محور شده بود و همانطور که همفکری ما افزایش یافت، عزّت نفس[11] دانش‌آموزان نیز افزایش می یافت.

تدریس تجهیزات کاملی از ابزار

چندین روز را صرف تدریس اعمال ماشین حساب های گرافیکی کردم. این ابزار، دانش‌آموزان را قادر می سازند که بتوانند معادلات را به نمایش های ترسیمی تبدیل کنند، بنابراین به آنها کمک می کنند که بتوانند مابین موضوعات ریاضی ارتباط و اتصال[12] برقرار کنند. همچنین دانش‌آموزان می توانند از این وسایل جهت پیش بینی براساس تحلیل آماری از سوابق قبلی، استفاده کنند ــ برای مثال، رکورد جهانی برای دویدن یک مایل.

هنگامی که ماشین حساب های گرافیکی را به کلاس جبر خودمان معرفی کردم، دانش‌آموزان بلافاصله آن را نپذیرفتند. بنظر می رسید که بکار بردن آن بیشتر از بکار نبردن آن کار می برد (در واقع دو ماه گذشت تا اینکه دانش‌آموزان در رابطه با استفاده از ماشین حساب احساس آرامش کردند.). جهت ایجاد انگیزه در آنها، شروع به امتیاز دادن کردم. هر روز از آنها دعوت کردم که برای دریافت نمره اضافی، اولین نفری باشند که یک عمل جدید را یاد بگیرند یا اعمال جدیدی، که هنوز تدریس نشده اند، را کشف کنند. این انگیزه های مثبت به آنها اجازه داد که چیز جدیدی را سعی کنند، زیرا که اگر موفق نمی شدند، چیزی را از دست نمی دادند.

اینترنت، تلویزیون و ویدئو با اتصالات کامپیوتری، دیوارهای کلاس درس مان را فرو ریختند! قادر بودیم منابع بسیاری را که بر روی اینترنت یافتیم، بر روی نوار ضبط کرده و نمایش دهیم. صحنه های ویدیوئی از برخاستن موشک، الگوهای ترافیک هوائی، فاجعه های طبیعی، و سایر وضعیت های طبیعی در زندگی را جهت نمایش ریاضی در عمل انتخاب کردم.

نرم افزار برنامه درسی کامپیوتری، همانند برنامه ای که توسط شرکت برنامه درسی کامپیوتری[13] تولید شده است، مرا قادر ساخت که نیازهای فردی دانش‌آموزان را تحت نظر قرار دهم. این نرم افزار به دانش‌آموزان اجازه داد که با سرعت خودشان پیشرفت کنند. ۲۰ تا ۳۰ درس را با استفاده ازاین برنامه ها تدریس کردم. این نرم افزار بلافاصله به دانش‌آموزان بازخورد می داد و هرگاه لازم بود، مواد را مجدداً تدریس می کرد.

اگرچه این نرم افزار برای استفادهٔ فردی طراحی شده بود، با این حال، از دانش‌آموزان خواستم دوبه دو کار کنند تا تشویق شوند که به عنوان منبع از یکدیگر استفاده کنند. پس از کسب اجازه از هیأت رئیسهٔ مدرسه، به هر دو دانش‌آموز یک کامپیوتر اختصاص دادم.

مزایای این امر هیجان‌آور بود. نه تنها دانش‌آموزان به هدف رسیدند، بلکه شروع به مباحثه درباره ریاضیات کردند. هنگامیکه در دسترس آنها نبودم، بلافاصله شروع به یادگیری از یکدیگر کردند. علاوه بر افزایش عزت نفس دانش‌آموزان، این ترتیب آنها را تشویق کرد که بیشتر بطور مستقل کار کنند.

و در نهایت، چگونگی طرز کار با آزمایشگاههای براساس ماشین حساب[14] را فرا گرفتیم - در واقع ابزار دستی ای که جستجوگری را به ماشین حساب های گرافیکی متصل می کنند. این کار، دانش‌آموزان را قادر می سازد که چگونه داده ها را جمع آوری کرده و سپس چگونه نمودار و تحلیل های آماری بر روی ماشین حساب گرافیکی یا پایانهٔ کامپیوتر، ایجاد کنند. جهت تدریس برنامهٔ نویسی با این دستگاه به دانش آموان کلاس هشتم، مجدداً برای هر دو دانش‌آموز یک صفحه کامپیوتر اختصاص داده و اجازه دادم که داده ها را با مشارکت یکدیگر تحلیل کنند.

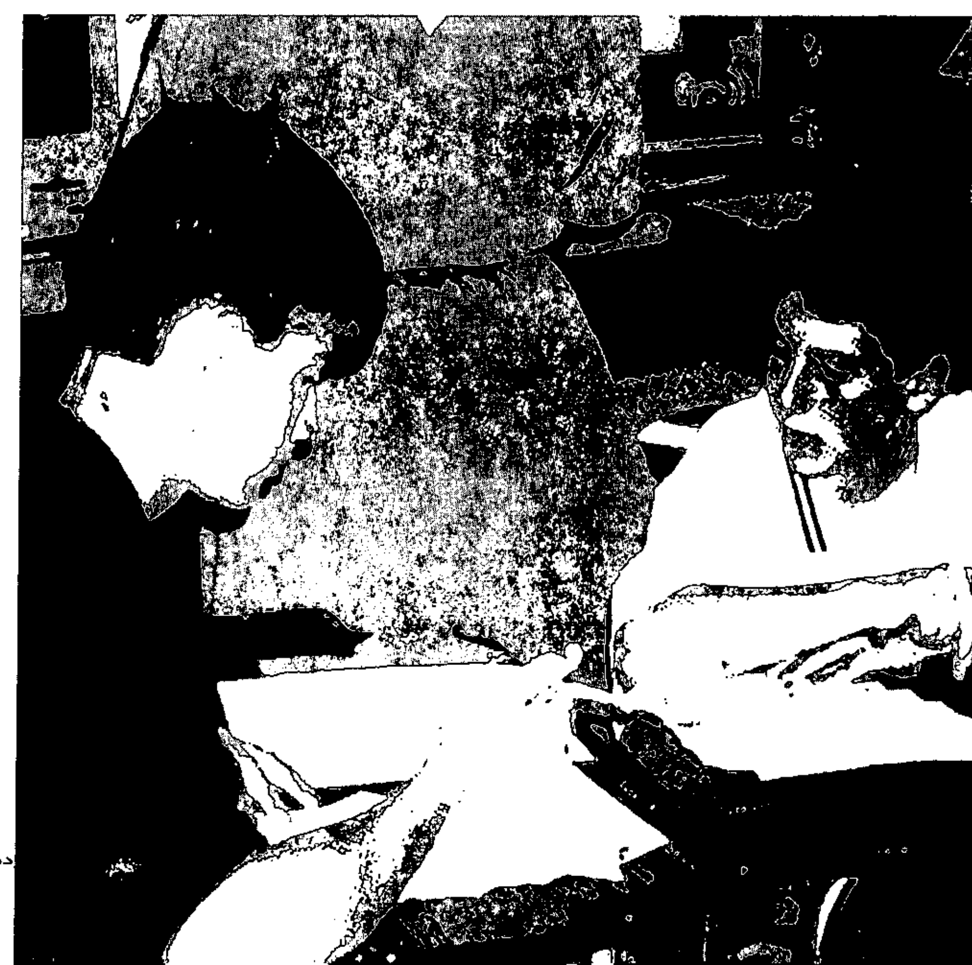
فرو ریختن دیوارهای کلاس

هر شکلی از تکنولوژی که سال قبل استفاده کردیم، دانش‌آموزان را به چالش طلبید و برنامه درسی ام را تغییر داد. برای مثال، در یک پروژه، ریاضیات را در بخشی از یک تبلیغ قرار دادیم که ترکیبی از انگلیسی و تاریخ بود. در حالیکه دانش‌آموزان مقطع خاصی از زمان را در کلاس تاریخ مطالعه می کردند، توانستند تبلیغی برای مفاهیم ریاضی خلق کنند که در طول همان دوره از تاریخ توسعه یافته بود. آنها همچنین مجلات با ارتباطات بین رشته ای درمیان تمام عناوین، حتی آنهائیکه در زمینه هنر بودند، را بر روی دیسکت های مجزا ضبط کردند.

در پروژهٔ دیگری، دانش‌آموزان دائماً از آزمایشگاههای براساس ماشین حساب، در آزمایش های مشارکتی علوم استفاده کردند. آنها داده ها را در کلاس علوم جمع آوری، و سپس درکلاس ریاضی آن داده ها را از نظر آماری تحلیل کردند. در پایان سال، امکان وارد کردن کامپیوتر به تمام دروس را با سایر معلمان درمیان گذاشتم.

چندین سال پیش، مدرسهٔ راهنمائی ایستن شروع به سازماندهی کلاس ها برای تدریس گروهی نمود. برای اجرای این امر، مدرسه هر پایه را به دو گروه تقسیم کرد، هر گروه توسط هیأت و تیم متفاوتی ازمعلمان برای موضوعات اصلی درسی تدریس شد. اگرچه در کلاس هشتم فقط یک تیم ۱۰ نفره از معلمان برای تمام ۳۲۰ دانش‌آموزان پایهٔ هشتم داشتیم. با تقسیم نکردن دانش‌آموزان، امیدوار بودیم که از دسته بندی جلوگیری کنیم و دانش‌آموزان را تشویق به کار بصورت یک تیم کنیم. گروه معلمان ما شامل دو معلم ریاضی، دو معلم علوم، سه معلم انگلیسی، دو معلم علوم اجتماعی، و یک معلم آموزش های ویژه بود. هر دو هفته یک بار، تمام اعضای تیم، و هر هفته یکبار در گروه های کوچکتر برطبق موضوعات درسی، ملاقات داشتیم. دو روز دیگر را نیز جهت برنامه ریزی و برگزاری کنفرانس والدین - دانش‌آموزان، جلسه داشتیم.

سال گذشته، یک پروژه یکساله در مورد انرژی را به برنامه درسی اضافه نمودیم. در طول تابستان گرد هم آمدیم و هدف ها را برای دانش‌آموزان کلاس هشتم برای ۹۷-۱۹۹۶ تعیین کردیم. براساس موضوعهای درسی، پروژه را به چند قسمت تقسیم کردیم. معلمان علوم از دانش‌آموزان خواستند که پروژه را با تحقیق در مورد یک موضوع انرژی، با استفاده از اینترنت و مرکز چند رسانه ای[15] مدرسه، شروع کنند. معلمان انگلیسی، زبان، و تاریخ، تحقیق را بر روی اینترنت ادامه دادند. دانش‌آموزان آنها با استفاده از برنامه های واژه پردازی نامه هائی به مراکز اطلاعاتی مختلف



فرستادند، و یک مقاله تحقیقاتی نوشتند. من و یک همکار دیگر ریاضی، با استفاده از ماشین حساب های گرافیکی، برنامه های واژه پردازی را از نظر آماری مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم و نمودارهای اطلاعات جمع آوری شده را رسم کردیم.

این پروژه با بحث و گفتگو بین دانش آموزان و آماده سازی آنها برای ارائه سمینار راجع به اطلاعاتی که جمع آوری کرده بودند، خاتمه یافت. تلاش زیادی صرف این مشارکت شد، ولی دانش آموزان آنرا دوست داشتند. با استفاده از واژه پرداز آنها توانستند نامه ها و مقالات تحقیقاتی شان را سریعتر بنویسند و آنها را تجدیدنظر کنند. آنها همچنین دریافتند که اینترنت منبع فوق العاده ای از اطلاعات در مورد موضوع انرژی می باشد.

> **در تمام کلاسهایی که تکنولوژی را با برنامه درسی آنها تلفیق کردیم، میانگین سالانهٔ نمرات و همچنین رتبهٔ آنها در امتحانات استاندارد سراسری کشور رضایت بخش و یا بالاتر بود.**

موانعی که ارزش چیره شدن دارند.

استفاده از تکنولوژی بدون ناگواری و سردرگمی نیست. یک مثال: چالش با پیامهای خطای دریافتی از کامپیوتر و ماشین حساب! کنار آمدن با پیام های خطای ۳۲ دانش آموز متناوباً سرگرم کننده و مهیج بود. این مسائل نیاز به انعطاف پذیری (تخصیص زمان اضافی) و حمایت اداری (همکاران برنامهٔ درسی من در کلاس درس به من کمک کردند)، و همچنین صبر و حس شوخ طبعی داشت.

در کلاس دیگری، با گروه بزرگی از دانش آموزان کار می کردم که سطح مهارت آنها و همچنین سطح مهارت والدین آنها در کامپیوتر و ماشین حساب از مبتدی تا تخصصی بود ـ این موضوع کمک کرد تا بتوانیم یک پروژکتور اسلاید برای ماشین حساب گرافیکی و یک چاپگر از صفحه با مراحل پیاپی داشته باشیم. علاوه برآن، در ابتدا تمام والدین حاضر نبودند به فرزندان خود اجازه بدهند با استفاده از تکنولوژی به اهداف درسی برسند. ولی با ارتباط پیوسته و بکار گرفتن سیاست کلاس درس باز، والدین به بزرگترین پشتیبان من برای استفاده از تکنولوژی درکلاس درس تبدیل شدند.

در پایان سال، دانش آموزان نه تنها دانش الگوریتمی از موضوعات جبری را فرا گرفته بودند، بلکه قابلیت بکارگیری این موضوعات در مسائل واقعی و ارائه راه حل را نیز آموخته بودند.

در تمام کلاس هائیکه تکنولوژی را با برنامه درسی تلفیق کردیم، میانگین سالیانه نمرات و همچنین رتبهٔ آنها در امتحانات استاندارد سراسری کشور رضایت بخش و یا بالاتر بود.

امیدوارم سایر معلمانی را که با بیم و هراس به عصر تکنولوژی نزدیک می شوند را تشویق کرده باشم. پنج سال پیش، هنگامیکه شروع به تدریس کردم، به طور محرمانه به دوستی گفتم که فرا گرفتن کامپیوتر، زمان غیرقابل تصوری را لازم دارد، و به عنوان معلمی که اولین سال تدریس مشغول بودم مطمئن نبودم که آیا یک چنین چیزی باید تقدم داشته باشد؟ آن دوست نگاهی به من کرد و پرسید: «می توانی تحمل کنی که نه تنها یک نسل از دانش آموزان خود، بلکه همانطور که زمان پیش می رود، چندین نسل عقب باشی؟»

مرجع اصلی:

sara Jeanne Hollister Davis

How Mastering Technology can transform Math class.

EDUCATI ONAL LEADERSHIP volume 55, NO. 3, November 1997

sara Jeanne Hollister Davis در سال گذشته در مدرسه راهنمایی ایستُن تدریس می کرده و اکنون سرپرست محتوا در فرهنگستان جنوب غربی در بالیمتور می باشد. شما می توانید با او به آدرس زیر تماس برقرار کنید:

1780 HOLLADAY PARK Rd.,

GAMBRIlls, MD. 21054, U.S.A.

(e -mail: Ldkej @ hotmail. com)

زیرنویس ها:

1. Easton

2.Eastern

3. Computer Labs for Texax Instruments graphing calculators

۴ـ وزارت آموزش و پرورش امریکا (۱۹۹۵)، بیانیهٔ اصول تکنولوژی در تغییرات آموزش ریاضیات و علوم. (واشنگتن ـ امریکا ـ اداره چاپ دولتی)

5- Word Processing Program

6- Micro soft word

7- Graph Pro

8- User-friendly

9- Graphic calculator

10- Internet

11- self-esteem

12- Connection

13- Computer Curriculum Corporation

14- Calculator-based "Laboratories"

15- Multimedia center

زنجیرهای مارکف

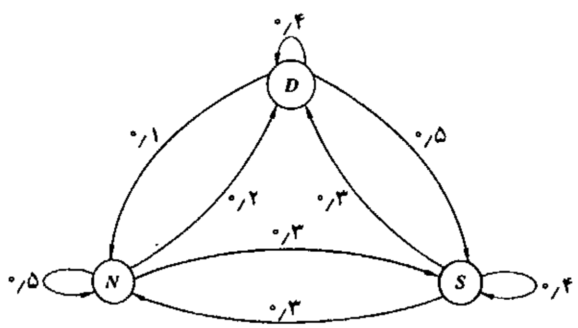
مترجم: روح اله جهانی پور ، دانشگاه صنعتی شریف

در این مقاله مثالهایی از زنجیرهای مارکف را که ردهٔ مهمی از مدلهای ماتریسی را تشکیل می دهند ، با تفصیل مورد بررسی قرار می دهیم . طی چند مثال ساده که از زندگی روزمره اخذ شده اند ، مفاهیم اصلی مربوط به زنجیرها و فرآیندهای مارکف معرفی می شوند . در انتها تمرینهایی نیز برای خواننده آورده شده است ، تا محکی باشد برای سنجش میزان آشنایی با مفاهیم و مهارت یافتن در جنبه های محاسباتی .

مثال ۱: مسئلهٔ تاکسی : یک شرکت تاکسی رانی شهر را به ۳ ناحیه تقسیم کرده است ـ جنوب ، مرکز و شمال شهر ، این شرکت با بررسی تاکسی مترها و قبض های دریافت شده متوجه شده است که از بین مسافرانی که در شمال شهر سوار شده اند ، ۵۰٪ در همان ناحیه مانده اند ، ۲۰٪ به مرکز شهر و ۳۰٪ به جنوب شهر رفته اند . از بین مسافرانی که در مرکز شهر سوار شده اند ، ۱۰٪ به شمال و ۵۰٪ به جنوب رفته اند و ۴۰٪ در همان ناحیه باقی مانده اند . از بین مسافرانی که در جنوب شهر سوار شده اند ، ۳۰٪ به هر یک از شمال و مرکز شهر رفته اند ، و ۴۰٪ در همان ناحیه باقی مانده اند .

می خواهیم بدانیم توزیع تاکسی هایی که در طول زمان ، مرتب مسافران را سوار و پیاده کرده اند چگونه است . این در حالت کلی مسئله مشکلی است و در این مثال ابتدا با یک سئوال ساده تر درمورد آن ، بحث را شروع می کنیم . جهت گیری مثالهای بعدی در این مقاله به سمت بررسی طولانی ـ مدّتِ توزیع تاکسی ها در شهر خواهد بود . اما سئوالی که هم اینک به آن خواهیم پرداخت این است که : اگر یک تاکسی حرکت خود را از مرکز شهر شروع کند ، احتمال اینکه بعد از پیاده کردن سومین مسافر خود باز در مرکز شهر باشد چقدار است؟

اطلاعات موجود در این مثال را می توان با یک نمودار وضعیت نمایش داد . این نمودار شامل دو چیز است : (الف) سه وضعیت D ، N و S به ترتیب متناظر با مرکز ، شمال و جنوب شهر ؛ (ب) احتمالهای حرکت از یک ناحیه به ناحیهٔ دیگر . نمودار وضعیت برای مسأله تاکسی در شکل ۱ نشان داده شده است . به طور کلی حرکت از یک وضعیت به وضعیتی دیگر را **انتقال** می نامیم . در این مثال انتقال متناظر است با سوار شدن مسافر در یک ناحیه و پیاده شدن او در ناحیهٔ دیگر . انتقال از هر ناحیه به هر یک از سه ناحیهٔ موجود امکان پذیر است ؛ بنابراین در نمودار وضعیت ، هر وضعیت به همهٔ وضعیت های دیگر از جمله خودش متصل می شود .



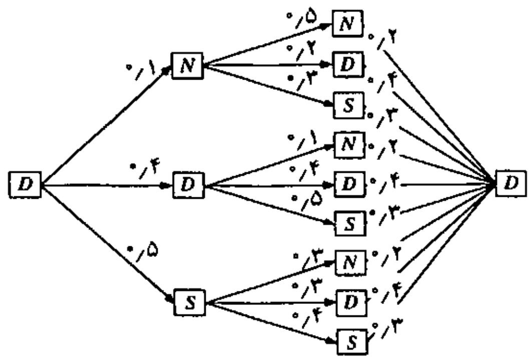
شکل ۱ : نمودار وضعیت برای مسئله تاکسی

یک تاکسی که از مرکز شهر شروع به حرکت می کند و پس از انتقال ۳ مسافر باز در مرکز شهر است ، مسیرهای مختلفی را در نمودار وضعیت می تواند طی کند . می تواند اولین مسافر را به جنوب ، دومی را به شمال و سومی را به مرکز ببرد ؛ یا می تواند سه مسافر را به ترتیب به شمال ، مرکز و مرکز منتقل کند . این بحث نشان می دهد که باید همهٔ ترکیب های ممکن مسافران را که سومی به مرکز شهر ختم می شود ، در نظر بگیریم . شکل ۲ ، که *نمودار درختی* نامیده می شود ، همهٔ مسیرهای ممکنی را نشان می دهد که از مرکز شهر شروع می شوند و پس از سوار کردند ۳ مسافر ، مجدداً به مرکز شهر ختم می شوند . اگر یک تاکسی مسافری را در مرکز شهر سوار کند ، با احتمال ۱۰٪ به شمال می رود ، با احتمال ۴۰٪ مسافر را در مرکز شهر پیاده می کند و با احتمال ۵۰٪ سر از جنوب شهر درمی آورد . این احتمالها در نمودار درختی روی خطوط ، که **شاخه** نامیده می شوند ، نشان داده شده اند و به مقصدهای مختلف اولین مسافر مربوط می شوند . اولین مجموعه از شاخه ها از D شروع و به N ، D و S ختم می شوند . شاخه های مربوط به دومین مسافر به طریق مشابه دارای همان احتمالهایی هستند که در نمودار به آنها نسبت داده شده است . هر مسیری در نمودار که از D شروع و به D ختم می شود یکی از دنباله های ممکن سه مسافرتی را که اولی از مرکز شروع و سومی به مرکز شهر ختم می شود ، نشان می دهد . هر کدام از این مسیرها دارای احتمال وقوعی ست که از ضرب کردن احتمالهای هر شاخه در مسیر به دست می آید و هدف ما تعیین احتمالهای مربوط به دنبال کردن هر یک از مسیرهای ممکن موجود در نمودار درختی است .

بعد از یک مسافرت احتمالهای در شمال ، مرکز یا جنوب بودن یک مسافر به ترتیب عبارتند از

$P(N_1) = ۰/۱ \quad , \quad P(D_1) = ۰/۴ \quad P(S_1) = ۰/۵$

که در اینجا اندیس نمایش تعداد مسافرت ها است.



شکل ۲ : نمودار درختی برای مسئله تاکسی

با رجوع به نمودار درختی ملاحظه می کنیم که بعد از ۲ مسافرت، احتمال بودن در شمال را می توان به صورت نمادی با

$$P(N_2) = P(N_1)P(NN) + P(D_1)P(DN) + P(S_1)P(SN)$$

نشان داد، که در اینجا $P(NN)$ احتمال رفتن از شمال به شمال، $P(DN)$ احتمال رفتن از مرکز به شمال و $P(SN)$ احتمال رفتن از جنوب به شمال است. به همین ترتیب احتمال بودن در مرکز و جنوب شهر بعد از ۲ مسافرت عبارتند از

$$P(D_2) = P(N_1)P(ND) + P(D_1)P(DD) + P(S_1)P(SD)$$

و

$$P(S_2) = P(N_1)P(NS) + P(D_1)P(DS) + P(S_1)P(SS)$$

هر یک از جملات در مجموع های بالا حاصلضرب دو احتمال هستند ـ یکی احتمال بودن در یک ناحیه بعد از اولین مسافرت و دومی احتمال حرکت از ناحیه اول به ناحیه دوم در مسافرت دوم است. مثلاً $P(N_1)P(NS)$ احتمال رفتن به شمال در اولین مسافرت ضرب در احتمال رفتن از شمال به جنوب شهر در دومین مسافرت است. با جایگذاری مقادیر مناسب از نمودار درختی در مجموع های بالا به دست می آوریم.

$$P(N_2) = (۰/۱)(۰/۵) + (۰/۴)(۰/۱) + (۰/۵)(۰/۳) = ۰/۲۴$$
$$P(D_2) = (۰/۱)(۰/۲) + (۰/۴)(۰/۴) + (۰/۵)(۰/۳) = ۰/۳۳$$
$$P(S_2) = (۰/۱)(۰/۳) + (۰/۴)(۰/۵) + (۰/۵)(۰/۴) = ۰/۴۳$$

توجه کنید که $P(N_2) + P(D_2) + P(S_2) = ۱$ و این رابطهٔ مطابق انتظار به این معنی است که تاکسی باید بعد از دومین مسافرت در یکی از ۳ ناحیهٔ ممکن باشد.

احتمال بودنِ در مرکز بعد از مسافرت سوم برابر است با

$$\begin{aligned} P(D_3) &= P(N_2)P(ND) + P(D_2)P(DD) + P(S_2)P(SD) \\ &= (۰/۲۴)(۰/۲) + (۰/۳۳)(۰/۴) + (۰/۴۳)(۰/۳) \\ &= ۰/۳۰۹ \end{aligned}$$

بنابراین اگر یک تاکسی از مرکز شهر شروع به حرکت کند با احتمال ۰٫۳۰۹ بعد از مسافرت سوم در مرکز شهر خواهد بود. ■

مثال قبل روش مدلسازی ریاضی برای تحلیل رفتار دستگاهی را توصیف می کند که شامل تعداد متناهی وضعیت (سه ناحیه شهر) و احتمالهای انتقال از یک وضعیت به همهٔ وضعیت های دیگر است. فرض می کنیم که هر بار که دستگاه مشاهده می شود، یک انتقال (یک سوار و پیاده کردن مسافر) رخ می دهد و مشاهدات نیز در بازه های زمانی منظم انجام می شوند. دستگاهی با این ویژگی ها، *زنجیر مارکف* یا *فرآیند مارکف* نامیده می شود.

فرض کنید می خواهیم در مسئله تاکسی احتمال این را که یک تاکسی حرکت خود را از مرکز شهر آغاز کند و بعد از پنج مسافرت مجدداً در مرکز باشد را بیابیم. در این نقطه، یافتن احتمال بودنِ در مرکز شهر بعد از پنج مسافرت کار سختی به نظر می رسد. بیایید به محاسباتی که برای یافتن احتمال بودن در مرکز بعد از ۳ مسافرت انجام دادیم، بازگردیم. از دانش قبلی خود دربارهٔ ماتریس ها می دانیم که محاسبات فوق را می توان با استفاده از ضرب ماتریسی

بسیار ساده تر کرد. احتمال های بودن در هر ناحیه بعد از دو مسافرت که با $P(N_2)$ ، $P(D_2)$ و $P(S_2)$ نشان داده شد، با یافتن مجموعهای حاصلضربها محاسبه شدند. در هر مجموع اولین حاصلضرب عامل ۰/۱ ، دومین حاصلضرب عامل ۰/۴ و سومین حاصلضرب، عامل ۰/۵ را دارد. از این مشاهدات نتیجه می گیریم که احتمالهای بودنِ در هر ناحیه بعد از ۲ مسافرت با بردار سطریی داده می شود که از ضرب ماتریسی زیر به دست می آید.

$$\begin{pmatrix} ۰/۱ & ۰/۴ & ۰/۵ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰/۵ & ۰/۲ & ۰/۳ \\ ۰/۱ & ۰/۴ & ۰/۵ \\ ۰/۳ & ۰/۳ & ۰/۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰/۲۴ & ۰/۳۳ & ۰/۴۳ \end{pmatrix}$$

ماتریس T که به صورت

$$T = \begin{array}{c} \\ N \\ D \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} N & D & S \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} ۰/۵ & ۰/۲ & ۰/۳ \\ ۰/۱ & ۰/۴ & ۰/۵ \\ ۰/۳ & ۰/۳ & ۰/۴ \end{pmatrix} \end{array}$$

تعریف می شود، در محاسبات ما نقشی اساسی دارد. T *ماتریس انتقال* نام دارد، زیرا درایهٔ T_{ij} آن احتمال انتقال از ناحیهٔ i به ناحیهٔ j است. مثلاً T_{13} احتمال این است که مسافری که در شمال سوار می شود به جنوب شهر برود. احتمال اینکه مسافری که در جنوب سوار شده است به مرکز شهر برود، T_{32} است. باادامهٔ بررسی محاسبات قبلی مشاهده می کنیم که احتمال بودن در مرکز شهر بعد از ۳ مسافرت برابر است با حاصلضرب بردار سطری مربوط به احتمالهای ۲ مسافرت و بردار ستونی که ستون دوم T را تشکیل

می دهد :

$$(0/24 \quad 0/33 \quad 0/43)\begin{pmatrix}0/2\\0/4\\0/3\end{pmatrix}=0/309$$

اگر ضرب ماتریسی را که بردار سطری سمت چپ را در معادله فوق به دست می دهد، جایگزینِ آن کنیم، داریم

$$(0/1 \quad 0/4 \quad 0/5)\begin{pmatrix}0/5&0/2&0/3\\0/1&0/4&0/5\\0/3&0/3&0/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0/2\\0/4\\0/3\end{pmatrix}=0/309$$

اگر در حاصلضرب بالا به جای بردار ستونی سمت راست، کل ماتریس T را جایگزین کنیم به دست می آوریم

$$(0/1 \quad 0/4 \quad 0/5)\begin{pmatrix}0/5&0/2&0/3\\0/1&0/4&0/5\\0/3&0/3&0/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0/5&0/2&0/3\\0/1&0/4&0/5\\0/3&0/3&0/4\end{pmatrix}$$

$$=(0/282 \quad 0/309 \quad 0/409)$$

اولین ماتریس سمت چپ در حاصلضرب فوق صرفاً سطر دوم T است. برای به دست آوردن آن می توانیم بردار سطری (۰ و ۱ و ۰) را از سمت چپ در T ضرب کنیم؛ بنابراین محاسبات مربوط به سه مسافرت را می توان به این صورت نوشت

$$(0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}0/5&0/2&0/3\\0/1&0/4&0/5\\0/3&0/3&0/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0/5&0/2&0/3\\0/1&0/4&0/5\\0/3&0/3&0/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0/5&0/2&0/3\\0/1&0/4&0/5\\0/3&0/3&0/4\end{pmatrix}$$

که معادل است با

$$(0 \quad 1 \quad 0)T^3=(0/282 \quad 0/309 \quad 0/409).$$

احتمال اینکه تاکسی حرکت خود را از مرکز شهر شروع کند و بعد از ۳ مسافرت مجدداً در مرکز شهر باشد برابر است با ۰٫۳۰۹ که دومین درایه در بردار سطری فوق است. معنای درایه های دیگر در این بردار سطری چیست؟ نتیجهٔ ضرب کردن T^3 در $(0 \; 1 \; 0)$، سطر دوم ماتریس T^3 است، به طور مشخص بردار سطری $(0/282 \quad 0/309 \quad 0/409)$ به جای اینکه روی سطر دوم T^3 تمرکز کنیم، سئوالی کلی تر زیر را در نظر می گیریم: معنای درایه های T^3 چیست؟

پیش از آنکه به سئوال فوق جواب دهیم، درایه های T^2 را در نظر می گیریم:

$$T^2=\begin{array}{c} \\ N\\ D\\ S\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}N&D&S\end{array}\\ \begin{pmatrix}0/5&0/2&0/3\\0/1&0/4&0/5\\0/3&0/3&0/4\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ N\\ D\\ S\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}N&D&S\end{array}\\ \begin{pmatrix}0/5&0/2&0/3\\0/1&0/4&0/5\\0/3&0/3&0/4\end{pmatrix}\end{array}$$

$$=\begin{array}{c} \\ N\\ D\\ S\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}N&D&S\end{array}\\ \begin{pmatrix}0/36&0/27&0/37\\0/24&0/33&0/43\\0/3&0/3&0/4\end{pmatrix}\end{array}$$

درایهٔ سطر اول و ستون دوم T^2 از ضرب کردن سطر اول T در ستون دوم T به دست می آید:

$$(0/5)(0/2)+(0/2)(0/4)+(0/3)(0/3)=0/27$$

سطر اول T شامل احتمالهای انتقال از N به هر یک از ناحیه های دیگر است، در حالی که ستون دوم T شامل احتمالهای انتقال از هر یک از ناحیه های دیگر به D است. به طور نمادی، حاصلضرب سطر اول در ستون دوم T برابر است با

$$P(NN)P(ND)+P(ND)P(DD)+P(NS)P(SD)$$

که احتمال انتقال از ناحیهٔ N به ناحیهٔ D بعد از ۲ مسافرت است. در ماتریس T^2 درایهٔ سطر اول و ستون دوم برچسب سطریِ N و برچسب ستونی D دارد و احتمال رفتن از N به D را در ۲ انتقال نشان می دهد. به کمک استدلال مشابهی می توان نشان داد که درایه سطر اول ستون اول T^2 احتمال حرکت از N و رسیدن به N بعد از ۲ انتقال را نشان می دهد. در حالت کلی درایهٔ ij ـ ام T^2 نشان دهندهٔ احتمال شروع حرکت از ناحیهٔ i و ختم شدن آن به ناحیهٔ j بعد از ۲ انتقال است.

در مورد درایه های ماتریس T^3 چه می توان گفت؟

$$T^3=\begin{array}{c} \\ N\\ D\\ S\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}N&D&S\end{array}\\ \begin{pmatrix}0/318&0/291&0/391\\0/282&0/309&0/409\\0/3&0/3&0/4\end{pmatrix}\end{array}$$

برچسب های سطرها و ستونها در توصیف T^2 مفید بودند، به همین دلیل برای ماتریس T^3 هم به کار رفته اند. احتمال اینکه حرکتی که از ناحیه D شروع می شود، بعد از سه انتقال در D باشد و قبلاً مقدار آن را ۰٫۳۰۹ به دست آوردیم برابر است با درایه ای با برچسب سطری D و برچسب ستونی D. با استدلالی مشابه آنچه در مورد T^2 بیان شد، نتیجه می گیریم که درایهٔ موجود در سطر D و ستون S احتمال این است که حرکتی که از ناحیهٔ D شروع می شود بعد از سه انتقال در ناحیهٔ S باشد. در حالت کلی درایهٔ ij ـ ام T^3 احتمال را به دست می دهد که حرکتی که از ناحیهٔ i شروع می شود، بعد از ۳ انتقال در ناحیهٔ j باشد.

اکنون به سئوال مورد بحث برمی گردیم: اگر یک تاکسی حرکت خود را از مرکز شهر آغاز کند، احتمال اینکه بعد از پیاده کردن مسافر پنجم در مرکز شهر باشد چقدر است؛ پاسخ این سئوال درایه موجود در سطر D و ستون D در ماتریس T^5 است که برابر است با ۰٫۳۰۰۸۱ ماتریس T^5 با نرم افزار کامپیوتری حساب شده و عبارت است از

$$T^5=\begin{array}{c} \\ N\\ D\\ S\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}N&D&S\end{array}\\ \begin{pmatrix}0/30162&0/29919&0/39919\\0/29838&0/38001&0/40081\\0/3&0/3&0/4\end{pmatrix}\end{array}$$

مثال ۲: در مسئله تاکسی، برای اینکه احتمال بودنِ تاکسی

در شمال شهر بعد از ۳ مسافرت بیشترین مقدار ممکن باشد حرکت خود را از کدام ناحیه باید آغاز کند؟

احتمال بودن در هر ناحیه برای هر یک از ناحیه های آغازی ممکن از ماتریس $T^{۳}$ به دست می آید. احتمال ختم شدن حرکت به شمال برای هر یک از ناحیه های شروعی از ستون ۱، (ستون N در $T^{۳}$) به دست می آید چون اولین درایه در این ستون بیشترین مقدار ممکن است، پس اگر حرکتی از شمال آغاز شود، احتمال ختم شدن آن به شمال شهر بیشترین مقدار ممکن است، یعنی ۰/۳۱۸.

بر اساس کارهایی که در این دو مثال انجام دادیم، می توانیم این نتایج را در مورد ماتریس انتقال T برای زنجیر مارکف به دست آوریم:

۱ـ یک ماتریس انتقال، ماتریس مربع است. این ویژگی واضح است زیرا تعداد سطرها و تعداد ستونها هر دو مساوی با تعداد وضعیت ها هستند.

۲ـ همهٔ درایه ها اعدادی بین ۰ و ۱ هستند. دلیل این مطلب این است که درایه ها متناظر هستند با احتمالهای انتقال از یک وضعیت به وضعیت دیگر.

۳ـ مجموع درایه ها در هر سطر باید مساوی با یک باشد. مجموع درایه ها در یک سطر کامل مجموع احتمالهای انتقال از یک وضعیت به همهٔ وضعیت های دیگر است. چون مطمئناً انتقالی صورت خواهد گرفت، این مجموع برابر با یک است.

۴ـ درایهٔ ij-ام ماتریس T^{n} برابر احتمال این است که با شروع از وضعیت i، بعد از n انتقال در وضعیت j قرار داشته باشیم.

۵ـ درایه ها در ماتریس انتقال ثابت هستند. در مدل زنجیر مارکف فرض بر این است که ماتریس انتقال طی فرآیند تغییر نمی کند. به همین دلیل برای تعیین وضعیت دستگاه بعد از هر انتقال، باید فقط وضعیت قبلی آن را بدانیم. اگر وضعیت قبلی معین باشد، دانستن رفتار گذشتهٔ دستگاه لازم نیست.

مثال ۳: ظرفی حاوی ۳ گیلاس قرمز و ۴ گیلاس زرد است. فرض کنید شما ۳ گیلاس را پی در پی از ظرف خارج کرده و می خورید. احتمال اینکه سومین گیلاس انتخاب شده زرد باشد چقدر است؟

این مسئله نمونه ی از یک وضعیت احتمالاتی است که در آن همهٔ رفتار گذشتهٔ دستگاه را باید به حساب آورد؛ بنابراین مدل سازی آن به یک زنجیر مارکف منجر نخواهد شد. مجموعهٔ گیلاسهای انتخاب شده در همهٔ انتخاب های قبلی بر احتمال انتخاب هر رنگ در انتخاب بعدی اثر می گذارد. برآمدهایی که در آنها گیلاس سوم زرد است عبارتند از RRy، Ryy، yRy و yyy که R نشان دهندهٔ انتخاب گیلاس قرمز و y نشان دهندهٔ انتخاب گیلاس زرد است. با به حساب آوردن گیلاسهای باقیمانده بعد از هر انتخاب، احتمالهای برآمدهای فوق عبارتند از

$$P(Ryy) = (\tfrac{۳}{۷})(\tfrac{۴}{۶})(\tfrac{۳}{۵}) \qquad P(RRy) = (\tfrac{۳}{۷})(\tfrac{۲}{۶})(\tfrac{۴}{۵})$$

$$P(yyy) = (\tfrac{۴}{۷})(\tfrac{۳}{۶})(\tfrac{۲}{۵}) \qquad P(yRy) = (\tfrac{۴}{۷})(\tfrac{۳}{۶})(\tfrac{۳}{۵})$$

پاسخ این مسأله، مجموع چهار حاصلضرب فوق است، که برابر است با

$$\frac{۲۴+۳۶+۳۶+۲۴}{۷.۶.۵}=\frac{۱۲۰}{۲۱۰}=\frac{۴}{۷}.$$

پس احتمال اینکه سومین گیلاس انتخاب شده زرد باشد برابر است با $\frac{۴}{۷}$.

مسئلهٔ مطرح شده در مثال ۳ نمونه ای از یک ***فرآیند تصادفی*** است. در یک فرآیند تصادفی تعمیم یافته، احتمالهای انتقال لزوماً ثابت یا مستقل از رفتار گذشتهٔ دستگاه نیستند. توجه کنید که در مثال ۳، احتمال خارج شدن گیلاس قرمز بر اساس تعداد گیلاس هایی از هر رنگ که قبلاً انتخاب شده اند، تغییر می کند. یک زنجیر مارکف حالت خاصی از یک فرآیند تصادفی است که در آن احتمالهای انتقال ثابت و مستقل از رفتار گذشتهٔ دستگاه هستند. در یک زنجیر مارکف، هر وضعیت آیندهٔ دستگاه فقط با استفاده از احتمالهای انتقال ثابت و وضعیت کنونی دستگاه معین می شود. مسیری که دستگاه برای رسیدن به وضعیت کنونی طی می کند بر ماتریس انتقال اثر نمی گذارد؛ فقط وضعیت کنونی دستگاه است که مؤثر است.

مثال ۴: شرکت تاکسیرانی مذکور در مسألهٔ تاکسی در ابتدا ۲۵٪ ماشین ها را در شمال شهر، ۴۰٪ ماشین ها را در مرکز شهر و ۳۵٪ آنها را در جنوب شهر قرار می دهد. پس از آنکه هر کدام از این ماشین ها ۳ بار مسافر سوار و پیاده کرد، توزیع آنها در این سه ناحیهٔ شهر چگونه است؟

توزیع اولیهٔ ماشین ها را در سطح شهر با بردار سطری

$$\begin{array}{cccc} & N & D & S \\ X_{۰} = & (۰/۲۵ & ۰/۴۰ & ۰/۳۵) \end{array}$$

نشان می دهیم. برای یافتن درصد ماشین هایی که بعد از یک بار مسافرت، در شمال شهر قرار دارند، درصد ماشین ها در هر ناحیه را در احتمال رفتن از آن ناحیه به شمال شهر ضرب کرده و نتایج را با هم جمع می کنیم:

$$(۰/۲۵)(۰/۵)+(۰/۴۰)(۰/۱)+(۰/۳۵)(۰/۳)=۰/۲۷$$

این مجموع چیزی نیست جز حاصلضرب $X_{۰}$ و ستون اول ماتریس T. به طریق مشابه درصد ماشین های موجود در مرکز شهر بعد از اولین مسافرت برابر است با $X_{۰}$ ضرب در ستون دوم ماتریس T یعنی ستون D. درصد ماشین ها در جنوب شهر بعد از اولین مسافرت برابر است با $X_{۰}$ ضرب در ستون سوم T. بنابراین توزیع ماشین ها بعد از یک بار مسافرت، $X_{۱}$، عبارت است از:

$$X_1 = X_0 T$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} N & D & S \end{array} \\ (0.25 \quad 0.40 \quad 0.35) \end{array} \begin{array}{c|ccc} & N & D & S \\ \hline N & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ D & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ S & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc} N & D & S \\ (0.27 & 0.315 & 0.415) \end{array}$$

با ادامه دادن این خط استدلال، می بینیم که توزیع ماشین ها بعد از ۲ بار مسافرت، X_2، عبارت است از

$$X_2 = X_1 T = X_0 T^2$$

توزیع ماشین ها بعد از ۳ بار حمل مسافر برابر است با

$$X_3 = X_2 T = X_0 T^3$$

که برابر است با

$$X_3 = \begin{array}{ccc} N & D & S \\ (0.25 & 0.40 & 0.35) \end{array} \begin{array}{c|ccc} & N & D & S \\ \hline N & 0.318 & 0.291 & 0.391 \\ D & 0.282 & 0.309 & 0.409 \\ S & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc} N & D & S \\ (0.2973 & 0.30135 & 0.40135) \end{array}.$$

بنابراین پس از ۳ بار حمل مسافر، حدود ۳۰٪ ماشین ها در شمال شهر، حدود ۳۰٪ در مرکز شهر و حدود ۴۰٪ در جنوب شهر قرار دارند.

بردار $X_k = X_0 T^k$ ***بردار وضعیت*** برای زنجیر مارکف بعد از K انتقال با توزیع آغازی X_0 نامیده می شود. درایهٔ j-ام X_k احتمال بودن در وضعیت j بعد از K انتقال است.

مثال ۵: برای مسأله تاکسی با بردار وضعیت اولیهٔ داده شده در مثال ۴، توزیع دراز مدت ماشین ها چیست؟

در مثال ۴، X_3 را به دست آوردیم. بعد از ۵ بار حمل مسافر داریم

$$X_5 = \begin{array}{ccc} N & S & D \\ (0.25 & 0.40 & 0.35) \end{array} T^5$$

$$= \begin{array}{ccc} N & S & D \\ (0.299757 & 0.300121 & 0.400121) \end{array}.$$

باز هم جلوتر می رویم؛ بردار وضعیت بعد از ۱۰ بار حمل مسافر برابر است با

$$X_{10} = X_0 T^{10}$$

$$= \begin{array}{ccc} N & D & S \\ (0.299999 & 0.3 & 0.4) \end{array}$$

و بعد از ۱۵ بار حمل مسافر بردار وضعیت عبارت است از

$$X_{15} = T^{15}$$

$$= \begin{array}{ccc} N & D & S \\ (0.3 & 0.3 & 0.4) \end{array}$$

یک وضعیت حدی در بردارهای وضعیت X_k مشاهده می شود، (اینها به بردار (۰/۳ ۰/۳ ۰/۴) میل می کنند.)

پس از ۱۵ بار حمل مسافر، انتقالهای بیشتر این توزیع را عوض نمی کند.

روشن است که دستگاه نشان داده شده توسط فرآیند مارکف در مسأله تاکسی پایدار می ماند؛ به این معنی که بعد از تعداد معینی انتقال، توزیع تاکسی ها با انتقالهای بیشتر تغییر نمی کند. به عبارت دیگر، بردار وضعیت در نهایت به یک توزیع پایدار می رسد که حتی بعد از ضرب کردنهای متوالی در ماتریس انتقال هم تغییر نمی کند. به زبان نمادی، پایداری یعنی اینکه برای K به اندازه کافی بزرگ $X_k T = X_k$. از دیدگاه دیگر چون $X_{k+1} = X_k T$، در نهایت به نقطه ای می رسیم که از آن به بعد $X_k = X_{k+1}$. این وضعیت، *وضعیت پایدار* نامیده می شود. *بردار وضعیت پایدار* برای یک فرآیند مارکف، بردار X است طوری که X=XT، که T ماتریس انتقال است. درایه های بردار وضعیت پایدار در مثال ۵ با ضرب کردن در ماتریس T به دفعات زیاد به دست آمد. این محاسبات به کمک یک نرم افزار کامپیوتری ساده تر می شوند.

تمرینهای کلاسی

۱ ـ فرض کنید ماتریس زیر نشان دهندهٔ یک ماتریس انتقال برای یک زنجیر مارکف باشد.

$$T = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 2 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 3 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{array}$$

(الف) احتمال حرکت از وضعیت ۱ به وضعیت ۳ چقدر است؟ از وضعیت ۳ به وضعیت ۱ چطور؟

(ب) اگر دستگاه در وضعیت ۲ باشد، احتمال اینکه در انتقال بعدی در همان وضعیت بماند چقدر است؟

۲ ـ بردار وضعیت پایدار برای مسأله تاکسی چیست؟ آیا بردار وضعیت پایدار به توزیع اولیه وابسته است؟ تغییر توزیع اولیه چه تأثیری روی رسیدن به وضعیت پایدار دارد؟

رفتار X_k را برای یک توزیع اولیه خاص X_0 مورد بررسی قرار دادیم. وقتی X_k به بردار وضعیت پایدار میل می کند درایه های T^k چه تغییری می کنند؟ محاسبهٔ T^5، T^{10} و T^{15} که در زیر آورده شده اند، معلوم می کند که هر سطر T^k به بردار وضعیت پایدار میل می کند.

$$T^5 = \begin{array}{c} \\ N \\ D \\ S \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} N & D & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0/30162 & 0/29919 & 0/39919 \\ 0/29838 & 0/30081 & 0/40081 \\ 0/3 & 0/3 & 0/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$T^{10} = \begin{array}{c} \\ N \\ D \\ S \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} N & D & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0/300004 & 0/299998 & 0/399998 \\ 0/299996 & 0/300002 & 0/400002 \\ 0/3 & 0/3 & 0/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$T^{15} = \begin{array}{c} \\ N \\ D \\ S \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} N & D & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0/3 & 0/3 & 0/4 \\ 0/3 & 0/3 & 0/4 \\ 0/3 & 0/3 & 0/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

نتیجهٔ این پدیده چیست؟ یادآوری می کنیم که سطر i ام T^k شامل احتمالهای ختم شدن حرکتی با شروع از وضعیت i است به هر یک از وضعیت ها پس از K انتقال. چون هر سطر در ماتریس های T^k به بردار وضعیت پایدار میل می کند، نتیجه می گیریم که بردار وضعیت پایدار از وضعیت اولیه مستقل است. توزیع اولیه هر چه باشد، بردار وضعیت به یک بردار وضعیت پایدار میل خواهد کرد که برابر است با هر سطر T^k برای K به اندازهٔ کافی بزرگ. البته باید در عملیاتِ به توانْ های بزرگ رساندن ماتریس T توسط کامپیوتر دقت کرد. خطاهای محاسباتی گرد کردن ممکن است باعث شوند T^k برای K به اندازه کافی بزرگ واگرا شود. یک تدبیر برای فائق آمدن بر اثرات خطاهای گرد کردن بررسی رفتار T^k در نقاط متعدد در فرآیند است نه صرفاً بررسی رفتار آن برای مقادیر بزرگ K.

همهٔ زنجیر های مارکف بردار وضعیت پایدار ندارند. ماتریس انتقال A را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 0/3 & 0/1 & 0/4 & 0 & 0/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0/2 & 0/3 & 0/1 & 0/1 & 0/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0/2 & 0/2 & 0/1 & 0/5 & 0 \end{pmatrix}$$

برای K به اندازهٔ کافی بزرگ، متوجه می شویم که A^k همگرا می شود به ماتریس

$$\begin{pmatrix} 0 & 0/587097 & 0 & 0/412903 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0/589247 & 0 & 0/410753 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0/376344 & 0 & 0/623656 & 0 \end{pmatrix}$$

متفاوت بودن سطرهای A^k برای K بزرگ ما را مطمئن می کند که برای این دستگاه هیچ بردار وضعیت پایداری وجود ندارد. احتمال ختم شدن به یک وضعیت معین بعد از آنکه دستگاه به وضعیت پایدار رسید، به وضوح به وضعیت آغازی بستگی دارد.

ملاحظه کنید که در ماتریس انتقال A، وقتی دستگاه به وضعیت ۲ یا ۴ می رسد، دیگر نمی تواند آن وضعیت را ترک کند. وجود صفر در ستونهای دوم و چهارم نشان می دهد احتمال اینکه وقتی دستگاه به وضعیت ۲ یا وضعیت ۴ می رسد، از آنجا به وضعیت دیگری برود، صفر است. این وضعیت ها را **وضعیت های جاذب** می نامیم. سطر متناظر با وضعیت جاذب، یک ۱ روی قطر ماتریس دارد و بقیهٔ درایه های صفراند. یک ***زنجیر مارکف با وضعیت جاذب*** زنجیر مارکفی است که در آن

(الف) دست کم یک وضعیت جاذب وجود دارد؛

(ب) حرکت از یک وضعیت غیر جاذب به وضعیت جاذب امکان پذیر است.

فرآیندی که با یک زنجیر مارکف با وضعیت جاذب مدل سازی می شود، در نهایت به یکی از وضعیت های جاذب ختم می شود. این مطلب برای ماتریس A در بالا مشاهده می شود. تنها درایه های ناصفر در توانهای بزرگ A در ستونهای شامل وضعیت جاذب یافت می شوند.

چگونه می فهمیم که یک زنجیر مارکف یک بردار وضعیت پایدار دارد؟ شرط کافی، که آن را بدون اثبات بیان می کنیم، برای آنکه یک زنجیر مارکف دارای بردار وضعیت پایدار باشد این است که یکی از توانهای ماتریس انتقال دارای درایه های ناصفر باشد. زنجیر مارکفی که در این شرط صدق می کند، **منظم** نامیده می شود. برای مثال یک زنجیر مارکف با ماتریس انتقال

$$B = \begin{pmatrix} 0/2 & 0/8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

منظم است زیرا

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0/84 & 0/16 \\ 0/2 & 0/8 \end{pmatrix}$$

برای زنجیرهای مارکف منظم، با به توان رساندن ماتریس انتقال برای توانهای بزرگ می توانیم بردار وضعیت پایدار را به دست آوریم. وقتی توانها افزایش می یابند هر سطر دنبالهٔ ماتریس های حاصل به بردار وضعیت پایدار میل می کند. برای یک زنجیر مارکف با وضعیت جاذب ممکن است بردار وضعیت پایدار موجود نباشد؛ اما توانهای بزرگ ماتریس انتقال ممکن است سطرهایی داشته باشد که به برداری همگرا شود لیکن این بردارهای حدی ممکن است برای سطرهای مختلف، متفاوت باشند.

پانویس:

این مقاله برگرفته از کتاب

1. ***NEW TOPICS FOR SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS, MATERIALS AND SOFTWARE,*** NATIONAL COUN -CIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS.

است.

دو مسئله برای حل

گرد آورنده: عین اله پاشا، دانشگاه تربیت معلم

۱ـ در یک مهد کودک یک مربی با سه کودک توپ بازی می کند. مربی در مرکز دایره و کودکان با فاصله های مساوی روی محیط دایره می ایستند. هر بار مربی توپ را به تصادف به یکی از کودکان می دهد و کودکان توپ را به مربی برمی گردانند. هر بار که توپ دست به دست می شود می گوییم یک مرحله انجام شده است. بازی از مربی شروع می شود.

الف ـ ماتریس احتمالهای انتقال یک مرحله ای را بنویسید.

ب ـ احتمال آنکه توپ در مرحله دوم در دست یکی از کودکان باشد چقدر است؟

ج ـ احتمال آنکه توپ پس از تعدادی مرحلهٔ زوج در دست یکی از کودکان باشد چقدر است؟

د ـ احتمال آنکه توپ پس از تعدادی مرحلهٔ فرد در دست یکی از کودکان باشد چقدر است؟

هـ ـ احتمال آنکه توپ پس از سه مرحله در دست کودک شمارهٔ ۱ باشد چقدر است؟

و ـ در چند درصد مراحل، توپ در دست مربی است؟

ز ـ در چند درصد مراحل توپ در دست کودک شمارهٔ ۱ است.

۲ـ مسأله یک را در نظر بگیرید با این تفاوت که هر کودک مجاز باشد که توپ را به تصادف به یکی از دو همبازی مجاور خود بدهد و یا به مربی برگرداند.

الف ـ یک دیاگرام که نشان دهنده دست به دست شدن توپ بین مربی و کودکان با احتمالهای متناظر باشد رسم کنید.

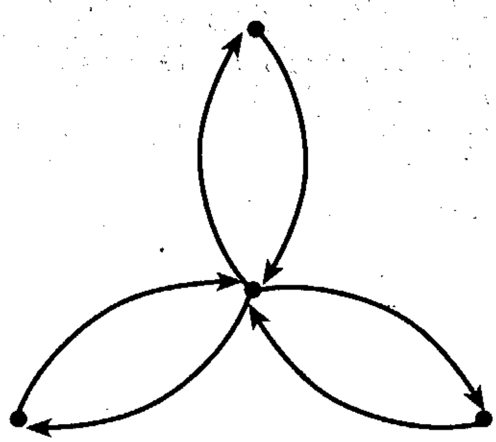
ب ـ ماتریس احتمال تغییر وضعیت یک مرحله ای را بنویسید.

ج ـ اگر شروع بازی با مربی باشد احتمال آنکه پس از دو بار دست به دست شدن، توپ مجدداً در دست مربی باشد چقدر است؟

د ـ اگر برای شروع بازی از پرتاب یک تاس استفاده شود به قسمی که اگر نتیجهٔ تاس ۶ و ۵ و ۴ باشد بازی را مربی شروع می کند، در غیر این صورت کودکی که شماره او با تاس ظاهر شده است بازی را شروع خواهد کرد. مطلوب است احتمال آنکه پس از یکبار دست به دست شدن توپ در دست مربی باشد.

هـ ـ اگر بردار $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ نشان دهندهٔ احتمال بازی با یکی از کودکان یا مربی باشد $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ را به گونه ای تعیین کنید که پس از یک مرحله بازی با همین احتمالها بازی را یکی از کودکان و یا مربی ادامه دهد.

(در بردار بالا α احتمال شروع بازی با کودک شماره ۱ و δ احتمال شروع بازی با مربی است)



روایت معلمان

فرزینه جورابچی
دبیر ریاضی منطقهٔ ۱۱ تهران

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله درنظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به عمل دَرمی آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه‌ای خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آنها بپردازند.

من قصد دارم با نقل یک روایت از سالهای کارم به یکی از مشکلات مهم در امر آموزش بپردازم و آنهم نبود دوره‌های روش تدریس و یا بهتر بگویم کارگاههای روش تدریس است. البته در سالهای اخیر رویکردهایی در بعضی از مقاطع به ارائه مُدلها و کارگاههای آموزشی دیده می‌شود ولی بخصوص در رشته‌های وسیعی مثل ریاضیات دورهٔ راهنمایی و دبیرستان کمتر ارائه طریق شده که شاید بگوییم یکی از مشکلات بزرگ آموزش که منجر به افت شدید درسی در دوره‌های پایان متوسطه است همین ریاضیات باشد. چرا که معلمین ریاضی بیشتر از هر رشته‌ای باید از فرآیند آموزش از ساده به پیچیده کمک بگیرند تا دانش‌آموز را به درک مفهومی برسانند که حلقهٔ اتصال او با سایر دروس علوم پایه می‌باشد. مطلب مهمی که در این مسیر برای هر معلمی وجود دارد اطلاع یافتن ازدانسته‌های قبلی دانش‌آموز است بدون چنین شناختی آموزش بسیار کلیشه‌ای و به اصطلاح کتابی خواهد بود و گاهی هم بسیار مشکل و غیر ممکن. اگر یک دبیر تاریخ نداند که مخاطبش تا چه حد واژه‌ها را می‌شناسند و صرفاً با جملات کتاب با آنها ارتباط برقرار کند و یا یک دبیر اقتصاد نداند که دانش‌آموزان تحت تعلیم او چقدر روزنامه می‌خوانند چقدر درگیر مسائل معیشتی خانواده هستند و یا خانواده‌های آنان در چه سطح سواد و معلومات هستند، آنجاست که دانش‌آموز مجبور می‌شود حتی جزوهٔ دبیر را نیز حفظ کند بدون اینکه معنی جملات او را بفهمد و نتیجهٔ کار هم اغلب از نظر بازده یا نمرهٔ امتحانی نامطلوب است. گاهی بعضی از همکاران ما دانش‌آموزان را از نظر ذهنی عقب می‌پندارند و بعضی از مشاوران کم تجربه از روی نمرهٔ دانش‌آموزان آنها را دارای ضریب هوشی پایین ارزیابی می‌کنند ولی همهٔ اینها می‌تواند نتیجه کار آموزشی تجربه نشده یا غیر استانداردی باشد که من و شما با آنها انجام داده‌ایم. کارگاههای آموزشی اغلب ما همان کلاسهای درس واقعی و دانش‌آموزان واقعی می‌باشند. ارزیابی آنهم طی گذشت سالها باید توسط خود ما انجام شود.

من دبیر ریاضی هستم که کارم را در یکی از مناطق جنوبی تهران شروع کردم و از آن گروه دبیرانی هستم که بطور ناخواسته به تدریس در این رشته کشیده شدم یعنی زمانی از من پرسیدند چه درسی را می‌خواهی تدریس کنی؟ من هم گفتم ریاضی گفتند بفرما و هیچ دوره‌ای قبل از تدریس این رشته ندیدم و تا چند سال بعد از شروع کارم در این رشته دوره‌ای برای ما برگزار نشد. پس از گذشت پنج یا شش سال یک دوره آموزش ریاضیات چهارم تجربی برگزار شد ولی پس از گذشت چند هفته با تمام مشکلاتی که به لحاظ رفت و آمد و وقت خارج از زمان کار داشت متوجه شدم که در این دوره فقط تمرینهای کتاب را یک دبیر برای بقیه حل می‌کند ولیکن دربارهٔ شیوهٔ تدریس هیچ بحثی در میان نبود و متوجه شدم که بعضی از همکاران ما قبل از اینکه کلاسی را تدریس کنند برای پر کردن امتیاز ضمن خدمت به کلاس می‌آیند و طبعاً آنها در حل ساده تمرینها هم مشکل داشتند. خوب این دوره را من نیمه کاره رها کردم چون مشکل من حل تمرینها نبود و یا حداقل بعد از چند سال تدریس دیگر مشکل برطرف شده بود. فقط در آن مدت امکان ملاقات با بعضی از دبیران با تجربه برای من فراهم شد که دربارهٔ زمان‌بندی کتاب و چگونگی شروع بعضی از

فصلها تبادل نظر کردیم که شاید بهترین دستاورد دوره های ضمن خدمت که بعدها هم داشتم همین بوده و هست. من بنا ندارم یکی از جلسات تدریسم را روایت کنم ولی بنا دارم یک تجربه ای که طی چند سال بتدریج آنرا کامل کردم بنویسم تا شاید همکاران جوان ما بتوانند موقعیت خود را مورد بررسی مجدد قرار دهند.

به لحاظ اصولی همهٔ دبیران ریاضی می دانند که مبحث تابع بسیار کلیدی و متصل به مباحث بعدی نظیر حد و مشتق و ... می باشد ولیکن در عمل شاید برای تدریس آن برنامه درازمدت نداریم. خوب من هم همانطور که گفتم خیلی بی برنامه وارد این رشته شدم و در سال اول هم بنا به نیاز مدرسه فقط در کلاس چهارم تدریس می کردم که در آنجا هم نیاز به پایه گذاری هیچ مبحثی نبود. سال بعد جبر سوم تجربی را هم تدریس کردم. کتاب را خوب پیش آمدیم تا به مبحث تابع رسیدیم و چون بنظرم ساده می آمد تدریس آنرا خیلی ساده شروع کردم (و همه می دانیم که مطالب پایه ای همه بنظر ساده می آیند ولی از دیده دانش آموزان اتفاقاً بسیار مشکل می نماید و این یکی از مشکلات بسیار مهم در امر تدریس اصول ریاضی می باشد مثل جبر اول یا ریاضی (۱) نظام جدید، ولی با مشکلات زیادی روبرو شدم چهرهٔ بچه ها بسیار درهم بود و من تعجب می کردم که چرا حرفهای مرا نمی فهمند و پس از تلاشهای زیاد خسته از کلاس خارج شدم. برای جلسهٔ بعد کمی روش را تغییر دادم تا بچه ها بهتر بفهمند خوب آنها در حدی که تمرینهای کتاب را حل کنند پیش آمدند ولی تمرینهای کتاب بسیار پیش پا افتاده بود و بعدها دیدم که سؤالات امتحانی بسیار جا افتاده است و نیاز به درک بیشتری از مفهوم تابع دارد. با مشکلات به مبحث حد رسیدیم و سپس پیوستگی که در اینجا حرف زیادی برای گفتن نداشتم چرا که پایهٔ کار طوری گذاشته شده بود که موضوعات ارتباط خود را از دست داده بودند. بهر تقدیر یکسال تجربهٔ ناموفق مرا به آنجا رساند که سال بعد قبل از شروع تدریس تابع طرح درسی تنظیم کردم با تمرینهای حساب شده متناسب با نکاتی که لازم بود در تابع گفته شود و مثالها را طوری تنظیم کردم که بتوانم در حد و مشتق هم از آنها استفاده کنم و این طرح را هر سال به تناسب سطح کلاس و تنوع دانش آموزان تکمیل کردم و بتدریج از کتاب فاصلهٔ زیادی گرفتم و دانش آموزان معتقد بودند که اگر سر کلاس خوب توجه نداشته باشند از کتاب چیزی نمی فهمند و این همان نتیجه ای بود که باید می گرفتند. کسانی که جبر سوم تجربی را تدریس کرده اند اینرا خوب می دانند که کتاب دارای نواقصی بود. چنین بود نتیجه روزهای زیاد تجربه و خطا. شاید بد نباشد یک تابع هم درس بدهم.

برای تدریس تابع باید پیش زمینه هایی مانند دستگاه محورهای مختصات، نقطه و زوج مرتب فراهم باشد. ابتدا صفحه را که متشکل از بیشمار نقطه است بعنوان مجموعه ای از زوجهای مرتب یا زوجهایی که طول و عرض نقطه را تشکیل می دهند و مرتب بودن آنها بدلیل تفاوت عدد مربوط به طول با عدد مربوط به عرض می باشد توضیح می دهیم.

در اینجا سعی می کنم تا رابطه را توضیح دهم. بین هر بخش از نقاط صفحه می توان رابطه برقرار کرد می توان آنها را بصورت دایره یا بصورت مثلث بهم وصل کرد سپس از دانش آموزان خواسته می شود جدولی مثل درجه حرارت هوا در روزهای ۲۰ تا ۳۰ مهرماه را به زوج مرتب تبدیل کنند.

مهرماه	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
درجه حرارت	۱۵°	۲۰°	۱۴°	۱۶°	۱۷°	۲۰°	۱۹°	۲۲°	۱۹°	۱۸°	۱۷°

آیا می توانید این زوج ها را در صفحه منعکس کنید؟ بله. صفحه ای رسم کنید و از هر زوج یک نقطه بسازید. آیا نقاط نظم معینی دارند؟ نه زیاد.

از جدول فوق شاید نتوان قانونمندی خاصی استنباط کرد ولی اگر جدولی تنظیم کنید که ارتفاع از سطح زمین را با فشار نشان دهد می بینید که هر چه ارتفاع زیاد شود فشار هوا کم می شود و زوجهای این جدول در صفحه نظم بهتری دارند. به مجموعه ای از زوجهای مرتب که هیچ عضو اول آنها یکسان نباشد تابع می گوییم چرا عضو اول یکسان نباشد؟

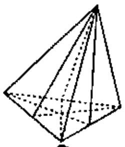
چون عضو اول متغیر است یا بعبارتی تا تغییری نباشد تابعی وجود ندارد؟

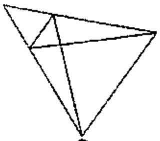
چند مجموعه از زوج مرتب ها مثال می زنم، آیا تابع است یا خیر؟

چند مجموعه را که قانون آنها معین است مثال می زنیم آیا تابع است یا رابطه

$$R = \{x, y \in Z\ ,\ y = x^{2}\}$$

همهٔ شما می دانید بطور روزمره خیلی از پدیده ها با هم در ارتباط هستند. خیلی از این روابط شناخته شده هستند مثلاً اینکه شما دو سال از برادرتان بزرگتر هستید در هر سنی این رابطه برقرار است بعضی از روابط را قانونمند کرده اند یا به کمک تجربه یا به کمک فرمولها و قواعد علمی.





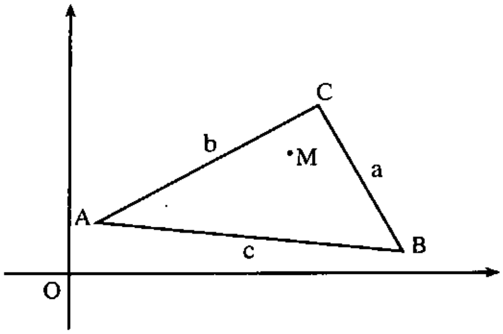
روابطی تحلیلی در مورد اجزاء مثلث

نهان علی‌اف
دانشگاه تربیت مدرس

فرض می کنیم صفحه دکارتی با مختصات (x, y) داده شده باشد یک مثلث اختیاری با رئوس

$$A = (x_1, y_1),\ \ B = (x_2, y_2),\ \ c = (x_3, y_3)$$

در صفحه در نظر می گیریم (مطابق شکل زیر)



همچنین فرض می کنیم نقطه M با مختصات (x, y) باشد. نشان می دهیم که هرگاه $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$ باشد که $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ و $\alpha + \beta + \gamma = 1$ آنگاه M نقاط داخل مثلث و روی اضلاع مثلث و همچنین رئوس آن با گرفتن مقادیری مناسب از α ، β ، γ را مشخص خواهد کرد. برای این ملاحظه می کنیم

$$(x, y) = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) + \gamma(x_3, y_3)$$

یا

$$\begin{cases} x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \\ y = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 \end{cases}$$

ابتدا نشان می دهیم که رئوس مثلث فوق حاصل ... ند.

اگر $\alpha = 1$ باشد $\gamma = \beta = 0$ و داریم: M=A

اگر $\beta = 1$ باشد $\alpha = \gamma = 0$ و داریم: M=B

اگر $\gamma = 1$ باشد $\beta = \alpha = 0$ و داریم: M=C

حال اگر $\alpha = 0$ باشد $\gamma + \beta = 1$ آنگاه M متعلق به ضلع BC است.

اگر $\beta = 0$ باشد $\alpha + \gamma = 1$ آنگاه M متعلق به ضلع AC است.

اگر $\gamma = 0$ باشد $\alpha + \beta = 1$ آنگاه M متعلق به ضلع AB است.

میانه‌ها

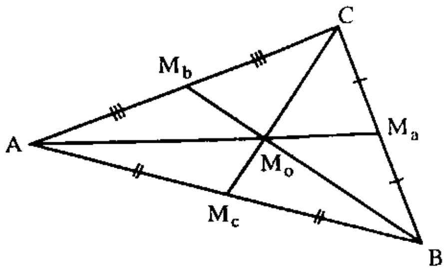
حالتی را در نظر می گیریم که $\gamma = \beta$ و $\alpha = 0$ نقطه وسطی ضلع BC را مشخص می کند و $\beta = \gamma = 0$ نقطه A را مشخص می کند

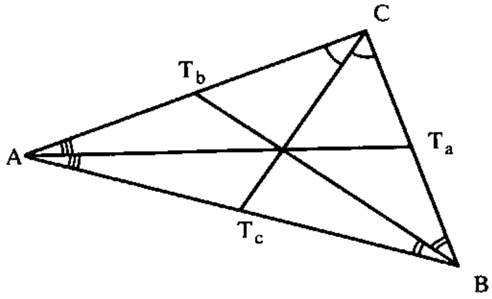
پس وقتی $\gamma = \beta$ باشد با تغییر α دربازه $[0 ، 1]$، نقاط میانه وارد بر ضلع a را بدست می آوریم (M_a)

بطور مشابه $\alpha = \beta$ باشد با تغییر γ دربازه $[0 ، 1]$، نقاط میانه وارد بر ضلع C را بدست می آوریم (M_c)

بطور مشابه $\alpha = \gamma$ باشد با تغییر β دربازه $[0 ، 1]$، نقاط میانه وارد بر ضلع b را بدست آوریم (M_b)

و اگر $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ در این صورت نقطه M محل تلاقی سه میانه را بدست خواهد داد.





نیمسازها: اکنون می خواهیم با تغییر α,β,γ دربازه [۰ و ۱] نیمسازهای مثلث را نتیجه بگیرم داریم:

اگر داشته باشیم $\frac{BA}{AC}=\frac{\beta}{\gamma}$ آنگاه M نقاط نیمساز T_a را بدست خواهد داد. (نیمساز وارد بر ضلع a)

اگر داشته باشیم $\frac{AC}{CB}=\frac{\alpha}{\beta}$ آنگاه M نقاط نیمساز T_c را بدست خواهد داد. (نیمساز وارد بر ضلع c)

اگر داشته باشیم $\frac{CB}{BA}=\frac{\gamma}{\alpha}$ آنگاه M نقاط نیمساز T_b را بدست خواهد داد. (نیمساز وارد بر ضلع b)

اگر علاوه بر شرط $\alpha+\beta+\gamma=1$ همچنین داشته باشیم:

$\alpha(BC)=\beta(AC)=\gamma(AB)$

در این صورت از روابط بالا نتیجه می شود که:

$\alpha(BC)=\beta(AC), \beta(AC)=\gamma(AB), \alpha(BC)=\gamma(AB)$

در این صورتنقطه واقع بر هر سه نیمساز است یعنی M محل تلاقی نیمسازهاست.

اکنون با تعیین مقادیری برای α و β و γ نشان می دهیم خطوطی که وسط اضلاع مثلث را به هم وصل می کنند بدست می آید:

اگر $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta+\gamma=\frac{1}{2}$ باشد آنگاه تغییر M پاره خطی را مشخص می کند که وسط های دو ضلع AB و AC را به هم وصل می کند.

بطور مشابه اگر $\beta=\frac{1}{2}$ و $\gamma+\alpha=\frac{1}{2}$ آنگاه تغییر M، نقاط پاره خطی را مشخص می کند که وسط های دو ضلع AB و BC را به هم وصل می کند.

و اگر $\gamma=\frac{1}{2}$ که $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ آنگاه تغییر M، نقاط پاره خطی را مشخص می کند که وسط های دو ضلع AC و BC را به هم وصل می کند.

اگر α مقدار ثابت و مشخصی داشته باشد همواره تغییر نقاط M، نقاط پاره خطی را مشخص می کند که موازی ضلع BC است و بطور مشابه در مورد β و γ نتایج یکسان خواهیم داشت.

اکنون می خواهیم با مشخص کردن مقادیری برای α و β و γ معادلات ارتفاعات را بدست آوریم:

اگر $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{(AC)\mathrm{Cos}C}{(AB)\mathrm{Cos}B}$ آنگاه تغییر نقطه M نقاط ارتفاع H_a را مشخص خواهد کرد.

اگر $\mathrm{Cos}B \geq 0$ و $\mathrm{Cos}C \geq 0$ آنگاه ارتفاع فوق همیشه در داخل مثلث خواهد بود.

به طریق مشابه می توان نقاط ارتفاع های H_b و H_c را نیز مشخص کرد.

همچنین اگر $\frac{(AC)\mathrm{Cos}C}{(AB)\mathrm{Cos}B}=\frac{\frac{1}{2}-\beta}{\frac{1}{2}-\gamma}$ باشد آنگاه تغییر نقطه M، نقاط عمود منصف ضلع BC را بدست خواهد داد. و بطریق مشابه می توان دو عمود منصف دیگر را نیز نتیجه گرفت.

و اگر هر سه رابطه برقرار باشد محل تلاقی عمود منصف ها (مرکز دایره محیطی) را بدست می آوریم با این شرط که محل تلاقی عمود منصف ها در داخل مثلث قرار داشته باشد.

در ادامه این مبحث نتایج مشابه و جدیدی با بکار بردن موضوع فوق در فضای سه بعدی برای هرم بدست خواهیم آورد.

مسائل

۱ـ اگر α و β و γ را فاصله های یک نقطه داخلی اختیاری M از رئوس A و B و C در نظر بگیریم نتایج بدست آمده را چگونه می توان برای این حالت بدست آورد.

۲ـ اگر در مسئله (۱)، α و β و γ را فاصله های نقطه داخلی اختیاری M با اضلاع در نظر بگیریم نتایج فوق برای این حالت چگونه خواهند بود؟

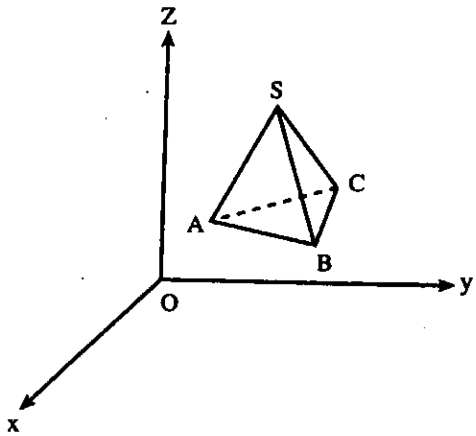
۳ـ آیا این موضوع را می توان برای چند ضلعیهای محدب واقع در صفحه بکار برد؟

۴ـ اگر نتایج فوق برای چند ضلعی های محدب واقع در صفحه بکار برده شود، آیا می توان آنرا برای ناحیه های محدب در صفحه نیز بکار برد؟

قسمت دوم:

فرض کنیم در دستگاه مختصات قائم O.xyz هرم SABC با شکل زیر داده شده باشد. که مختصات رئوس هرم به شرح زیر هست.

$S:(x_0, y_0, z_0)$
$A:(x_1, y_1, z_1)$
$B:(x_2, y_2, z_2)$
$C:(x_3, y_3, z_3)$



فرض می کنیم اعداد $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ دربازه [۱ و۰] تغییر می کنند و در شرط زیر صدق می کنند:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \qquad (1)$$

در این صورت نقطه اختیاری $M(x, y, z)$ به صورت

$$M(x, y, z) = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta S \qquad (2)$$

یک نقطه داخلی هرم SABC خواهد بود. بعلاوه اگر $\alpha = 1$ باشد M نقطه A، $\beta = 1$، M نقطه B و $\gamma = 1$، M نقطه C و $\delta = 1$ باشد نقطه M نقطه S هرم را مشخص خواهد کرد.

اگر $\alpha = \beta = 0$ نقطه M، ضلع CS

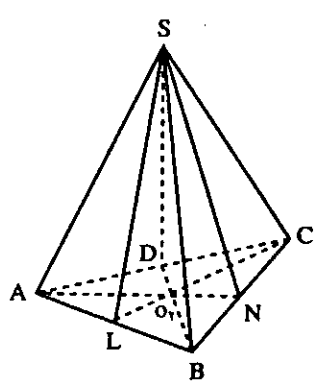
$\alpha = \gamma = 0$ نقطه M، ضلع BS

$\alpha = \delta = 0$ نقطه M، ضلع BC

$\beta = \gamma = 0$ نقطه M، ضلع AS

$\beta = \delta = 0$ نقطه M، ضلع AC

$\gamma = \delta = 0$ نقطه M، ضلع AB



را مشخص خواهد کرد. نهایتاً اگر

$\alpha = 0$، نقطه M وجه BCS

$\beta = 0$ باشد نقطه M وجه ACS

$\gamma = 0$ باشد نقطه M وجه ABS

$\delta = 0$ باشد نقطه M وجه ABC

را مشخص می کند و اگـر $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 1$ باشد آنگاه نقطه M نقاط داخلی هرم را بدست می دهد.

اگر L و D و N به ترتیب وسط اضلاع AB و AC و BC باشند.
آنگاه اگر $\alpha = \beta$ نقطه $M(x, y, z)$ روی مثلث SCL تغییر خواهد کرد.

به طور مشابه اگر $\alpha = \gamma$ و یا $\alpha = \delta$ و یا $\beta = \gamma$ و ... و $\gamma = \delta$ باشد. آنگاه نقطه M، روی مثلث های متناظر تغییر خواهد کرد.

تعریف (۱): صفحه شامل ضلع SC و ماربـر L را صفحه میانه ضلع SC هرم می نامیم.

لم (۱): صفحه های میانه اضـلاع SC و SB و SA در یک خط متقاطعند.

اثبات: بدون آنکه از کلیت چیزی کاسته شود این مطلب را برای رأس S ثابت می کنیم. طبق تعریف بالا در این صورت صفحه هـای میانه فوق، وجه ABC را در میانه های AN و CL و BD قطع می کنند و بنابراین محل تلاقی میانه های مذکور نیز که با O_2 نشان می دهیـم روی صفحه های فوق قرار خواهد داشت در نتیجه صفحه های میانه مربوط به رأس S شامل خط SO_2 می باشد.

تعریف (۲): خط SO_2 که محل تلاقی سه صفحه میانه نظیر بر رأس S است را میانه رأس S می نامیم.

به این ترتیب اگر $\alpha = \beta = \gamma$، نقطه M، میانه رأس S
به این ترتیب اگر $\alpha = \beta = \delta$، نقطه M، میانهٔ رأس C
به این ترتیب اگر $\alpha = \gamma = \delta$، نقطه M میانه رأس B
و اگر $\beta = \gamma = \delta$ نقطه M، میانهٔ رأس A را بدست می دهد.

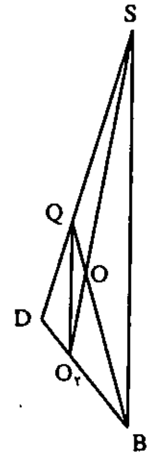
تعریف (۳): اگر $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{4}$ باشد نقطـه M را مرکز ثقل هرم می نامیم.

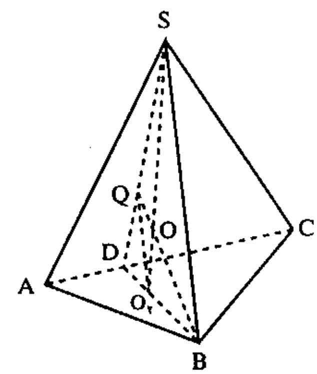
قضیه (۱): چهار میانه هرم در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند نسبت فاصله محل تلاقی میانه ها از رأس مربوط به وجه متناظر ۳ به ۱ است.

اثبات هندسی: صفحه میانـه SB را در نظر می گیریم در اینجـا پاره خط SD میانه مثلث ASC است و BD، میانه مثلث ABC است در نتیجه میانه های نظیـر رأس هـای S و B هرم روی صفحه SBD واقع است و به این خاطر آن دو میانه با هم تلاقی می کنند. اگر میانه رأس S را با SO_2 و میانـه رأس B را با BQ در نظر بگیریم و محـل تلاقی آن دو تا را بـا O نشان دهیم در این صورت نقـاط O_2 و Q به ترتیب متناظر با محل تلاقی میانه های وجوه ABC و ASC می باشند

و داریم:

$$\frac{BO_۲}{O_۲D}=\frac{۲}{۱}\ ،\ \frac{SQ}{QD}=\frac{۲}{۱}$$





به عبارت دیگر

$$\frac{BD}{O_۲D}=\frac{۳}{۱}\ ،\ \frac{SD}{QD}=\frac{۳}{۱}$$

در نتیجهٔ مثلث های $DO_۲Q$ و DBS با هم متشابهند در این صورت:

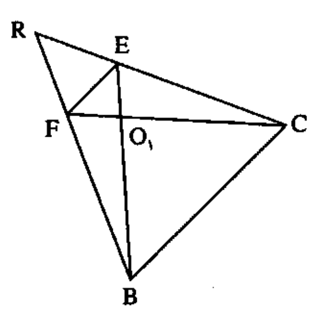
$$\frac{۳}{۱}=\frac{BD}{O_۲D}=\frac{SD}{QD}=\frac{SB}{QO_۲}$$

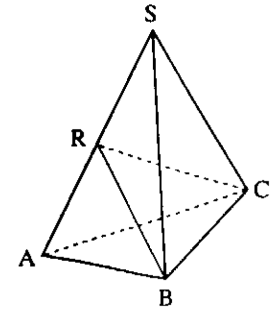
از طرف دیگر چون $QO_۲ \parallel Bs$ نتیجه می شود که مثلث های $O_۲QO$ و BSO متشابهند. در نتیجه

$$\frac{۳}{۱}=\frac{SB}{QO_۲}=\frac{SO}{OO_۲}=\frac{BO}{OQ}\Rightarrow SO=۳OO_۲\ ,BO=۳OQ$$

با روش مشابه اگر میانه های نظیر به رأس های B و C را بررسی کنیم این میانه ها روی صفحه میانه مربوط به BC خواهند بود. این صفحه همان صفحه ایست که بوسیله نقاط BRC می باشد و اگر توضیحات بالا را تکرار کنیم داریم:

$$BO_۱=۳O_۱E$$
$$CO_۱=۳O_۱F$$





یعنی BQ و BE، میانه های نظیر رأس B هستند بنابراین با هم برابر هستند و لذا نقاط Q و E بر هم منطبق می شوند و در نتیجه O و $O_۱$ نیز بر هم منطبق می شوند. با روش مشابه ثابت می شود که میانه های دیگر نیز از نقطه O می گذرند.

اثبات تحلیلی: دیدیم که اگر $\alpha=\beta=\gamma$ باشد نقطه M، میانه رأس S و $\alpha=\beta=\delta$ نقطه M میانه رأس C و $\alpha=\gamma=\delta$ ، نقطه M میانه رأس B و $\beta=\gamma=\delta$ نقطه M میانه رأس A را مشخص می کند در نتیجه اگر $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ باشد آنگاه نقطه M روی تمام میانه ها قرار خواهد داشت و این می رساند که هر چهار میانه در یک نقطه تلاقی می کنند. مختصات این نقطه عبارتست از:

$$\frac{۱}{۴}A+\frac{۱}{۴}B+\frac{۱}{۴}C+\frac{۱}{۴}S$$

بردار SO برابر است با:

$$O-S=\frac{۱}{۴}A+\frac{۱}{۴}B+\frac{۱}{۴}C-\frac{۳}{۴}S$$

و بردار $OO_۲$ برابر است با:

$$\begin{aligned}O_۲-O&=\frac{۱}{۳}A+\frac{۱}{۳}B+\frac{۱}{۳}C-\frac{۱}{۴}A-\frac{۱}{۴}B-\frac{۱}{۴}C-\frac{۱}{۴}S\\&=\frac{۱}{۱۲}A+\frac{۱}{۱۲}B+\frac{۱}{۱۲}C-\frac{۱}{۴}S\\&=\frac{۱}{۳}\left[\frac{۱}{۴}A+\frac{۱}{۴}B+\frac{۱}{۴}C-\frac{۳}{۴}S\right]\end{aligned}$$

و در نتیجه داریم: $O-S=۳(O_۲-O)$

اکنون به بررسی نیمسازهای هرم می پردازیم:

تعریف (۴): نیمساز زاویه دو وجهی SC را صفحه ای در نظر می گیریم که زاویه دو وجهی ای که وجه های ASC و BSC می باشند را نصف می کند. این صفحه را صفحه نیمساز نظیر به ضلع SC می گوئیم.

قضیه (۲): صفحه های نیمساز SC و SB و SA در یک خط متقاطعند.

اثبات: از خاصیت نیمساز زاویه ها چنین نتیجه می شود که تمام نقاط واقع بر خط ℓ فصل مشترک دو صفحه نیمساز SC و SB از وجه های آن دو زاویه با هم برابر هستند و واضح است که صفحه نیمساز SA نیز خط ℓ را در بر خواهد داشت، و روی نقاط ℓ فاصله های نقطه ها از وجوه هرم با هم مساوی هستند.

تعریف (۵): فصل مشترک سه صفحه نیمساز SC و SB و SA را نیمساز نظیر به رأس S هرم می نامیم.

تبصره (۱): به مرکز هر نقطه روی این نیمساز می توان کره ای

در نظر گرفت که مماس بر وجوه هرم می باشد .

تبصره (۲) : تحت شرط $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ ، نقطه M به طور یگانه بدست می آید. بدون آنکه از کلیت کاسته شود نقطه M را به صورت $M[\alpha,\beta,\gamma,\delta]$ نشان می دهیم . تحت تبصره بالا داریم .

$$M[1,0,0,0]=A,\ M[0,1,0,0]=B,\ M[0,0,1,0]=C,\ M=[0,0,0,1]=S$$
$$M[0,0,\gamma,\delta]\in[SC], M[0,\beta,0,\delta]\in[SB], M[0,\beta,\gamma,0]\in BC$$
$$M[\alpha,0,0,0]\in[SA], M[\alpha,0,\gamma,0]\in[AC], M[\alpha,\beta,0,0]\in[AB]$$
$$M[0,\beta,\gamma,\delta]\in[BCS], M[\alpha,0,\gamma,\delta]\in[ASC], M[\alpha,\beta,0,\delta]\in[ASB]$$
$$M[\alpha,\beta,\gamma,0]\in[ABC], M[\beta,\beta,\gamma,0]\in[SCM_{SC}]$$

که نقطه M_{sc} همان نقطه L می باشد .

به روش مشابه می توان دید که

$$M[\gamma,\beta,\gamma,\delta]\in[SBM_{SB}]$$
$$M[\delta,\beta,\gamma,\delta]\in[BSM_{BC}]$$
$$M[\alpha,\gamma,\gamma,\delta]\in[SAM_{SA}]$$
$$M[\alpha,\delta,\gamma,\delta]\in[ACM_{AC}]$$
$$M[\alpha,\beta,\delta,\delta]\in[ABM_{AB}]$$

اگر روابط بالا را ادامه دهیم خواهیم داشت :

$$M[\gamma,\gamma,\gamma,\delta]\in[SM_S]$$

که در آن نقطه M_S همان نقطه $O_۲$ است .

$$M[\delta,\delta,\gamma,\delta]\in[CM_C]$$
$$M[\delta,\beta,\delta,\delta]\in[BM_B]$$
$$M[\alpha,\delta,\delta,\delta]\in[AM_A]$$

و بالاخره $M\left[\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]=M.$

که همان محل تلاقی میانه ها می باشد (که مرکز ثقل هرم است)

اگر α ثابت در نظر گرفته شود تغییر نقطه M ، برش موازی با وجه BSC را مشخص خواهد کرد که این روش بصورت یک مثلث می باشد . به طور مشابه اگر β یا γ یا δ یا ABC ثابت در نظر گرفته شود آنگاه تغییر نقطه M برش های موازی با وجوه ASC یا ASB و یا ABC را مشخص خواهد کرد .

اگر دو تا از این چهار مقدار (یعنی مثلاً α و β) ثابت در نظر گرفته شوند در این صورت نقطه M خطی موازی با SC خواهد بود .

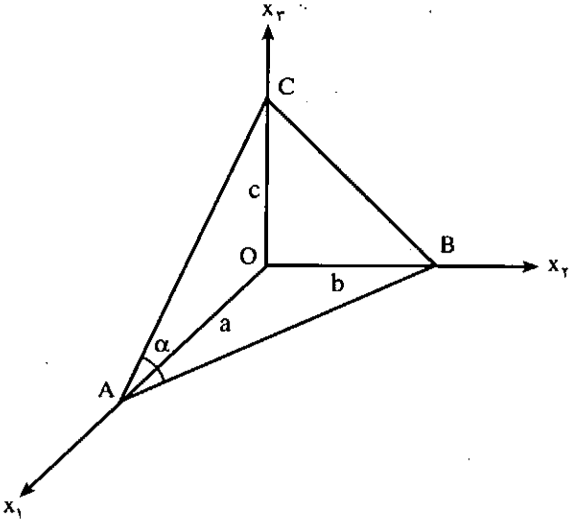
می توان نتایج جدید و جالبی را در مورد هرم ها بوسیله مباحث فوق بدست آورد . نتایج زیر می تواند از مطالب فوق استنتاج شوند :

۱ـ برای هرم قائم الزاویه همتای قضیه فیثاغورس را بدست می آوریم :

فرض کنیم محورهای مختصات را با یک صفحه برش دهیم که هر سه محور را قطع کند در این صورت برای هرم حاصل هر سه وجه آن مثلث های قائم الزاویه خواهد بود چنین زاویه سه وجهی را یک زاویه قائمه سه وجهی می نامیم فرض کنیم

$$OA=a\ ,\ OB=b\ ,\ OC=c$$

در این صورت



$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AB\ ,\ S_{BOC}=\frac{1}{2}BC\ ,\ S_{AOC}=\frac{1}{2}AC$$

$$AB=\sqrt{a^2+b^2}\quad BC=\sqrt{b^2+c^2}\quad AC=\sqrt{a^2+c^2}$$

$$BC^2=AB^2+AC^2-2(AB)(AC)\cos\alpha$$

$$b^2+c^2=a^2+b^2+a^2+c^2-2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}\Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\cos\alpha^2}$$

$$=\sqrt{1-\frac{a^4}{(a^2+b^2)\cdot(a^2+c^2)}}=\sqrt{\frac{a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2}{(a^2+b^2)\cdot(a^2+c^2)}}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}(AB)\cdot(AC)\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$$

$$(S_{AOB})^2+(S_{BOC})^2+(S_{AOC})^2=(S_{ABC})^2$$

تبصره (۳) : واضح است که در فضای سه بعدی اگر تصویر بردار داده شده A روی محورهای مختصات برابر a_1 و a_2 و a_3 باشد آنگاه

$$|a|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

این عبارت قضیه فیثاغورس در حالت سه بعدی می باشد ولی دستور بالا همتای قضیه فیثاغورس برای هرم ها می باشد.

حال هرم OABC را در نظر می گیریم. این هرم دارای چهار زاویه سه وجهی می باشد که به آنها با O ، A ، B و C اشاره کنیم آنها زاویه های فضایی می باشند و واحد اندازه گیری آن آسترادیان می باشد طبق تعریف یک آسترادیان، آن مقدار از زاویه مرکزی فضایی است که سطح جدا شده از پوسته (سطح) کره برابر با مجذور شعاع کره است. حال با استفاده از همتای قضیه فیثاغورس در فضای R^3 ، نسبت های مثلثاتی زاویه های فضایی را بصورت زیر تعریف می کنیم بدون اینکه از کلیت چیزی کاسته شود. این تعریف را در مورد زاویه فضایی A مطرح می کنیم:

تعریف ۶ : اگر زاویه فضایی O در هرم OAB قائمه باشد در این صورت کسینوس اول زاویه فضایی A را نسبت مساحت مثلث AOB به مساحت مثلث ABC تعریف می کنیم و با $h_1(A)$ نشان می دهیم.

$$h_1(A)=\cos_1 A=\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ABC}}$$

با روش مشابه سینوس زاویه فضایی A را با $h_0(A)$ و کسینوس دوم A را با $h_2(A)$ بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$h_0(A)=\sin A=\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$h_2(A)=\cos_2 A=\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta ABC}}$$

آنگاه از همتای قضیه فیثاغورس در R^3 رابطه زیر بدست می آید:

$$h_0^2(A)+h_1^2(A)+h_2^2(A)=1$$

به اعتقاد اینجانب مباحث فوق می تواند مقدمه ای بر نظریه اعداد مختلط سه بعدی باشد.

مسأله ها:

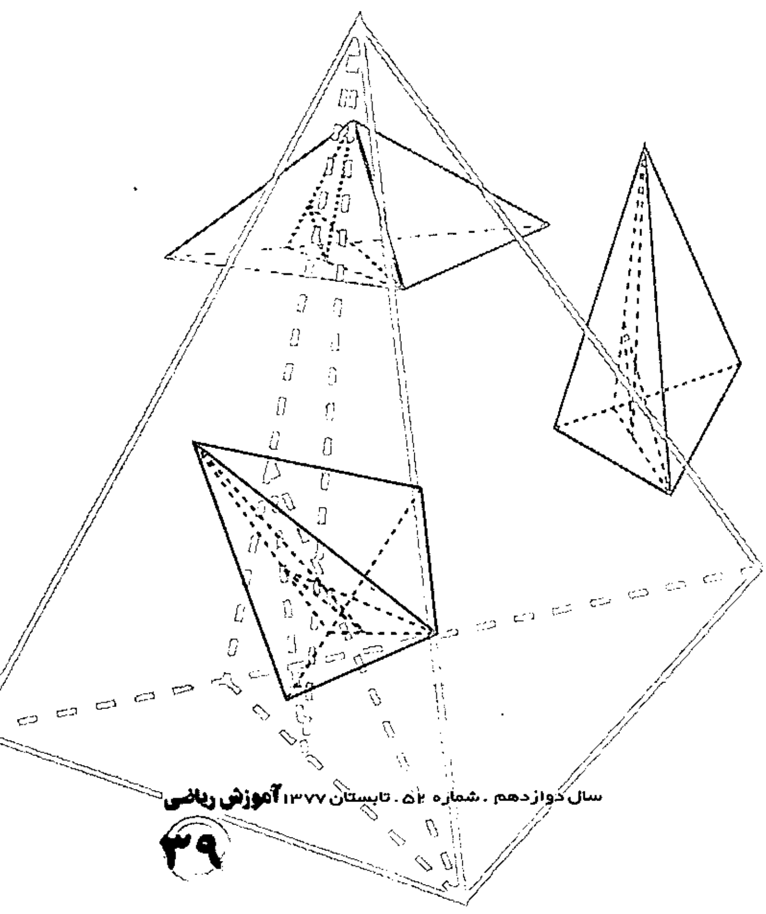
۱ـ مسائلی که در مقاله اول مطرح شده است نحوه کاربرد آنها در مورد هرم چگونه خواهد بود؟

۲ـ تعمیم همتای قضیه فیثاغورس در فضای چهار بعدی چیست؟

۳ـ مطلوبست تعریف و تعمیم روابط بین نسبت های مثلثاتی زاویه های فضایی و بدست آوردن روابط بین این نسبت ها.

۴ـ همتای فرمول اویلر $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ را در مورد نسبت های مثلثاتی زاویه های فضایی به دست آوردید.

۵ ـ خواص تابع های مختلط سه بعدی از متغیرهای مختلط سه بعدی را بررسی کنید.



پنج طلا، يك نقره: مقام اوّل سی و نهمين المپياد بين المللی رياضی تايوان، ۱۰ تا ۲۱ جولای ۱۹۹۸

گزارشگر: يحيی تابش
دانشگاه صنعتی شريف

شاید دوازده سال پیش که تیمی از کشورمان به المپیاد بین المللی اعزام شد و با کسب یک مدال برنز به مقام بیست وششم در بین ۴۲ کشور جهان (که در موقع خود دستاورد خوبی تلقی می شد) دست یافت، رسیدن به مقام اول آن هم در فرآیندی که روز به روز دشوارتر می شد، رویائی بیش نمی نمود. این رویا، هر چند که دیگر چندان دور از واقعیت نبود، در تایوان به واقعیت پیوست و ما بر سکّوی اول المپیاد ریاضی ایستادیم.

مروری بر سیر این تحول خالی از لطف نیست؛

نیز وجود دارد: اول آن که چند ده هزار دانش آموزی که در هر سال پا به عرصهٔ رقابت المپیاد می گذارند مدتها به مطالعه و آماده شدن برای شرکت در این مسابقه می پردازند، تلاش و مطالعه ای که هیچ برنامهٔ رسمی تحصیلی برای آن تدارک نشده است بلکه آموزشهای جانبی و فعالیتهای فوق برنامه بستر آن است. و دوم، لازم به ذکر است که نیروی محرکهٔ اصلی در دوره های آموزشی ویژه برای برگزیدگان و تیم اعزامی، المپیادهای سالهای قبل هستند که با نیروی جوانی و شادابی و سرزندگی آموخته های قبلی خود را سینه به سینه به نسل

المپیاد	نتیجهٔ تیم کشور ما
۲۸ امین المپیاد، کوبا ۱۹۸۷	یک برنز، رتبهٔ ۲۶ بین ۴۲ کشور
۲۹ امین المپیاد، استرالیا ۱۹۸۸	یک نقره، سه برنز، رتبهٔ ۲۰ بین ۴۹ کشور
۳۰ امین المپیاد، آلمان ۱۹۸۹	دو نقره، سه برنز، یک دیپلم افتخار، رتبهٔ ۱۴ بین ۵۱ کشور
۳۱ امین المپیاد، چین ۱۹۹۰	چهار نقره، رتبهٔ ۱۴ بین ۵۴ کشور
۳۲ امین المپیاد، سوئد ۱۹۹۱	دو طلا، یک نقره، دو برنز، رتبهٔ ۸ بین ۵۴ کشور
۳۳ امین المپیاد، روسیه ۱۹۹۲	سه نقره، دو برنز، یک دیپلم افتخار، رتبهٔ ۱۴ بین ۵۶ کشور
۳۴ امین المپیاد، ترکیه ۱۹۹۳	دو طلا، سه نقره، یک برنز، رتبهٔ ۶ بین ۷۳ کشور
۳۵ امین المپیاد، هنگ کنگ ۱۹۹۴	دو طلا، دو نقره، دو برنز، رتبهٔ ۸ بین ۶۹ کشور
۳۶ امین المپیاد، کانادا ۱۹۹۵	دو طلا، سه نقره، یک برنز، رتبهٔ ۸ بین ۷۳ کشور
۳۷ امین المپیاد، هند ۱۹۹۶	یک طلا، چهار نقره، یک برنز، رتبهٔ ۹ بین ۷۶ کشور
۳۸ امین المپیاد، آرژانتین ۱۹۹۷	چهار طلا، دو نقره، رتبهٔ ۳ بین ۸۱ کشور
۳۹ امین المپیاد، تایوان ۱۹۹۸	پنج طلا، یک نقره، رتبهٔ ۱ بین ۷۶ کشور

نگاهی به جدول فوق حکایت از تلاشی پویا، مداوم، و صبورانه می کند که به دستاوردی ارزنده انجامیده است. تلاشی که هزاران دانش آموز، مسؤلان و برنامه ریزان را در برمی گیرد. ولی وجه پنهانی

نو پا منتقل می کنند.

در المپیاد سی و نهم نیز هم چون المپیادهای گذشته مسابقه در دو روز متوالی برگزار شد که در هر روز سه مسأله داده می شد که هر



مسأله ارزشی برابر ۷ نمره دارد . و شرکت کنندگان ۴/۵ ساعت برای پاسخ فرصت داشتند . تیم کشور ما با ۲۱۱ امتیاز از ۲۵۲ امتیاز ممکن حائز مقام اول شد و کشور بلغارستان به مقام دوم رسید و مجارستان و ایالات متحده مشترکاً سوم شدند با امتیازهایی به مراتب کمتر از امتیاز تیم ما .

بعضی از سؤالهای امسال از پیچیدگیهای زیادی برخوردار بودند، این مسائل به قرار زیراند :

روز اول:

مسأله ۱ - در چهار ضلعی محدب ABCD قطرهای AC و BD بر هم عمودند و اضلاع مقابل AB و DC موازی نیستند . فرض کنیم نقطه P محل تلاقی عمود منصف های AB و DC درون چهار ضلعی ABCD باشد . ثابت کنید چهار ضلعی ABCD ، محاطی است اگر و فقط اگر مثلث های ABP و CDP مساحت های مساوی داشته باشند .

مسأله ۲ - در یک مسابقه، a شرکت کننده و b داور وجود دارد که $b \geq 3$ عددی فرد است . هر داور به هر شرکت کننده یا نمره «قبول» و یا نمره «رد» می دهد . فرض کنیم k عددی باشد که هر دو داور حداکثر در مورد k شرکت کننده دارای نمره های یکسان باشند . ثابت کنید

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

مسأله ۳ - بازاء هر عدد صحیح و مثبت n فرض کنیم d(n) تعداد مقسوم علیه های مثبت n (شامل ۱ و خود n) باشد .

همه اعداد صحیح مثبت k را پیدا کنید به طوری که بازاء یک n داشته باشیم

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

روز دوم:

مسأله ۴ - همه زوج های مرتب (a, b) از اعداد صحیح و مثبت را پیدا کنید که ab^2+b+7 بر a^2b+a+b قابل قسمت باشد .

مسأله ۵ - فرض کنیم I مرکز دایره محاطی مثلث ABC باشد . فرض کنیم دایره محاطی مثلث ABC بر اضلاع BC ، CA و AB به ترتیب در نقاط K ، L و M مماس باشد . خطی که از B به موازات MK رسم می شود خطوط LM و LK را به ترتیب در R و S قطع می کند . ثابت کنید زاویه RIS حاده است .

مسأله ۷ - همه توابعی مانند f از N ، مجموعه اعداد صحیح و مثبت به خودش را در نظر می گیریم به طوری که بازاء هر t و s در N داشته باشیم :

$$f\left(t^2 f(s)\right) = s\left(f(t)\right)^2$$

کمترین مقدار ممکن برای f(۱۹۹۸) را پیدا کنید .

مسأله۶ ، از سخت ترین مسائل المپیادها است و اعضای تیم ما ۵ حل کامل برای این مسألهٔ دشوار ارائه کردند که همین امر موجب جهش و فاصلهٔ تیم با بقیه شد . نتیجهٔ بچه ها به قرار زیر است :

در بین ۴۱۹ شرکت کننده در المپیاد نیز تنها امید امینی نمره کامل

به دست آورد که موجب افراشتگی هر چه بیشتر قامت تیم ما بود.

به هر تقدیر تلاش مداوم همراه با پی گیری متین و صبورانه، ما را به مقامی در المپیاد رسانده است که روزی رویایی می نمود و پیرو این دستاورد، المپیاد در فاز جدیدی قرار می گیرد که نیازمند به بازنگری کلیهٔ سیاستها و تدوین استراتژیهای جدید متناسب با این فاز تازه است. گامهایی برای تدارک کتابخانهٔ مرجع، تهیهٔ کتب و نشریات برای استفادهٔ هر چه بیشتر عموم دانش آموزان، تعمیم المپیاد به سالهای دیگر متوسطه و راهنمایی و توجه و استفاده از کامپیوتر به عنوان «رسانه» امروزی، و بعضی سیاستهای دیگر می تواند از این جمله باشد.

نکتهٔ دیگر که نباید از آن غافل بود این که نتیجهٔ درخشان المپیاد را نباید معیاری از وضعیت میانگین آموزش ریاضی در دبیرستانها دانست، آموزشی که در پرتو «کنکور»زدگی نظام آموزشی ما سخت قالبی است و جای خلاقیت و قدرت تحلیل در آن به شدت با مطالب محفوظاتی جای گزین شده است. شاید این دستاورد المپیاد موقع را برای پرداختن به آموزش ریاضی برای عموم نیز مناسب کرده باشد.

امید امینی سال چهارم دبیرستان شهید بهشتی ـ شهر ری	۴۲ امتیاز، طلا
سهند حاجی علی احمد سال چهارم دبیرستان علامهٔ حلّی ـ تهران	۳۷ امتیاز، طلا
کسری علیشاهی سال چهارم دبیرستان شهید اژه ای ـ اصفهان	۳۶ امتیاز، طلا
علیرضا کشاورز حداد سال چهارم دبیرستان رشد منطقهٔ ۱۶	۳۴ امتیاز، طلا
امیر آجرلو سال سوم دبیرستان رشد منطقه ۱۶	۳۳ امتیاز، طلا
فرهاد فراهانی سال چهارم دبیرستان علامهٔ حلی ـ تهران	۲۹ امتیاز، نقره

رمزنگاری

ترجمهٔ محمد باقری، دانشگاه امام حسین(ع)

۱ـ بعضی از سیستمهای رمزنگاری ساده

رمزنگاری مطالعه روشهای ارسال پیام با تغییر دادن صورت ظاهری آن است، به طوری که فقط گیرنده پیام بتواند رمز را برطرف کند و آن را به متن اصلی تبدیل سازد و بخواند. پیام ارسالی به متن اصلی "plaintext" و متنی که در اثر تغییر صورت ظاهری متن اصلی حاصل می شود به متن رمز شده "crphertext" موسوم اند.

معمولاً متن اصلی و رمزی را با یک مجموعه از N حرف می نویسند. «حرف» "letter" یا کاراکتر اشاره به هریک از حروف از A تا Z و یا هر سمبلی دارد که به منظور نوشتن پیام ارسالی به کار می رود. عملیات تبدیل متن اصلی به متن رمزی را رمزنگاری "enciphering" و عملیات معکوس آن را رمزگشایی "deciphering" می گویند.

متن اصلی و رمزی به واحدهای خبری شکسته می شود که هر واحد ممکن است شامل یک حرف، دو، سه یا حتی ۵۰ حرف باشد. یک تبدیل رمزی تابعی است که روی واحد متن اصلی عمل و آنها را به واحد رمزی تبدیل می کند. به عبارت دیگر اگر f معرف تبدیل باشد، f تابعی یک بیک است که از مجموعهٔ "P" (مجموعه تمام واحدهای متن اصلی) به "C" (مجموعه تمام واحدهای رمزی) تعریف می شود. یعنی برای هر واحد رمزی فقط یک واحد از متن اصلی نظیر شود. تبدیل کشفی یعنی f^{-1} تابعی است که واحد رمزی را به واحد اصلی نظیر می کند. این مطلب به طور خلاصه از شکل $P \xrightarrow{f} C \xrightarrow{f^{-1}} P$ حاصل می شود. چنین سیستمی را یک سیستم رمزنگاری گویند.

مرحله اوّل ساختن یک سیستم رمزنگاری تقسیم کردن متن اصلی و رمزی به واحدهای ممکن به طوری که در اثر تأثیر تبدیل رمزی f روی واحدهای متن اصلی بسادگی واحدهای متن رمزی حاصل شود. به طور مثال اگر واحدهای متن اصلی و متن رمزی را یکتا درنظر بگیریم، آن گاه می توانیم به حروف از A تا Z اعداد ۰ تا ۲۵ نظیر کنیم به طوری که ۰ معادل A، ۱۸ معادل S، ۲۳ معادل X و الی آخر باشد. و به عنوان مثالی دیگر اگر واحدهای متن اصلی و رمزی دوتایی باشند، آن گاه به حروف از A تا Z اعداد از ۰ تا ۲۵ و یک جا خالی نیز عدد ۲۶ نظیر می کنیم. لذا هر واحد شامل دو حرف x و y خواهد بود که $x, y \in \{۰,۱,۲,۳,...,۲۶\}$ به طوری که معادل عددی آن واحد را عدد $۲۷x + y \in \{۰,۱,۲,...,۷۲۸\}$ خواهد شد که x حرف اوّل و y حرف دوم واحد مورد نظر است. به عنوان مثال واحد "No" به عدد $۳۶۵ = ۱۴ + ۱۳ \times ۲۷$ نظیر می شود. به طور مشابه اگر تعداد حروف یک واحد با ۳ حرف باشد که حروف آن به ترتیب x، y، z باشد، آن گاه به این واحد عدد $x \times ۲۷^۲ + y \times ۲۷ + z$ نظیر می کنیم. که عددی در مجموعه $\{۰,۱,۲,...,۱۹۶۸۲\}$ خواهد بود.

به طور کلی اگر تعداد حروف مورد استفاده در یک سیستم رمزنگاری N تا باشد. عدد نظیر هر واحد K تایی بین صفر تا $N^k - ۱$ خواهد بود.

در بعضی مواقع به جای نظیر کردن عدد به یک حرف از بردار، نقطه و یا یک خم استفاده می شود. اما در طول این بخش ما همواره از اعداد به جای حروف استفاده خواهیم کرد.

مثالها

با حالتی شروع می کنیم که واحدهای متن اصلی و متن رمز شده یکتا باشند و تعداد حروف مورد استفاده N تا باشند. در این صورت برای هریک از N حرف، اعداد ۰، ۱، ۲، ...، $N-۱$ را نظیر خواهیم کرد و طبق تعریف هر سیستم رمزنگاری حاصل آرایشی جدید از مجموعه اعداد $\{۰,۱,۲,...,N-۱\}$ خواهد بود. یک راه ساده این کار آن است که اعداد مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,...,N-۱\}$ به عنوان اعدادی در مجموعه $\frac{Z}{NZ}$ درنظر بگیریم و سپس با کمک اعمال جمع و ضرب در جدول N کار کنیم.

مثال ۱: فرض کنید مجموعه حروف ۲۶ تایی A-Z با معادلهای عدد ۲۵ـ۰ به کار می بریم و $P \in \{۰,۱,۲,...,۲۵\}$ در متن اصلی یک واحد باشد. اکنون نگاشت f از $\{۰,۱,۲,...,۲۵\}$ به خودش را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(p) = \begin{cases} P+۳ & P < ۲۳ \\ P-۲۳ & P \geq ۲۳ \end{cases}$$

به عبارت دیگر $f(P) \equiv P + ۳ \quad (۲۶)$ تعریفی که پیمانه حسابی را به کار می برد، برای کار کردن آسان است. از این رو در این سیستم "YES" به "BHV" تبدیل خواهد شد. زیرا عدد معرف y، ۲۴ است

و طبق سیستم رمزنگاری بایستی عدد ۳ به هنگ ۲۶ به آن اضافه شود، خواهید داشت $۱ \underset{۲۶}{\equiv} ۲۷ = ۳ + ۲۴$ و عدد ۱ معادل B است لذا B به جای Y در این سیستم قرار می گیرد، به همین ترتیب به جای H ، E و به جای S ، V قرار خواهد گرفت این مطلب را می توانیم به صورت

$$(Y,E,S) \rightarrow (۲۴,۴,۱۸) \xrightarrow{f} (۲۷,۷,۲۱) \underset{۲۶}{\equiv} (۱,۷,۲۱) = BHV$$

بنویسیم. برای همین مثال اگر "ZKB" کلمه رمزی باشد، آن گاه برای تبدیل کردن آن به معنی اصلی کافی است از معادل عددی هر حرف ۳ واحد کم کنیم و حاصل را در هنگ ۲۶ بنویسیم، خواهید داشت:

$$(Z,K,B) \rightarrow (۲۵,۱۰,۱) \xrightarrow{f^{-1}} (۲۲,۷,۲۴) \longrightarrow (W,H,Y)$$

لذا $f^{-1}(ZKB) = WHY$. در رم باستان اولین بار جولیاس سزار از این سیستم رمزنگاری استفاده می کرده است. مثال بالا، را می توان به حالت کلی به صورت زیر تعمیم داد.

فرض کنید N حرف با معادلهای عددی $\{۰,۱,۲,\dots N-۱\}$ را به کار بریم و b یک عدد ثابت آنگاه منظور از تبدیل مکان تابع رمز به صورت $C = f(P) \equiv P + b \pmod N$. در دستگاه سزار $N = ۲۶$ ، $b = ۳$ بود. برای رمزگشایی یک واحد از متن رمزی مانند C که $C \in \{۰,۱,۲,\dots N-۱\}$ $P = f^{-1}(c) \equiv c - b \pmod N$ را حساب می کنیم.

فرض کنید شما هیچ اطلاعی از سیستم رمزنگاری و رمزگشایی نداشته باشید ولی علاقه مند به خواندن خبرهای کدگذاری شده هستید، این عمل را کد شکنی می نامند و دانستن شکستن کد را آنالیز رمزی می نامند. برای رسیدن به یک سیستم رمزنگاری به دو نوع آگاهی نیاز داریم. اولی طبیعت (ساختمان) کلی دستگاه است به عنوان مثال دستگاه رمز ما از ۲۶ حروف با معادلهای ۰ تا ۲۵ عدد تشکیل شده است و سیستم رمز انتقالی است. آگاهی نوع دوم اشاره به عددی دارد که میزان انتقال را معین می کند. در مورد مثال بالا اشاره به تعیین b دارد که در واقع $C \equiv p + b \pmod N$ و لذا $P \equiv c - b \pmod N$ همواره فرض خواهیم کرد که آگاهی ساختاری را می دانیم. در عمل مصرف کنندگان رمزنگاری ابزاری برای رمز نوشتن و رمز گشایی دارند که فقط به یک نوع رمز به کار می رود. لذا ممکن است پس از مدتی سیستم رمزنگاری آنها شکسته شود. از این رو برای افزایش امنیت سیستم اغلب پارامترها را پس از مدتی عوض می کنند. مثلاً فرض کنید دو مصرف کننده رمز انتقال همدیگر را بتوانند سالی یک بار ملاقات کنند. در آن زمان روی ۵۳ انتخاب پارامتر b توافق می کنند که برای هر هفته از یکی از آن پارامترها بترتیب در طول سال استفاده کنند.

مثال ۲: فرض کنید می خواهیم پیام "FQOCUDEM" را کشف کنیم به طوری که بدانیم از حرفهای یکتا به پیمانه ۲۶ استفاده شده باشد و نیز بدانیم سیستم رمز با انتقال به اندازهٔ b به هنگ ۲۶ انجام می گیرد، هدف ما تعیین b است.

یک راه تعیین b استفاده از کثرت تکرار است، به این معنی که معلوم شده در یک متن انگلیسی که از حروف A-Z استفاده می شود بیشترین تکرار را حرف "E" دارد. لذا در متن رمزی نیز حرفی که بیشترین تکرار را دارد بایستی معرف E باشد. مثلاً اگر U حرفی باشد که در متن رمزی بیشترین تکرار را داشته باشد در این صورت U معادل حرف E در متن رمزی است اما عدد نظیر U برابر ۲۰ و عدد نظیر E ، ۴ است در نتیجه $۲۰ \underset{۲۶}{\equiv} ۴ + b$ لذا $b = ۱۶$ و لذا برای رسیدن از U به E بایستی عدد ۱۶ را از عدد معرف U کم کنیم و عدد حاصل در هنگ ۲۶ معرف عدد E خواهد شد. لذا خواهیم داشت:

$$(F,Q,C,U,D,E,M) \longrightarrow (۵,۱۶,۱۴,۲,۲۰,۳,۴,۱۲) \xrightarrow{f^{-1}} (۵-۱۶,۱۶-۱۶,۱۴-۱۶,۲-۱۶,۲۰-۱۶,۳-۱۶,۴-۱۶,۱۲-۱۶) \underset{۲۶}{\equiv} (۱۵,۰,۲۴,۱۲,۴,۱۳,۱۴,۲۲) = (PAYMENOW)$$

در رمزنگاری تک الفبایی که مجموعه حروف ۲۶ تا از A ، Z و شیوه رمز نیز با انتقال به اندازه عدد b در هنگ ۲۶ انجام می گیرد، برای تعیین حرفی که بیشترین تکرار در متن رمزی را دارد نیاز به متن طولانی نیست، و در واقع b در یک مجموعهٔ ۲۶ تایی یعنی $\{۰,۱,۲,\dots ۲۵\}$ تغییر می کند و در بیشتر مواقع به ازای یک عدد از این مجموعه متن کشف شده معنی خواهد داشت، این عدد به کلید رمز موسوم است و لذا اینگونه رمزها بسادگی شکسته می شوند.
به طور کلی سیستم رمزی که از فرمول $f(p) = C = ap + b$ پیروی کند به سیستم رمز آفینی موسوم است، که در آن a و b دو عدد صحیح اند و به کلید رمز موسوم اند. برای مثال اگر تعداد حروف الفبای ۲۶ تا باشد و $a = ۷$ ، $b = ۱۲$ در این صورت کلمه "PAYMENOW" به صورت زیر رمز می شود.

$$\text{"PAYMENOW"} \longrightarrow ۱۵,۰,۲۴,۱۲,۴,۱۳,۱۴,۲۲ \xrightarrow{f} ۱۳,۱۲,۲۴,۱۸,۱۴,۲۵,۶,۱۰ \xrightarrow[۲۶]{\equiv} \text{"NMYSOZGK"}$$

کشف این گونه رمز نیز بسادگی انجام می گیرد در واقع داریم $P = a^{-1}C - a^{-1}b$ که در آن a^{-1} معکوس a به پیمانهٔ N است. لذا در این حالت بایستی حتماً $(a,N) = ۱$ زیرا در غیر این صورت یعنی وقتی $(a,N) > ۱$ نمی توان متن اصلی را از روی متن رمزی به طور یکتا تعیین کرد. زیرا طبق تعریف تبدیل رمزی باید معرف یک تابع یک بیک باشد. تا بتواند متن اصلی را از روی متن رمزی بطور یکتا تعیین نماید.

بطور خلاصه سیستم رمزنگاری آفینی با N حرف الفبا و با پارامتری $a \in (\frac{Z}{NZ})^{*}$ ، $b \in \frac{Z}{NZ}$ به صورت $C \underset{N}{\equiv} ap + b$ می باشد که در آن $a' = a^{-1}$ و $b' = -a^{-1}b$. در حالت خاص اگر $a = ۱$ به

سیستم رمزنگاری انتقالی خواهیم رسید.

حالت خاص دیگر آن است که $b=0$ در این حالت $C \underset{N}{\equiv} ap$ و $P \underset{N}{\equiv} a^{-1}C$ این حالت به تبدیل خطی موسوم است. دلیل اینکه به اینگونه سیستم رمزنگاری خطی گفته می‌شود آن است که اگر C_1 ، C_2 بترتیب رمز P_1 ، P_2 باشند. آنگاه C_1+C_2 رمز P_1+P_2 خواهد شد. اکنون فرض کنید از سیستم رمز آفینی استفاده می‌کنیم به طوری که تعداد حروف الفبا N تا و با سیستم تک الفبایی رمزنگاری صورت می‌گیرد. هدف ما تعیین پارامترهای a و b (کلید سیستم رمزنگاری) می‌باشد. برای این منظور نیاز به دانستن تبدیل دو حرف داریم.

مثال ۳: همچنان فرض می‌کنیم از ۲۶ حرف الفبای A-z استفاده می‌کنیم. فرض کنید که در یک متن رمز شده بیشترین تکرار بترتیب حروف "K" و "D" دارند. امّا چون در یک متن معمولی بیشترین تکرار را بترتیب حروف "E" و "T" دارند لذا طبیعی به نظر می‌رسد که بایستی K رمز شده E و D رمز شده T باشد. لذا اگر P معرف حرف اصلی و C معرف حرف رمزی بگیریم و به جای آنها معادل عددی آنها را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 4 \underset{26}{\equiv} 10a' + b' \\ 19 \underset{26}{\equiv} 3a' + b' \end{cases}$$

حال برای حل این دستگاه به پیمانه ۲۶ کافی است دو معادله را در هنگ ۲۶ از هم کم کنیم خواهیم داشت $2a' \underset{28}{\equiv} 22$ لذا $a' \underset{26}{\equiv} 7^{-1} \times 11$ امّا $7^{-1} \underset{26}{\equiv} 15$. در نتیجه $a' = 15 \times 11 \underset{26}{\equiv} 9$ با جایگزین کردن a' در یکی از معادلات بسادگی b' به دست می‌آید و خواهیم داشت: $b' = 4 - 10 \times a' \underset{26}{\equiv} 18$ لذا فرمول کشف این سیستم رمزنگاری عبارت است از: $P \underset{26}{\equiv} 9C + 18$.

از جبر خطی می‌دانیم که یک دستگاه n معادله، n مجهولی وقتی جواب دارد که معادلات نسبت به هم مستقل خطی باشند (یعنی وتر مبنای ماتریس ضرایب ناصفر باشد) در حالت دو معادله و دو مجهول هر معادله معرف یک خط راست است که اگر دو خط موازی نباشند آنگاه نقطه تقاطع آنها جواب دستگاه خواهد بود. در این حالت اغلب برای شکستن رمز آفینی از این اطلاع استفاده می‌کنیم که بیشترین تکرار حروف بترتیب متعلق به کدام دو حرف از متن رمزی است، سپس ما باید a' و b' را به طور یکتا پیدا کنیم که بعضی اوقات a' و b' بطور یکتا تعیین نمی‌شوند.

مثال ۴: فرض کنید یک متن رمز شده داشته باشیم به طوری که با سیستم تک الفبایی آفینی رمزنگاری انجام گرفته باشد. تعداد حروف مورد استفاده ۲۸ حرف از A تا Z و خالی و علامت «؟» باشد. به حروف از A تا Z اعداد از ۰ تا ۲۵ و به خالی عدد ۲۶ و به «؟» عدد ۲۷ نظیر می‌کنیم. فرض کنید معلوم شده که حروفی که بیشترین تکرار را در متن رمزی دارند به ترتیب "B" و "S" باشند. چون در یک متن انگلیسی معمولی با ۲۸ حرف بیشترین تکرار به ترتیب به حروف خالی و "E" می‌باشد لذا بایستی B رمز شده خالی و «؟» رمز شده E باشد. لذا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a' + b' \underset{28}{\equiv} 26 \\ 27a' + b' \underset{28}{\equiv} 4 \end{cases}$$

از تعامل این دو معادله خواهید داشت $2a' \underset{28}{\equiv} 22$ و لذا $a' \underset{14}{\equiv} 11$ در نتیجه $a' \underset{28}{\equiv} 11$ یا $a' \underset{28}{\equiv} 25$ و نیز به ترتیب $b' \underset{28}{\equiv} 15$ و یا $b' \underset{28}{\equiv} 1$ در نتیجه فرمول رمزگشایی به یکی از دو صورت $P \underset{28}{\equiv} 11C + 15$ و یا $P \underset{28}{\equiv} 25C + 1$ خواهد بود که هر دوی این تبدیلات حروف "B" و «؟» را به ترتیب به «خالی» و "E" تبدیل می‌کنند. حال باید تلاش کنیم تا اینکه معلوم شود کدام یک از دو فرمول فوق متن رمزی به یک متن معنی دار تبدیل می‌کند. فرض کنید حرف I در متن رمزی از نظر کثرت تکرار در اولویت سوم باشد. چون "T" نیز حرفی است در متن معمولی که از نظر تکرار در اولویت سوم قرار دارد (وقتی از ۲۸ حرف استفاده کنیم) لذا بایستی I رمز شده T باشد یعنی بایستی داشته باشیم $8a' + b' \underset{28}{\equiv} 19$ در نتیجه خواهیم داشت: $P \underset{28}{\equiv} 11C + 15$.

تبدیل دو الفبایی: در این حالت تعداد حروف هر واحد متن اصلی و رمزی ۲ حرفی می‌باشد. لذا در این حالت متن اصلی را به واحدهای ۲ حرفی تقسیم می‌کنیم. اگر تعداد حروف متن اصلی زوج باشد، با این عمل تمام متن اصلی به واحدهای ۲ حرفی تقسیم می‌شود و اگر تعداد حروف متن اصلی فرد باشد در این صورت در آخرین واحد از یک حرف اضافی که معمولاً حرف «خالی» و یا X و یا Q است استفاده خواهیم کرد. در این حالت هر واحد ۲ حرفی معادل یک عدد خواهیم گرفت که به صورت $x.N + y$ بدست می‌آید که در آن x عددی است که معرف معادل حرف اوّل به پیمانهٔ N و y عددی است که معرّف معادل حرف دوم واحد به پیمانهٔ N است که N تعداد حروف الفبا است. بدین ترتیب یک تناظر یک بیک بین واحدهای رمزی و اعداد نامنفی کمتر از N^2 ایجاد خواهد شد. اکنون به تشریح این مطلب در حالتی که $N = 27$ می‌پردازیم. رمز کردن را به عنوان یک تغییر آرایشی از اعداد $\{0,1,2,\dots,N^2-1\}$ می‌گیریم، ساده‌ترین این گونه رمز کردن همان رمز آفینی است، که رمز کردن P را نظیر عددی صحیح کمتر از N^2 خواهیم گرفت به طوری که در معادلهٔ همنهشتی $C \underset{N^2}{\equiv} ap + b$ صدق کند. در اینجا نیز مانند قبل a با N عامل مشترکی نباید داشته باشد. (که a با N^2 نیز عامل مشترکی نباید داشته باشد.) بدین ترتیب رمزگشایی نیز از روی معادله $P \underset{N^2}{\equiv} a'C + b'$ خواهد بود که $a' = a^{-1}$ و $b' = -a^{-1}b$ در هنگ N^2 خواهد بود. C را که از یک واحد دو حرفی متن رمزی است با معادله $C = x'N + y'$ به یک عدد نظیر می‌کنیم که x' معرف عدد معادل حرف اوّل و y' معرف عدد معرف حرف دوم می‌باشد.

مثال ۵: فرض کنید $N = 26$ و رمزنگاری به صورت ۲ الفبایی

باشد (واحدها ۲ حرفی باشند) و نیز $C \underset{۲۶^۲=۶۷۶}{\equiv} ۱۵۹P + ۵۸۰$ آنگاه واحد "NO" معادل است با $۳۵۲ = ۱۴ + ۲۶ \times ۱۳$ و رمز آن به صورت $۴۴۰ \underset{۶۷۶}{\equiv} ۵۸۰ + ۳۵۲ \times ۱۵۹$ و چون $۴۴۰ = ۱۶ \times ۲۶ + ۱۴$ لذا رمز "NO" با این سیستم به صورت "Qy" خواهد شد.

به طور مشابه چون "ON" معادل ۳۷۷ لذا $۳۵۹ \underset{۶۷۶}{\equiv} C = ۱۵۹ \times ۳۷۷ + ۵۸۰$ اما $۳۵۹ = ۱۳ \times ۲۶ + ۲۱$ لذا معادل رمزی "ON" کلمه "NV" خواهد شد. بدین ترتیب ملاحظه می شود که هر واحد متن اصلی به یک واحد یکتا از واحد متن رمزی تبدیل می شود و این یکتایی با وجود یک حرف مشترک در دو واحد متن اصلی حفظ می شود.

برای شکستن این سیستم رمزی که با فرمول $C \underset{N^2}{\equiv} ap + b$ معرفی شده باشد نیاز به داشتن معادل دو واحد رمزی داریم چون سیستم رمزنگاری دوالفبایی است نیاز داشتن معادل ۲ واحد رمزی ۲ حرفی داریم. مثلاً اگر سیستم ۲۶ حرفی استفاده می کنیم چون در یک متن انگلیسی معمولی بیشترین تکرار دو حرفی به ترتیب "TH" و "HE" تعلق داشته باشد، آنگاه در متن رمزی دو واحد دو حرفی به ترتیب بیشترین تکرار معادل این دو خواهند بود و با داشتن این اطلاع پارامترهای a و b (نه همیشه) محاسبه می شوند.

مثال ۶: فرض کنیم از حروف A تا Z هریک به ترتیب نظیر ۰ تا ۲۵ و «خالی» معادل ۲۶ استفاده شود. در این صورت برای هر واحد ۲ حرفی عددی از صفر تا $۲۷^۲ - ۱$ نظیر می شود. اگر در یک بلوک ۲ حرفی x و y به ترتیب معرف عدد حرف اوّل و دوم باشد، آنگاه عدد نظیر این بلوک عبارت از $۲۷ \times x + y$ خواهد بود. فرض کنیم در یک متن رمزی معلوم شده بلوکهای ۲ حرفی که بیشترین تکرار را دارند به ترتیب "ZA"، "IA"، "IW" باشند و نیز بدانیم در یک متن انگلیسی با ۲۷ حرف بیان شده بیشترین بلوکهای ۲ حرفی از نظر تکرار به ترتیب "E,blank"، "S,blank" و "T,blank" باشند. فرض کنید از سیستم رمز آفینی استفاده می کنیم مطلوب است کلید کشف این سیستم به طوری که "NDXBHO" را بخوانیم و همچنین می خواهیم کلید رمز را نیز بیابیم.

حل: می دانیم رمز از دستور $C \underset{۷۲۹}{\equiv} ap + b$ پیروی می کند لذا $P \underset{۷۲۹}{\equiv} a'c + b'$ دستور کشف خواهد بود که a و b را کلیدهای رمزی و a' و b' را کلیدهای کشفی می گویند. ابتدا a' و b' را پیدا می کنیم. با توجه به صورت مسئله معادل سه بلوک ۲ حرفی را می دانیم یعنی داریم

$$\begin{cases} ۶۷۵a' + b' \underset{۷۲۹}{\equiv} ۱۳۴ \\ ۲۱۶a' + b' \underset{۷۲۹}{\equiv} ۵۱۲ \\ ۲۳۸a' + b' \underset{۷۲۹}{\equiv} ۷۲۱ \end{cases}$$

. اگر معادله اوّل را از دوم کم کنیم خواهید داشت $۴۵۹a' \underset{۷۲۹}{\equiv} ۳۵۱$ اما از اینجا a' به طور منحصر به فرد تعیین نمی شود. لذا بهتر است معادله سوم را از اوّل کم کنیم خواهید داشت $۴۳۷a' \underset{۷۲۹}{\equiv} ۱۴۲$. حال برای حل این معادله بایستی معکوس ۴۳۷ در هنگ ۷۲۹ را پیدا کنیم برای این منظور به ترتیب زیر عمل می کنیم.

$$۷۲۹ = ۴۳۷ + ۲۹۲$$
$$۴۳۷ = ۲۹۲ + ۱۴۵$$
$$۲۹۲ = ۲ \times ۱۴۵ + ۲$$
$$۱۴۵ = ۷۲ \times ۲ + ۱$$

حال از عملیات بالا ایده می گیریم و می نویسیم.

$$\begin{aligned} ۱ &= ۱۴۵ - ۷۲ \times ۲ = ۱۴۵ - ۷۲(۲۹۲ - ۲ \times ۱۴۵) \\ &= ۱۴۵ - ۷۲ \times ۲۹۲ + ۱۴۴ \times ۱۴۵ = ۱۴۵ \times ۱۴۵ - ۷۲ \times ۲۹۲ \\ &= ۱۴۵(۴۳۷ - ۲۹۲) - ۷۲ \times ۲۹۲ = ۱۴۵ \times ۴۳۷ - ۲۱۷ \times ۲۹۲ \\ &= ۱۴۵ \times ۴۳۷ - ۲۱۷(۷۲۹ - ۴۳۷) \\ &\underset{۷۲۹}{\equiv} ۳۶۲ \times ۴۳۷ \Rightarrow a' \underset{۷۲۹}{\equiv} ۳۶۲ \times ۱۴۲ \underset{۷۲۹}{\equiv} ۳۷۴ \end{aligned}$$

بنابراین $b' = ۱۳۴ - ۶۷۵ \times ۳۷۴ \underset{۷۲۹}{\equiv} ۶۴۷$

اکنون هریک از بلوکهای "ND"، "XB" و "HO" که به ترتیب نظیر اعداد ۳۵۴, ۶۲۲, ۲۰۳ می باشند به ۳۶۵, ۷۲۴, ۲۴ تبدیل می شوند لذا خواهید داشت $۳۶۵ = ۱۳ \times ۲۷ + ۱۴$، $۷۲۴ = ۲۶ \times ۲۷ + ۲۲$ و $۲۴ = ۰ \times ۲۷ + ۲۴$. لذا متن اصلی بصورت "No "way خواهد شد. در نهایت برای یافتن a و b داریم:

$$b = -a'^{-1}b' \underset{۷۲۹}{\equiv} -۶۱۴ \times ۶۴۷ \equiv ۴۷ ، \quad a = a'^{-1} \underset{۷۲۹}{\equiv} ۳۷۴^{-1} \equiv ۶۱۴$$

لذا سیستم رمزنگاری به صورت $C \underset{۷۲۹}{\equiv} ۶۱۴p + ۴۷$ خواهد بود.

تبصره: گرچه سیستم رمزنگاری دو الفبایی (اعداد به پیمانه N^2) از سیستم تک الفبایی (اعداد به پیمانه N) بهتر است. ولی هردو دارای اشکال می باشند. توجه کنید که حرف دوم هر واحد دو حرفی فقط به حرف دوم واحد متن اصلی وابسته است زیرا در معادلهٔ $C \underset{N^2}{\equiv} ap + b$ حرف دوم در هنگ N درنظر گرفته می شود. بنابراین اطلاعات زیادی از تجزیه و تحلیل واحدهای دو حرفی متن رمزی می توان بدست آورد.

به طور مشابه می توان سیستم رمزنگاری آفینی را در هنگ N^k برای واحدهای k- حرفی مطرح کرد.

تمرین

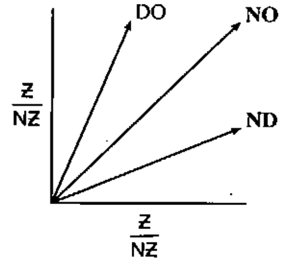
۳ـ در سیستم ۲۷ الفبایی از A تا Z و بعلاوه blank در حالتی که سیستم رمزنگاری آفینی با $a = ۱۳$، $b = ۹$ متن "Help me" را رمز کنید.

۴ـ فرض کنید در یک متن رمزی که با سیستم آفینی تک الفبایی رمز شده باشد. بیشترین تکرار به ترتیب y و V باشد و این دو نیز به ترتیب رمز شده E و T باشند. در این صورت

"QAOOYQQEVHEQV" را کشف کنید.

رمزنگاری ماتریسی

فرض کنید از N تا حروف الفبا استفاده می کنیم و نیز رمزنگاری ۲ الفبایی صورت می گیرد. یعنی هر واحد متن اصلی با رمزی از دو حرف تشکیل شده باشد. در بخش ۱ ملاحظه کردیم که چگونه برای هر واحد می توانیم عددی در $\frac{\mathbb{Z}}{N^2\mathbb{Z}}$ نظیر کنیم. روش دیگر این تناظر این است که برای هر واحد ۲ حرفی یک بردار به صورت $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ نظیر کنیم که x و y در $\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$ قرار داشته باشند. برای مثال اگر تعداد حروف به کار رفته از A تا Z ، ۲۶ حرف باشند در این صورت برای هریک از آنها به ترتیب عدد صفر تا ۲۵ را نظیر می کنیم در این صورت بردار نظیر "NO" $\begin{pmatrix} ۱۳ \\ ۱۴ \end{pmatrix}$ خواهد شد. شکل زیر را ملاحظه کنید.



در این شکل برای واحد ۲ حرفی متن اصلی نقطه ای در ربع اول دستگاه مختصات دکارتی نظیر می شود به طوری که طول و عرض آن نقطه عددی در $\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$ باشد. ما این قسمت از نقاط صفحه را با نماد $\left(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}\right)^2$ نمایش می دهیم و در این صورت هر سیستم رمزنگاری یک تابع یک بیک از $\left(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}\right)^2$ به خودش خواهد بود.

تبصره: این شیوه رمزنگاری را رمز Vigenere گویند و به صورت زیر توصیف می شود. فرض کنیم k یک عدد صحیح مثبت باشد هر واحد k تایی از حروف را معادل یک بردار در $\left(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}\right)^k$ درنظر بگیرید حال بردار ثابت $b \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}\right)^k$ را درنظر بگیرید در این صورت سیستم رمز انتقالی از فرمول $C = p + b$ به دست خواهد آمد (که C یک بردار ستونی k تایی و P نیز چنین است)

در این سیستم رمزنگاری با داشتن معادل یک بردار ستونی رمز شکسته می شود. (مثال ۱ از بخش قبل را ملاحظه کنید.)

بعضی مواقع اگر k و N را بدانیم یا بتوانیم حدس بزنیم آنگاه شکستن متن رمزی که از واحدهای k تایی تشکیل می شوند ساده است و با بررسی کثرت تکرار حرف اول هر واحد پی به مؤلفه اول b و با بررسی کثرت تکرار حرف دوم هر واحد پی به مؤلفه دوم b و ... خواهیم برد.

مروری از جبر خطی: هر بردار به شکل $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ را به عنوان یک نقطه ای از صفحه xy درنظر می گیریم و هر آرایشی از اعداد بصورت $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را یک ماتریس ۲×۲ می گوییم با تعریف زیر با کمک ماتریس ۲×۲ و بردار $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ بردار جدید دیگری به صورت زیر به دست می آید $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

هر چنین ماتریس ۲×۲ای معرف تابعی خواهد بود که اثر آن روی بردار آن را به یک بردار دیگر تبدیل می کند. این نوع توابع به تبدیل خطی موسوم اند. با این حساب $ax + by = e$ ، $cx + dy = f$ معادله ماتریسی بالا به صورت $AX = B$ خواهد شد که در آن $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. بنابراین مشابه معادلات معمولی اینجا نیز پس از ضرب یک ماتریس A در یک بردار X بردار جدیدی ظاهر خواهد شد. بنابراین حل معادلهٔ $ax = b$ منجر به یافتن معکوس a است. در معادلهٔ $AX = B$ نیز بایستی ابتدا معکوس A را پیدا کنیم و در این صورت اگر A^{-1} معرف معکوس A باشد خواهیم داشت $X = A^{-1}B$. در این جا منظور از معکوس ماتریس A یعنی ماتریس دیگری ۲×۲ به طوری که ضرب آن در ماتریس A منجر به پدید آمدن $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ شود. اما تمام ماتریسهای ۲×۲ معکوس ندارند در واقع می توان تایپ کرد ماتریس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ دارای معکوس است اگر و فقط اگر $D = ad - bc \neq ۰$ و در این حالت معکوس A به صورت $\frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ خواهد بود.

وقتی معادلهٔ ماتریس $AX = B$ را مشابه معادله معمولی $ax = b$ درنظر بگیریم سه حالت در فرایند حل $AX = B$ رخ خواهد داد. حالت اول آن است که $D \neq ۰$ و در این صورت معادله دارای یک جواب منحصر به فرد $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ دارد. حالت دوم و سوم از وضعیت $D = ۰$ ناشی می شود در این حالت یا معادله هیچ جوابی ندارد و یا اینکه بی نهایت جواب دارد. زیرا وقتی $D = ۰$ هریک از معادلات، معادله ماتریسی $AX = B$ معرف یک خط در صفحه xy است. و در این حالت یا دو خط با هم موازی اند (لذا هیچ نقطه ای همدیگر را قطع نمی کنند) و یا اینکه روی همدیگر منطبق اند لذا در بی نهایت نقطه همدیگر را قطع می کنند و در حالتی که $D \neq ۰$ دو خط همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند لذا معادله ماتریس جواب منحصر به فرد دارد. فرض کنیم $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ، $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ، ... ، $X_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ زنجیری از بردارها باشند اگر آنها را به صورت ماتریس k×۲ ، به صورت $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \dots x_k \\ y_1 & y_2 \dots y_k \end{pmatrix}$ درنظر بگیریم آنگاه ماتریس AX را به صورت

$$Ax=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\dots x_k\\ y_1 & y_2\dots y_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_1+by_1,\dots ax_k+by_k\\ cx_1+dy_1,\dots cx_k+dy_k\end{pmatrix}$$

تعریف می کنیم مشابه بالا اگر بردار X یک بردار ستونی با سه سطر باشد، آنگاه A را یک ماتریس ۳×۳ درنظر گرفته و AX را مشابه بالا تعریف خواهیم کرد.

گرچه که یافتن فرمول برای تعیین دترمینال و معکوس یک ماتریس ساده نیست، با این وجود نظری به جبر خطی روی میدان اعداد حقیقی خواهید داشت.

جبر خطی در مدول N

در بخش ۱ وقتی رمزنگاری به صورت تک الفبایی به پیمانه N صورت می گرفت دو وضعیت ساده زیر را بررسی کردیم.

الف) نگاشت خطی که به صورت $C\underset{N}{\equiv}ap$ می باشد که در آن $(a,N)=1$.

ب) نگاشت آفینی که به صورت $C\underset{N}{\equiv}ap+b$ می باشد که در آن $(a,N)=1$.

مشابه دو حالت فوق وقتی رمزنگاری به صورت ۲ الفبایی باشد و از ماتریسها استفاده کنیم برقرار خواهد بود. ابتدا به توضیح حالت (الف) می پردازیم. در حالت تک الفبایی برای هر واحد_تک حرفی عددی در $\frac{Z}{NZ}$ نظیر می کردیم اما در این حالت برای هر بلوک ۲ حرفی عضوی از $(\frac{Z}{NZ})^2$ را نظیر خواهیم کرد و نیز در الف a' عددی در $\frac{Z}{NZ}$ بود اما در اینجا به جای a یک ماتریس ۲×۲ مانند A به پیمانه N قرار می گیرد. توصیف این مطلب به قرار زیر است. فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد یعنی یک مجموعه همراه با دو عمل ضرب و جمع به طوری که تمام خواص یک میدان را بجز دانستن معکوس ضربی برای هر عضو داشته باشد. به عنوان مثال $\frac{Z}{NZ}$ همواره یک حلقه است اما در حالتی که N اول نباشد میدان نخواهد بود. فرض کنید R^* معرف مجموعه تمام عناصر R باشد که دارای معکوس ضربی باشد. به عنوان مثال $(\frac{Z}{NZ})^*=\{0<j<N;\ (j,N)=1\}$. فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. $M_2(R)$ را مجموعه تمام ماتریسهایی را درنظر می گیریم که ۲×۲اند و عناصر آنها از R باشند با دو عمل معمولی جمع و ضرب ماتریسها. به $M_2(R)$ که تشکیل یک حلقه می دهد حلقه ماتریسی روی R گویند. توجه کنید که $M_2(R)$ به اعمال معمولی ضرب و جمع ماتریسها یک حلقه است اما حلقه جابجایی نیست. یعنی تغییر جای یک مؤلفه ماتریس حاصل ضرب یک ماتریس را عوض می کند. در تمامی بحث این بخش منظور ما از R یعنی حلقه اعداد حقیقی که میدان نیز هست. ماتریس $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ که در آن a,b,c,d معکوس ضربی دارد اگر و فقط اگر $D=ad-cb\neq 0$ و در این حالت معکوس این ماتریس $\begin{pmatrix}D^{-1}d & -D^{-1}b\\ -D^{-1}c & -D^{-1}a\end{pmatrix}$ خواهد بود. شاید همین وضعیت وقتی روی یک حلقه دلخواه دیگری کار می کنیم برقرار خواهد بود.

لذا فرض کنید $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(R)$ به طوری که $D=\det(A)=ad-bc\in R^*$ و فرض کنید D^{-1} معرف معکوس D در حلقه R باشد آنگاه

$$\begin{pmatrix}D^{-1}d & -D^{-1}b\\ -D^{-1}c & -D^{-1}a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}D^{-1}(ad-bc) & D^{-1}(db-bd)\\ D^{-1}(-ca+ac) & D^{-1}(-bc+ad)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

همین نتیجه در حالتی که جای ماتریس و معکوس آن را در عمل ضرب بالا عوض کنیم برقرار خواهد بود. بنابراین مشابه ماتریسهای حقیقی معکوس ماتریس A به صورت $A^{-1}=\begin{pmatrix}D^{-1}d & -D^{-1}b\\ -D^{-1}c & -D^{-1}a\end{pmatrix}$ به دست می آید.

مثال ۱: معکوس ماتریس $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 7 & 8\end{pmatrix}\in M_2\left(\frac{Z}{26Z}\right)$ را به دست آورید.

حل: در اینجا داریم:

$D=2\times 8-3\times 7=16-21=-5\underset{26}{\equiv}21$ اما چون $(21,26)=1$

لذا D معکوس دارد به سادگی معلوم می شود. $5\underset{26}{\equiv}21^{-1}$ بنابراین $A^{-1}=\begin{pmatrix}5\times 8 & -5\times 3\\ -5\times 7 & 5\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40 & -15\\ -35 & 10\end{pmatrix}$ اما ماتریس حاصل در هنگ ۲۶ به صورت $A^{-1}\underset{26}{\equiv}\begin{pmatrix}14 & 11\\ 17 & 10\end{pmatrix}$ بسادگی می توان دید که $\begin{pmatrix}14 & 11\\ 17 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14 & 11\\ 17 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

در اینجا چون با $\frac{Z}{26Z}$ کار می کنیم لذا هر جا علامت منظور = همنهشتی به پیمانهٔ ۲۶ است.

در حالتی که ماتریس $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ یک ماتریس حقیقی باشد. ملاحظه می کنیم ضرب آن در بردار ستونی $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ که $x,y\in R$ بردار ستونی جدید $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ خواهد شد که به صورت $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}$ محاسبه می شود. بدین ترتیب یک نگاشت خطی ساخته می شود از بردارها به بردارها بدین معنی که ترکیب خطی $\begin{pmatrix}k_1x_1'+k_2x_2'\\ k_1y_1'+k_2y_2'\end{pmatrix}$ که در آن k_1، k_2 در

حلقه R قرار دارند به صورت $\begin{pmatrix} k_1x'_1 + k_2x'_2 \\ k_1y'_1 + k_2y'_2 \end{pmatrix}$ درمی‌آورد. اکنون از تمامی مطالب گفته شده استفاده می‌کنیم و حالتی را درنظر می‌گیریم که $R = \frac{Z}{NZ}$ و در این حالت قضیه ذیل را اثبات می‌کنیم توجه شود که این قضیه برای دو حلقه دلخواه R نیز صادق است

قضیه ۳ . ۲ . ۱ . فرض کنید $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\frac{Z}{NZ})$ ، $D = ad - bc$ آنگاه شرایط ذیل معادلند:

الف) $(D,N) = 1$

ب) A دارای معکوس است

ج) اگر x، y هردو در $\frac{Z}{NZ}$ صفر نباشند آنگاه $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

د) ماتریس A معرف یک تبدیل یک بیک از $(\frac{Z}{NZ})^2$ به خودش است.

برهان: قبلاً نشان دادیم که (ب) $\Rightarrow$ (الف) لذا کافی است نشان دهید (الف) $\Rightarrow$ (ج) $\Rightarrow$ (د) $\Rightarrow$ (ب) اگر (ب) برقرار باشد آنگاه A^{-1} موجود است لذا اثر آن در $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ بردار $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ خواهد شد. یعنی (د) برقرار است. حال اگر (د) برقرار باشد و $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ در این صورت $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ یعنی (ج) برقرار است. سرانجام نشان می‌دهید (الف) $\Rightarrow$ (ج) برای این منظور فرض کنیم (الف) برقرار نباشد. نشان خواهید داد (ج) نیز برقرار نخواهد بود.

فرض کنیم (الف) برقرار نباشد. لذا $m = (D,N) > 1$ حال فرض کنیم $m' = \frac{N}{m}$ در اینجا سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر هر یک از اعضای ماتریس A بر m قابل تقسیم باشند. آنگاه $\frac{a}{m} = a_1$ ، $\frac{b}{m} = b_1$ ، $\frac{c}{m} = c_1$ ، $\frac{d}{m} = d_1$ حال اگر $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ m' \end{pmatrix}$ آنگاه $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ اما

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1m & b_1m \\ c_1m & d_1m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1mm' + b_1mm' \\ c_1mm' + d_1mm' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

یعنی (ج) برقرار نخواهد بود. حالت دوم: اگر a و b هردو بر m قابل تقسیم نباشند آنگاه با این حساب $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bm' \\ am' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ داریم:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -bm' \\ am' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -abm' + bam' \\ -cbm' + dam' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Dm' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

چون $m|D$ و بنابراین $N = mm'|Dm'$ لذا در این حالت نیز (ج) نقض می‌شود.

حالت سوم: اگر C و d هردو بر m قابل تقسیم نباشند در این حالت قرار می‌دهیم $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dm' \\ -cm' \end{pmatrix}$ در این صورت بنا به فرض $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ و همانند حالت دوم نتیجه می‌شود که $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ یعنی در این حالت نیز (ج) نقض می‌شود بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

مثال ۲: دستگاه معادلات همنهشتی زیر را حل کنید.

(الف) $\begin{cases} 2x + 3y \underset{26}{\equiv} 1 \\ 7x + 8y \underset{26}{\equiv} 2 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} x + 3y \underset{26}{\equiv} 1 \\ 7x + 9y \underset{26}{\equiv} 2 \end{cases}$ (ج) $\begin{cases} x + 3y \underset{26}{\equiv} 1 \\ 7x + 9y \underset{26}{\equiv} 2 \end{cases}$

حل: دستگاه (الف) به صورت معادله ماتریسی $AX \underset{26}{\equiv} B$ می‌باشد که در آن A ماتریس مثال ۱ و $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ در مثال ۱ معکوس ماتریس A را بدست آوردیم لذا

$$X \underset{26}{\equiv} A^{-1}B \equiv \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 17 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \underset{26}{\equiv} \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

ماتریسهای معرف دستگاه (ب) و (ج) معکوس ندارند زیرا دترمینال ماتریس ضرایب آنها عدد ۱۴ است و ۱۴ ، ۲۶ عامل مشترک ۲ دارند. اما اگر دستگاه (ب) و (ج) را در مدول ۱۳ حل کنیم خواهیم توانست جوابی برای هنگ ۲۶ نیز به دست آوریم. در هنگ ۱۳ خواهیم داشت:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ که در مورد (ب) $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و در مورد (ج) $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

لذا به ترتیب $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{13}{\equiv} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{13}{\equiv} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. حال اگر بخواهیم مسئله را به پیمانهٔ ۲۶ حل کنیم آنگاه در حالت (ب) جوابی موجود نیست زیرا لازمه وجود جواب آن است که در دستگاه $\begin{cases} x + 3y \underset{26}{\equiv} 1 \\ 7x + 9y \underset{26}{\equiv} 2 \end{cases}$ و یا $6x + 6y + 1 \underset{26}{\equiv} 2$ و یا $6(x + y) \underset{26}{\equiv} 1$ یعنی لازمه وجود جواب آن است که عدد ۶ به پیمانه ۲۶ معکوس پذیر باشد که غیرممکن است.

امّا در حالت (ج) دو جواب موجود است که عبارتند از: $\begin{pmatrix} 19 \\ 20 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ زیرا از $\begin{cases} x + 3y \underset{26}{\equiv} 1 \\ 7x + 9y \underset{26}{\equiv} 1 \end{cases}$ نتیجه می‌شود $6x + 6y + \underset{26}{\equiv} 1$ یعنی $6(x + y) \underset{26}{\equiv} 0$ لذا $x + y \underset{26}{\equiv} 13$.

یک راه کلی حل اینگونه دستگاهها وقتی ماتریس ضرایب معکوس نداشته باشد آن است که با کم کردن ضریب مناسبی از معادله اول از معادله دوم به یک معادله با یک متغیر دست یابیم و سپس مقدار آن متغیر را تعیین کنیم (مثلاً در مورد حالت (b) و (c) ۷ برابر معادله اول را از دوم کم کنیم).

حال برمی گردیم به بحث رمزنگاری، از قضیهٔ ۳ . ۲ . ۱ معلوم می‌شود از هر ماتریس $A \in M_2(\frac{Z}{NZ})$ که دترمینال آن عامل مشترکی با N به جز یک نداشته باشد یک سیستم رمزنگاری دو الفبایی

موسوم به رمزنگاری خطی حاصل می شود. در واقع اگر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ که $D=ad-bc$ ، $(D,N)=۱$ در این صورت هر واحد ۲ حرفی معادل $P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ در هنگ N خواهد بود و رمز این واحد عبارت از $C=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ در هنگ N خواهد شد که در آن $C=AP$ یعنی $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و برای رسیدن از واحد رمزی به واحد اصلی کافی است از معکوس ماتریس A استفاده کنیم یعنی $P=A^{-1}AP=A^{-1}C$ لذا $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D^{-1}d & -D^{-1}b \\ -D^{-1}C & D^{-1}a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

مثال ۳: فرض کنید از ۲۶ حرف A تا Z برای رمزنگاری استفاده می کنیم و A ماتریس مثال ۱ باشد. در این صورت کلمه "NO" را رمز کنید.

حل: داریم $AP=\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۷ & ۸ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱۳ \\ ۱۴ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۶۸ \\ ۲۰۳ \end{pmatrix}\underset{۲۶}{\equiv}\begin{pmatrix} ۱۶ \\ ۲۱ \end{pmatrix}$ بنابراین $C=AP$ به "QV" تبدیل می شود.

تذکر: اگر در صدد رمز کردن K تا واحد ۲ حرفی باشیم ابتدا تمامی آنها را به صورت یک ماتریس $۲\times K$ نوشته سپس اثر A را در آنها حساب می کنیم یعنی اگر $P_۱$ ، $P_۲$......P_k ، k تا واحد ۲ حرفی باشند. قرار می دهید $P=P_۱P_۲........P_k$ و سپس $C=AP$ را حساب می کنیم بدین ترتیب یکجا کلیه واحدها به صورت رمز در خواهند آمد.

مثال ۴: با اطلاعات مثال ۳ کلمه "NOANSWER" را رمز کنید.

حل: معادل این کلمه دنباله ماتریسهای $\begin{pmatrix} ۱۳ \\ ۱۴ \end{pmatrix},\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱۳ \end{pmatrix},\begin{pmatrix} ۱۸ \\ ۲۲ \end{pmatrix},\begin{pmatrix} ۴ \\ ۱۷ \end{pmatrix}$ می باشد، لذا خواهیم داشت:

$$C=AP=\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۷ & ۸ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱۳ & ۰ & ۱۸ & ۴ \\ ۱۴ & ۱۳ & ۲۲ & ۱۷ \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} ۶۸ & ۳۹ & ۱۰۲ & ۵۹ \\ ۲۰۳ & ۱۰۴ & ۳۰۲ & ۱۶۴ \end{pmatrix}\underset{۲۶}{\equiv}\begin{pmatrix} ۱۶ & ۱۳ & ۲۴۷ \\ ۲۱ & ۰ & ۱۶۸ \end{pmatrix}$$

در نتیجه رمز شده کلمه مورد نظر بصورت "QVNAYQHI" خواهد شد.

مثال ۵: با اطلاعات مثال ۳ و ۴ متن رمز شده "FWMDIQ" را کشف کنید.

حل: داریم

$$P=A^{-1}C=\begin{pmatrix} ۱۴ & ۱۱ \\ ۱۷ & ۱۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۵ & ۱۲ & ۸ \\ ۲۳ & ۳ & ۱۶ \end{pmatrix}\underset{۲۶}{\equiv}\begin{pmatrix} ۰ & ۱۹ & ۲ \\ ۱۹ & ۰ & ۱۰ \end{pmatrix}$$
="ATTACK"

در بخش ۱ شیوهٔ شکستن یک سیستم رمزنگاری تک الفبایی که در هنگ N انجام می شد توضیح دادیم. اکنون همان مطالب را به حالتی که رمزنگاری ۲ الفبایی و تعداد حروف الفبا N تا است و تبدیل خطی رمزنگاری بفرم $C=AP$ درنظر می گیریم. با وجودی که کلید رمز یعنی ماتریس A و کلید کشف یعنی A^{-1} را نداریم. امّا فرض کنید توانسته باشیم معادل ۲ واحد از متن اصلی و رمزی را بیابیم یعنی: $C_۲=AP_۲$, $C_۱=AP_۱$

این مطلب معمولاً از روی کثرت واحدهای دو حرفی در یک متن رمزی طولانی به دست می آید، یا شاید معادل ۴ حرف از متن اصلی و رمزی را بدانیم. در این حالت طی مراحل ماتریس A و A^{-1} را تعیین کرد. با کمک دو ماتریس ستونی $P_۱$, $P_۲$ یک ماتریس ۲×۲ بنام P می سازیم و به طور مشابه با کمک ۲ ماتریس ستونی $C_۱$, $C_۲$ یک ماتریس ۲×۲ بنام C ساخته می شود. بدین ترتیب یک معادله ماتریسی ۲×۲ بصورت $C=AP$ که در آن C و P معلوم ولی A نامعلوم است حاصل می شود. برای یافتن ماتریس A با ضرب طرفین معادله اخیر در P^{-1} خواهید داشت $A=CP^{-1}$ و به طور مشابه از $P=A^{-1}C$ می توان $A^{-1}=PC^{-1}$ را به دست آورد.

مثال ۶: فرض کنید می دانیم رمزنگاری با کمک یک ماتریس ۲×۲ صورت می گیرد و تعداد حروف الفبا ۲۹ حرف شامل A تا Z و blank = ۲۶ ، ?=۲۷ ، !=۲۸. می خواهیم متن رمزی "GFPYSP X?UYXSTLADPLW" را کشف کنیم.

فرض کنید معلوم شده که معادل پنج حرف آخر متن اصلی "KARLA" است. چون معادل ۶ حرف آخر را نمی دانیم لذا تنها از معادل ۴ حرف آخر استفاده می کنیم. لذا معادل دو واحد رمزی "DP" و "LW" به ترتیب "AR" و "LA" هستند. در نتیجه ماتریس P و C با کمک این مطلب معلوم می شود پس A^{-1} را از معادله $\begin{pmatrix} ۰ & ۱۱ \\ ۱۷ & ۰ \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} ۳ & ۱۱ \\ ۱۵ & ۲۲ \end{pmatrix}$ به دست می آید. خواهیم داشت:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} ۰ & ۱۱ \\ ۱۷ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ & ۱۱ \\ ۱۵ & ۲۲ \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} ۰ & ۱۱ \\ ۱۷ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ & ۱۳ \\ ۲۳ & ۷ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۲۱ & ۱۹ \\ ۲۲ & ۱۸ \end{pmatrix}$$

لذا کشف من به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} ۲۱ & ۱۹ \\ ۲۲ & ۱۸ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۶ & ۱۵ & ۹ & ۲۶ & ۲۷ & ۲۴ & ۱۸ & ۱۱ & ۳ & ۱۱ \\ ۵ & ۲۴ & ۱۵ & ۲۳ & ۲۰ & ۲۳ & ۱۹ & ۰ & ۱۵ & ۲۲ \end{pmatrix}\underset{۲۹}{\equiv}$$
$$\begin{pmatrix} ۱۸ & ۱۷ & ۱۰ & ۲۶ & ۱۹ & ۱۳ & ۱۴ & ۲۸ & ۰ & ۱۱ \\ ۱۹ & ۸ & ۴ & ۰ & ۲۶ & ۱۴ & ۱۳ & ۱۰ & ۱۷ & ۰ \end{pmatrix}$$
="SIRIKE AT NOON!KARLA"

تبصره: در مثال قبل توجه کنید که باید ماتریس P که از روی ۲ واحد ۲ حرفی متن اصلی به دست می آید بایستی معکوس پذیر باشد. یعنی دترمینال آن با N عامل مشترکی به جز ۱ نداشته باشند. چه کنیم در حالتی که این حالت مساعد پیش نیاید؟ در این حالت بایستی درصدد یافتن ۲ واحد دیگر باشیم که ماتریس حاصل از آنها معکوس پذیر باشد. اگر این امکان وجود نداشت A^{-1} بطور دقیق تعیین نمی شود. در این وضعیت چند ماتریس می توانند بظاهر نقش A^{-1} را داشته باشند که پس از بررسی یکی از آنها را که جواب واقعی است و در مسئله صدق می کند انتخاب خواهیم کرد. مثال زیر این

وضعیت را تشریح می کند.

مثال ۷ : فرض کنید رمزنگاری با کمک یک ماتریس صورت می گیرد و تعداد حروف مورد استفاده ۲۶ حرف باشد. می خواهیم با یافتن ماتریس کشف A^{-1} متن "WKNCCHSSJH" را کشف کنیم در صورتی که بدانیم معادل چهار حرف اوّل "GIVE" است.

حل : اگر همانند مراحل مثال ۶ عمل کنیم خواهیم داشت. $P = \text{"GIVE"} = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ و $C = \text{WKNC} = \begin{pmatrix} 22 & 13 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ و $A^{-1} = PC^{-1}$ اما $\det C = 18$ و $2 = (18,26)$. لذا مراحل زیر را طی می کنیم. فرض کنید $\overline{A}$ ، $\overline{C}$ ، $\overline{P}$ معرف ماتریسهای A، C، P در هنگ ۱۳ باشند. لذا این ماتریسها عناصری از $M_2\left(\frac{Z}{13Z}\right)$ خواهند بود که می توانیم C^{-1} (یا به طور دقیق تر $\overline{C}^{-1}$) را بدلیل $(\det C, 13) = 1$ را بیابیم. در نتیجه:

$$\overline{A}^{-1} = \overline{P}\,\overline{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

چون تمام مؤلفه های A^{-1} اعداد صحیح در هنگ ۲۶ هستند.

باید کم کنیم $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ را در هنگ ۱۳ . لذا دو حالت برای A^{-1} حاصل می شود. به طور دقیقتر $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 13A_1$ که $A_1 \in M_2\left(\frac{Z}{2Z}\right)$ یک ماتریس 2×2 است که عناصر آن یا صفر است و یا عدد یک. که $16 = 2^4$ حالت ممکن پیش می آید. اما چون بایستی A^{-1} معکوس پذیر باشد. لذا باید دترمینال آن نسبت به ۲۶ عامل مشترکی داشته باشد. لذا نسبت به ۲ نیز بایستی اوّل باشد.

یعنی بایستی دترمینال A^{-1} عدد فرد باشد. و نیز چون A^{-1} بایستی در معادله $A^{-1}\begin{pmatrix} 22 & 13 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \underset{26}{\equiv} \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ صدق کند لذا در حالت برای A_1 بیشتر اتفاق نمی افتد یا $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ و یا $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ لذا $A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 16 & 15 \end{pmatrix}$ و یا $A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 16 & 15 \end{pmatrix}$ در حالت اوّل متن رمزی به "GIVEGHEMHP" و در حالت دوم به "GIVETHEMUP" تبدیل می شود که حالت دوم با منحنی است لذا $A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 16 & 15 \end{pmatrix}$

تبصره : در مثال ۷ شاید بهتر این باشد که مؤلفه های $\overline{A}^{-1}$ را با ضرب در عدد ۱۳ تعدیل کنیم. در نتیجه آنها بر عدد ۲ قابل تقسیم می شوند یعنی A_1 را به صورت زیر تعریف می کنیم $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} + 13A_1$. آنگاه می توانیم اطلاعاتی روی A_1 با کار کردن در هنگ ۲ به دست آوریم زیرا در این حالت داریم $A_1 C \underset{2}{\equiv} P$.

تبدیلهای رمزی آفینی : یک راه معمولی رمزنگاری ۲ الفبایی که در آن هر واحد ۲ حرفی به صورت $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ نمایش داده می شود آن است که از یک ماتریس 2×2 ، A که $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \left(\frac{Z}{NZ}\right)$ و سپس جمع یک بردار مانند $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ استفاده شود در واقع خواهید داشت $C = AP + B$ (*) به عبارت دیگر

$$C = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$$

این گونه رمزنگاری را رمز آفینی گویند و در واقع تعمیمی از نگاشت $C \equiv ap + b$ است که در بخش ۱ در خصوص رمزنگاری تک الفبایی بیان شد. البته در این جا منظور از "$\equiv$" همنهشتی در هنگ N می باشد.

برای یافتن فرمولی که P را بر حسب C معین کند کافی از طرفین B را کم کنیم سپس طرفین را در A^{-1} ضرب کنیم خواهیم داشت $P = A^{-1}C - A^{-1}B$ توجه شود فرمول فوق نیز یک تبدیل آفینی به صورت $P = A'C + B'$ که در آن $A' = A^{-1}$ و $B' = -A^{-1}B$.

توجه شود برای به دست آوردن P به طور یکتا بایستی ماتریس A معکوس داشته باشد. فرض کنید می دانیم از رمزنگاری آفینی با هنگ N و ۲ الفبایی استفاده می شود. چگونه می توان A و B (و یا A' و B') را به دست آورد؟

برای این منظور لااقل نیاز داریم که معادل رمزی سه واحد ۲ حرفی را داشته باشیم. لذا فرض کنید C_1 ، C_2 ، C_3 معادل رمزی P_1 ، P_2 ، P_3 باشند در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P_1 = A'C_1 + B' \\ P_2 = A'C_2 + B' \\ P_3 = A'C_3 + B' \end{cases}$$

حال برای یافتن A' و B' کافی است معادله آخر را از دو معادله قبلی کم کنیم و با کمک $P_1 - P_3$ و $P_2 - P_3$ یک ماتریس 2×2 و همین طور با کمک دو ماتریس $C_1 - C_3$ و $C_2 - C_3$ نیز یک ماتریس 2×2 بسازیم اگر این ماتریسهای 2×2 به ترتیب P و C بنامیم معادله $P = A'C$ را بدست خواهیم آورد حال می توانیم (بشرط داشتن معکوس ماتریس C) A' را بدست آوردیم و لذا با جایگزینی A' در یکی از سه معادله می توانیم B' را نیز به دست آوریم در واقع $B' = P_1 - A'C_1$.

پانویس:

* Z نشانگر اعداد صحیح است.

مرجع:

این مقاله ترجمهٔ بخشی از کتاب:
" A course in Number Theory and cryptograhy "
نوشتهٔ Neal Koblitz است که در سال ۱۹۹۵ منتشر شده است. با توجّه به ورود مباحث ریاضیات گسسته به برنامهٔ درسی دورهٔ متوسطه و پیش دانشگاهی، موضوع رمزنگاری به عنوان یکی از کاربردهای این مباحث می تواند برای دبیران ریاضی مفید باشد.

سومین مطالعه بین المللی ریاضیات و علوم

مرکز بین المللی مطالعه تیمز ـ کالج بوستون

مترجم: زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

نتایج قابل مقایسهٔ بین المللی در موفقیت تحصیلی ریاضیات و علوم را برای دانش آموزان سراسر دنیا در سال آخر آموزش متوسطه در گزارشی که اخیراً منتشر شده است می توان یافت :

موفقیت تحصیلی ریاضیات و علوم در آخرین سال آموزش متوسطه

برای ارائهٔ اطلاعات جامع دربارهٔ این که دانش آموزان چه درکی از ریاضیات و علوم دارند در زمانی که چالش های ورای آموزش متوسطه را شروع می کند. این گزارش، نتایج سه آزمون متفاوت را دربردارد. این گزارش سوادآموزی ریاضیات و علوم تمام دانش آموزان سال آخر را در ۲۱ کشور شرکت کننده ـ صرف نظر از برنامهٔ درسی مدرسه ای آنها ـ توضیح می دهد. این آزمون طوری طرّاحی شده بود که به طور جداگانه برای ریاضیات و علوم گزارش شود. برای ۱۶ کشور، این گزارش همچنین موفقیت تحصیلی دانش آموزانی که مدرسه را با آمادگی خاصّی در دو موضوع ریاضیات و فیزیک پیشرفته ترک می گویند، توضیح می دهد. برای آزمون در ریاضیات و فیزیک پیشرفته، نتایج برای محدودهٔ محتواهای اصلی ارائه شده است.

برای هریک از این سه آزمون، موفقیت تحصیلی به تفکیک جنسیّت ارائه شده است و کشور به کشور، نتایج برای مثالهای منتخب به نمایش گذاشته شده است تا نشاندهندهٔ بُرد اجرا و موضوعهای تحت پوشش باشد. برای عوامل منتخب پیش زمینه ای و نوع طرز تلقی ها نیز نتایج ارائه شده است. همچنین برای ریاضیات و فیزیک پیشرفته، اطلاعات دربارهٔ چگونگی تدریس ارائه شده است.

جدول ۱ :
موفقیت تحصیلی در سوادآموزی ریاضی و علوم

کشور	سوادآموزی ریاضی و علوم: میانگین موفقیت تحصیلی
هلند	۵۵۹
سوئد	۵۵۵
ایسلند	۵۴۱
نروژ	۵۳۶
سوئیس	۵۳۱
دانمارک	۵۲۸
کانادا	۵۲۶
زلاندنو	۵۲۵
اطریش	۵۱۹
استرالیا	۵۲۵
اسلوانی	۵۱۴
فرانسه	۵۰۵
آلمان	۴۹۶
جمهوری چک	۴۷۶
مجارستان	۴۷۷
فدراسیون روسیه	۴۷۶
ایتالیا	۴۷۵
ایالات متحده	۴۷۱
لیتوانی	۴۶۵
قبرس	۴۴۷
آفریقای جنوبی	۳۵۲
میانگین بین المللی	۵۰۰

منبع : سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم(تیمز) ۹۶-۱۹۹۵ که توسط IEA برگزار شده است.

- به طور چشمگیری، بالاتر از میانگین بین المللی
- تفاوت غیرچشمگیر نسبت به میانگین بین المللی
- به طور چشمگیری، پائین تر از میانگین بین المللی

یافته های کلیدی

- **هلند و سوئد در سوادآموزی ریاضی و علوم بالاترین رتبه ها را به دست آوردند. رتبه های ایسلند، نروژ، سوئیس، دانمارک، کانادا، زلاندنو و اطریش نیز بالاتر از میانگین بین المللی ۲۱ کشور شرکت کننده بود.**
- **کشورهایی که رتبهٔ آنها پایین تر از میانگین بین المللی بود عبارت بودند از: مجارستان، فدراسیون روسیه، ایتالیا، ایالات متّحده، لیتوانی، قبرس و آفریقای جنوبی**

جدول ۲: موفقیت تحصیلی در سوادآموزی ریاضی و علوم

سوادآموزی علوم: کشور	میانگین موفقیت تحصیلی	سوادآموزی ریاضی: کشور	میانگین موفقیت تحصیلی
سوئد	۵۵۹	هلند	۵۶۰
هلند	۵۵۸	سوئد	۵۵۲
ایسلند	۵۴۹	دانمارک	۵۴۷
نروژ	۵۴۴	سوئیس	۵۴۰
کانادا	۵۳۲	ایسلند	۵۳۴
زلاندنو	۵۲۹	نروژ	۵۲۸
سوئیس	۵۲۳	فرانسه	۵۲۳
اطریش	۵۲۰	زلاندنو	۵۲۲
استرالیا	۵۲۷	کانادا	۵۱۹
اسلوانی	۵۱۷	اطریش	۵۱۸
دانمارک	۵۰۹	استرالیا	۵۲۲
آلمان	۴۹۷	اسلوانی	۵۱۲
جمهوری چک	۴۸۷	آلمان	۴۹۵
فرانسه	۴۸۷	جمهوری چک	۴۶۶
فدراسیون روسیه	۴۸۱	مجارستان	۴۸۳
ایالات متحده	۴۸۰	ایتالیا	۴۷۶
ایتالیا	۴۷۵	فدراسیون روسیه	۴۷۱
مجارستان	۴۷۱	لیتوانی	۴۶۹
لیتوانی	۴۶۱	ایالات متحده	۴۶۱
قبرس	۴۴۸	قبرس	۴۴۶
آفریقای جنوبی	۳۴۹	آفریقای جنوبی	۳۵۶
میانگین بین المللی	۵۰۰	میانگین بین المللی	۵۰۰

منبع: سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم (تیمز) ۹۶-۱۹۹۵ که توسط IEA برگزار شده است.

☐ به‌طور چشمگیری، بالاتر از میانگین بین المللی ☐ تفاوت غیرچشمگیر نسبت به میانگین بین المللی

■ به‌طور چشمگیری، پائین‌تر از میانگین بین المللی

یافته های کلیدی

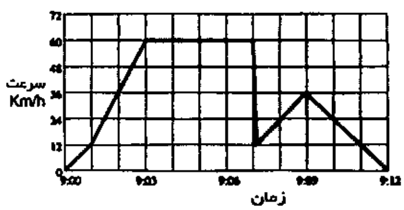
- وقتی‌که به نتایج ریاضیات و علوم توجّه شد، کشورهایی که بالاترین رتبه‌ها را در سوادآموزی ریاضی آوردند عبارت بودند از: هلند، سوئد، دانمارک و سوئیس. کشورهایی که بالاترین رتبه را در سوادآموزی علوم به‌دست آوردند عبارت بودند از: سوئد، هلند، ایسلند، و نروژ.
- کشورهایی که موفقیت تحصیلی آنها در سوادآموزی ریاضی بالاتر از سوادآموزی علوم بود به ترتیب دانمارک، فرانسه، مجارستان، لیتوانی و سوئیس بودند. کشورهائی که رتبهٔ سوادآموزی علوم آنها بالاتر از ریاضی بود عبارت بودند از: کانادا، جمهوری چک، ایسلند، نروژ، فدراسیون روسیه، سوئد و ایالات متحده.
- در رابطه با نمرهٔ موفقیّت تحصیلی در سوادآموزی ریاضیات و علوم، به‌جز آفریقای جنوبی، در سایر کشورها میانگین نمرهٔ مردان به‌طور چشمگیری بالاتر از زنان بود.

تأکید سؤالهای سوادآموزی علوم بر این بود تا تلاش کند و میزان توانایی استفادهٔ دانش‌آموزان سال آخر از دانش خود در رابطه با مسائلی از دنیای واقعی که دارای اجزای علوم هستند را بسنجد. در مثال ۱، که نیازمند درک چگونگی سرایت آنفلونـزا است، حدود $\frac{2}{3}$ دانش‌آموزان سال آخـر، به طور متوسط پاسخ درست دادنـد. پاسخهای درست شامل اشارهٔ مشخّص به انتقال ویروس؛ سرایت به وسیلهٔ عطسه کردن، سرفه کردن، یا تماس نزدیک؛ یا به سادگی، عنوان کردن این که خوزه از کسی که آنفلونزا داشت، آنفلونـزا گرفت. در سراسر کشورها، به طور متـوسط، تقـریبـاً ۱۱٪ دانش‌آموزان پاسخ نادرست به این سؤال دادند و نوشتند که خوزه سرمای سخت خورد و به این علت آنفلونزا گرفت.

> خوزه آنفلونزا گرفت. یکی از راههایی که ممکن است باعث آنفلونزا گرفتن او باشد را بنویسید.
>
> اگر یک دوست در مدرسه آنفلونزا داشته باشد و اگر او به طرف خوزه عطسه و سرفه کند.

چند سؤال در آزمون سوادآموزی ریاضی از دانش آموزان می خواست تا اطلاعات روی نمودارها را تفسیر کنند. در قسمت الف از مثال ۲، که نسبتاً سر راست بود، دانش آموزان باید قادر می بودند که نمودار خطی را بخوانند و با استفاده از اطلاعات مشخّص شده روی محور عمودی، جواب ۶۰ km در ساعت را به عنوان ماکزیمم سرعت خودرو ارائه کنند. به نوعی دانش آموزان در پاسخ به قسمت ناموفّق تر بودند زیرا نیازمند تفسیر اطلاعات روی نمودار بر مبنای حوادث و توانایی خواندن نقاط علامت زده شده، امّا مشخص نشده روی محور افقی بودند. اگرچه میانگین بین المللی پاسخهای درست برای قسمت الف ۷۴٪ بود، فقط ۵۹٪ از دانش آموزان سال آخر، به طور متوسط جواب درست ۹:۰۷ برای زمانی که کِلی روی ترمز کوبید (قسمت ب) را ارائه کردند. به طور متوسط، حدود ۷٪ از دانش آموزان پاسخ دادند که کِلی در ۹:۰۶ روی ترمز کوبید که نزدیکترین نقطهٔ مشخص شده بر روی محور افقی بود.

کلی در حال رانندگی بود که یک گربه به طرف جلوی اتومبیل او دوید. کلی بلافاصله روی ترمز کوبید و گربه را زیر نگرفت.
کلی که کمی متشنج شده بود، تصمیم گرفت که از مسیر کوتاهتری به خانه بازگردد. نمودار زیر سرعت اتومبیل را هنگام رانندگی نشان می‌دهد.



الف) ماکزیمم سرعت خودرو هنگام رانندگی چقدر بود؟

۶۰

ب) موقعی که کلی روی ترمز کوبید تا گربه را زیر نگیرد چه زمانی بود؟

۹:۰۷

جدول ۳:
سوادآموزی ریاضیات و علوم

درصد درست به نمونه های انتخاب شده از سوادآموزی ریاضیات و علوم

کشور	نمونهٔ ۱	نمونهٔ ۲ الف	نمونهٔ ۲ ب
استرالیا	۶۱	۸۸	۶۸
اطریش	۸۱	۸۴	۶۵
کانادا	۶۴	۸۰	۶۷
قبرس	۲۰	۵۴	۳۳
جمهوری چک	۶۷	۶۶	۴۷
دانمارک	۸۶	۷۸	۶۷
فرانسه	۶۸	۷۱	۶۵
آلمان	۶۶	۷۴	۶۲
مجارستان	۶۸	۵۶	-
ایسلند	۹۱	۷۴	۶۳
ایتالیا	۵۲	۶۲	۴۷
لیتوانی	۵۵	۶۱	۴۷
هلند	۷۶	۹۱	۸۳
زلاندنو	۷۴	۹۱	۷۴
نروژ	۸۸	۷۸	۶۵
فدراسیون روسیه	۷۶	۶۲	۴۶
اسلوانی	۷۸	۸۰	۶۲
آفریقای جنوبی	۲۴	۶۰	۱۹
سوئد	۸۸	۸۵	۶۹
سوئیس	۷۸	۷۵	۶۲
ایالات متحده	۵۹	۸۵	۶۷
میانگین بین المللی	۶۸	۷۴	۵۹

منبع: سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم (تیمز) که توسط IEA انجام شد: ۹۶-۱۹۹۵

جدول ۴ :
موفقیت تحصیلی در ریاضیات پیشرفته

ریاضیات پیشرفته

کشور	میانگین موفقیت تحصیلی
فرانسه	۵۵۷
فدراسیون روسیه	۵۴۲
سوئیس	۵۳۳
دانمارک	۵۲۲
قبرس	۵۱۸
لیتوانی	۵۱۶
استرالیا	۵۲۵
یونان	۵۱۳
سوئد	۵۱۲
کانادا	۵۰۹
اسلوانی	۴۷۵
ایتالیا	۴۷۴
جمهوری چک	۴۶۹
آلمان	۴۶۵
ایالات متحده	۴۴۲
اطریش	۴۳۶
میانگین بین المللی	۵۰۱

منبع: سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم (تیمز) که توسط IEA انجام شد: ۹۶-۱۹۹۵

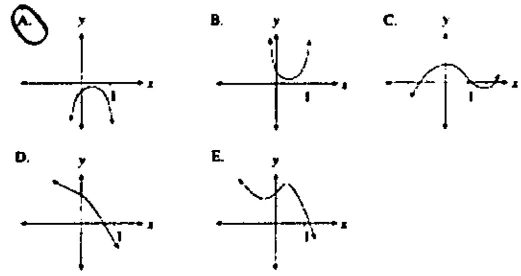
- به‌طور چشمگیری، بالاتر از میانگین بین المللی
- تفاوت غیرچشمگیر نسبت به میانگین بین المللی
- به‌طور چشمگیری، پائین‌تر از میانگین بین المللی

یافته های کلیدی

- با پیشتازی فرانسه، کشورهایی که نمرهٔ موفقیت تحصیلی آنها در ریاضیات پیشرفته بالای میانگین بین المللی بود شامل فدراسیون روسیه، سوئیس، دانمارک، قبرس و لیتوانی بودند.
- کشورهایی که نمرهٔ موفقیت تحصیلی آنها زیر میانگین بین‌المللی بود عبارت بودند از جمهوری چک، آلمان، ایالات متحده و اطریش.
- به‌جز کشورهای یونان، قبرس، استرالیا، ایتالیا و اسلوانی، تفاوت جنسیّتی چشمگیری به نفع دانش‌آموزان پسر در تمام کشورها یافته شد. در بعضی کشورها، دانش‌آموزان پسر بیشتری به نسبت دانش‌آموزان دختر، درس ریاضیات پیشرفته گرفته‌اند امّا میزان آن در بین کشورها متفاوت است.
- نشانگرهای کلاس درسی که به موفقیت تحصیلی بالا کمک کردند شامل حل معادلات به دفعات، انجام تکلیفهای استدلالی و استفاده از ماشین حساب بودند.

آزمون ریاضیات پیشرفته برای دانش آموزانی که ریاضیات پیشرفته را گرفته اند و شامل سؤالهایی دربارهٔ اعداد، معادلات و توابع؛ حسابان؛ و هندسه بود. برای مثال، در حسابان، دانش آموزان نیازمند درک مشتق یک تابع بودند. مثال ۳ نشان می دهد که به طور متوسط، ۴۵٪ دانش آموزان فهمیدند که از مشتق اول برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع استفاده می شود و از مشتق دوم برای تعیین تحدّب یا تقعر تابع استفاده می شود. دانش آموزان سوئدی در این قسمت، بهترین عملکرد را داشتند.

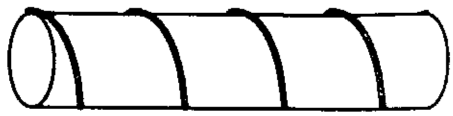
کدامیک از نمودارهای زیر دارای این ویژگیها هستند:
$f'(0) > 0$ ، $f'(1) < 0$ و $f''(x)$ همیشه منفی است.



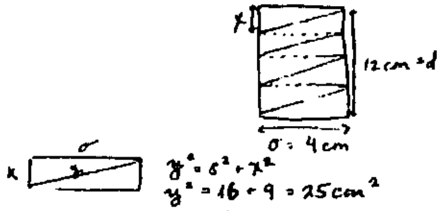
برای حل مثال، دانش آموزان باید از مهارتهای تصوّری خویش برای تشخیص یک کاربرد از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می کردند. در ابتدا، دانش آموزان نیاز داشتند که سطح میله را به صورت یک مستطیل ارائه دهند، قطعه های همنهشت را که معرّف نخ بود رسم کنند، طول یک قطعه نخ را با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس محاسبه کنند و آن نتیجه را در تعداد قطعه ها ضرب کنند. در تمام کشورهای شرکت کننده، این مسأله برای دانش آموزان بسیار مشکل بود. به طور متوسط، فقط ۱۰٪ پاسخ کاملاً درست ارائه کردند و به طور متوسط، ۲٪ دیگر نیز بخشی از نمره را گرفتند

یک نخ به طور متقارن دقیقاً ۴ بار دور یک میلهٔ دوّار پیچیده است.

محیط میله ۴ cm و طول آن ۱۲ cm است.



طول نخ را پیدا کنید. تمام مراحل کار خود را نشان دهید.



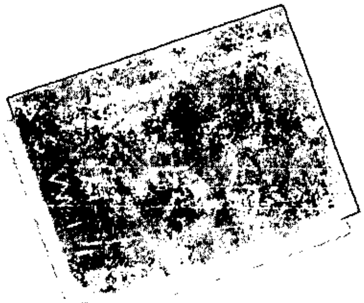
$x = \frac{d}{4}$

$x = \frac{12cm}{4} = 3cm$

$y^2 = o^2 + x^2$

$y^2 = 16 + 9 = 25cm^2$

$y = 5cm$ $y \cdot n = 5cm \cdot 4 = 20cm$



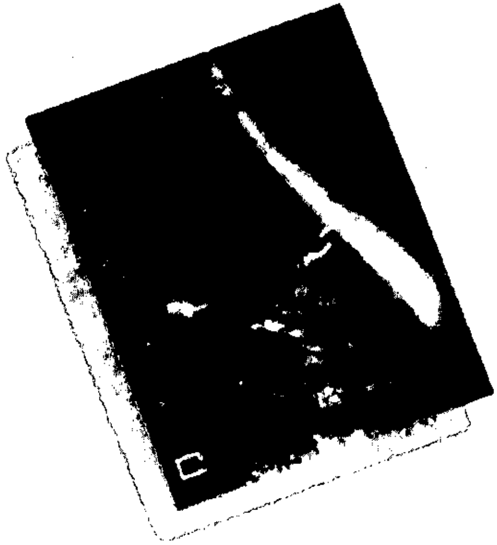
مجموعه سؤالهای تیمز برای سال آخر آموزش متوسطه: سوادآموزی ریاضیات و علوم، ریاضیات پیشرفته، و فیزیک الآن در دسترس است. همچنین مجموعهٔ سؤالها برای دوره های ابتدائی و راهنمائی نیز در دسترس است.

جدول ۵: ریاضیات پیشرفته

درصد درست به مثالهای انتخاب شده از ریاضیات پیشرفته

کشور	مثال ۳	مثال ۴	
		نیمه درست	کاملاً درست
استرالیا	۵۲	۱	۱۴
اطریش	۴۲	۲	۹
کانادا	۴۷	۱	۱۲
قبرس	۳۶	۲	۰
جمهوری چک	۳۹	۴	۸
دانمارک	۴۹	۲	۱۱
فرانسه	۵۲	۲	۴
آلمان	۳۸	۱	۸
یونان	۳۷	۱	۵
ایتالیا	۴۲	۳	۶
لیتوانی	۴۳	۱	۱۸
فدراسیون روسیه	۴۸	۲	۱۲
اسلوانی	۳۹	۱	۵
سوئد	۶۱	۱	۲۴
سوئیس	۴۵	۱	۱۷
ایالات متحده	۴۷	۰	۴
میانگین بین المللی	۴۵	۲	۱۰

منبع: سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم (تیمز) که توسط IEA انجام شد: ۹۶-۱۹۹۵



جدول ۷:
موفقیت تحصیلی در فیزیک

فیزیک

کشور	میانگین نمرهٔ موفقیت تحصیلی
نروژ	۵۸۱
سوئد	۵۷۳
فدراسیون روسیه	۵۴۵
دانمارک	۵۳۴
اسلوانی	۵۲۳
آلمان	۵۲۲
استرالیا	۵۱۸
قبرس	۴۹۴
لاتویا (LSS)	۴۸۸
یونان	۴۸۶
سوئیس	۴۸۸
کانادا	۴۸۵
فرانسه	۴۶۶
جمهوری چک	۴۵۱
اطریش	۴۳۵
ایالات متحده	۴۲۳
میانگین بین المللی	۵۰۱

منبع: سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم(تیمز) که توسط IEA انجام

به‌طور چشمگیری، بالاتر از میانگین بین المللی

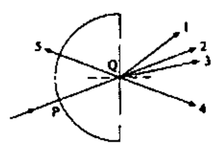
تفاوت غیرچشمگیر نسبت به میانگین بین المللی

به‌طور چشمگیری، پائین‌تر از میانگین بین المللی

یافته های کلیدی

- میانگین موفقیت تحصیلی نروژ و سوئد در فیزیک شبیه هم بود و به‌طور چشمگیری بالاتر از سایر کشورهای شرکت کننده بود. فدراسیون روسیه و دانمارک نیز بالاتر از میانگین بین المللی بودند.
- اجرای شش کشور پائین تر از میانگین بین المللی بود. به استثنای اطریش، موفقیت تحصیلی ایالات متحده به‌طور چشمگیری پایین تر از میانگین بین المللی بود.
- در فیزیک، موفقیت تحصیلی مردان به‌طور چشمگیری بالاتر بود. اگرچه نسبت دانش‌آموزان دختر و پسری که درس فیزیک را گرفته‌اند تقریباً در کشورهای کانادا، لاتویا (LSS)، فدراسیون روسیه، سوئیس و ایالات متحده برابر بود. در چندین کشور، نسبت دانش‌آموزان پسری که فیزیک گرفته بودند به زبان، دو یا سه به یک بود.
- اغلب دانش‌آموزان سال آخر که ریاضیات پیشرفته یا فیزیک گرفته‌اند قصد ورود به دانشگاه را دارند. انتخابهای محبوب برای تحصیلات آینده شامل مهندسی، بازرگانی و علوم بهداشتی است.

این سؤال مربوط به نمودار زیر است:



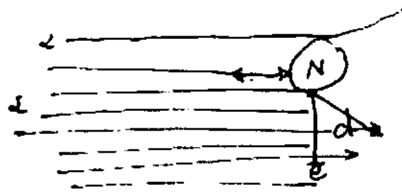
یک شعاع نور از طریق یک بلوک شیشه‌ای نیم دایره‌ای در هوا از P عبور می‌کند و به Q می‌رسد. کدام شعاع جهتی را نشان می‌دهد که در آن، شعاع شکسته شدهٔ نور پس از ترک Q می‌پیماید؟

الف) ۱
ب) ۲
پ) ۳
ت) ۴
ث) ۵

آزمون فیزیک برای دانش‌آموزان سال آخری کـه فـیـزیک را گرفته‌اند شامل مکانیک، الکتریسیته و مغـنـاطـیس، حـرارت، پدیده‌های موجی، و فیزیک مدرن ـ ذرات، کوانتوم، فیزیک نجوم و نسبیت بود. یک سؤال در پدیده‌های موجی نیازمند درک بازتاب نور، وقتی که از یک بلوک شیشهٔ نیمدایره‌ای در هوا عبور می‌کند بود. (مثال ۵) اجراهای بالا شامل نروژ، فدراسیون روسیه، و سوئد بود که در آنها، کمی بیشتر از نصف دانش‌آموزان پاسخ درست را انتخاب کردند.

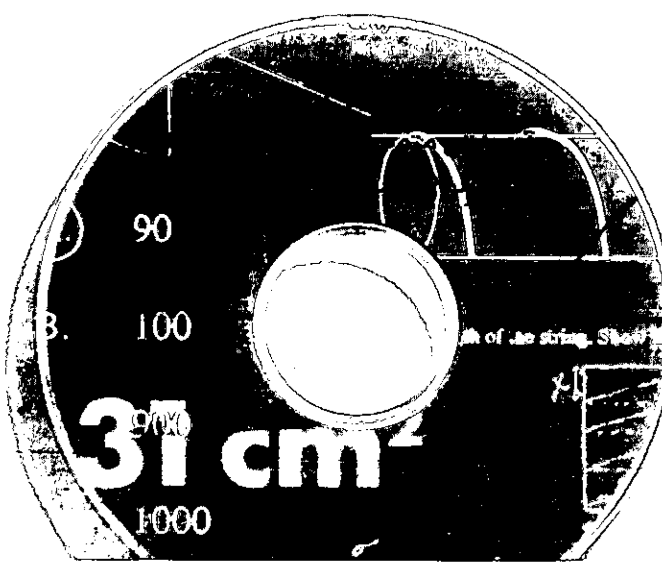
جریانی از ذرّات آلفا به طرف یک ورقهٔ طلا به ضخامت ۸۰ اتم در حرکت است.
توضیح دهید که چرا اغلب ذرّات آلفا از این ورقه عبور می‌کنند.

بیشتر ذرّات آلفا از ورقه عبور می‌کنند زیرا در مقایسه با نوکلئون، ذرات آلفا خیلی کوچک هستند. زیرا مقدار بیکرانی فضا بین نوکلئون و الکترونی که در مدار آن می چرخد وجود دارد، در اینجا مقدار زیادی فضا برای ذرّات آلفا هست که به سادگی عبور کنند.



این فاصله به اندازهٔ کافی برای ذرّات آلفا زیاد است تا از آن عبور کنند. حتّی اگر بعضی ذرّات آلفا به لبهٔ نوکلئون اصابت کنند، با زاویه‌ای منحرف می شوند امّا هنوز از آن عبور می‌کنند.

مثال بالا، از فیزیک مدرن مربوط به آزمایش پراکندگی رادرفورد بود. یک پاسخ درست نیازمند آن بود که دانش‌آموز توضیح دهد که فقط بر اثر تعامل با نوکلئون در اتم های طلا، ممکن است که ذرّات آلفا منحرف یا پراکنده شوند، و این که فاصلهٔ بین نوکلئون ها در مقایسه با قطر نوکلئون یا یک ذرهٔ آلفا بسیار بزرگ است. اگرچه، به طور متوسط، فقط ۱۰٪ از دانش آموزان در سطح بین المللی پاسخ کاملاً درست به این سؤال دادند، ۱۴٪ دیگر نیز حداقل یک پاسخ نیمه درست ارائه دادند که در آن، به ایدهٔ عمومی اندازهٔ نسبی یا فضای خالی بین اتمهای طلا ارجاع داده بودند.



جدول ۷: فیزیک

درصد درست به سؤالهای انتخاب شده در فیزیک			
کشور	مثال ۵	مثال ۶	
		نیمه درست	کاملاً درست
استرالیا	۴۲	۲۹	۸
اطریش	۲۹	۱۷	۵
کانادا	۴۲	۱۹	۱۲
قبرس	۴۷	۱۸	۷
جمهوری چک	۳۴	۷	۱
دانمارک	۳۲	۸	۷
فرانسه	۲۴	۱۱	۵
آلمان	۴۰	۱۱	۲۴
یونان	۱۸	۴	۲
لاتویا (LSS)	۴۱	۱۱	۸
نروژ	۵۲	۲۳	۱۷
فدراسیون روسیه	۵۱	۸	۱۷
اسلوانی	۳۰	۴	۲۱
سوئد	۵۳	۲۳	۷
سوئیس	۳۴	۱۵	۱۳
ایالات متحده	۲۷	۱۱	۲
میانگین بین المللی	۳۷	۱۴	۱۰

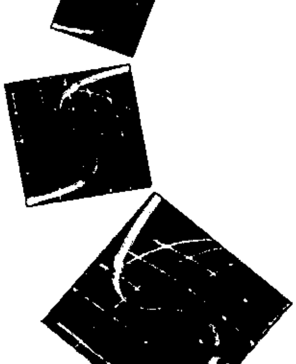
منبع: سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم (تیمز) که توسط IEA انجام شد: ۹۶-۱۹۹۵

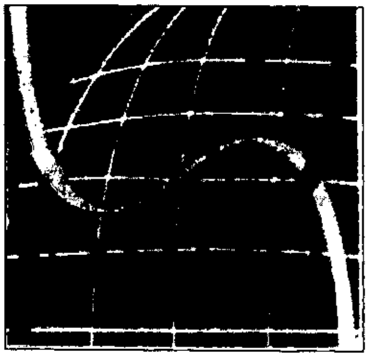
Third International Mathematics and Science Study
TIMSS International Study Center
Campion Hall 323 , Boston College
Chestnut Hill, MA 02167, USA

پوزش و تصحیح

قابل توجه خوانندگان گرامی ، در ماتریس نقره ای ارایه شده در پشت جلد مجله شماره ۵۱ ، درایهٔ سطر چهارم ستون سوم به جای عدد ۲ باید عدد ۳ باشد .

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۱ & ۷ & ۵ \\ ۴ & ۶ & ۱ & ۲ \\ ۷ & ۴ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$





گزارش نخستین همایش ستاد ملی سال جهانی ریاضیات

گزارشگر: زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

«نخستین همایش ستاد ملی سال جهانی ریاضیات» با حضور وزیر محترم فرهنگ و آموزش عالی، جناب آقای دکتر فرهودی معاون پژوهشی وزارت فرهنگ و آموزش عالی و شخصیّتهای علمی و فرهنگی کشور ساعت ۸:۳۰ روز پنجشنبه ۱۳۷۷/۳/۲۱ در تالار جابربن حیّان دانشگاه صنعتی شریف آغاز به کار کرد. حضور استاد احمد بیرشک و بیش از ۷۰ دبیر ریاضی و اعضای انجمنهای معلمان ریاضی در مراسم افتتاحیّه ویژگی خاصّی به این همایش بخشید. طبق برنامه، پس از مراسم افتتاحیه، کمیته های ستاد ملی سال جهانی ریاضیّات در دو جلسهٔ صبح و بعدازظهر، به مدت ۴ ساعت به تبادل نظرات و بارش ذهنی در مورد تدوین پیشنهادها و برنامه های خود در جهت «عمومی کردن ریاضیّات» که سرلوحهٔ فعالیّتهای این ستاد است پرداختند و در دومین جلسهٔ بعدازظهر، در میزگردی به ریاست آقای دکتر مهدی بهزاد، رئیس انجمن ریاضی ایران، به ارائهٔ نتایج بحثها و گفتگوها در هر کمیته پرداختند.

کمیتهٔ آموزش و پرورش که اعضای اصلی آن را آقای دکتر خاتون آبادی از دانشگاه اصفهان، آقای سلطانی مقدم از آموزش و پرورش شیراز، آقای دکتر جوادپور از دانشگاه شهید باهنر کرمان و گزارشگر از دانشگاه شهید بهشتی تشکیل می دادند، در میزگردی با حضور بیش از ۷۰ نفر از اعضای انجمنهای معلمان ریاضی ایران تشکیل شد. با وجودی که وزیر محترم آموزش و پرورش و دو تن از معاونان این وزارتخانه و مدیر کل دفتر برنامه ریزی و تألیف دعوت شده بودند، با این حال این میزگرد بدون حضور این بزرگواران تشکیل شد. در ابتدا، آقای دکتر خاتون آبادی برنامهٔ پیشنهادی این کمیته را که در نشستهای قبلی تهیّه شده بود معرّفی کردند و سپس از جمع خواسته شد تا به ارائهٔ نظرات خود بپردازند. در ابتدا، آقای جلیلی از مؤلفان کتابهای درسی ریاضی ضمن تأکید بر استمرار تحوّل آموزش ریاضی در دنیا، به نقش حسّاس ریاضی در پیشبرد جامعه اشاره کردند و خاطر نشان ساختند که باید مشکلات گذشته شناسائی شده و از تجربیات گذشته و پیشکسوتان استفاده شود.

آقای کارموئی از شیراز گفتند که دبیرها اول باید در دانشگاهها ریاضی را خوب فرا گیرند و توانائی تدریس کتابهای درسی را پیدا کنند و سپس آنها را با روشهای مختلف و تازه آشنا کنند. آقای دکتر شاهورانی از دانشگاه شهید بهشتی، به رعایت چهار نکته در برنامه ریزی درسی اشاره کردند که عبارتند از:

۱ـ توجّه به جامعه و نیازهای واقعی جامعه: برنامه ریزان نسبت به قشر وسیع جامعه مسؤلیت دارند.

۲ـ توجّه به طبیعتِ معلّم: معلّم باید در دورهٔ متوسطه به تمام درسهای ریاضی اشراف داشته باشد و باید تعداد کتابهای ریاضی کم شوند تا به جائی برسیم که در دبیرستان فقط یک کتاب ریاضی جامع داشته باشیم. در دبیرستانها، تعداد زیادی از دانش آموزان از حد استاندارد پائین تر هستند و این مشکل در کشورهای دیگر هم وجود دارد. منتهی باید برای رفع این مشکل توسط معلمان برنامه ریزی کرد. به عنوان مثال در سال ۱۹۸۶ در انگلستان برای کمک به دانش آموزان ضعیفی که عملکرد پائینی در ریاضی داشتند، پروژه ای به نام «پروژهٔ ریاضی برای دانش آموزان با موفقیت تحصیلی پائین» (LAMP) انجام شد. این پروژه در تکامل خودش تبدیل به پروژهٔ دیگری به نام «پروژهٔ ریاضی برای بالا بردن موفقیت تحصیلی» (RAMP) شد و به موفقیتهائی رسید. معلم ریاضی فقط با دانستن چند درس معلم نمی شود بلکه باید مرتب آموزش عملی ببیند.

۳ـ توجّه به طبیعتِ ریاضیات: «دورهٔ ریاضیات جدید[۲]» یک تغییر سازماندهی در مطالب ریاضی بود نه تغییر ماهیّت. در برنامهٔ قبلی ریاضی، ما از فرانسه تقلید

کردیم و در اجرای آن، از آمریکا و انگلستان هم جلوتر رفتیم! در برنامهٔ قبلی ریاضی، منطق ریاضی را در درس ریاضیات جدید دبیرستان گذاشتیم. این حرفها در این مقطع درست نیست. دانش آموز باید در مدرسه منطق شهودی یاد بگیرد؛ آنچه که در ریاضی اهمیّت دارد تفکّر و استدلال ریاضی است و آمادگی برای استنتاج است. هدف آموزش مدرسه ای زبان نمادها و سمبولهای ریاضی نیست. نباید افراط و تفریط داشته باشیم.

۴ـ توجّه به طبیعت دانش آموز: باید متوجّه باشیم که به چه کسی تدریس می کنیم؟ برنامه های درسی ریاضی دوره های ابتدائی و راهنمائی باید تغییر اساسی بکنند. ریاضیات باید با کاربرد توأم باشد. باید در دانش آموز انگیزه ایجاد کرد. باید به چراهای دانش آموز پاسخ داد. برای او سؤال است که «چرا ریاضیّات می خوانم؟ چرا معادله حل می کنم؟» و دهها چرای دیگر. ایجاد ارتباط بین «ریاضیات مجرد و ریاضیات کاربسته» یکی از اصول روانشناسی آموزش ریاضی است. تغییر برنامه های درسی ریاضی دوره های ابتدائی و راهنمائی باید با این دیدگاه انجام گیرد.

آقای احسنت از استان فارس، یکی از مشکلات آموزش ریاضی در ایران را آموزش ندیدن معلمان ریاضی در رابطه با آموزش ریاضی و معلّمی دانست. ایشان به ضرورت یکسان سازی تدریس ریاضی در کشور اشاره کرد. **آقای بازوان** از ایلام به مشکلات جذب و نگهداری معلمان ریاضی در مناطق محروم اشاره نمود.

آقای جوامع از مشهد، ایجاد بسترهای مناسب برای رفع مشکلات آموزش ریاضی ایران را توصیه کردند. ایشان روند گزینش معلمان ریاضی را بیمارگونه توصیف کرد و برنامه های آموزش معلمان ریاضی را نیازمند تجدیدنظر اساسی دانست. آقای جوامع وضع فعلی را به نوعی «رفع تکلیف» دانست و در ادامه، اعطای فرصتهای مطالعاتی و امتیاز دادن به مقاله های معلمان راهکاری مناسب جهت ایجاد انگیزه در معلمان برشمرد.

آقای عبدی از مشهد ضمن اشاره به جنبه های کاربردی علوم تجربی در جشنواره های خوارزمی و کم رنگ بودن جنبه های ریاضی در آنها، پیشنهاد تشکیل «جشنوارهٔ ریاضیات» را دادند. ایشان در ادامه، ضمن تأکید بر ضرورت ایجاد روحیهٔ خودباوری در معلّمان ریاضی؛ نهادینه کردن و سازماندهی آموزش معلّمان ریاضی با توجّه به نیروهای خودی، و سهیم بودن آموزش و پرورش در طرّاحی برنامه های آموزش معلمان ریاضی؛ پیشنهاد دادند که برای رفع اشکالات کتابهای درسی ریاضی برای سال ۲۰۰۰ میلادی، یکی دو عنوان کتاب درسی ریاضی توسط معلمان ریاضی تألیف شود و سپس مورد نقد و بررسی قرار گیرد. آقای عبدی در خاتمه، با گلایه از کمرنگی حضور مسؤلان آموزش و پرورش در این همایش، تقویت اتحادیهٔ انجمنهای معلّمان ریاضی و فعالیّت آن اتحادیه را در «ستاد ملی سال جهانی ریاضیات» ضروری دانست.

آقای حسنی نسب از کرمانشاه سؤال های زیر را مطرح کردند:

۱ـ ضمانت اجرائی ستادهای استانی با کیست؟

۲ـ اگر قرار باشد از هر استان یک نماینده انتخاب شود، ارتباط این نماینده ها با هم چیست؟

۳ـ آیا می خواهیم یک نمایش اجرا کنیم یا آنکه کاری انجام دهیم؟ همانطور که آقای جلیلی گفتند، از سال ۱۳۴۸ تا الآن گفتیم که مراکز تربیت معلّم ما اشکال دارند و باز هم می گوئیم. امّا هیچکس توجه نکرد! در حال حاضر، دانشجو ـ معلمان ما در مراکز تربیت معلم نظریهٔ اعداد و آنالیز می خوانند برای آنکه معلم ابتدائی بشوند، امّا مسائل پایه ای خود را بلد نیستند تدریس کنند. مشکلات کتابهای درسی ابتدائی که توسط آقای شهریاری و آقای شمس آبادی تألیف شده بودند چه بود که نیاز به تغییر احساس شد؟ آیا آنها بررسی شدند و حاصل بررسیها به تغییرات جدید انجامید یا خیر؟

۴ـ آیا وزارت آموزش و پرورش مقیّد به توصیه های ستاد هست یا خیر؟

۵ـ من به طور رسمی [به دلیل بازنشستگی] از آموزش و پرورش می روم. امّا ما چگونه می توانیم با پدیدهٔ

بسم الله الرحمن الرحيم

Roshd
Mathematics Educational Journal

No. 52 - 1998

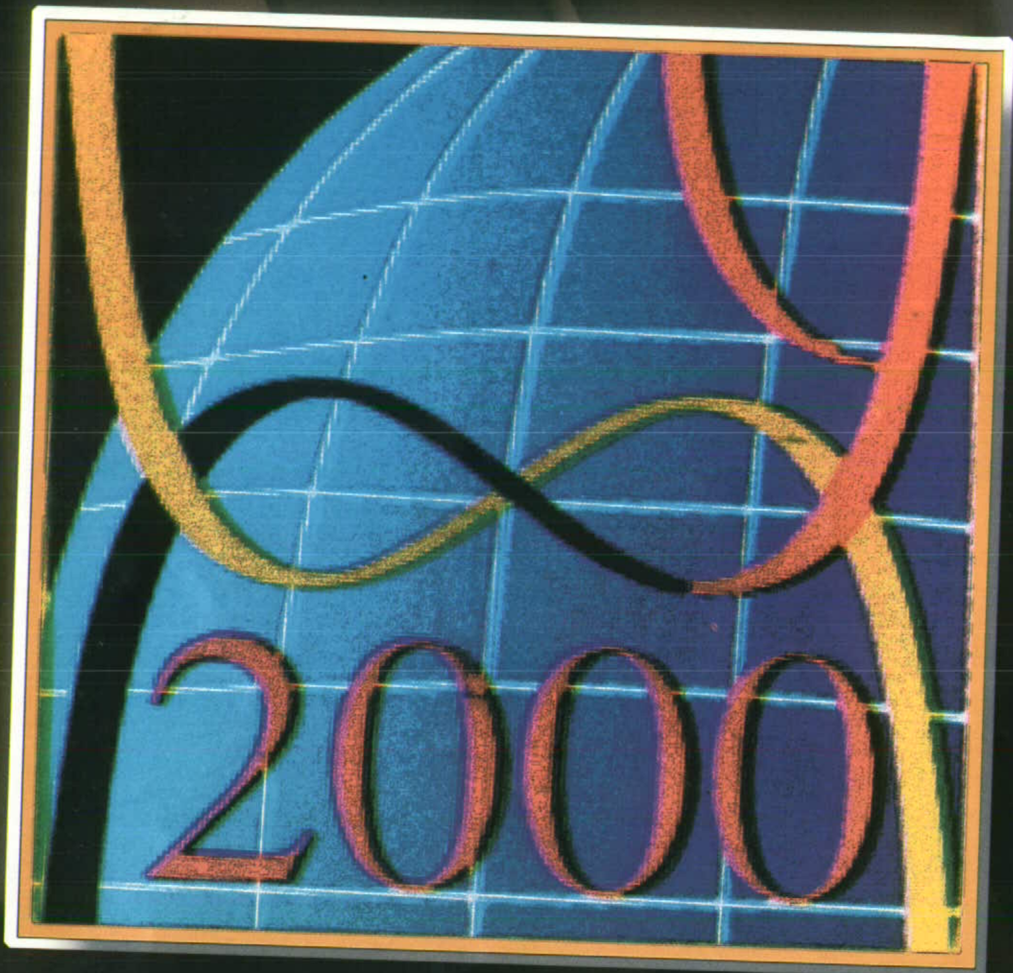
Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning

Teaching-Aids Publications Office

Managing Editor: Mohsen Goldansaz
Editor: Zahra Gooya
Executive Director: Soheila Gholamazad
Graphic Designer: Fariborz siamaknejad

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6588

CONTENTS:



با تلاش برای عمومی کردن ریاضیات ،

به استقبال سال ۲۰۰۰ - سال جهانی ریاضیات برویم .


سومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
3rd Annual Iranian Mathematics Education Conference
مدرسه ترکان خاتون
تاسیس ٦٤٠ هجری قمری
26-28 Aug. 1998, Kerman, I. R. IRAN
2000
چهارم تا ششم شهریور ماه ۱۳۷۷ کرمان - ایران