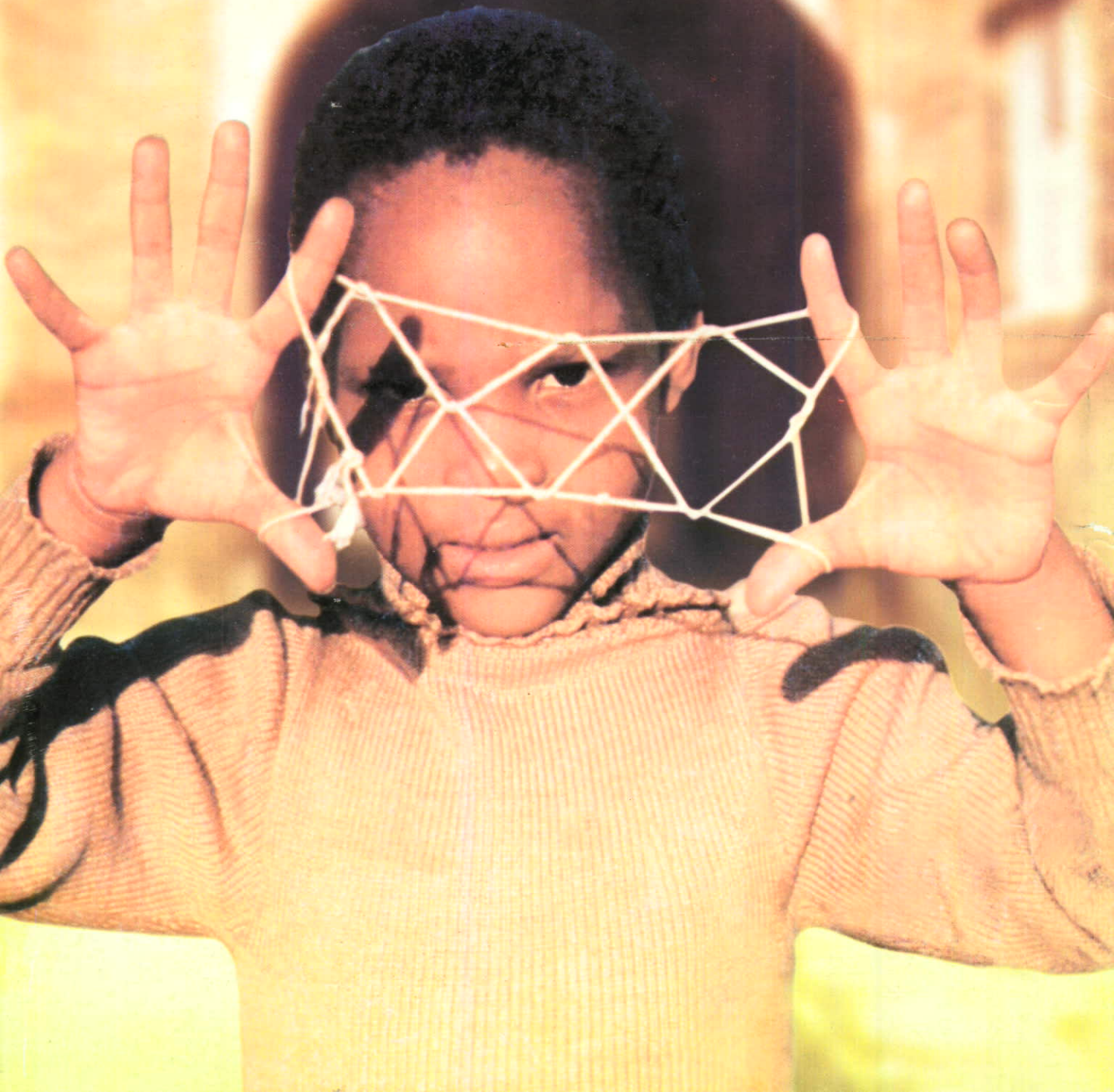


آئینہ نشا رسالہ

سال پانزدہم۔ ۱۵۰ تومان
ISSN 1606-9188





فهرست:

۱ یادداشت سردبیر

۴ روانشناسی یادگیری معلمان ریاضی / نویسنده: زهرا گویا

۱۰ هندسه. اقلیدسی و نااقلیدسی / نویسنده: مجتبی عماري

الهیاری

۱۶ استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی NCTM /

نویسنده: توماس رامبرگ

۲۵ جبر در گذر زمان / نویسنده: محمدرضا ملاخلیلی میبدی

۳۶ ایجاد فرصت‌های یادگیری ریاضی از طریق انجام

فعالیت / نویسنده: سهیلا غلام آزاد

۴۱ تاریخ $2 + 2 = 5$ / نویسنده: هوستن اوایلر

۴۳ روایت معلمان

۴۷ حجم حادث از دوران یک منحنی حول خطی مایل /

نویسنده: محمد حسین پورسعید

۴۹ ریاضیات در نخ بازی / نویسنده: مهناز پاک خصال

۵۳ گزارش نهمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی /

گزارشگران: شهرناز بخشعلی زاده - سهیلا غلام آزاد

مدیر مسئول: علیرضا حاجیان زاده

سردبیر: زهرا گویا

مدیر داخلی: سهیلا غلام آزاد

اعضای هیأت تحریریه: اسماعیل بابلیان، عین‌الله پاشا، میرزا جلیلی، جواد حاجی بابایی،

مانی رضایی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام آزاد و علیرضا مدقالچی

طراح گرافیک: فریبرز سیامک‌نژاد

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵

تلفن امور مشترکین فردی: ۷۷۳۶۶۵۶

تلفن واحد توزیع و بازرگانی: ۸۸۳۹۱۸۶

تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۱۱۶۱ - ۹ (داخلی ۳۰۲)

چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

پست الکترونیک: Roshd_of@yahoo.com

دفتر انتشارات کمک آموزشی، مجلات زیر را منتشر می‌کند:

رشد کودک، برای پیش‌دبستان و دانش‌آموزان کلاس اول دبستان

رشد نوآموز، برای دانش‌آموزان دوم و سوم دبستان

رشد دانش‌آموز، برای دانش‌آموزان چهارم و پنجم دبستان

رشد نوجوان، برای دانش‌آموزان دوره راهنمایی

رشد جوان، برای دانش‌آموزان دوره متوسطه

مجلات رشد: معلم، تکنولوژی آموزشی، آموزش ابتدایی،

آموزش فیزیک، آموزش شیمی،

آموزش زبان و ادب فارسی، آموزش زبان، آموزش تاریخ،

آموزش راهنمایی تحصیلی، آموزش تربیت بدنی،

آموزش زیست‌شناسی، آموزش جغرافیا، آموزش معارف اسلامی

برای معلمان، دانشجویان تربیت معلم، مدیران مدارس و کارشناسان آموزش و پرورش

■ مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان مقاطع مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی، موارد زیر رعایت شود:

■ مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.

■ شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه مطلب نیز مشخص شود.

■ نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.

■ اصل مقاله‌های ترجمه شده به پیوست، ارسال شود.

■ در متنهای ارسالی تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.

■ زیرنویسها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره صفحه مورد استفاده باشد.

همچنین:

■ مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.

■ مطالب مندرج در مجله، الزاما مبین نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسوولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.

■ مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

سال‌ها پیش، به دیدن فیلم «باشو، غریبه کوچک» رفتم. «باشو» کودکی بود از اهالی عرب خوزستان که به دلیل جنگ و از دست دادن خانه و کاشانه خود در خوزستان بر مرکب سرنوشت سوار شد و سر از گیلان درآورد. در گیلان باشو با مصیبت دیگری مواجه شد؛ زبان مادری او عربی بود و در روستاهای گیلان، هم گیلکی صحبت می‌کردند. در نتیجه باشو و دیگران نمی‌توانستند حرف همدیگر را بفهمند. باشو درمانده شده بود و نمی‌دانست چه کند. هرچه تلاش کرد تا وضعیت خودش را توضیح دهد، موفق نشد. در همین هنگام، ناگهان کتاب فارسی یکی از بچه‌های روستا از دستش به زمین افتاد و کتاب روی صفحه‌ای که درس «میهن ما» در آن بود باز شد. برق شادی در چشم‌های باشو درخشید! او بی‌اختیار شروع به خواندن کرد:

کشور ما ایران است.

ما در ایران زندگی می‌کنیم. ایران میهن ماست.

کشور ما شهرها و روستاهای بسیار دارد.

بعضی از مردم کشور ما در روستاها و بعضی دیگر در شهرها زندگی می‌کنند.

موج همدلی و همدردی، فضا را پر کرد. همه فهمیدند که او هم از «خودشان» است؛ یکی از فرزندان ایران عزیز که سرزمین خود را آباد و آزاد می‌خواهد. این واقعه که بی‌اختیار، اشک‌های اغلب تماشاگران را جاری کرد؛ باعث شد تا هر دو طرف، تلاش کنند و از طریق این پل ارتباطی قوی-یعنی کتاب درسی مشترک؛ زمینه تفاهم و هم‌زبانی بایکدیگر را فراهم کنند.

در آن زمان، شاید جز احساس شیرین اتحاد مردم ایران که فارغ از رنگ و نژاد قومیت آنها است، به چیز دیگری نمی‌اندیشیدم. اما سال‌ها بعد که امکان مطالعه نظام آموزشی ایران را از نزدیک و با دقت بیشتری، پیدا کردم، دوباره در داستان زندگی «باشو» تعمق کردم و این بار، از زاویه آموزشی و برنامه‌درسی؛ متوجه نقش بی‌بدیل «کتاب درسی» در تعمیق این اتحاد ملی شدم. همه اینها در زمانی بود که یکی از جدی‌ترین انتقادهای نظام آموزشی متمرکز در ایران، بحث کتاب‌های درسی یکسان برای همه بود.

در حال حاضر، جامعه بیش از هر زمان دیگر، نسبت به تحولات عمیق آموزشی؛ احساس نیاز می‌کند. ترکیب جمعیتی ایران که حدود یک سوم آن دانش‌آموزان تشکیل می‌دهند، ضرورت این تحولات را بیشتر کرده است. چنین تحولاتی، نیازمند پشتوانه‌های نظری و تجربی غنی و اصیل هستند تا بتوانند تأثیرات کیفی بر نظام آموزشی داشته باشند. البته در کوتاه مدت، تغییرات سریع و کم عمق و هیجان زده، توانایی پاسخگویی به بعضی نیازهای عاجل و سطحی را دارند. به خصوص، در زمان‌های خاصی از زندگی اجتماعی ملت‌ها، گاهی شرایط ویژه مانند جنگ و قحطی؛ یا دگرگونی چشمگیر هرم جمعیتی، باعث بروز بحران‌هایی می‌شوند که مانند خونریزی شدید در یک قسمت از بدن هستند.

یادداشت
پیرامون

طبیعی است که در چنین شرایطی، ممانعت از خونریزی به هر شکل ممکنه، یک نیاز عاجل و یک ضرورت است؛ و لازم است که برای انجام این کار، اقدام‌های آنی و ضربتی انجام گیرد. خوشبختانه تاریخ ملت ما نشان می‌دهد که به همت‌های مردمی و پشتوانه اعتقادی و فرهنگی، در مقایسه با هنجارهای جهانی، بحران‌های کمی در ایران، زودتر برطرف شده‌اند. با این حال نمی‌توان به اقدام‌های آنی و ضربتی بسنده کرد. عقلانیت ایجاب می‌کند که پس از طی بحران‌ها، همگی تلاش کنیم تا با نقد غیرمغرضانه، غیرمتعصبانه و واقع‌بینانه گذشته و حال، پایه‌های آینده‌ای مستحکم، باثبات، مطمئن و باشند به خصوص در مسایل آموزشی، لازم است بیش از هر بخش دیگری، متوجه خطرهای احتمالی ناشی از اعمال چنین سلیقه‌هایی باشیم، زیرا آموزش با تک تک افراد جامعه در ارتباط است. حدود بیست میلیون دانش‌آموز ایرانی به همراه افراد خانواده‌های خود (به تعبیری یعنی تمام مردم ایران)، همگی در مسایل آموزشی، صاحب حق و صاحب نظر هستند. هم چنین، جامعه جوان و در حال توسعه ایران، برای بقای با عزت خود، نیازمند ارتقای کیفیت آموزشی برای تمام شهروندان ایرانی است. آموزش از مقوله‌های ویژه‌ای است که فقط از طریق سرمایه‌گذاری سخاوتمندانه و آگاهانه در آن می‌توان در تمام زمینه‌های مصرفی، صرفه جویی کرد! از طریق آموزش، جامعه رفته رفته الگوهای جدید مصرف پیدا می‌کند، با عمق‌های خطرانی که از هر نظر جامعه را تهدید می‌کند آشنا می‌شود، راه‌های مقابله با تخریب محیط زیست را یاد می‌گیرد؛ رفتار انسانی را تجربه می‌کند و بالاخره، با افزایش توانایی‌های انتخاب‌گری، تصمیم‌گیری و مسئولیت‌پذیری که از طریق آموزش عمومی ارایه شده است، شهروندان آموزش دیده می‌توانند ضامن توسعه همه جانبه و اعتلای جامعه شوند.

تمام این‌ها به شرطی امکان‌پذیر است که برنامه درسی در سطح ملی، با نگاه آینده‌نگر و با احترام عمیق به انسان و نقش او در توسعه، طراحی شود. اینجاست که برنامه درسی ملی، بحث جنجالی میزان تمرکز نظام آموزشی و به تبع آن، برنامه درسی و کتاب درسی را مطرح می‌کند.

بحث بر سر میزان تمرکز نظام آموزشی، برنامه درسی و کتاب درسی، از شروع آموزش رسمی در ایران، همیشه وجود داشته است. مطالعه سیر تحول تاریخی آموزش عمومی در ایران و جهان، نشان می‌دهد که مسایل بومی، بیش از مسایل جهانی؛ بر میزان تمرکز، تأثیرگذار بوده است. در دهه گذشته نیز، مطالعات نظری برنامه درسی، این بحث را از زاویه‌های دیگری نیز مطرح کرده است که یکی از آنها، نقش برنامه درسی در آفرینش و تعمیق هویت ملی

است^۱ (ویلیام رید، ۲۰۰۰).

در چنین ببحوه‌ای، بعضی از تصمیم‌گیرندگان، تصمیم سازان و سیاست‌گذاران آموزشی در ایران، علت ناکامی‌های آموزشی را به خصوص در رابطه با یادگیری دانش‌آموزان، آموزش معلمان و کتابهای درسی در تمرکز برنامه‌ها و کتاب‌های درسی عنوان کرده‌اند و پیشنهاد داده‌اند که خروج از این تمرکز، ناکامی‌ها را به موفقیت تبدیل خواهد کرد (جالب اینجاست که چنین پیشنهادهایی هم باز به صورت «متمرکز» ارایه شده‌اند که خود جای بحث فراوان دارد).

طرح چنین پیشنهادهایی، بدون توجه به جدال‌های جهانی در رابطه با چرایی و چگونگی تمرکز و عدم تمرکز برنامه درسی، بحران‌های ناشی از هریک در شرایط مختلف؛ و توقعات بومی و ملی نسبت به نقش برنامه درسی در حصول به آرمان‌های بلند ملت ایران، جای تعمق و تأمل دارد. به گفته ویلیام رید، «... تمام اینها به شرطی امکان‌پذیر است که یک نظریه برنامه درسی، درحالی که اعتبار جهانی بودن و جامعیت را به نمایش می‌گذارد؛ درواقع، به طور آرمانی نیز به نیازهای هویت ملی یک کشور خاص پاسخ دهد.» (ص ۱۲۷). او در ادامه می‌افزاید: «بخشی از برنامه درسی که مربوط به طراحی و ارزشیابی برنامه‌های مدرسه‌ای است، همیشه باید درون زمینه‌های خاص و گوناگون ملی دیده و فهمیده شود» (ص ۱۳۲). درواقع، لازم است به کمک نظریه‌های برنامه درسی، تلاش کنیم تا مسایل و تجربیات ملی خود را در این زمینه مدون کنیم و نظریه‌های جدیدی ارایه دهیم. این کار باعث می‌شود تا از «مصرف کننده تولیدات علمی» به «تولیدگری علمی» برسیم زیرا نظریه‌های جدید، می‌تواند علاوه بر برخورداری از پشتوانه‌های محکم نظری و منطقی، بازتاب آرمان‌های اعتقادی، فرهنگی و اجتماعی جامعه ایرانی باشند و هویت ملی را در مخاطبان اصلی خود که دانش‌آموزان هستند، ایجاد و تقویت کنند.

نسخه‌های پیچیده شده برنامه‌های درسی و آموزشی در هیچ کشور دیگری، تا دوباره نگری نشده و منطبق بر آرمان‌های جامعه ایرانی و ضامن حفظ هویت ملی ایرانی نباشند، امکان اجرای موفقیت‌آمیز را نخواهند داشت. در نتیجه، لازم است که در بهره‌گیری از تجارب غنی سایر کشورها، چه «موفق» و چه «ناموفق»، هشیارانه تر عمل کنیم و همه اینها نیازمند تدوین «استانداردهای برنامه درسی ملی» در ایران است.

در این مورد، توجه به چگونگی یادگیری دانش‌آموزان ایرانی، حساسیت‌های معلمان و ویژگی‌های فرهنگی جامعه نوین ایرانی یک ضرورت است.

کتاب درسی مشترک در ایران، می‌تواند تضمین‌کننده

حداقل های آموزشی برای تمام دانش آموزان ایرانی باشد. این کتاب ها در حال حاضر، با تمام انتقادهایی که بر آنها وارد است، توانسته اند نوعی «هویت ملی» برای ایرانی ها بسازند که مانند «باشو» همه ایرانیان با قومیت ها و زبان های مختلف، می توانند به آن ارجاع دهند و در واقع، ایرانیان می توانند با این زبان مشترک؛ در حالی که تفاوت های خود را جشن می گیرند، به «یگانگی» آموزشی که از ملزومات وحدت ملی است، نیز برسند. به همین دلیل، قبل از هر تصمیمی برای برنامه درسی ملی و کتاب های درسی یکسان، باید تمام مخاسن و معایب این نوع برنامه و کتاب را در زمینه ملی مورد بررسی قرار داد.

مطالعه راجع به خروج از تمرکز آموزشی فعلی، نیازمند اختصاص بودجه های کلان برای تحقیقات جامع در این زمینه است. تصمیم گیری هایی که براساس سلیقه ها و تجربه های محدود افراد انجام می شود، بسیار هزینه بر است و هشدار دهنده آن که بخش اعظم این هزینه ها، نیروی انسانی است.

بررسی سیر تحول آموزشی در ایران نشان می دهد که بعضی از ناکامی های آموزشی در ایران، بیش از آن که مربوط به تمرکز نظام آموزشی باشد، متأثر از نوع تفکر و ذهنیت آموزشی تصمیم سازان و مجریان بوده است. «تمرکز» و «عدم تمرکز» هر دو اعتباری و نسبی هستند و نمی توان با قاطعیت، یکی را «رد» و دیگری را «تجویز» کرد. اگر تصمیم سازان و مجریان، انسان را در سرنوشت خویش مسئول بدانند، می توانند از مشارکت آنها چه در نظام های متمرکز و چه غیرمتمرکز، به بهترین شکلی بهره مند شوند. برای مثال، همه افراد جامعه می توانند از طریق نهادهای مدنی، نظرات و انتظارات آموزشی خود را، از طریق نمایندگان خود؛ ابراز کنند.

این نظرات، در سطوح مختلف تصمیم گیری و با نظرات آنها، جرح و تعدیل می شوند و بالاخره در سطح ملی، برنامه درسی پیشنهادی و کتاب درسی توصیه شده، بازتاب نظرات تمام مخاطبان خود خواهد بود.^۲ در نتیجه، برنامه و کتاب، از «تمرکز» به معنای تحمیل یک نظر بر همه، خارج می شود. به نظر می رسد که بعضی از ناکامی های آموزشی که به «تمرکز» نسبت داده می شوند، بیشتر ناشی از ذهنیت های قیّم مآبانه و آمرانه و اجراهای «بدون انعطاف» بوده اند. برای مثال، با تحول اساسی در آموزش معلمان، می توان توانایی های تصمیم گیری، انتخاب گری و قضاوت نسبت به یادگیری دانش آموزان و برنامه درسی را در آنها که به حق، «ستون نظام آموزشی» هستند، به وجود آورد. آن گاه، معلمانی با این توانایی ها، نمی توانند مجری بی چون و چرای دستورات آموزشی «متمرکز» یا «غیرمتمرکز» باشند که نسبت به شرایط بومی آنها، «غیر واقعی» است. در نتیجه، معلمان توانمند؛ از دو جهت، در تبیین جدید «میزان تمرکز»، به ایفای نقش بی بدیل پردازند. جهت

اول، ابراز نظرات منطبق بر تجارب واقعی کلاس درس خود که به ترتیب، و از طریق نهادهای مدنی؛ به سطح ملی برنامه ریزی و تصمیم گیری ارایه می شوند. از جهت دیگر، توانایی معلمان به آنها فرصت مناسبی می دهد تا پیشنهادها و توصیه های آموزشی را متناسب با موقعیت واقعی کلاس درس خود، جرح و تعدیل کنند و تصمیم های مناسب بگیرند.

چنین روندی، باعث می شود تا هم برنامه درسی و کتاب درسی در سطح ملی طراحی و پیشنهاد شود و از این طریق، حداقل های آموزشی برای همه تضمین شود و وحدت ملی پایدارتر گردد و هم، آموزش از حالت مکانیکی، کمی، دقیق و عینی خارج شده و نقش عامل انسانی در آن برجسته تر شود.^۳ خروج از تمرکز موجود، نیازمند معرفی پارادایم های جدید متکی بر چنین نقشی برای معلمان است. در غیر این صورت، سپردن کار برنامه ریزی و تألیف به دست منتخبی از معلمان و نخبگان و به بهانه خروج از تمرکز، و با آرزوی حصول به موفقیت سراب گونه، مشکلات را در میان مدت و دراز مدت، افزایش خواهد داد.

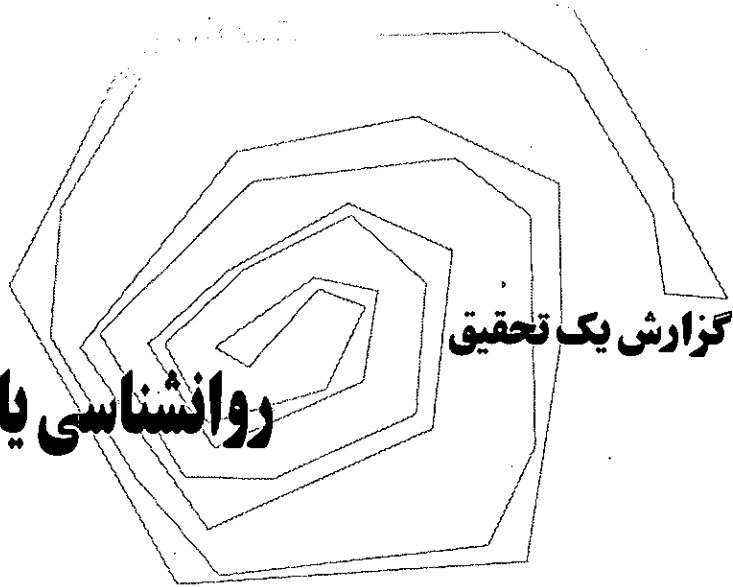
هر اقدامی در این زمینه، نیازمند مطالعات عمیق است. تصورات ساده انگارانه و تخیلی، مشکلات آموزشی ایران را برطرف نخواهد کرد. تمام کسانی که می خواهند جزء دست اندرکاران برنامه ریزی درسی و تألیف باشند، نیازمند طی طریق هستند. آرزوی طی العرض کردن در دنیای واقعی آموزشی، کودکان و سراب گونه است. اگر مشارکت معلمان و تمام دلسوزان آموزشی در طراحی برنامه، از طریق سطوح مختلف تصمیم گیری و نهادهای مدنی باشد، آن گاه می توانیم الگوهای جدیدی از برنامه ملی ارایه دهیم که در آن ها، با وجود حفظ هسته اصلی برنامه درسی که با مشارکت همه تهیه شده است و دیدگاه های همه افراد جامعه در آن متجلی است، با این حال از انعطاف، گوناگونی و جذابیت زیادی نیز برخوردار و معرف و ضامن هویت ایرانی باشد.

فیروز بیس

I. Reid, W. A. (2000). Curriculum as an expression of national identity. *Journal of curriculum and supervision*. vol. 15, No. 2, 113- 122.

۲- ایزدی، صمد. (۱۳۷۹) طراحی الگوی تیّم متمرکز برای نظام برنامه ریزی درسی ایران و نقش معلمان در فرایند برنامه ریزی درسی. رساله دوره دکتری تعلیم و تربیت (گرایش برنامه ریزی درسی)، دانشگاه تربیت مدرس.

۳- اخیراً آرمزه هایی راجع به نوع خاصی از «فکولوژی آموزشی»، «ماشین آموزشی»، «آموزش برنامه ای» و از این قبیل شنیده می شود که با وجود ظاهر علمی و قابل توجه، ماهیت بسیاری از آنها، حذف عامل انسانی و به خصوص معلم، در یادگیری است. جامعه آموزشی باید هشیار باشد که فریب حرف های شکست خورده دکان دمه قبل را نخورد.



گزارش یک تحقیق

روانشناسی یادگیری معلمان ریاضی

زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

قبلاً^۱، با توجه به نظریه تعامل اجتماعی و یگوتسکی، ضمن ایجاد تمایز بین یادگیری معلمان ریاضی با یادگیری دانش آموزان به عنوان یادگیرنده های ریاضی، به تمایز یادگیری این دو گروه اشاره شد و یکی از دلایل عدم موفقیت کامل برنامه های آموزش معلمان ریاضی، توجه نکردن به این تمایز دانسته شد (گویا، ۱۳۷۶). در این مقاله، با توجه به مطالعه ای که در رابطه با پذیرفته شدگان دوره بازآموزی «ریاضی پایه» دوره پیش دانشگاهی علوم انسانی انجام شد، با در نظر گرفتن دیدگاه نظری فوق بر ضرورت دوباره نگری در هدفها و محتوای دوره های آموزش های ضمن خدمت معلمان به خصوص دوره های بازآموزی تأکید شده و سپس توصیه های کاربردی با اتکا به یافته های مطالعه ارائه شده است. فلسفه تحصیلی^۲ و روانشناسی رفتاری، دشواریهای تدریس را قابل پیش بینی می داند. با چنین نگرشی به تدریس، هرگاه معلّم در تدریس خود با مسأله ای روبه رو شود، «پس از شناسایی نوع مسأله، با مراجعه به توصیه های متخصصان آموزشی، راه حل از پیش تعیین شده ای برای آن انتخاب می کند. در تفکر تحصیلی، تمامی مسائل درون حرفه معلّمی قابل پیش بینی است و حل مسائل با به کار گرفتن تکنیکها و نظریه های استاندارد امکان پذیر است. [۱]» (گویا، ۱۳۷۷ ص ۱۳۲ و ۱۳۳).

اما «این که می توانیم تعلیم و تربیت را تحت انقیاد ضوابط، قانون مندیها و انضباطهای خاص علمی،

به همان گونه که در علوم تجربی و اصولاً در عالم حیات ماده وجود دارد، در بیاوریم قابل تأمل است ... [این] که معلمان این قانون مندی ها، این انضباطها و این رابطه ای را که بین پدیده های مختلف موجود است و در عرصه یاددهی و یادگیری مطرح می شود، یاد بگیرند و آن را به کار برند. در این صورت آنها به مطلوب خود خواهند رسید ... آیا واقعاً چنین چیزی ممکن است [۲]؟ (مهرمحمدی، ۱۳۷۷، ص ۱۶۴).

در پاسخ به این سؤال، تلاشهای زیادی در زمینه دانش حرفه ای^۳ معلمان انجام شده است تا ابعاد مختلف آموزش آنها از زوایای مختلف مورد بررسی قرار گیرند. به گفته شون [۳] (۱۹۸۷)، چون حرفه معلّمی دارای ویژگیهای خاصی از جمله پیچیدگی، ناپایداری، منحصر به فرد بودن و تضاد ارزشی است؛ پس تمامی مسائل آن قابل پیش بینی نیست. در نتیجه، علاوه بر دانش موضوعی و دانش روشی ویژه که اغلب دارای قانون مندی های کلی هستند، لازم است در آموزشهای معلّمان، با تأکید بر «تفکر بازتابی»^۴، بر دانش حرفه ای معلمان بیاوریم تا آنها بتوانند با مسائل منحصر به فرد حیات حرفه ای خود برخورد مناسب و بالنده ای داشته باشند. پرداختن به ارتقای دانش حرفه ای معلمان به خصوص از این نظر قابل توجه است که اغلب نظامهای آموزشی، ضامن بقای خود و هرگونه نوآوری در آن نظام را وجود معلمان توانا می دانند. برای مثال، تأکید «همایش بین المللی بانکوک در ۱۹۹۵» بر «تربیت معلّم» بود و کنگره دو ساله بین المللی تعلیم

و تربیت ژنو در ۱۹۹۶ نیز بر آموزش معلمان تکیه داشت.

شدند و دوره‌ها برگزار گردید.

آموزش معلمان در نظام جدید آموزش متوسطه

همزمان با تغییر نظام آموزش متوسطه در ایران (۱۳۷۱) کتابهای درسی ریاضی نیز تغییر کردند و برای آموزش محتوای جدید، قبل از تدریس هر کتاب، دوره‌های بازآموزی برای معلمان ریاضی برگزار گردید. در ابتدا و قبل از فراگیر شدن نظام جدید متوسطه، تمام معلمان ریاضی که یا در حال تدریس کتابهای نظام جدید بودند یا پیش‌بینی تدریس را در آینده می‌کردند، در این دوره‌ها شرکت کردند. با این حال، پس از فراگیر شدن نظام آموزشی معاونت تربیت و تأمین نیروی انسانی وزارت آموزش و پرورش، طرح «تأمین مدرّس» را برای دوره‌های پیش‌دانشگاهی به اجرا گذاشت. طبق این طرح، قرار شد که به شرکت کنندگان در این دوره‌ها - به شرط موفقیت در آزمون پایان دوره - گواهی مدرّسی داده شود و آنها در مقابل، موظف باشند که در شهرهای خود، دوره‌های بازآموزی ضمن خدمت را برای سایر همکاران برگزار نمایند. در سال تحصیلی ۷۷-۱۳۷۶، شرکت کنندگان دوره‌های «تأمین مدرّس» از طریق دو آزمون چند گزینه‌ای و تشریحی گزینش شدند تا در دوره‌های مختلف شرکت کنند.

با توجه به این که تغییر در روشهای تدریس و ضرورت داشتن نگاهی تازه به جریان یاددهی - یادگیری در «کلیات تغییر نظام آموزش متوسطه» وعده داده شده بود، طبیعی است که در دوره‌های بازآموزی، علاوه بر دانش موضوعی و آموزش محتوای جدید کتابها، باید بر جنبه‌های دیگر آموزش معلمان از جمله اعتلای دانش حرفه‌ای و روشی آنها نیز تأکید ویژه می‌شد. با این حال، محتوای هر دو مرحله آزمون تنها بر «دانش موضوعی» تأکید داشت و طبیعی بود که بیشترین امتیاز گزینش شدگان، متعلق به «دانش موضوعی» آنها باشد.

بعضی از مؤلفان نسبت به کارایی این گونه گزینش برای دوره‌های بازآموزی معلمان نظام جدید متوسطه ابراز نگرانی کردند. اما طبق تصمیم گرفته شده، شرکت کنندگان در دوره‌ها از طریق آزمونهای فوق انتخاب

تشکیل دوره بازآموزی کتاب «ریاضی پایه»

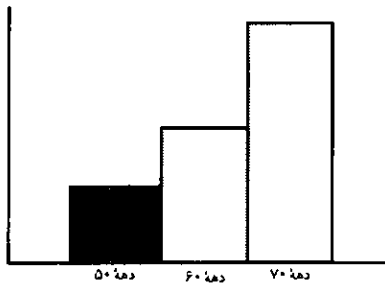
قبل از چاپ کتاب «ریاضی پایه» مخصوص دوره پیش‌دانشگاهی علوم انسانی، اولین دوره بازآموزی کشوری آن در تابستان ۱۳۷۴ در شهر کرمانشاه و با حضور ۱۲۰ شرکت‌کننده داوطلب تدریس این کتاب تشکیل شد. اهمیت این دوره از آن جهت بود که صفحه به صفحه کتاب با حضور شرکت‌کنندگان مورد بحث و بررسی قرار گرفت و بسیاری از ابهامات کتاب با نظرات اصلاحی معلمان و شرکت‌کننده برطرف شد. در نتیجه، کتاب چاپ شده از صافی ۱۲۰ معلم ریاضی شرکت‌کننده در آن دوره گذشت. دومین دوره بازآموزی کشوری این کتاب در تابستان ۱۳۷۵ در شهر همدان و سومین آن در تابستان ۱۳۷۶ در شهر بابل برگزار گردید. شرکت‌کنندگان این دوره نیز داوطلبانه شرکت کرده بودند یا آن که در حال تدریس کتاب بودند. چهارمین دوره کشوری که شرکت‌کنندگان آن از طریق دو آزمون گفته شده گزینش شده بودند، با هدف «تأمین مدرّس» در تابستان ۱۳۷۷ در تهران برگزار شد. هر چهار دوره با حضور مؤلفان برگزار گردید و برای برگزاری آنها، برنامه‌ریزی ویژه با تأکید بر ارتقای دانش حرفه‌ای و روشی معلمان انجام شده بود. شرکت‌کنندگان در دوره اخیر، جامعه مورد تحقیق هستند که گزارش آن ارائه می‌گردد.

ابزار جمع‌آوری داده‌ها

در دوره «تأمین مدرّس» که شرکت‌کنندگان آن از طریق دو «آزمون علمی» گزینش شده بودند، قبل از بررسی کتاب، از معلمان درخواست شد تا اطلاعاتی را در اختیار مدرّسان دوره - محققان این مطالعه، قرار دهند. این اطلاعات شامل: سابقه تدریس، سال فارغ‌التحصیلی، سن، جنسیت، تعداد سالهایی که «ریاضی پایه» توسط آنها تدریس شده بود، شرکت یا عدم شرکت آنها در دوره‌های بازآموزی «ریاضی پایه» در گذشته و انتظار آنها از نتیجه آزمون و تدریس ریاضی پایه بود. همچنین، در طول ۶۰ ساعت، برنامه دوره طوری طراحی شده بود تا از طریق

متعلق به کسانی بود که در دهه ۱۳۷۰ خورشیدی از دانشگاه فارغ التحصیل شده اند. نمودارهای زیر، توزیع سال فارغ التحصیلی شرکت کنندگان را نشان می دهد:

۵ | ۱۵۶۶۶۸۹
۶ | ۳۳۴۴۵۵۶۶۶۶۷۸۸۸۹
۷ |۱۱۱۱۱۲۲۲۲۲۲۲۲۳۳۳۴۴۴۵۵۵۵۵۵۵۶۶۶

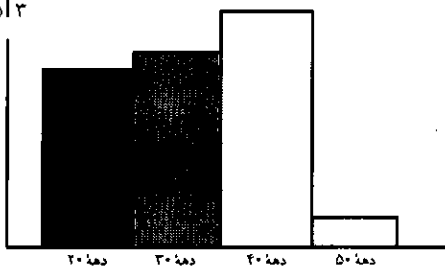


نمودارهای بالا نشان می دهند کسانی که قبل از دهه ۱۳۶۰ خورشیدی فارغ التحصیل شده اند کمترین تعداد شرکت کنندگان را تشکیل می دهند. در همین حال، فارغ التحصیلان دهه ۶۰ شانزده نفر و فارغ التحصیلان دهه ۷۰ (کمترین تجربه تدریس)، ۳۵ نفر کل شرکت کنندگان یعنی ۳/۶۰٪ را تشکیل می دادند. میانه این توزیع سال ۱۳۷۲ و مَد آن هم سال ۱۳۷۲ است.

توزیع سنی شرکت کنندگان

توزیع سن شرکت کنندگان در دوره توسط دو نمودار زیر نشان داده می شود.

۲ | ۳۴۴۴۵۵۵۷۷۷۷۷۷۷۸۸۸۸۸۹۹
۳ |۱۱۱۱۲۲۴۴۵۵۶۶۷۷۸۸۹۹۹۹
۴ | ۰۱۲۲۴۵۶۹۹
۵ | ۳

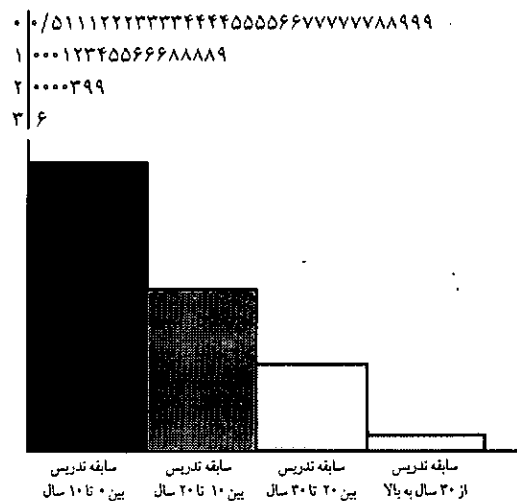


نمودارهای فوق نشان می دهند که میانگین سن شرکت کنندگان ۳۳/۱ است و از نظر تعداد، سن ۲۲ نفر بین ۲۰ تا ۲۹ است. در فاصله بین ۳۰ تا ۳۹ سالگی، ۲۵

مشاهده، مصاحبه های کوتاه مدت تعاملهای گروهی و انجام پروژه های فردی و جمعی، با چگونگی یادگیری شرکت کنندگان و توانایی های موضوعی - حرفه ای آنها بیشتر آشنا شویم و داده های حاصل را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم. در ضمن بخشهای مختلفی از دوره ضبط دیداری شد.

یافته های مطالعه

از مجموع ۵۸ نفر شرکت کننده از سراسر ایران، ۲۷ نفر زن (۴۶/۵۵٪) و ۳۱ نفر مرد (۵۳/۴۴٪) بودند، در زیر، تنها به ارائه آمار توصیفی شرکت کنندگان در رابطه با سابقه تدریس، سال فارغ التحصیلی، سن و سایر اطلاعات دخیل در مطالعه می پردازیم. سابقه تدریس شرکت کنندگان در نمودار «ساقه و برگ» و نمودار میله ای زیر نشان داده شده است:



دو نمودار فوق نشان می دهند که ۵۶/۹٪ جمعیت متعلق به افرادی با کمترین سابقه تدریس هستند (۳۳ نفر). ۱۷ نفر سابقه تدریس بین ۱۰ تا ۲۰ سال، ۷ نفر بین ۲۰ تا ۳۰ سال و یک نفر با سابقه تدریس بیش از ۳۰ سال در بین شرکت کنندگان وجود داشت. میانه این توزیع ۱۰ سال و مَد آن ۷ سال بود.

سال فارغ التحصیلی

از بین ۵۸ شرکت کننده در این دوره، بیشترین تعداد

نفر قرار دارند، بین ۴۰ تا ۴۹ سالگی ۱۰ نفر و بالاخره یک نفر بیش از ۵۰ سال داشت. همچنین، ۵ نفر از شرکت کنندگان یعنی ۸/۶۲٪ کمتر از ۲۵ سال سن داشتند. ۳۲ نفر آنها یعنی ۵۵/۱۷٪ بین ۲۵ تا ۳۵ سال داشتند. ۱۶ نفر آنها بین ۳۵ تا ۴۵ سال (۲۷/۵۸٪) و تنها ۴ نفر یعنی ۶/۸۹٪ آنها بیش از ۴۵ سال سن داشتند.

سابقه تدریس ریاضی پایه، شرکت در دوره بازآموزی و انتظار تدریس ریاضی پایه

از بین ۵۸ شرکت کننده منتخب، تنها ۱۰ نفر (۱۷/۲۴٪) سابقه تدریس ریاضی پایه را داشتند که این سابقه از ۶ ماه تا ۳ سال بود.

در مجموع، ۵ نفر (۸/۶۲٪) دوره بازآموزی ریاضی پایه را گذرانده بودند و الزاماً دوره هایی که آنها گذرانده بودند، دوره های کشوری توسط مؤلفان کتاب نبود.

تنها ده نفر از منتخبان این دوره، انتظار شرکت در دوره بازآموزی ریاضی پایه را بعد از موفقیت در آزمون داشتند (۱۷/۲۴٪).

از مجموع ۵۸ نفر، کسانی که هم سابقه تدریس ریاضی پایه و هم انتظار شرکت در دوره بازآموزی آن را داشتند، تنها سه نفر یعنی ۵/۱۷٪ بودند.

نتیجه گیری

توزیع سنی، سال فارغ التحصیلی، سابقه تدریس و سایر اطلاعات به دست آمده نشان می دهند که در آزمونهای برگزار شده جهت انتخاب «بهترین معلمان» برای شرکت در دوره های تأمین مدرّس پیش دانشگاهی و اخذ گواهی مربوط به آن، بیشترین موفقیت از آن «جوانترها» بوده است. این موضوع دو نکته مهم را نشان می دهد: از یک طرف، حضور جوانان در همه عرصه ها امیدوارکننده است. از طرفی دیگر، مسئولیت آموزش سایر معلمان برعهده کسانی گذاشته خواهد شد که تجربه تدریس کمی دارند و اکثر آنها، هیچ آموزش رسمی معلّمی را هم ندیده اند (تعداد کسانی که فارغ التحصیل رشته های دبیری دانشگاهی یا مراکز تربیت معلّم بودند به کمتر از ۱۰ درصد می رسید). در چنین وضعیتی، موقعیت این «متخبان» در مسئولیتهای بعدی ضربه پذیر، شکننده و

نامطمئن است. با توجه به مبانی نظری که در ابتدای مقاله به آن اشاره شد، و با توجه به ویژگیهای منحصر به فرد معلّمی، معلمان در آموزشهای حرفه ای خود بایستی در اثر تعامل با یکدیگر، نقادی و نظریه پردازی تجربیات خود و سایر معلمان، آموزشهای ویژه حرفه ای و بسیاری فعالیتهای دیگر، کم کم ارتقای حرفه ای یابند و توانایی تفکر بازتابی را پیدا کنند. تفکر بازتابی به معلّم فرصت می دهد تا ضمن «بازتاب در حین عمل تدریس»^۵ و «بازتاب بر عمل تدریس خویش»^۶، برای رفع مشکل و بهبود اوضاع تدریس خود بکوشد. البته، «آموزش و پرورش اگر بخواهد تنها به انتقال اطلاعات و دانش خاص بپردازد، به معلّم فکور [بازتابی] نیاز ندارد. اما وجود معلّم فکور [بازتابی] در آموزش و پرورش دموکراتیک بسیار مهم است، زیرا در چنین نظامی، آزادی و اختیار یادگیرندگان همیشه مورد احترام قرار می گیرد.»^۴ (ص ۳۵)

برای تربیت چنین معلّمانی، «موفقیت در آزمون علمی»، تنها ملاک معلّمی نمی تواند باشد. یافته های این مطالعه نشان می دهد که تجربیات معلّمی و دانش حرفه ای غیررسمی در مقابل «سواد علمی» رنگ باخته است. چنین نتیجه ای قبل از آزمون هم کاملاً قابل پیش بینی بود و چندین بار با تصمیم گیرندگان آموزشی راجع به آن بحث شد. در آزمونی که شامل «سواد آکادمیک» است، طبیعی است که جوانترها و از نظر معلّمی بی تجربه ترها، در آن موفق تر باشند. البته این ادعا، استثناها را شامل نمی شود. یعنی اگر حتی اجازه شرکت در آزمون به دانشجویان ریاضی در حال تحصیل نیز داده شود، می توان پیش بینی کرد که بیشترین موفقیت نصیب آنها خواهد شد! آموزش دادن به چنین معلّمی که دارای «سواد علمی» قانع کننده است، از دیدگاه تحصّلی، شدنی و مقرون به صرفه است. اما یادگیری معلمان، دارای روانشناسی پیچیده ای است که چند آزمون، تضمین کننده آن یادگیری نیستند. معلمان ریاضی متعلّق به «اجتماع یادگیرندگان»^۷ هستند که خود دارای پیچیدگی های فراوانی است و بسیاری از آنها، ریشه در فرهنگ و جامعه شناسی این حرفه دارد. تعامل بین معلمان به خصوص در شرایط سنی نابرابر و نامتعادل، بین آنها و یادگیرندگان، گوناگونی ایده ها، رویکردها و

قالبهایی که معلمان در آنها به تدریس مشغولند و بعدها به تدریس همکاران خود مشغول خواهند شد. و انتظارات جامعه از آنها همگی از عوامل تأثیرگذار بر آموزش معلمان ریاضی هستند. تنها قبولی در «آزمون علمی» ظرفیتهای لازم برای مواجهه با شرایط فوق را تأمین نمی کند.

مطالعه مورد بحث نشان داد که بسیاری از گزینش شدگان، حتی تمایلی به تدریس «ریاضی پایه» در آینده نداشتند و به اصطلاح، «از بد حادثه» به این دوره اعزام شده بودند. در چنین شرایطی - و بی نصیب از تجارب غنی معلمی - بعضی از افرادی که «جوان»، «باسواد»، «بی تجربه» و «بدون احساس تعلّق خاطر» به حرفه معلمی هستند، چگونه می توانند در تدریس خود، محیطی خلق کنند که در آن، چالش تفکر و عمل موجود و ممکن باشد؟

در دوره ای که برگزار شد، تعارض و دوری بین «جوانترها» و «مسن ترها» مشهود بود. درگیری های روانی حاصل از این ترکیب - که با ضریب اطمینان بالایی ترکیب موجود در بیشتر دوره های بازآموزی بعد از آزمون بوده است - فرسایشی، ضمنی و قابل تأمل بودند. بعضی از شرکت کنندگان به جای آن که بر اثر «قبولی در آزمون» اعتماد به نفس بیشتری پیدا کنند، سهامت دفاع از توانایی خود را نداشتند و در مواقعی دچار تزلزل بودند، این تزلزل در بحثهای گروهی و پرسش و پاسخهای جمعی بیشتر مشهود بود و این خود عاملی برای جلوگیری از فعال شدن این معلمان در دوره بازآموزی مذکور بود. به خصوص این دسته، نداشتن تجربه را برای خود یک کمبود می دیدند. از طرف دیگر، بعضی از معلمان با تجربه و ظاهراً بی اعتنا به «سواد علمی» جوانترها، به طور غیرمستقیم تجربه های تدریس خود را به رُخ آنها می کشیدند و چون سواد معلمی اغلب شرکت کنندگان به «دانش موضوعی» محدود شده بود، آمادگی لازم برای آموزشهای حرفه ای از جمله آموزش در جهت پرورش «معلم با ذاتی» وجود نداشت.

نتیجه گیری بالا یک روی سکه است و آن چگونگی ارتقای این دوره ها با چنین شرکت کنندگانی است. روی دیگر سکه پیچیده تر، مشکل تر و نگران کننده تر است.

نگرانی از این جهت است که دارندگان «گواهی تأمین مدرس» یعنی کسانی که این دوره ها را گذرانده اند موظف به آموزش همکاران خود هستند. با چنین ترکیبی - از نظر سن، تجربه، علاقه و سایر موارد - انتظار می رود که تعداد زیادی از این شرکت کنندگان، به دلایل و بهانه های مختلف از پذیرفتن مسئولیت دوره های بازآموزی برای همکاران خود در مراکز استانها و شهرستانها خودداری کنند. این مطالعه نشان می دهد که مهمترین دلایل از این قرار هستند:

الف) دانش موضوعی کلاسیک اگرچه شرط لازم برای تدریس بهتر مفاهیم کتابهای درسی ریاضی است، اما قطعاً شرط کافی نمی تواند باشد. «ریاضی مدرسه ای» با دانش ریاضی کلاسیک متفاوت است و بعضی از شرکت کنندگان، حتی کتابی را که می خواستند بعدها تدریس و چگونگی آموزش آن را به همکاران ریاضی خود یاد دهند! اصلاً ندیده بودند.

ب) بیش از ۹۰٪ شرکت کنندگان فارغ التحصیل رشته های دبیری یا تربیت معلم نبودند در نتیجه حداقل آموزش روش تدریسی را هم ندیده بودند.

پ) سن پایین شرکت کنندگان و تجربه محدود معلمی آنها، مشکلات ویژه ای را در برگزاری دوره های بازآموزی برای همکاران دیگر ایجاد می کند.

ت) غالب معلمان ریاضی مسن در دوره های بالای متوسطه و به خصوص در شهرستانها مرد هستند در حالی که حدود نیمی از شرکت کنندگان در دوره تأمین مدرس مذکور زن بودند و تدریس به همکار معلم مرد مسن و با تجربه توسط معلم زن جوان با «سواد علمی» قابل قبول و تجربه کم معلمی - آن هم در شهرهای کوچک - بدون تنش نخواهد بود.

ث) تنشهای روانی اجتماعی بین با تجربه های «کم سواد» مسن و بی تجربه های «باسواد» جوان ممکن است باعث ایجاد روحیه عیبجویی، پرخاشگری و تهاجمی در «با تجربه ها» شود و در همان حال، «بی تجربه های» با سواد را در حالت تدافعی قرار دهد و اعتماد به نفس آنها را کاهش دهد.

ج) مشکلات فوق تنها بخشی از نگرانی های مشاهده

شده در دوره مذکور بود. قضاوت قطعی در مورد کارایی دوره ها- با در نظر گرفتن هدفهای ویژه آنها- نیازمند بررسی تمام دوره های «تأمین مدرس» سال ۱۳۷۷ و انجام پیگیری مطالعه است.

توصیه های کاربردی

مطالعه اخیر نشان داد که برای ایجاد تعامل اجتماعی بین معلمان، ارتقای دانش حرفه ای آنها و کمک در جهت تربیت معلم بازتابی نیازمند روشهای منعطف تر گزینش معلمان برای شرکت در دوره های بازآموزی هستیم. با توجه به ویژگیهای منحصر به فرد جامعه معلمان ایرانی- هم از نظر ترکیب سنی و هم جنسیتی، پیشنهادهای زیر ارائه می گردد:

۱- هدفهای دوره های بازآموزی معلمان از آموزش دانش موضوعی به آموزش معلمان شامل دانش موضوعی، دانش حرفه ای و دانش روشی توسعه یابد.

۲- دوره های بازآموزی به دوره های مستمر ضمن خدمت معلمان جهت توسعه حرفه ای آنها تبدیل شود.

۳- نسبت به نقش معلم در جریان یاددهی- یادگیری و در موفقیت نظام آموزشی دوباره نگری شود و تبیین جدیدی از این نقش انجام گیرد.

۴- مدل های مختلف آموزش ضمن خدمت معلمان بررسی شود و با توجه به ویژگیهای اجتماعی، اقتصادی و فرهنگی جامعه ایرانی و با انجام نیازسنجی ها، امکان سنجی ها و داشتن هدفهای روشن بیان شده، مدل های محتمل بومی تهیه شود.

۵- از رسانه های جمعی برای بالا بردن کیفیت دوره های آموزش ضمن خدمت معلمان ریاضی استفاده شود.

۶- سرمایه گذاری های مناسب جهت انجام تحقیقات در زمینه دانش حرفه ای معلمان ریاضی و چگونگی ارتقای آن انجام شود.

۷- محتوای رشته های دبیری و تربیت معلم بازسازی اساسی مبتنی بر پژوهش شده و از این رشته ها حمایت اصولی شود.

۸- دوره های برگزار شده در طول سال تحصیلی ۷۸-۱۳۷۷ توسط دارندگان گواهی «تأمین مدرس»، از نظر کمی و کیفی بررسی شوند تا با نتایج آن، نحوه انتخاب شرکت کنندگان در دوره های «تأمین مدرس» و اهداف دوره ها، جرح و تعدیل شوند.

در خاتمه، سه مدل موجود برای آموزش ضمن خدمت معلمان ریاضی به امید پیدا کردن نقطه شروع مناسب برای تهیه یک مدل بومی ارائه می گردد:

۱- مدل آموزش از بالا^۸: در این مدل، پس از شناسایی نیازها، آموزش توسط مشاوران، استادان دانشکده های علوم تربیتی و موضوعهای درسی و مراکز آموزش معلمان انجام می گیرد.

۲- مدل آموزش از پایین^۹: در این مدل، آموزش توسط خود معلمان انجام می گیرد و تقاضاها را خود آنها مطرح می کنند، همچنان که نیازها نیز توسط خود معلمان شناسایی می شوند.

۳- مدل آموزش توسط گروه های کوچک^{۱۰}: در این مدل، آموزشهای محلی توسط یک مرکز و برای چند مدرسه با هم ارائه می گردد.

زیر نویس:

۱- در دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران که در ۱ تا ۳ شهریور ۱۳۷۶ در کرمانشاه برگزار گردید، مبنای نظری آموزش معلمان براساس نظریه تعامل اجتماعی و گونسکی توسط نگارنده ارائه شد.

- ۲- Positivism
- ۳- professional Knowledge
- ۴- Reflective thinking
- ۵- Reflection in action
- ۶- Reflection on action
- ۷- Community of learners
- ۸- Cascade model
- ۹- Bottom-up model
- ۱۰- Small-group model

مراجع:

- [۱] گویا، زهرا. (۱۳۷۷). تحقیق عمل آموزشی و اهمیت نقش معلم به عنوان محقق. در محسن پور و رثوف (گردآورندگان). پژوهش در آموزش مجموعه مقاله ها. تک نگاشت ۱۷ ص ۱۳۱ تا ص ۱۳۶. واحد انتشارات پژوهشکده تعلیم و تربیت.
- [۲] مهرمحمدی، محمود. (۱۳۷۷). تحقیقات آموزشی و مهارتهای حرفه ای معلمان (قسمت اول و دوم). در محسن پور و رثوف (گردآورندگان). پژوهش در آموزش مجموعه مقاله ها. تک نگاشت ۱۷ ص ۱۶۱ تا ص ۱۷۰. واحد انتشارات پژوهشکده تعلیم و تربیت
- [۳] Schön n, D. (1987). Educating the reflective Practitioner. San Francisco. Jossey. Bass publications.
- [۴] تربیت معلم: تعریفی نو برای آسیای نوین- نکته های برجسته- گزارش همایش بین المللی بانکسکی. ۱۹۹۵ (۱۳۷۶). ترجمه داریوش دهقان. تک نگاشت ۱۷ واحد انتشارات پژوهشکده تعلیم و تربیت.

هندسه - اقلیدسی و نا اقلیدسی



مقدمه

هدف از تنظیم این مقاله ایجاد انگیزه مطالعه روی هندسه و آشنایی با هندسه‌های نا اقلیدسی و حتی اقلیدسی به روشی مطلوب تر و فکروانه است. شاید بسیاری از شما ندانید که در حدود ۱۵۰۰ سال قبل، انقلابی در عرصه هندسه رخ داد که اهمیت آن چیزی کمتر از انقلاب کوپرنیک در نجوم نبوده است. کاکستر^۱، هندسه دان کانادایی در این زمینه می گوید:

«تأثیر کشف هندسه هذلولوی^۱ در تصویری که از حقیقت و واقعیت داریم، آنچنان عمیق بوده است که به دشواری می توانیم تصور کنیم که امکان وجود هندسه ای غیر از هندسه اقلیدسی تا چه اندازه در سال ۱۸۲۰ تکان دهنده جلوه کرده است.»

هندسه اقلیدسی^۲، همان هندسه ای است که شما در دبیرستان برای اولین بار با آن روبرو می شوید، این هندسه بر اساس تفکرات ریاضیدان یونانی - اقلیدس - که در کتاب اصول^۳ در حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد حضرت مسیح نوشته است، استوار می باشد.

هندسه های غیر اقلیدسی^۴، از تعمق و تفکر بیشتری روی اصل پنجم اقلیدس یا اصل توازی، پدیدار شدند، که در این مقاله به معرفی آنها خواهیم پرداخت.

هندسه و مروری گذرا بر تاریخ هندسه

هندسه ترجمه لغت Geometry، که مرکب از Geo به معنی زمین و meter به معنی اندازه گیری است، می باشد و علم اندازه گیری زمین بوده است. هرودوت مورخ یونانی پیش از میلاد حضرت مسیح پیدایش این علم را به مساحان مصری نسبت می دهد. هندسه ای که در آن روزگار مورد بحث و استفاده قرار می گرفته است، پیشتر از تفکر اصل موضوعی و تجربی، متکی بر آزمایش ها و تجربیات و شباهت ها و حدس ها و ... بوده است. مثلاً بابلیهای ۲۰۰۰ تا ۱۶۰۰ سال قبل از میلاد حضرت مسیح محیط دایره را ۳ برابر قطر آن می گرفتند. (یعنی آنها π را برابر ۳ می گرفتند). مصریان ۱۸۰۰ سال پیش از میلاد حضرت مسیح همان گونه که از پاپیروس رایند (این پاپیروس یکی از کهن ترین اسناد ریاضی مصر باستان است که رایند - عتیقه فروش اسکاتلندی -، آنرا در سال ۱۸۵۸ میلادی خریداری کرده است) فهمیده شده است، π را برابر $3/1604$ می گرفتند.

ساختار اصل موضوعی

ماهیت صدق ریاضی مبتنی بر روش اثبات ریاضی

است که متشکل است از استنتاج منطقی گزاره‌ای که باید اثبات شود از گزاره‌های ثابت شده قبلی. بدیهی است چنانچه در این روش برخی از گزاره‌ها، بدون اثبات پذیرفته نشوند، دچار تسلسل خواهیم شد. چنین گزاره‌هایی را اصل موضوع می‌نامند. از نقطه نظر تاریخی، هندسه اولین نمونه شکل اصل موضوعی در ریاضیات است که توسط اقلیدس پایه گذاری شده است. اما متأسفانه مجموعه اصول اقلیدس نارسا از آب درآمد، این نارسایی بعدها توسط دستگاه‌های رسا و کارآمدی که نزدیکترین آنها به اصول اقلیدس، دستگاه اصل موضوعی هیلبرت است، برطرف گردید. در روش اصل موضوعی در ریاضیات یک نکته همواره برجسته و قابل ملاحظه و حائز اهمیت است و آن اینکه:

«به محض اینکه اصول یک نظریه تعیین شدند، هر گزاره دیگر می‌بایستی فقط از طریق استنتاج منطقی از آن اصول اثبات شود و هرگونه استفاده از نوعی احساس بداهت یا تجربیات قبلی و یا ویژگیهای اشکال هندسی چه به طور صریح و چه به طور ضمنی کاملاً ممنوع است.» در این روش دو شرط بایستی مسلم شود تا درستی برهانی مورد پذیرش قرار گیرد:

- ۱- معرفی احکامی به نام اصل موضوع که به هیچ پیش فرض و توجیه دیگری نیاز نداشته باشند.
- ۲- قواعد استدلال، یعنی اینکه چه موقعی و چه حکمی از چه حکم دیگری نتیجه می‌شود.

نارسائی اصول اقلیدس از کجا ناشی شده بود؟

روشی را که اقلیدس بکار گرفت، روش اصل موضوعی بود؛ بدین منظور می‌بایستی تعاریف اصطلاحات مورد استفاده را ارائه کرد، تا زمان بکار بردن آنها دچار چندگانگی برداشت نشد. اقلیدس نهایت سعی خود را به کار برد تا همه اصطلاحات هندسی مورد استفاده اش را تعریف کند؛ اما متأسفانه وی به مطالب بند ۳ این مقاله توجه دقیقی نداشت و برخی از قضایای وی تنها با استفاده از اصولش قابل توجیه نیستند و همین موضوع باعث کشف هندسه‌های غیر اقلیدسی در سالهای بعد گردید. اقلیدس خط مستقیم را به این صورت تعریف

می‌کند:

«خطی که به نحوی هموار بر نقاطی که بر خود آن هستند قرار داشته باشد.»

به سادگی می‌توان دید که اقلیدس خط را با خط تعریف کرده است. در مورد نقطه، آن را «چیزی که هیچ ندارد»، معرفی می‌کند، که از این تعریف چیزی زیادی عاید خواننده نمی‌شود و دید وی را وسیع و تفهیم را آسان نمی‌سازد، لذا مجبوریم چند اصطلاح را بعنوان تعریف نشده‌ها بپذیریم؛

پنج اصطلاح تعریف نشده در هندسه مسطحه اقلیدسی موجودند که بقیه اصطلاحات همگی توسط آنها تعریف می‌شوند، این اصطلاحات عبارتند از: نقطه، خط، قرار داشتن (مثلاً دو نقطه فقط بر یک خط منحصر بفرد قرار دارند)، بینیت (مثلاً نقطه C بین نقاط A و B قرار دارند) و قابل انطباق بودن.

این اصطلاحات در کتاب مبانی هندسه دیوید هیلبرت که در سال ۱۸۹۹ به منظور روشن ساختن تعاریف هندسه اقلیدسی و پر کردن خلاءهای موجود در برهان‌های اقلیدس نگاشته شده است، آمده است. بغیر از دیوید هیلبرت، ریاضیدانان دیگری نظیر موریتس پاش^{۲۷} ۱۸۸۲، پشانو^۸، پیری^۹، ورونز^{۱۰}، ویلن^{۱۱}، رابینسون^{۱۲}، هانتینگتون^{۱۳}، فورد^{۱۴} از جمله ریاضیدانانی هستند که تلاش و سعی بسیاری در محکم ساختن بنیاد هندسه اقلیدسی بعمل آوردند.

به عنوان مثال قضیه زیر از کتاب اصول اقلیدس را مورد بررسی قرار میدهیم:

«هر دو مثلثی که دو ضلع و زاویه بین آنها با هم برابر باشند، قابل انطباق هستند.»

در کتاب اصول اقلیدسی برای اثبات این قضیه از مفاهیمی مثل حرکت دادن و روی هم قرار دادن اشکال استفاده شده است، که بر مبنای شهود هندسی و تجربه ما از اجسام صلب استوار است، نه صرفاً اصول ارائه شده توسط اقلیدس؛ این موضوع بعدها در دستگاه هیلبرت برطرف گردیده است که بعدها در ادامه این مقاله به آن می‌پردازیم. مورد دیگر و شاید یکی از مشهورترین نقایص کار اقلیدس، اصل پنجم یا اصل توازی است، اقلیدس

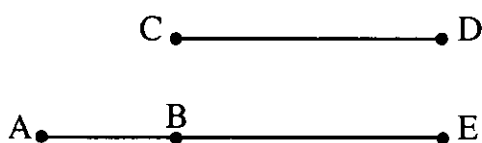
پنجم و ششم و دوازدهم، کارهای تئوس^{۱۷} در کتابهای دهم و سیزدهم.

این کتاب به طور کامل جانشین کارهای پیشینان گردید و بیش از هر اثر دیگری در تاریخ بشری مورد مطالعه قرار گرفت و بیش از ۲۰۰۰ سال مرجع اصلی این شاخه از ریاضیات بوده است. به علاوه روشی که او در این کتاب معرفی نموده است، الگویی است از آنچه امروزه ریاضیات محض^{۱۸} نامیده می شود، محض به معنی اندیشه محض، بدون استفاده از هیچگونه تجربه عینی برای تحقیق درستی احکام! اصول اقلیدس نیز از ماهیتی محض برخوردارند، اما در مسائل کاربردی نیز فراوان به کار می آیند.

❁ اصول هندسی اقلیدسی:

اصل اول: به ازای هر نقطه P و هر نقطه Q که با P مساوی نباشد، خط یکتائی مثل L موجود است که بر نقاط P و Q می گذرد.

اصل دوم: به ازای هر پاره خط AB و هر پاره خط CD نقطه ای منحصر به فرد مثل E موجود است، به طوری که نقطه B میان نقاط A و E قرار دارد و پاره خط CD قابل انطباق بر پاره خط BE است.



(این اصل بیانگر این نکته است که هر پاره خط را می توان به اندازه ای معین، امتداد داد).

اصل سوم: به ازای هر نقطه O و هر نقطه A که با نقطه O مساوی نیست، دایره ای به مرکز O و شعاع OA وجود دارد.

اصل چهارم: همه زوایای قائمه قابل انطباق هستند.

اصل پنجم (اصل توازی): هرگاه خط موربی دو خط را قطع کند، آن دو خط در طرفی که مجموع زوایای متبادل داخلی از دو قائمه کمتر باشد، همدیگر را قطع می کنند.

چهار اصل اول همیشه به راحتی مورد قبول ریاضیدانان

استفاده از این اصل را در کتاب اصول، تا قضیه بیست و یکم به تأخیر انداخته است و چنین می نماید که خود وی نیز به این اصل اعتماد کاملی نداشته است و از آنجایی که قبول این اصل به لحاظ شهودی دشوارتر از سایر اصول می باشد، تلاشهای زیادی در طول سالیان متمادی برای اثبات آن صورت گرفت.

هندسه اقلیدسی

تالس ریاضیدان یونانی از جمله اولین کسانی بود که بر استدلالی کردن هندسه بیش از روش آزمایش و خطا اصرار داشت و نخستین هندسه منطقی را بنیاد نهاد. روش وی توسط فیثاغورس و شاگردانش پی گرفته شد و به هندسه مسطحه منتهی گردید. بقراط ریاضیدان در حدود ۴۰۰ سال پیش از میلاد حضرت مسیح در کتاب اصول خود به آن سروسامان داد. پس از وی در سال ۳۸۷ ق. م فلسفه افلاطون بنیاد نهاده شد و دوران اصل موضوعی کردن هندسه وارد حیات جدیدی گردید، در این زمان دیدگاه افلاطون بیشتر مبتنی بر تفکر و تربیت ذهن بود تا آزمایش و خطا، وی در کتاب جمهوری می نویسد:

«مطالعه ریاضیات، دستگاهی ذهنی را توسعه می دهد و به کار می اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است، زیرا که درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است.»

شاید به جرأت بتوان گفت که یکی از برجسته ترین انسان ها در تاریخ بشریت افلاطون بوده است، چرا که در حدود ۴۰۰ سال قبل از میلاد حضرت مسیح این عقیده را نشر داده است که:

«جهان اندیشه، مهمتر از جهان مادی حواس است و این جهان سایه ای است از آن جهان.»

همچنین این افلاطون بود که گنگ بودن $\sqrt{2}$ را به روش اثبات غیرمستقیم (برهان خلف) ارائه نمود. اقلیدس شاگرد این مکتب بود و در حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد حضرت مسیح هندسه اصل موضوعی یونانی را در سیزده جلد کتاب اصول منتشر نمود. با این شاهکار تمام تجربیات و کارهای پیشینان نیز به چاپ رسید. فیثاغورسیان جلد های اول تا چهارم و هفتم و نهم، کارهای آریکیتاس^{۱۵} جلد هشتم، کارهای اثودوکسوس^{۱۶} جلد های

قرار گرفته است، (که آنها هم البته جای بحث داشتند که هیلبرت ریاضیدان بزرگ آلمانی به آنها پرداخت) اما جنجال بر سر اصل پنجم بوده است، صورت معادل و آشناتری از این اصل که توسط پلسی فر^{۱۹} در سال ۱۷۹۵ ارائه شده عبارت است از:

اصل توازی اقلیدسی - به ازای هر خط L و هر نقطه P غیر واقع بر آن، یک و فقط یک خط مثل L موجود است که از P بگذرد و با L موازی باشد.

اما چرا این اصل مانند سایر اصول دیگر اقلیدس به راحتی پذیرفته نشد و این همه سؤال ایجاد کرد؟ فکر می‌کنم دلیل این موضوع نزدیکی بسیار زیاد چهار اصل قبلی به شهود ماست، مثلاً اصل سوم را با پرگار می‌توان تجربه کرد، اما تا کجا می‌توان به طور شهودی فهمید که دو خط موازی همدیگر را می‌برند یا خیر؟ زیرا به هنگام تجربه همیشه با پاره خط‌ها سروکار داریم نه با خطوط. همانطور که قبلاً نیز ذکر شد خود اقلیدس نیز کاربرد این اصل را تا حدود بیست قضیه به تأخیر انداخته است و شاید از این عدم شفافیت آگاه بوده است. بسیاری از ریاضیدانان در طول دو هزار سال گذشته سعی در اثبات این اصل داشته‌اند. آدرین ماری لژاندر^{۲۰} (۱۸۳۳-۱۷۵۲) از جمله این افراد است. او حداقل ۲۹ بار و هر بار در یک تجدید چاپ جدید از کتاب اصول هندسی اش اثبات‌هایی از اصل توازی ارائه داد، که البته همه آنها ناقص بودند!!

تلاش برای اثبات اصل توازی

از جمله افرادی که برای اثبات اصل توازی تلاش کردند، می‌توان از پروکلسوس ۴۱۰ تا ۴۸۵ سال بعد از میلاد حضرت مسیح، خواجه نصیرالدین طوسی (۱۲۷۴-۱۲۰۱)، والیس (۱۷۰۳-۱۶۱۶)، ساکری (۱۷۳۳-۱۶۶۷) و لامبرت (۱۷۷۷-۱۷۲۸) نام برد. این اثبات‌ها بقدری فراوان بودند که حتی فردی بنام کلوگل^{۲۱} در سال ۱۷۶۳ رساله دکتری خود را به این صورت نوشت که نقایص ۲۸ برهان مختلف از اصل توازی را ارائه نمود.

نقص‌های موجود در کار اقلیدس چه بود؟

همانطور که قبلاً دیدیم، اصل اول اقلیدس بیان می‌کند

که به ازای هر دو نقطه مختلف P و Q خط یکتائی مثل L موجود است که از P و Q می‌گذرد. اما اینکه نقطه Q چگونه روی خط موجود است و یا از کجا معلوم که نقطه دیگری روی خط L هست یا نه، از اصول اقلیدس نمی‌شود چیزی مشاهده کرد. این موضوع در مورد اصل دوم نیز برقرار است. بنابراین اولین نقص کار مربوط به در نظر نگرفتن اصول موضوع قرار داشتن (وقوع)^{۲۲} است. این اصول عبارتند از:

۱- اصل اول اقلیدس،

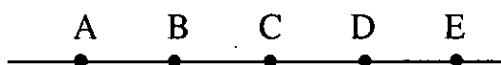
۲- به ازای هر خط L حداقل ۲ نقطه روی آن موجود است،

۳- سه نقطه متمایز وجود دارد به طوری که هیچ خطی از هر سه آنها نمی‌گذرد.

نقص دوم مربوط به اصول موضوع بینیت^{۲۳} می‌شود که عبارتند از:

۱- اگر نقطه B بین دو نقطه A و C باشد، آنگاه A و B و C سه نقطه متمایز هستند که بر یک خط قرار دارند و B نیز بین A و C است.

۲- به ازای دو نقطه مفروض و متمایز B و D ، نقاطی مثل A ، C و E موجودند که بر خط گذرنده از B و D واقع هستند، بطوری که B بین A و D ، C بین B و D و E بین C و D است.



(این اصل ما را مطمئن می‌سازد که خط به نقاط B و D ختم نمی‌شود)

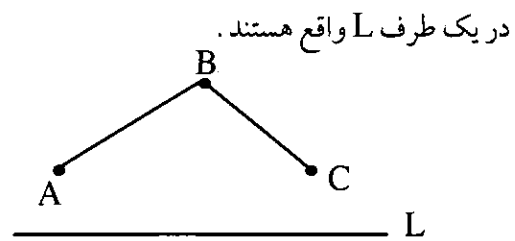
۳- اگر A و B و C سه نقطه متمایز واقع بر یک خط باشند، آنگاه یکی و تنها یکی از آنها بین دو تای دیگر واقع است.

(این اصل ما را مطمئن می‌سازد که خط دایره‌ای نیست)

۴- به ازای هر خط L و هر سه نقطه A ، B و C غیر واقع بر L :

۱- اگر A و B در یک طرف L باشند (یعنی پاره خط AB خط L را نبرد و یا پاره خط AB شامل نقطه‌ای از L نباشد) و B و C نیز در یک طرف L باشند آنگاه A و C نیز

۵- اگر $\angle B \approx \angle A$ و $\angle C \approx \angle A$ آنگاه $\angle B \approx \angle C$.
 بعلاوه هر زاویه با خودش نیز قابل انطباق است .
 ۶- هرگاه دو ضلع و زاویه بین آنها از یک مثلث با دو ضلع و زاویه بین از مثلی دیگر قابل انطباق باشند آن دو مثلث قابل انطباق هستند .



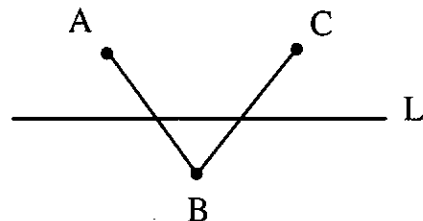
تولد هندسه های ناکلیدسی

تلاشها برای اثبات اصل توازی همچنان ادامه داشت ، تا اینکه یانوش بویوئی پسر فورکوش بویوئی مجارستانی در سال ۱۸۲۳ طی نامه ای به پدرش نوشت :
 « ... تنها چیزی که می توانم بگویم این است که از هیچ ، دنیایی تازه و شگفت انگیز آفریده ام . »
 آری ، در اینجا بود که پس از هزاران سال تلاش هندسه های ناکلیدسی متولد شدند .

پدر یانوش بویوئی که خود نیز دستی در ریاضیات داشت و از دوستان نزدیک کارل فریدریش گاوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷) بود ، نسخه ای از کشفیات پسرش یانوش را برای گاوس ارسال نمود ، متأسفانه گاوس طی نامه ای در جواب فورکوش بویوئی اظهار داشت که این کشفیات را قبلاً بدست آورده بود ولی قصد داشته است تا زمان مرگش آنها را انتشار ندهد ، این طرز برخورد که صحت و سقم آنرا به قضاوت تاریخ وامی گذاریم ، یانوش را به قدری سرخورده و مأیوس کرد که هرگز به فکر انتشار کارهای خود نیفتد . یانوش بویوئی سر بسیار پرشوری داشت ، وی سیزده بار پیاپی در زندگی دوئل کرد و پیروز شد ، برخلاف او «اریست گالوا» ریاضیدان مشهوری که در اولین دوئل در حدود بیست سالگی کشته شد!

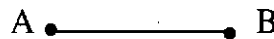
بعدها ترجمه ای از کار شگفت انگیز یانوش بویوئی در کتاب هندسه ناکلیدسی نوشته بونولا^{۲۵} در سال ۱۹۵۵ بدست آمد . علاوه بر یانوش بویوئی و گاوس فرد دیگری نیز در این میان مشغول به فعالیت بود ، این شخص کسی نیست جز ریاضیدان روسی لوباچفسکی ، وی اولین کسی بود که در ۱۸۲۹ در زمینه هندسه های ناکلیدسی مقاله به چاپ رساند ، اما متأسفانه در روسیه حتی مدتها پس از مرگش کسی توجهی به کشف عظیم او نکرد ، تا اینکه در سال ۱۸۴۰ مقاله اش به آلمانی ترجمه شد و مورد توجه

۴-۲- هرگاه A و B در دو طرف خط L و C و B در دو طرف خط L باشند ، آنگاه A و C در یک طرف L قرار دارند .



نقص سوم مربوط به در نظر نگرفتن اصول موضوع قابلیت انطباق^{۲۶} می باشد ، که عبارتند از :

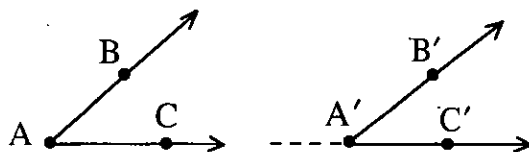
۱- اگر A و B دو نقطه متمایز باشند و A' نقطه ای دلخواه ، آنگاه به ازای هر نیم خطی مثل L که از A' رسم شود ، فقط یک نقطه مثل B' بر L موجود است که $AB \approx A'B'$ و $B' \neq A'$



۲- اگر $AB \approx CD$ و $AB \approx EF$ آنگاه $CD \approx EF$ و به علاوه هر پاره خطی با خودش قابل انطباق است .

۳- اگر نقطه B بین A و C و نقطه B' بین A' و C' واقع باشند و $AB \approx A'B'$ و $BC \approx B'C'$ آنگاه $AC \approx A'C'$.

۴- هرگاه $\angle BAC$ و نیم خط A'B' که از A' خارج شده است ، داده شده باشند ، آنگاه فقط یک نیم خط A'C' در یک طرف معین A'B' موجود است که :
 $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$



گاوس قرار گرفت.

هر هندسه ای غیر از هندسه اقلیدسی را هندسه نواقلیدسی می نامیم. هندسه ای که گاوس، بویوئی و لوباچفسکی کشف کردند، نمونه ای از هندسه های غیر اقلیدسی است، که آنرا هندسه هذلولوی می نامند. این هندسه چهار اصل اول اقلیدس را قبول می کند و به جای اصل توازی اقلیدسی اصل موضوع هذلولوی جایگزین آن شد.

اصل موضوع هذلولوی: در هندسه هذلولوی یک خط L و یک نقطه P غیر واقع بر L موجود است، به طوری که حداقل دو خط موازی با L از P می گذرد.

در این هندسه مجموع زوایای درونی هر مثلث از 180° کمتر است و مستطیل نیز وجود ندارد. از دیگر انواع هندسه های نواقلیدسی می توان از هندسه ریمانی^{۲۶} نام برد که به تغییرات بیشتری در اصول هندسه اقلیدسی نیاز دارد. در چند ساله اخیر هندسه فراکتالی نیز وارد دنیای هندسه شده است که واضع آن مندلبرت در سال ۱۹۷۵ می باشد، این هندسه را هندسه طبیعت نیز می نامند که در مجله رشد ریاضی شماره ۵۵ درباره آن بحث گردیده است.

خاتمه

آیا یک هندسه نواقلیدسی قابل تصور است؟ جواب کانت به این سؤال منفی است، وی می گوید هیچ هندسه ای غیر از هندسه اقلیدسی قابل تصور نیست. در واقع هندسه اقلیدسی دقیقاً معرف جهان طبیعی است و در اندازه گیری های معمولی که فاصله ها زیاد بزرگ نیستند بی اندازه مفید است. اما هنگامی که با فواصل بزرگ سروکار پیدا می کنیم، قدرت هندسه اقلیدسی کمتر قطعیت پیدا می کند و در واقع می دانیم که فضا هذلولوی است. آلبرت اینشتین در این خصوص می گوید: «پرتوهای نور بر اثر جاذبه ثقلی اجرام خمیده می شوند.»

هانری پوانکاره نیز در پاسخ به این سؤال که کدامیک از این هندسه ها درست هستند می گوید:

«اولاً اگر هندسه دانشی تجربی بود، نمی توانست دانشی دقیق باشد و پیوسته دچار تجدید نظر می گردید،

بنابراین اصول موضوع هندسی نه شهودهای قبلی هستند و نه حقایق تجربی، بلکه قرارداد هستند. بعبارت دیگر اصول موضوع هندسه تنها عبارت از تعاریف هستند، در لباس مبدل پس این سؤال که آیا هندسه اقلیدسی درست است یا نه پرسشی بی معنی است، درست مثل این که پرسیم آیا دستگاه متری درست است و اوزان و مقیاسهای قدیمی نادرست اند؟ آیا دستگاه مختصات دکارتی درست است و دستگاه مختصات قطبی نادرست؟

بنابراین نتیجه می گیریم که، هیچ هندسه ای نمی تواند درست تر از هندسه دیگر باشد، تنها ممکن است مناسب تر باشد.»

مراجع:

هندسه های اقلیدسی و غیر اقلیدسی نوشته گرینبرگ
(WWW. math. com) Internet.-

زیر نویس ها:

1. Coxeter
2. Hypebolic Geometry
3. Eulidean Geometry
4. Elements
5. Non-Eulidean Geometry
6. axiom
7. Moritz Pasch
8. G. Peano
9. M. Pieri
10. H. Veronese
11. O-Veblen
12. B. Robinson
13. E. V. Huntington
14. H. G. Forder
15. Archytas
16. Eudoxus
17. Theaetetus
18. Pure Mathematics
19. Playfair
20. Adrien Marie Legendre
21. G. S. Klugel
22. Incidence
23. betweenness
24. Congruent
25. Bonola
26. Riemanian Geometry

استانداردهای برنامه درسی

و

ارزشیابی

NCTM

نویسنده: توماس ا. رامبرگ^۱، دانشگاه ویسکانسین - مدیسن^۲

مترجم: نسرين شهامت نادری

ریاضیات داشته باشند، ریاضیات چگونه باید در کلاس تدریس شود و چگونگی ارزیابی و ارزشیابی دانش آموزان و برنامه ها در سه سند توسط NCTM تهیه شده است که عبارتند از: استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه ای (۱۹۸۹)، استانداردهای حرفه ای تدریس ریاضیات (۱۹۹۱) و استانداردهای ارزیابی ریاضیات مدرسه ای (۱۹۹۵). چون در دهه گذشته به استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی بیشتر توجه شده است، من در این مقاله فقط همین مورد را انتخاب کرده و نظرم را می نویسم.

تعبیر این مقاله زمینه ایده های کلیدی موجود در استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه ای انجمن ملی معلمان ریاضی (NCTM)^۳ را ارائه می دهد؛

اول، مقصود سازمان هنگام تصمیم گیری در مورد تهیه این سند؛

دوم، کاربرد پیش بینی شده از استانداردها توسط معلمان، مدارس و ایالات جهت تغییر در چگونگی سازماندهی ریاضیات و تدریس آن در مدارس آمریکا؛ سوم، فرآیند جاری آماده سازی اصلاحات استانداردها توسط NCTM.

مؤلف با ارائه نکاتی درباره واکنشهای پیش بینی نشده نسبت به این سند، مطلب را به پایان می رساند.

از من به عنوان مدیر پیشین کمیسیون استانداردهای ریاضیات مدرسه ای انجمن معلمان ریاضی از ۱۹۸۶ تا ۱۹۹۵، خواسته شده تا نظرم را درباره اهداف NCTM جهت رهبری اصلاح ریاضیات مدرسه ای در طی دهه گذشته بگویم [۱]. دیدگاه های مربوط به این که دانش آموزان ریاضی چه فرصتی باید برای یادگیری

زمینه
با نظری به این کار به سال ۱۹۸۶ بر می گردم، زمانی که تهیه و توسعه استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی شروع شد و خلاصه ای از تلاشهای NCTM در این مورد را ارائه می کنم. در ابتدای سند نوشتیم:

همه دانش آموزان نیازمند به یادگیری ریاضیات وسیعتر و اغلب متفاوت هستند و تدریس ریاضیات باید به طور قابل ملاحظه ای اصلاح شود. (NCTM، ۱۹۸۹، صفحه ۱)

ایده های کلیدی در این بیانیه عبارتند از:

۱- تدریس ریاضیات به «همه دانش آموزان» بر این حقیقت تأکید دارد که اگر همه دانش آموزان می خواهند در قرن بیست و یکم شهروندی مولد باشند، باید سواد ریاضی داشته باشند. به ویژه، این مورد در برگیرنده همه گروه های برخوردار یا محروم است، نه فقط «مردان سفیدپوست با استعداد».

۲- «ریاضیات بیشتر» اشاره به این دارد که همه دانش آموزان به یادگیری چیزی بیش از دست ورزی های حسابی نیازمندند. در حال حاضر، تقریباً نیمی از دانش آموزان ایالات متحده بیش از حساب، چیزی به عنوان ریاضیات نمی خوانند.

۳- «ریاضیات وسیعتر و اغلب متفاوت» اشاره به این حقیقت دارد که ریاضیاتی که همه دانش آموزان نیازمند یادگیری آن هستند عبارت از مفاهیمی از جبر، هندسه، مثلثات، آمار، احتمال، ریاضیات گسسته و حتی حسابان است.

۴- «یادگیری» معنایی بیش از به خاطر سپاری و تکرار دارد. یادگیری در برگیرنده بررسی، صورت بندی، نمایش، استدلال، و به کارگیری راه کارهایی برای حل مسائل و آنگاه بازتابی بر چگونگی مورد استفاده قرار گرفتن ریاضیات است.

۵- آموزش «بازنگری شده» اشاره به این دارد که کلاسهای درس بایستی تبدیل به مجامع گفتگو شوند یعنی جایی که حدسیه ها ایجاد می شوند، مباحثات ارائه می شوند، راه کارها مورد بحث قرار می گیرند و فعالیت هایی از این قبیل.

به منظور دریافت افکار ما در این زمینه، من سه مورد از این مقوله ها را برای بحث انتخاب کرده ام: «همه دانش آموزان»، «ریاضیات وسیعتر و اغلب متفاوت» و «آموزش بازنگری شده».

همه دانش آموزان ○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

اگر دانش آموزان باید سواد ریاضی داشته و شهروندی مولد در قرن بیست و یکم باشند، اعتقاد ما بر این است که همه دانش آموزان نیازمند داشتن زمینه خوب ریاضی

هستند. موضوع «ریاضیات برای همه» با واقعیت دهه گذشته مغایرت دارد. در آن زمان، حدود ۴۰ درصد دانش آموزان ایالات متحده ریاضیاتی بیش از آن چه نوعاً تا پایه هشتم را پوشش می دهد- یعنی محاسبات خرید و فروش- را نمی خواندند. انتظار می رفت این دانش آموزان فقط محاسبات کاغذ و مدادی و روشهای عادی برای اعداد حسابی، کسرها، معمولی، عدد اعشاری و درصد را بیاموزند. این ۴۰ درصد، شامل اقلیت دانش آموزان بودند، انتظار می رفت ۳۰ درصد دیگر دانش آموزان، دو سال دیگر در دبیرستان درس های ریاضی مانند درسهای سالانه ای در زمینه جبر و هندسه بگیرند. فرض بر این بود که این ریاضیات برای ورود به کالج عمومی کافی باشد زیرا این مقدار ریاضی، زمینه ای است که بیشتر معلمان دوره ابتدایی و راهنمایی دارند. انتظار می رفت ۲۰ درصد دیگر دانش آموزان قصد ادامه تحصیل در رشته هایی را داشته باشند که نیازمند ریاضیات بیشتری باشد. این دانش آموزان یک یا دو سال دیگر در دبیرستان درس ریاضی می گرفتند و چنین فرض شده بود که چند درس ریاضی نیز در کالج می گذرانند. سرانجام، ۱۰ درصد از دانش آموزان که متقاضی ادامه تحصیل در رشته های مهندسی و علوم پایه و ریاضی بودند و در دانشگاه درسهای ریاضی بیشتری را می گذرانند، چهار سال ریاضیات در دبیرستان می خواندند (احتمالاً شامل درسهای سطح پیشرفته هم باشد) که این پیش زمینه ریاضی اکثر معلمان دبیرستان است. این ۱۰ درصد آخر، بیشتر شامل مردان سفیدپوست بوده است.

هدف درازمدت حرکت اصلاحی هم عبارت از تغییر درصدها (۴۰ درصد، ۳۰ درصد، ۲۰ درصد و ۱۰ درصد) و هم تغییر نژاد و ترکیب جنسیت دانش آموزان در این گروهها بوده است. برای این کار، تمرکز کارمان روی ایجاد فرصتهای معقول برای ۹۰ درصد پایین جمعیت دانش آموزی آمریکا، به منظور یادگیری بیشتر ریاضیات بوده است.

دغدغه توسعه فرصت های یادگیری ریاضیات در موارد مختلفی در طول قرن گذشته اعلام شده بود، اما به ندرت توسط سیاستگذاران آموزشی یا عموم مردم در مقیاس وسیع

(مثل خطاطی)، هم چنین کتابها را در دسترس همگان قرار داد و نیاز افراد را به طور وسیعی به خواندن و نوشتن افزایش داد.

به طور مشابه، تکنولوژی امروز یک سری مهارتهای خاص را منسوخ کرده است (از محاسبات ساده تا پیچیده کاغذ و مدادی)، بدین ترتیب مدل سازی و پیش بینی موقعیتهای پیچیده را برای افراد امکان پذیر می کند.

با اشاعه پیشرفتهای تکنولوژیکی، دانش تأملی و بازتابی درباره قدرت ریاضیات برای هر شهروند در جامعه دموکراتیک، اهمیت پیدا می کند. به علاوه، مشاغلی که از این تکنولوژی استفاده می کنند سریع افزایش یافته و اغلب نیازمند درک واقعی از موضوعات سستی ریاضی، و هم چنین بعضی موضوعات که در درسهای جاری مدرسه ای نیستند، می شوند (مثل ریاضیات گسسته، مدل سازی ریاضی و آمار). در واقع، اگرچه نظام ریاضیات - هم به عنوان مفاهیم درک کردنی و هم راهی برای درک کردن استنباط شود، (رامبرگ و کاپوت^۸، در مطبوعات) - در بسیاری از کلاسهای ریاضی، به دانش آموزان فقط ویژگی های رسمی حوزه های مختلف ریاضی آموخته می شود در حالی که کاربرد ریاضیات به دست آمده از طریق مدل سازی ریاضی نادیده گرفته می شود. دانش آموزان باید ریاضیات به کار رفته در چنین کاربردهایی را مطالعه کنند تا قدرت ریاضیات را در حل مسائل دنیای واقعی و بازتاب آن را بر نتایج چنین کاربردهایی دریابند.

آموزش بازننگری شده ○○○○○○○○○○

در اکثر کلاسهای ریاضی، آموزش روزانه از یک توالی پنج مرحله ای پیروی می کند: مرور تکالیف، توضیح و نمایش مسأله گونه توسط معلم، کار مستقل با دانش آموزان بر روی مجموعه ای از مسائل مشابه، خلاصه کردن کار و پاسخ به پرسشها توسط معلم و تعیین تکالیف به طوری که شامل مسائل مشابه باشد. ما بحث کردیم که این توالی مکانیکی باید تغییر کند زیرا یاد گرفتن شامل چیزی بیش از نشان داده شدن و خواستن تکرار آن چه که نشان داده شده می باشد. علاوه بر آن، تکنولوژی آموزش سستی شامل

شنیده شده است. بدین ترتیب، در ۱۹۸۴ این پیام با صدای بلند و از طریق گزارش های ملتی در خطر^۴ (کمسیون ملی برتری در آموزش^۵، ۱۹۸۳) و آمریکایی های تحصیل کرده برای قرن ۲۱^۶ (کمسیون هیئت علمی ملی^۷، ۱۹۸۳) به گوش مردم رسید. تهیه کنندگان آن گزارشها اعلام کردند که رقابت اقتصادی در جهان امروز، به نیروی کار آگاه به جنبه های ریاضی، علمی و تکنولوژیکی در عصر اطلاعات بستگی دارد. در آن زمان، اعلام شده بود که در بیشتر کلاسها در مدارس، در تمام سطوح، آموزش ریاضی برای مجهز کردن فرزندانمان به مفاهیم و مهارتهای ریاضی لازم برای قرن بیست و یکم نه مناسب است و نه کافی. به علاوه، اگر چیزی برای اصلاح مسیرهای پرورشی جاری انجام نگیرد، شرایط در دهه آینده تقریباً بدتر می شود. (رامبرگ، ۱۹۸۴، صفحه ۱).

جامعه آموزش ریاضی بر این باور تکیه داشت که باید راه کار اصلاحی درازمدتی برای ریاضیات مدرسه معرفی کند؛ به همین منظور، دو گردهم آیی برنامه ریزی و برگزار شد و توصیه های مشابه و قاطعی که شامل فراخوانی برای چارچوب محتوای جدید ریاضیات مدرسه بود، ارائه شد. [۲]

ریاضیات وسیعتر و اغلب متفاوت ○○○○○○

بحث بر سر این بود که ۸ سال حساب برای ۴۰ درصد جمعیت (دانش آموزی) و ۲ سال ریاضیات دبیرستان برای ۳۰ درصد بقیه نمی توانست کافی باشد. مبنای بحث این بود که مشاغل در حال تغییرند. امروزه هیچ کس با محاسبات کاغذ و مدادی امرار معاش نمی کند. ماشین های حساب و کامپیوترها جایگزین محاسبه های خرید و فروش در کار و صنعت شده اند. به علاوه، این ابزار الکترونیکی قادر به انجام محاسبه در حجم زیاد و سریع، نمایش اطلاعات به راههای مختلف و غیره هستند. آنها مهارتهای مورد تأکید در درسهای ریاضی را تغییر داده اند - کامپیوتر وسیله سریعی است که می تواند محاسبات طاقت فرسا را به راحتی انجام دهد و اثر بی نظیر آن بر ریاضیات، مشابه اثر ماشین چاپ بر خواندن و نوشتن است. ماشین چاپ، مهارتهای خاصی را منسوخ کرد

یک متن درسی بنیانی است که ذخیره‌ای از فهرست مسائل، توده‌ای از برگه‌های کار کاغذ و مدادی و مجموعه‌ای از اجرای آموها است. با این که تعداد کمی از کتابها چیزهای خواندنی دارند، مطالب جالب بسیار کمی برای خواندن وجود دارد. بنابراین کتابهای تمرین ریاضیات به دانش‌آموزان دلیل کمی می‌دهند تا بتوانند ایده‌های درس «امروز» را با آن چه در درسهای گذشته بوده یا با دنیای واقعی، مرتبط سازند. آزمونهای متداولی که امروزه به کار می‌روند پاسخهایشان درست یا غلط است، ولی راه کارها و استدلالهای به کار رفته برای به دست آوردن آن جوابها، ارزیابی نمی‌شوند.

اخطار اسرائیل شفلر^۹ (۱۹۷۵) به روش مکانیکی سستی مفاهیم و مهارت‌های بنیانی تدریس، مشکلات مدرسه را با این دورنما ترسیم می‌کند: مفهوم آموزشی بسیار ساده شده یک «موضوع» با تصور عمومی غلط از ریاضیات محو می‌شود تا یک مفهوم تقریباً گمراه‌کننده را برای مقاصد آموزشی شکل دهد: به این دلیل که یک موضوع است و روایتی را به حرکت و انجام می‌رساند، باید متجانس باشد، و این که چطور متجانس باشد: بازدهی دقیق، مکانیکی، عددی، و صحیح برای هر سؤال، یک جواب یکتا و قطعی مطابق با یک روش عادی مؤثر. تعجبی نیست که این مفهوم، ریاضیات را از دیگر موضوعات مجزا می‌کند، چرا که آن چه این جا توصیف شد خیلی هم به شکل یک روش تفکر جایگزین فکر کردن نیست. در واقع، فرآیند محاسبه یا حساب کردن فقط متضمن گسترش یک رشته کار عادی بدون هیچ فرصتی برای بروز نبوغ یا استعداد طبیعی، برای کار حدسی یا تعجب‌آور، برای کشف، و بالاخره بدون هیچ نیازی برای نوع بشر، است. (صفحه ۱۸۴)

جرج پولیا^{۱۰} (۱۹۵۷) به طور مشابهی گفته است:

یک معلم ریاضیات مجال و فرصت زیادی دارد. اگر او وقت مقرر شده‌اش را به تمرین دانش‌آموزانش با عملیات عادی پر کند، علاقه آنها را می‌کشد، مانع پیشرفت کامل عقلانی آنها می‌شود، و از فرصت خود استفاده نادرست می‌کند؛ اما اگر او حس کنجکاوی دانش‌آموزانش را با ترتیب دادن مسائلی متناسب با

معلوماتشان جلب کند و با برانگیختن پرسشهایی، آنها را در حل مسائلشان کمک کند، ممکن است در آنها ذوق ایجاد کند و جرأت ارایه روشهای تفکر مستقل را به آنها بدهد. (صفحه ۷)

ریاضیات سستی مدرسه‌ای اگر چه دانش‌آموزان را با نظم و مقررات آشنا می‌کند اما در ایجاد درک مناسب نسبت به اهمیت فرهنگی و تاریخی ریاضی و آشنائی با موارد استفاده آن ناموفق بوده است. «ما برنامه درسی ریاضی را مطابق با گذشته، نایینا نسبت به آینده و با سنت کمترین توقعات مقید شده، به ارث برده ایم». (هیأت آموزشی علوم ریاضی^{۱۱} [MSEB، ۱۹۹۰، صفحه ۴]).

برعکس، هنگامی که استانداردها را بهبود بخشیدیم، فکر کردیم که رویکرد آموزش ریاضی باید دربرگیرنده جستجو، صورت‌بندی، نمایش دادن استدلال، خواندن، به کارگیری راه کارهای حل مسائل، اثبات ادعاها، و بازتاب چگونگی استفاده ریاضیات باشد. کلاسهای درس باید تبدیل به مجامع گفتگو شوند، جایی که حدسیه‌ها ساخته می‌شوند، تبادل نظرها ارائه می‌گردند و راه کارها مورد بحث قرار می‌گیرند.

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ خلاصه

هدف NCTM شروع فرآیندی طولانی برای تغییر راهی بود که ریاضیات در مدارس آمریکا سازماندهی و تدریس می‌شد. در آن موقع برای ما واضح بود که چه نمی‌خواستیم: ادامه کار عادی آموزش غیر ابتکاری که در اکثر کلاسها بود، به طوری که بسیاری از دانش‌آموزان را از مطالعه بیشتر ریاضیات منع می‌کرد.

البته باید اذعان کنم زمانی که استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه آماده شد، تصویر روشنی از راه چاره‌ای که می‌خواستیم یا حصول چگونگی اصلاح، نداشتیم. تنها صحبت کردن در مورد اهمیت حل مسأله و نیاز دانش‌آموزان به ساختن فرضیات و ایجاد بحث و گفتگو، یا درباره انجام چیزی به غیر از ساعت‌های محاسبات عادی با درکی کم از آن، چنین تغییراتی را واقعاً عملی نمی‌کند. در واقع، ما مثالهایی از این که اجرای چنین شعارهایی در کلاسهای ایالات متحده چه معنایی

دارد یا چه مدت طول می کشد، نداشتیم. ولی با اعلام روشن نبودن مسئله، منظورمان این نبود که در مورد آن چه باید انجام گیرد، هیچ فرضیه یا احساسی نداشتیم. آزمایش گسترده با تکنولوژی های جدید، تحقیق پدیدار شده روان شناسانه از یک دیدگاه متفکرانه، و دسته ای از مثالها برای آن که چه و چگونه ریاضیاتی در کشورهای دیگر در حال تدریس بوده است، انواعی از ایده ها و مثالها و نتایج تحقیقات را به وجود آورد. ما امیدوار بودیم که معلمان، تهیه کنندگان برنامه های درسی، پژوهشگران و سایرین، ایده های NCTM را در آموزش، به عنوان نقطه شروع حرکتی اصلاحی که دربرگیرنده توسعه خلاق و تلاش در مواد درسی جدید و روشهای آموزشی است در نظر بگیرند.

استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی

چهلمین استانداردهای برنامه درسی که NCTM ارائه کرده به سه تراز با عناوین کلاس پیش دبستانی تا ۴، ۵ تا ۸ و ۹ تا ۱۲ دسته بندی شد. چهارتای استانداردها در هر دوره مربوط به پایه های پیش دبستانی تا ۴، ۵ تا ۸ و ۹ تا ۱۲ دسته بندی شد. چهار استاندارد حل مسأله، ارتباطات، اتصال و ارتباط و نحوه استدلال در تمام بخش ها مشترک است. ۲۸ استاندارد دیگر شامل محتوای ریاضی مربوط به هر دوره است. هر استاندارد یک گزاره نسبی مختصر است و چارچوب زیر را دارد:

استاندارد _____
در پایه های _____ برنامه
درسی ریاضی باید شامل:
_____ باشد تا دانش آموزان
بتوانند:
_____؛
_____؛

این عبارتها، بخش اصلی آموزش هستند. آنها دیدگاهی از محتوای ریاضی را روشن می سازند که از نظر ما تمام دانش آموزان باید فرصت یادگیری آنها را داشته باشند. علاوه بر آن، اینها معیارهای پیشنهادی به مدارس و ایالات هستند تا برای قضاوت راجع به کیفیت برنامه درسی ریاضی و کتاب درسی خود از آنها استفاده کنند. برای مثال، به استاندارد زیر توجه کنید:

استاندارد ۶

دستگاه های عددی و نظریه اعداد
در پایه های ۵ تا ۸، برنامه درسی ریاضی عبارت است از مطالعه دستگاههای عددی و نظریه اعداد تا دانش آموزان بتوانند

- بفهمند و نیاز به اعداد را بیش از کل اعداد تصدیق کنند.
 - نسبتهای ترتیبی کل اعداد، کسرها، اعشاریها، ارقام و اعداد گویا را بسط داده و به کار گیرند.
 - درک خود را از عملیات کل اعداد به کسرها، اعشاریها، ارقام و اعداد گویا گسترش دهند.
 - چگونگی ارتباط عملیات بنیادی حساب را بفهمند.
 - مفاهیم نظریه اعداد (اعداد متباین، عاملها، مضارب) را در دنیای واقعی و موقعیتهای مسائل ریاضی بسط داده و به کار ببرند. (NCTM، ۱۹۸۹، صفحه ۹۱)
- هریک از استانداردها برای تعیین عناصر مندرج در یک حوزه ریاضی که بایستی در برنامه درسی آن پایه های تحصیلی باشد، نوشته شده اند. مواردی که با دایره های سیاه مشخص شده اند، عناصر کلیدی در آن حوزه و متناسب با آن پایه تحصیلی است. توقع داشتیم آموزشگران برای طراحی یک امتحان، تهیه یک برنامه درسی یا تألیف کتابهای درسی، از استانداردها استفاده کنند.

مقدمه ها، مثالها و گامهای بعدی

علاوه بر استانداردها، سه بخش دیگر در استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه وجود دارد. بخش اول مقدمه ها شامل مقدمه برای کل سند و سپس دو تا مربوط به بخشهای پیش دبستانی تا ۴، ۵ تا ۸ و ۹ تا ۱۲ است. مقدمه ها به منظور ترتیب دادن مرحله برای خواننده

نوشته شده اند. آنها حاوی عبارتهای مختصر درباره اهداف، نیاز به تغییر، و فرضیاتی که استانداردها مبنی بر آنها هستند، می باشند. در مرور هر سطح استاندارد، یک عنوان سوء تعبیر شده است. به طور مشخص، جداول خلاصه، تعیین کننده «توجه افزایش یافته و کاهش یافته» هستند و «توجه کاهش یافته» به معنی حذف نیست. پیامی که سعی داشتیم منتقل کنیم این بود که تأکید باید از مهارت موجود در به کارگیری روش کارها، به درک آنها تغییر یابد. به عنوان مثال، بسیاری از دانش آموزان (و اکثر بزرگسالان) می توانند یک کسر را به کسر دیگر از طریق «عکس کردن و ضرب» تقسیم کنند و می توانند یک عدد دو رقمی را در عدد دو رقمی دیگر ضرب کرده و پاسخ صحیح را بیابند، ولی قادر به گفتن دلیل نحوه عمل روش کار نیستند به غیر از این که بگویند «این چیزی است که به من آموخته شده تا انجام بدهم».

با پیروی از هر استاندارد، دو بخش فرعی نوشتیم: توضیحی از استانداردها با عنوان «تمرکز»، و یک «بحث» که شامل مثالهایی از درسها است. بعضی وقتها این بخشهای فرعی به شکل معما ثابت شده اند. در بحث، خواننده به مثالها اعتراض خواهد کرد. به این دلیل که «مثال مطلوب مرا درج نکردید». برخی از مثالها خوب هستند و برخی دیگر بسیار خوب نیستند. در واقع، حالا که چنین مثالهایی را می خوانم، از خود می پرسم «چرا چیز دیگری را درج نکردیم؟» بعد، نظراتی را دریافت می کنم که می گویند، «این مثال را خوانده ام و چنین معنایی دارد ...».

متأسفانه، اغلب مثالها مقصود ما را تأمین نکرده است. ما می دانیم که معلمان در هر کاری زمینه، تجربه، و روش استفاده زبان و کلمات خودشان و ... را می آورند. متأسفانه، درک آنها همواره با درک ما تطابق ندارد. اکثر نظرات آنها راجع به نظریه های مفصل و انتقادات از استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه ای نیست، بلکه بیشتر در مورد مثالها است.

بخش نهایی در سند با عنوان «گامهای بعدی» است. ما توقع داشتیم آموزش گران سند را به عنوان یک نقطه شروع برای بحث آزاد درباره آنچه که در ریاضیات برنامه

درسی مدرسه ای درج شده است به کار بندند. درحقیقت، هیأت آموزش علوم ریاضی (MSEB)، با دنبال کردن انتشار استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه ای، گفتگوی ملی یک ساله را حمایت کرد. راه کاری که انتظار اتخاذ آن را داشتیم، برپایه این فکر بود که چون ما در اقتصاد عرضه و تقاضا زندگی می کنیم، یک تقاضا برای متون متفاوت، روش کارهای آموزشی، و تستهایی که از راه کار تکراری هفت مرحله ای پیروی می کند، ایجاد شده است.

گامها و روابط بین آنها به ترتیب زیر است:

۱- پیش از این که هر طرحی انجام گیرد، نیاز به تغییر را باید ایجاد کرد.

۲- دیدگاه یک عامل کلیدی است. به منظور ایجاد یک برنامه جدید، شخص باید ارزشها، اهداف و استانداردها را در نظر بگیرد. اسناد استانداردهای NCTM برای اجرای این دیدگاه طراحی شده اند.

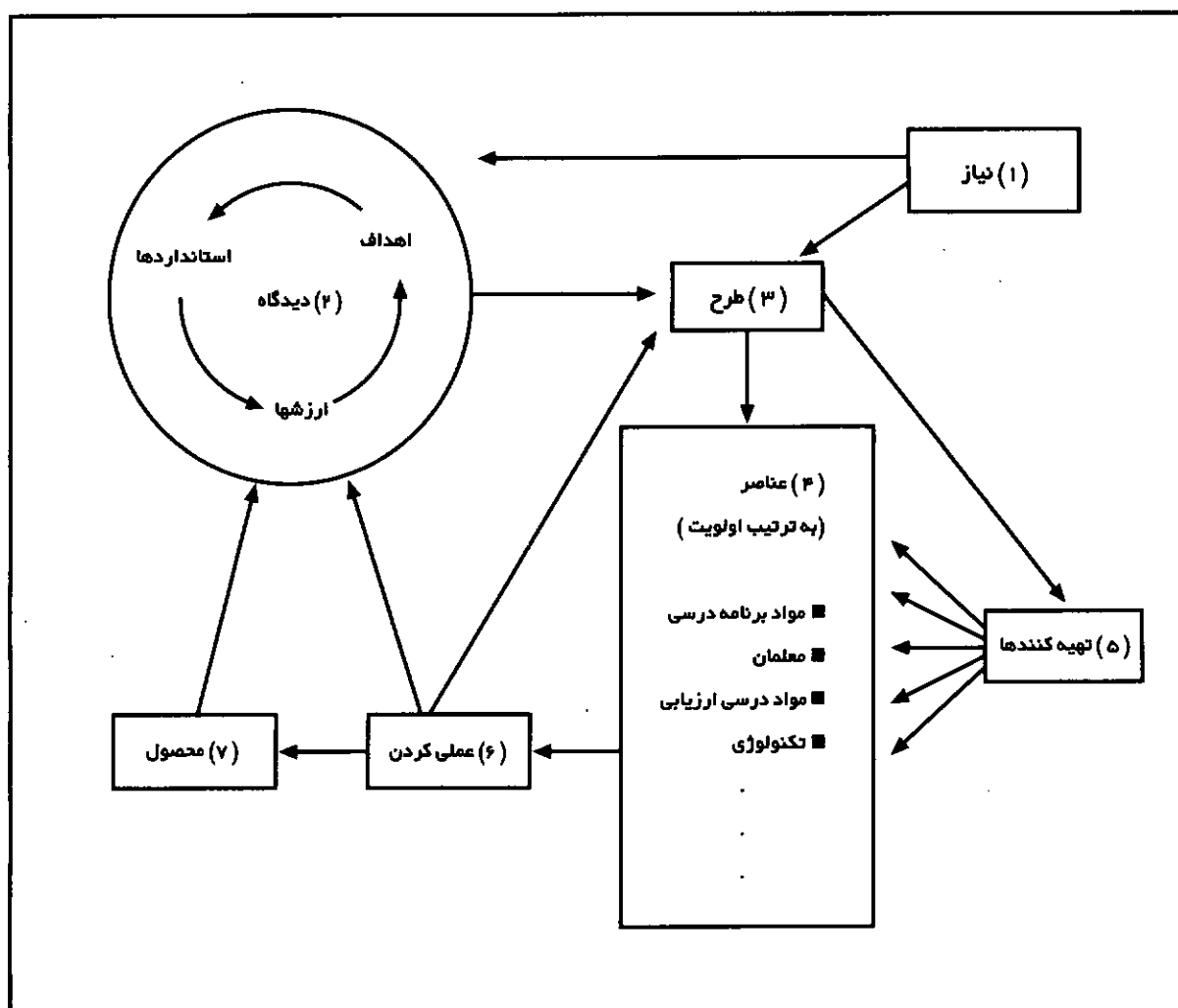
۳- طرح ریزی عبارت از درگیر کردن همه در یک نظام یا مدرسه برای رسیدن به یک توافق عمومی در تغییر دادن جزئیات طرحهایی با سلسله کاری کوتاه و بلند (با جدول زمانی) است. در این گام تقاضا به وجود می آید.

۴- گام بعدی شناسایی عناصر ویژه نظام است که هدف تغییر آنها (مواد درسی، روشهای آموزشی، مواد درسی ارزیابی، معلمان، تکنولوژی) و تعیین اولویتها است. (نمودار صفحه بعد)

۵- هر نظامی به مجریان و نیروی انسانی وابسته است. باید مدارس از ناشران کتب درسی، مؤسسات مسؤول، امتحانها و آزمونها، مسؤولان آموزش کارکنان، برنامه ریزان آموزش های قبل و ضمن خدمت معلمان و دیگران، تقاضای فراهم آوردن اجزای لازم جهت ایجاد تغییرات مطلوب را بکنند.

۶- آنگاه ساختن مواد درسی جدید، تهیه روش کارها و ارایه برنامه های عملی آغاز می شود؛ مواد درسی و روش کارهای پیش نویس شده باید آزمایش شوند و اگر بازخورد این حالت آزمایشی با دیدگاه و طرح مطابقت داشته باشد، آنگاه اصلاحات صورت گیرد.

۷- سرانجام، یک محصول (یک برنامه درسی، روش



به گفته پرستون (۱۹۹۶)^{۱۳} آنها فقط «تبلیغات پسر و صدا در آگهی‌ها» هستند. چنین ادعاهایی، قانونی، ولی اغلب گمراه کننده اند. با تکیه بر استانداردها، به طور واقعی باید مفاد برنامه کاری برای گروه‌های سنی پیش دبستانی تا ۴، ۵ تا ۸ و ۹ تا ۱۲ آماده و آزمایش شوند و سپس برنامه آموزشی طراحی شده برای ایجاد موقعیت یادگیری دانش آموزان جهت درک ایده‌های کلیدی در مباحث ریاضی از جمله اعداد، جبر، هندسه، آمار و احتمالات، بازنگری گردد و برنامه‌های توسعه حرفه‌ای معلمان طراحی شوند. تنها در سال گذشته، برنامه‌های جدید در دسترس قرار گرفتند به طوری که رؤس مطالب مفصل با سرمایه گذاری بنیاد ملی علوم مورد بهره برداری قرار گرفتند.

استانداردهای محتوایی بازنگری شده

کار آموزشی، مواد درسی ارزیابی) آماده بهره برداری است.

متأسفانه، این کار چنین که تصور می شود انجام نمی پذیرد. سند معنی یک سند زمینه را به عنوان فرآیند تغییر محتوای ریاضیات مدرسه ای داشت و به عنوان حرف آخر در نظر گرفته نمی شد. توالی مستدل طراحی کوتاه و بلندمدت، هدفمند بودن تغییرات لازم، و در بسیاری موارد، آزمودن و دوباره آزمودن محصولات جدید در بررسی «تطابق سریع»^{۱۴} متوقف شدند. به طور مثال، ناشران شروع به اعلام این مطلب کردند که مواد درسی آنها در مدت کوتاهی پس از انتشار استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه ای، منطبق بر استانداردها نوشته شده است. چنین اعلامیه هایی با مواد اولیه کمی که در دست آنهاست، ابزار بازآرایی هستند.

در حال حاضر، NCTM در جریان تکمیل استانداردهای برنامه درسی بهنگام است. تکمیل سند جاری از سال ۱۹۸۶ شروع شد. اولین پیش نویس برای مرور و مطالعه در ۱۹۸۷ چاپ شد، در سال ۱۹۸۸ اصلاح شد، و در ۱۹۸۹ منتشر شد. NCTM اعلام کرد که هر ده سال یک اصلاحیه آماده می کند. اصلاحات موارد زیر را در نظر می گیرند:

■ سازماندهی مجدد بخشهایی که تطابق کامل با فعالیت های عملی مدرسه دارند. استانداردهایی برای پایه های تحصیلی پیش دبستانی تا ۲، ۳ تا ۵، ۶ تا ۸ و ۹ تا ۱۲ تهیه خواهد شد.

■ چهار استاندارد بنیادی (حل مسأله، ارتباطات، نحوه استدلال، و ارتباط و اتصال) حفظ خواهند شد، اما بر نقش آنها در کوتاه کردن راه استانداردهای محتوایی تأکید خواهد شد. تصور نمی شود که این استانداردها، مستقل از محتوا در نظر گرفته شوند. مثلاً برخی از خوانندگان اعلام کردند که فعالیتهای حل مسأله را فراهم کرده اند، در صورتی که شخص فقط مسائل را حل نمی کند، بلکه مسائل را به همراه حوزه های ویژه ریاضی حل می کند.

■ احتمال دارد پنجمین استاندارد متداول با توجه به روش کارها و یاراههای عادی ارایه گردد. با مرور آنچه گذشت، با این که روش کارها و نیاز درک روش کارها در بسیاری از استانداردها ظاهر می شود، آنها در مثالها و علامتهای دایره سیاه کنار گذاشته شدند.

■ تأکیدی بر مباحث اعداد، جبر، هندسه، آمار، و غیره در طول پایه های درسی خواهد بود. به طور مثال، در حال حاضر استانداردهای مختلف در مورد اعداد در دوره های پیش دبستانی تا ۴ و ۵ تا ۸ وجود دارد، ولی در ۹ تا ۱۲ وجود ندارند. آزمایشی راجع به ایده های موافق در مورد حضور یک موضوع ریاضی در طول پایه های تحصیلی مورد نیاز است.

البته مثالهای درج شده بهنگام خواهند بود و کیفیت و

مناسبت آنها، مورد تأیید واقع خواهد شد.

سه نظریه نهایی ○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

اولاً، والدین و دیگران در مورد اهمیت ریاضیاتی که توقع دارند دانش آموزان یاد بگیرند و درباره مهارتهای بنیادی و حقایق ریاضی، تذکر داده و رابطه بین نقش آنها در کوششهای اصلاحی را بیان کرده اند. به نظر نمی رسد که تأکید بر استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه ای برای حل مسأله ارتباطات، نحوه استدلال، اتصال و ارتباط، اهمیت این مهارتها را منعکس کند. البته ما می خواهیم همه دانش آموزان بدانند که چگونه اعداد را با شمارش و اندازه گیری، به اشیا ربط دهند. ما می خواهیم که همه دانش آموزان بیاموزند چگونه جملات ریاضی، فرمولها، نمودارها، جداول و غیره را بنویسند و موقعیتهای متداول گوناگون را بیان کنند (مثل، یک جمله اضافی برای بیان یک موقعیت پیوسته، یک معادله برای بیان رابطه بین فاصله و زمان؛ یک نمودار برای بیان دسته ای از داده ها). ما می خواهیم همه دانش آموزان روش کارها را برای محاسبه یا دست ورزی نمادهای ریاضی بفهمند. قادر باشند در یک موقعیت داده شده، روش کار مناسب را بیابند و روش کار را طوری انجام دهند که امکان پاسخ گوئی و پیش بینی پیدا شود. ما می خواهیم که همه دانش آموزان بتوانند برای ادعاهای ریاضی خود توجیهی بسازند. همه این ایده ها در سند گنجانده شده اند، اما ما از دانش آموزان انتظار داریم که این ایده ها را برای حل مسائل غیر معمول (عادی) به کار ببندند.

ثانیاً، زمانی که ما نوشتن استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه ای را به پایان رساندیم، از اثر آن مطمئن نبودیم. در بین ما افراد بدبین فکر می کردند که سند به طور اتفاقی توسط دانش آموزان فارغ التحصیل مطالعه خواهد شد، اما اثر همگانی کمی خواهد داشت. روی هم رفته، اسناد مشابهی به طور مرتب در تاریخ آموزش و پرورش به وجود آمده اند که اثر واقعی کمی داشته اند. با آگاهی از این موضوع، NCTM یک نسخه مجانی از این سند برای تمامی اعضا تهیه کرد، کنفرانسهای مطبوعاتی برگزار کرد و گردهمایی های عمومی با

حرکتی؛ هم هیجان انگیز و هم همراه با تواضع است.

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ خلاصه

در ریاضیات ما دستورکاری برای معلمان یا مدارس تهیه نکردیم. به جای آن دیدگاهی از برنامه درسی ریاضیات تهیه کردیم. این دیدگاه درک ما را از تغییرات جامعه، تغییرات در ریاضیات و کاربرد ریاضیات و تغییرات آنچه در مورد یادگیری است منعکس می کند. انتظار ما از مدارس، برگزاری گفتگو با افراد تشکیل دهنده (والدین، اجتماع، دانش آموزان، دیگر معلمان، مجریان و غیره) درباره این دیدگاه، توجه به فعالیت های جاری، فراهم کردن یک طرح و گردهم آیی برای تغییر و... است. این همان چیزی است که در دهه گذشته در بسیاری از مدارس رخ داده، و ما معتقدیم که در همه مدارس رخ خواهد داد. فقط پس از آن، همه دانش آموزان فرصت یادگیری ریاضیات را با درک آن خواهند داشت، به طوری که به نوبه خود، برنامه امکان این که آنها شهروندانی مولد در قرن آینده شوند را ایجاد می کند.

زیر نویس ها

- [۱] نظرات، عقاید شخصی خود من هستند. آنها، بازتاب دیدگاههای افرادی که در آماده سازی سند درگیر هستند و سایر اعضای NCTM نیست.
- [۲] اولی توسط بنیاد ملی علوم بنا شده است و میزبان آن هیأت کنفرانس علوم ریاضی (CBMS) بوده است. بررسیهای این گردهم آیی در اهداف نو" برای آموزش، علوم ریاضی منتشر شده است (CBMS، ۱۹۸۳). کنفرانس دوم توسط بخش آموزش و پرورش ایالات متحده بنیاد شده است و توسط NCTM و دانشگاه ویسکانسین - مدیسون، میزبانی شده است. بررسیهای این گردهم آیی در ریاضیات مدرسه اختیارات برای ۱۹۹۰ (رامبرگ، ۱۹۸۴) منتشر شده است.

1. Thomas A. Romberg
2. University of Wisconsin - Madison
3. National Council of Teachers of Mathematics
4. A Nation at Risk
5. National Commission on Excellence in Education
6. Education Americans for the 21st Century
7. National Science Board Commission
8. Kaput
9. Israel Scheffler
10. George Polya
11. Mathematical Sciences Education Board
12. quick Fixes
13. Preston
14. New Goals

مخاطبان مختلف برگزار کرد، و، با کمک MSEB، درخواست حمایت از سازمان های حرفه ای ریاضی کرد. نتیجه حاصل از آن تلاش، پذیرش گسترده استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه ای در سطح کلی بود. اخیراً شنیده ام که سیاستمداران می گویند: «ما نیازمند انجام کاری در ریاضیات هستیم».

به نظر ایده های معقولی می آید ... حل مسأله، ارتباطات، نحوه استدلال ... با اعداد کار کردن ... بدون درک واقعیت پیام یکی از دلایل موفقیت آن، این است که یک خلأ سیاسی را پر می کند. دلیل دوم آن است که با بیانی کلی و عمومی نوشته شده است. این یک دیدگاه است، نه یک نسخه دستور کار. فقط حاوی ایده هایی است که شخص هنگام در نظر گرفتن محتوای برنامه درسی ریاضیات مدرسه به آن فکر می کند. سومین دلیل این است که توسط NCTM نوشته شده است، گروهی که اعضای آن مسئول آموزش دانش آموزان در کلاسها هستند. در گذشته، معلمان در آن چه که درس می دادند رأی و نظر کمی داشتند.

در واقع، بحث سازمان بر این بوده که معلمان در درازمدت نیازمند چیزی بوده اند تا بتوانند در برابر مجریان و دیگر سیاستگذاران قرار دهند و بگویند، «این است آنچه که ما باید در برنامه درسی مان مورد توجه قرار دهیم در نتیجه، کتابهای درسی را با این برنامه قبول می کنیم.» به جای آن که توسط ناشران به آنها گفته شود چه چیزی موجود است. معلمان سند را توانا و صاحب اختیار یافته اند. برای من، این واقعیت، کوشش تهیه این سند را حقیقتاً ارزشمند ساخته است.

ثالثاً، بزرگترین شگفتی برای من اثر غیر عمد بر ریاضیات مدرسه ای در دیگر کشورها و دیگر نظامها در ایالات متحده بوده است. هیچ یک از ما که درگیر تهیه استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه ای بودیم، ترجمه این سند را به زبانهای اسپانیولی، روسی و ژاپنی و کار موازی در ملل متعدد دیگر پیش بینی نمی کردیم. هیچ کدام از ما هم انتظار نداشتیم که کار «با مبنای استانداردها» توسط سازمانهای حرفه ای در موضوع همه مدارس در این کشور گنجانده شود. راهبری چنین

جبر در گذر زمان

(از خوارزمی تا گالوا)

گردآوری و تنظیم از: محمدرضا ملا خلیلی میبدی
دانشجوی سال چهارم - رشته مهندسی کامپیوتر - دانشگاه شهید بهشتی تهران

مقدمه

هدف این مقاله، نشان دادن تغییر معنایی کلمه جبر در جریان تاریخ است. خواهیم دید که پاسخ به این پرسش که «جبر چیست» و «مسئله اساسی جبر کدام است»، مستلزم در نظر گرفتن این نکته است که زمان طرح این پرسش کی است. وقتی از جبر، در زمانهای مختلف صحبت می شود، سه موضوع کاملاً متفاوت مورد نظر است.

خود کلمه جبر از دانشمند بزرگ سده نهم خوارزم، محمدبن موسی خوارزمی، آمده است که در کتاب او نخستین قانون های کلی برای حل معادلات درجه ۱ و ۲ ذکر شده است. علامت گذاری متداول «حرفی» به «ویت» نسبت دارد. لذا می توان نخستین برداشت از جبر را «برداشت ویتی» نامید. برداشت دوم از جبر به نظریه معادلات جبری مربوط می شود. این برداشت به سده های ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ میلادی برمی گردد. برداشت سوم از جبر، جبر اصلی موضوعی یا جبر مجرد نامیده شده و به دوران اخیر اشاره دارد.

■ خوارزمی و رساله «جبر و مقابله»

□ آغاز بنیانگذاری جبر

واژه جبر برای نخستین بار به وسیله خوارزمی روی این شاخه از ریاضیات گذاشته شد. او جبر را به معنای یکی از روش های تبدیل معادله به کار می برد. جبر یعنی «جبران کردن» و به معنای بردن عدد منفی از یک سمت تساوی به سمت دیگر و در نتیجه، مثبت کردن آن است.

در این جا گوشه هایی از فصل اول کتاب تاریخ جبر وان درواردن را که به تاریخ جبر اسلامی اختصاص دارد، ذکر

می کنیم (برای مطالعه بیشتر به [۲] مراجعه کنید). مصطفی ابن عبدالله کاتب چلبی معروف به حاج خلیفه در کتاب «کشف الظنون فی اسماء الکتب و المتون» می نویسد: «خوارزمی اولین مؤلف اسلامی بود که نوشتن در باب حل مسئله ها به کمک جبر و مقابله را وجهه همت خود قرار داد.» اما معنای این دو اصطلاح چیست؟

معنای متداول جبر در رساله های ریاضی چنین است: افزودن جمله های برابر به دو طرف یک معادله برای حذف جملات منفی. معنای کمتر رایج آن چنین است: ضرب کردن دو طرف معادله ای در عددی یکسان برای حذف کسرها؛ معنای متداول «مقابله» چنین است: کاهش جملات مثبت با اسقاط مقادیر مساوی از هر دو طرف معادله.

ترکیب این دو کلمه، یعنی «جبر و المقابله»، به معنایی کلی به کار می رود: انجام اعمال جبری (به معنای امروزی)

عنوان کامل رساله جبر و مقابله، «مختصر من حساب الجبر و المقابله» است. این رساله مشتمل بر ۳ بخش است. در اولین بخش، خوارزمی راه حل ۶ نوع معادله را که کلیه معادلات خطی و درجه دوم را می توان بدانها تحویل کرد شرح می دهد. دومین فصل «جبر» به مساحی می پردازد. این فصل عمدتاً مشتمل بر قواعد محاسبه مساحت ها و حجم هاست. سومین و بزرگترین بخش «جبر» خوارزمی، «باب الوصایا» نام دارد. این بخش سراسر مرکب از مسائلی با راه حل های آنهاست. راه حل ها تنها حساب ساده یا معادله های خطی را دربردارند، لیکن درک قابل ملاحظه ای از قانون ارث اسلامی نیز مورد نیاز است.

حال به ذکر مثالی از رساله جبر و مقابله می پردازیم که چگونگی کاربرد مفهوم جبر را نشان می دهد. صورت مسئله

ریاضیات که برای سایر رشته های علمی نظیر فیزیک و مکانیک نیز اهمیت استثنایی و در خور توجه دارد. بدون این وسیله، یعنی زبان «دستورها»، پیشرفت درخشان ریاضیات عالی (که از سده ۱۷ آغاز شد)، پیدایش آنالیز ریاضی، بیان ریاضی قوانین مکانیک، فیزیک و غیره قابل تصور نیست.

■ برداشت دوم از جبر

□ نظریه معادله های جبری

در پایان سده ۱۸ و آغاز سده ۱۹، یکی از مسأله های جبر، در مرکز توجه قرار گرفت: حل معادله درجه n یک مجهولی:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

بزرگترین ریاضیدانان سده ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ و ابتدای سده بیست (تارناگلیا، کاردان، دکارت، نیوتون، اولر، دالامبر، بزو، لاگرانژ، گاوس، آبل، گالوا، لباچوفسکی، اشتورم و...) مجموعه عظیمی از قضایا و روش ها درباره این پرسش به وجود آوردند. اما این پرسش چه بود و جواب نهایی آن کدام، چیزی است که ادامه بحث ما را تشکیل می دهد.

پرسشی که تمام تلاش های ریاضیدانان (در زمینه جبر)، به پاسخ دادن به آن گذشت، چنین بود: «چگونه می توان معادله درجه n را به کمک رادیکال ها حل کرد؟ و آیا اصولاً این حل امکان پذیر است یا خیر؟». اما مفهوم حل رادیکالی معادله درجه n چیست؟

همان گونه که از ریاضیات مقدماتی به خاطر دارید، معادله درجه ۲، $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ را با شرط این که $\Delta = a_1^2 - 4a_2 \geq 0$ ، می توان حل کرد. یعنی در این حالت معادله درجه ۲ فوق دارای دو جواب حقیقی می باشد که عبارتند از:

$$x_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} \quad x_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

به همین ترتیب معادله درجه سوم را نیز می توان به صورت

طرح شده توسط خوارزمی چنین است: «من ده را به دو بخش تقسیم کرده ام. یکی از آن دو بخش را در دیگری ضرب کرده ام پس از آن، یکی از این دو بخش را در خود ضرب کرده ام و حاصل این عمل ضرب برابر با چهار برابر حاصل ضرب همین بخش در بخش دیگر است.»

خوارزمی حالا یکی از دو بخش را «شیء» (چیز) و دیگری را «ده منهای شیء» می نامد. با ضرب کردن این دو، وی، «ده شیء منهای مجذور» را بدست می آورد. مؤلف برای مجذور شیء مجهول، اصطلاح مال را به کار می برد، که چیزی به معنای «ثروت» یا «دارایی» است. او سرانجام معادله «مجذوری که با چهل شیء منهای چهار مجذور برابر است» را بدست می آورد. در نمادگذاری امروزی، می توانیم این معادله را به صورت $x^2 = 40x - 4x^2$ بنویسیم. مؤلف، سپس عمل جبر را با افزودن $4x^2$ به دو طرف معادله، به کار می گیرد و در نتیجه معادله $5x^2 = 40x$ یا $x^2 = 8x$ ، و از این معادله، $x=8$ را به دست می آورد.

■ برداشت اول از جبر

□ جبر ویتی

ریاضی دانان شرق، و از جمله ریاضی دانان ایرانی، همه عمل ها را به صورت توصیفی، و نه با بیان علامتی، می آوردند (که نمونه ای از این توصیف را در مثال ارائه شده در بخش قبل از کتاب جبر و مقابله خوارزمی دیدید). پیشرفت بعدی جبر تنها وقتی ممکن شد که توانستند برای عمل ها، نمادهای ساده کلی به کار برند. این پیشرفت به کندی و در راهی پرپیچ و خم انجام گرفت.

«ویت» اولین کسی بود که نه تنها حروف را برای کمیت های مجهول، بلکه برای کمیت های معلوم نیز به کار برد. او از حروف بی صدای B و C و D و ... برای نشان دادن کمیت های معلوم، و از حروف با صدای A و E و ... برای نشان دادن کمیت های مجهول استفاده کرد. به این ترتیب، برای نخستین بار، دستورهای حرفی پدید آمد که برای جبر جدید از ویژگی های اصلی است. از زمان «رنه دکارت» (سده ۱۷ میلادی) به بعد، اغلب، حرف های پایانی الفبای لاتین (x و y و z و ...) را برای نشان دادن مجهول ها به کار می بردند. پیدایش نمادها، و انجام عمل روی حروف، نه تنها برای

زیر حل کرد:

$$u(A-u)=B \rightarrow u^2-Au+B=0$$

لذا ما می توانیم uv را هر مقدار دلخواه B فرض کنیم، در حالیکه $y=u+v$ باشد. با این تفصیل داریم:

$$\begin{cases} y^2 + py + q = 0 \\ y = u + v \Rightarrow u^2 + v^2 + q = 0 \text{ یا } u^2 + v^2 = -q \\ uv = -\frac{p}{2} \end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = -q \\ u^2 v^2 = -\frac{p^2}{4} \end{cases} \rightarrow z^2 + qz - \frac{p^2}{4} = 0 \quad (1)$$

ریشه های معادله (۱) عبارتند از: u^2 و v^2

$$\begin{cases} u^2 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{2}} \\ v^2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{2}} \end{cases}$$

$$y = u + v = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{2}}} + \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{2}}}$$

به همین ترتیب، معادله درجه چهارم را می توان بر حسب رادیکال هایی از ضرایب معادله حل کرد (به ضمیمه الف مراجعه کنید). اما سؤال اساسی در این جا و در این دوره این است که «آیا معادله درجه n را هم می توان به صورت رادیکال هایی از ضرایب معادله حل کرد یا خیر؟». همان گونه که بعداً خواهیم دید، نتیجه تمام تلاش هایی که در جریان سه سده برای حل رادیکالی معادله درجه n انجام گرفت، دشوار و عمیق و نیز توأم با مفاهیم تازه، از آب درآمد.

آنچه که به حل عملی معادله ها بستگی داشت چنین بود: روشن شد که حل رادیکالی همه معادله ها ممکن نیست؛ در مواردی هم که حل ممکن شد، به جز حالت معادله درجه دوم، خیلی کم به درد عمل می خورد. بنابراین، در پایان این دوران، ریاضیدانانی که روی نظریه معادله های جبری کار می کردند، سه مسیر متفاوت با مسأله اصلی در پیش گرفتند:

$$x^2 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \quad *$$

ابتدا نشان می دهیم که با تغییر متغیر می توان معادله ای حاصل کرد که ضریب x^2 در آن صفر باشد:

$$\begin{aligned} y = x + \frac{1}{3}a_1 &\rightarrow x = y - \frac{1}{3}a_1 \\ x^2 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 & \\ = (y - \frac{1}{3}a_1)^2 + a_1 (y - \frac{1}{3}a_1)^2 + a_2 (y - \frac{1}{3}a_1) + a_3 & \\ = y^2 + (a_2 - \frac{1}{3}a_1^2)y + (a_3 + \frac{1}{9}a_1^2 - \frac{1}{3}a_1 a_2) &= 0 \end{aligned}$$

با فرض:

$$\begin{aligned} a_2 - \frac{1}{3}a_1^2 &= P & a_3 + \frac{1}{9}a_1^2 - \frac{1}{3}a_1 a_2 &= q \\ y^2 + py + q &= 0 & ** \end{aligned}$$

پس هر معادله درجه ۳ به فرم $*$ را می توان به معادله ای درجه ۳ به فرم $**$ تبدیل کرد. در مرحله دوم نشان می دهیم که هر معادله درجه ۳ به فرم $**$ به کمک رادیکال ها قابل حل است. این روش حل معادله درجه ۳ در ریاضیات به روش کاردان موسوم است (هر چند که در اصل، روش کار متعلق به تارتاگلیا است). بیان جبری و امروزی روش کاردان به شرح زیر است:

$$\begin{cases} y^2 + py + q = 0 \\ y = u + v \end{cases} \Rightarrow (u+v)^2 + p(u+v) + q = 0$$

یا

$$u^2 + v^2 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

مجموع $u+v$ ، هر چه باشد (در اینجا: y)، همیشه می توان ترتیب کار را طوری داد که حاصلضرب آنها (uv) مساوی عدد موردنظر ما باشد. اگر $u+v=A$ باشد و ما بخواهیم که $uv=B$ باشد، از آنجا که $v=A-u$ ، داریم:

این معادله (با احتساب ریشه های تکراری)، برابر است با تعداد تغییر علامت ها در ردیف ضرایب معادله؛ این تعداد برای حالتی که معادله دارای ریشه های مختلط باشد، به اندازه عددی زوج از تعداد تغییر علامت ها کمتر است. (منظور از «تغییر علامت ها و تعداد آنها در ردیف ضرایب» چیست؟ با یک مثال ساده، آن را شرح می دهیم:

معادله $x^7 + 3x^5 - 4x^4 - 8x^2 + 7x + 2 = 0$ را در نظر بگیرید. ردیف ضرایب عبارتند از: ۲ و ۷ و ۸ و ۴ و ۳ و ۱ و ۰ که وجود ۲ تغییر علامت در این ردیف، به وضوح قابل مشاهده است)

اثبات: بدون اینکه لطمه ای به کلی بودن موضوع وارد شود، می توان ضریب بزرگترین درجه (یعنی a_n) را در چند جمله ای $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ عددی مثبت در نظر گرفت. ابتدا ثابت می کنیم که اگر $f(x)$ تنها ریشه های حقیقی داشته باشد و در بین آنها (با احتساب ریشه های تکراری، به تعداد تکرار آنها)، P ریشه مثبت وجود داشته باشد آنگاه علامت آخرین جمله $f(x)$ (آخرین جمله غیر صفر) برابر است با $(-1)^P$.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k} = a_n x^{n-k} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p)(x - x_{p+1}) \dots (x - x_k)$$

که در آن x_1 و x_2 و $\dots$ و x_p ، ریشه های مثبت و x_{p+1} و $\dots$ و x_k ، ریشه های منفی $f(x)$ هستند (هر کدام از ریشه ها را به تعداد تکرار آن ها در نظر گرفته ایم). در این صورت داریم:

$$a_k = a_n \cdot (-1)^P \cdot \underbrace{x_1 x_2 \dots x_p}_{\text{مثبت}} \cdot \underbrace{(-x_{p+1}) \dots (-x_k)}_{\text{مثبت}}$$

پس علامت a_k ، همان علامت $(-1)^P$ است. در مرحله دوم اثبات، با استفاده از استقراء، قانون علامت دکارت را اثبات می کنیم: وقتی $n=1$ باشد:

$$f(x) = a_1 x + a_0 = 0 \rightarrow x = -\frac{a_0}{a_1}$$

۱- مسأله وجود ریشه،
۲- کسب آگاهی هایی درباره ریشه ها، بدون حل معادله و تنها به کمک ضرایب معادله،
۳- محاسبه تقریبی ریشه ها؛
در ادامه، به اختصار به معرفی عمده ترین کارهای هر گروه می پردازیم تا معنا و مفهوم کار هر گروه روشن تر شود.

□ مسأله وجود ریشه ها: در این گروه عمده ترین قضیه ای که مطرح شده، قضیه ای است موسوم به قضیه اصلی جبر (و بالطبع، عمده ترین کار انجام شده، اثبات این قضیه است). صورت این قضیه چنین است: «هر معادله جبری درجه n با ضرایب حقیقی یا مختلط، دست کم یک ریشه حقیقی یا مختلط دارد.» این قضیه صدها سال بدون اثبات ماند تا این که اولین اثبات از آن، توسط دالامبر در سال ۱۷۴۶ ارائه گردید. اما اثبات دالامبر در یکی از بندهای خود غیر کافی بود. دالامبر این لم کلی آنالیز را واضح گرفته بود که: تابع پیوسته که در مجموعه بسته ای از نقاط داده شده باشد در جایی به مینیمم مقدار خود می رسد. این لم درست است ولی نیاز به اثبات دارد. اثبات این لم، سال ها بعد از دالامبر صورت گرفت.

اولین اثبات دقیق این قضیه در سال ۱۷۹۹ توسط گاوس، که در آن وقت ۲۱ ساله بود، در رساله دکترایش صورت گرفت. بعدها گاوس سه اثبات دیگر از این قضیه به دست داد. [مرجع ۲ - صص ۱۳۹ - ۱۲۹] بعد از گاوس، مؤلفین دیگری از جمله آرژان، کوشی، اولر، ویراشتراس و کرونگر نیز اثبات های قضیه اصلی جبر را به دست دادند.

قضیه اصلی جبر به صورت معادل زیر بیان می گردد:
«هر معادله درجه n به صورت $z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n = 0$ دارای n ریشه است؛ به عبارت دیگر، چند جمله ای $f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$ همواره می تواند به n عامل خطی به صورت $z - \alpha_i$ تجزیه گردد.»

□ کسب آگاهی هایی درباره ریشه ها بدون حل معادله و تنها به کمک ضرایب معادله

در این گروه فضایی ساده و زیبای زیادی وجود دارند که به ذکر چند مورد از آنها می پردازیم. قانون علامت دکارت: اگر ضرایب یک معادله و تمام ریشه های آن حقیقی باشند، در این صورت تعداد ریشه های مثبت

فرض، قانون دکارت درباره $f'(x)$ برقرار است (فرض استقرار)؛ لذا برای $f(x)$ هم در هر دو حالت، تعداد ریشه های مثبت برابر است با تعداد تغییر علامت ها در ردیف ضرایب معادله.

یکی دیگر از قضایای جالب و در خور توجه در این گروه «قضیه اشتورم» است که تنها به ذکر صورت قضیه می پردازیم. قضیه اشتورم: $f(z)$ را یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی و $f_1(z)$ را مشتق آن فرض می کنیم. $f(z)$ را بر $f_1(z)$ تقسیم می کنیم. باقیمانده این تقسیم را بعد از تغییر علامت دادن $f_1(z)$ می نامیم. سپس $f_1(z)$ را بر $f_2(z)$ تقسیم کرده و باقیمانده را پس از تغییر دادن علامت آن $f_2(z)$ می نامیم و می توان ثابت کرد که آخرین باقیمانده مخالف صفر که در این ردیف تقسیمها بدست می آید، عدد ثابتی مثل C خواهد بود. قضیه اشتورم این است که اگر a و b ($a < b$)، دو عدد حقیقی و غیر از ریشه های چند جمله ای $f(z)$ باشند با گذاشتن $z=a$ و $z=b$ در چند جمله ای های

$$f(z), f_1(z), f_2(z), \dots, f_{s-1}(z), C$$

دو ردیف از عددهای حقیقی بدست می آید:

$$f(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_{s-1}(a), C \quad (I)$$

$$f(b), f_1(b), f_2(b), \dots, f_{s-1}(b), C \quad (II)$$

به نحوی که تعداد تغییر علامت ها در ردیف (I) بیشتر یا مساوی با تعداد تغییر علامت ها در ردیف (II) است و تفاضل بین این تعداد تغییر علامت ها، درست برابر است با تعداد ریشه های حقیقی $f(z)$ که بین a و b قرار دارند.

□ محاسبه تقریبی ریشه ها: در این زمینه، کارهای گوناگون و متنوعی انجام گرفته و هر ساله نیز بر این تعداد افزوده می گردد. برای اینکه شاهد تنوع و حجم کار در این زمینه باشید، کافی است سری به کتاب هایی که با نام های عمومی «آنالیز عددی»، «الگوریتم عددی»، «محاسبات عددی» و ... در بازار موجودند بزنید. [مراجع ۱ و ۳ را ببینید]. اما مختصر اینکه: در این زمینه الگوریتم هایی وجود دارند که از الگوهای تکراری برای تعیین ریشه (های) معادله مفروض استفاده می کنند. بیشتر الگوریتم های مهم برای بدست آوردن ریشه های یک معادله،

در نتیجه x وقتی مثبت است که a_n و a_{n-1} از نظر علامت، مختلف علامه باشند.

پس وقتی که $n=1$ باشد، تعداد ریشه های مثبت برابر است با تعداد تغییر علامت ها در ردیف ضرایب معادله و لذا قانون علامات دکارت، برای حالت $n=1$ برقرار است.

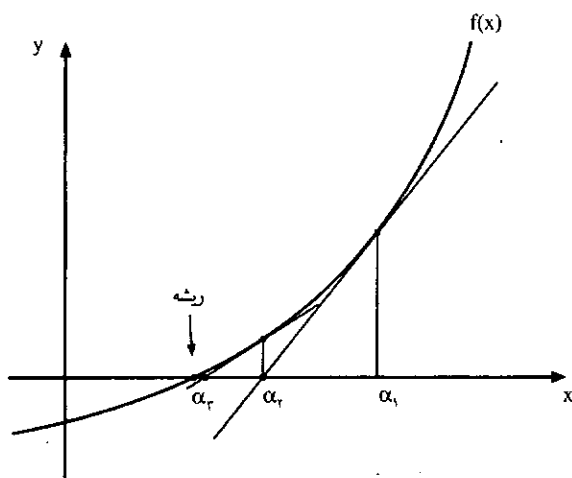
حال فرض می کنیم این قضیه برای هر چند جمله ای از درجه $n-1$ با ریشه های حقیقی درست باشد. با این فرض، ثابت می کنیم این قضیه برای چند جمله ای درجه n ، $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ هم درست است.

(I) $a_n = 0$: چند جمله ای $f_1(x) = a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ را در نظر می گیریم. تعداد ریشه های مثبت $f_1(x)$ و $f(x)$ یکی است. هم چنین تعداد تغییر علامت ها هم در ردیف ضرایب $f(x)$ و $f_1(x)$ یکی است. چون بنابر فرض استقرار، قانون علامات دکارت در مورد $f_1(x)$ صادق است، پس در مورد $f(x)$ هم صادق است.

(II) $a_n \neq 0$: در این حالت، مشتق $f(x)$ را محاسبه می کنیم. داریم: $f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_{n-1}$ ؛ واضح است که اگر علامت های a_{n-1} و a_n یکی باشند، تعداد تغییر علامت ها در ردیف ضرایب f' و f' یکی است و اگر علامت های a_{n-1} و a_n متفاوت باشند، تعداد تغییر علامت ها در ضرایب $f(x)$ ، یک واحد بیشتر از تعداد تغییر علامت ها در ضرایب $f'(x)$ است (اگر $a_{n-1} = 0$ باشد، باید نزدیکترین ضریب مخالف صفر به a_n را در نظر گرفت) برای ادامه کار نیاز به اثبات یک لم داریم. (اثبات آنرا در ضمیمه ب خواهید یافت).

لم: اگر همه ریشه های چند جمله ای $f(x)$ حقیقی و در بین آنها P ریشه مثبت وجود داشته باشد (با احتساب هر ریشه به تعداد تکرار آن)، در این صورت $f'(x)$ دارای P یا $P-1$ ریشه مثبت خواهد بود.

بنابر لم فوق، تعداد ریشه های مثبت یک چند جمله ای (به شرط حقیقی بودن همه ریشه ها)، یا با تعداد ریشه های مثبت مشتق آن برابر و یا یک واحد از آن بیشتر است. با توجه به این مطلب نتیجه می گیریم که در حالت اول، $f(x)$ به همان اندازه $f'(x)$ ریشه مثبت دارد و در حالت دوم، یک واحد بیشتر. بنابر



دارای طبیعتی تکراری هستند و ابتدا با یک تقریب اولیه (تکرار مرتبه صفر) شروع می‌شوند؛ و سپس دنباله‌ای از تقریب‌ها را فراهم می‌سازند که به سمت یک صفر میل می‌کند. این تقریب اولیه باید به اندازه کافی به یکی از صفرها نزدیک باشد، در غیر این صورت تکرارها ممکن است واگرا شوند. یکی از روش‌های ساده و مشهور در محاسبه تقریبی ریشه‌های چند جمله‌ای $f(x)$ (ریشه‌های حقیقی)، روش «نیوتون» نام دارد که به توصیف مختصر آن می‌پردازیم.

❑ **روش نیوتن:** فرض کنید α_1 ، ریشه تقریبی معادله $f(x)=0$ باشد (تقریب اولیه). از نقطه $(\alpha_1, f(\alpha_1))$ واقع بر نمودار تابع $f(x)$ خط مماس بر تابع را رسم می‌کنیم:

$$y - f(\alpha_1) = f'(\alpha_1)(x - \alpha_1)$$

یا:

$$y = f'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + f(\alpha_1)$$

این خط را با محور x قطع می‌دهیم تا تقریب بعدی α_2 حاصل گردد. داریم:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = -\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$$

به همین ترتیب اگر از نقطه $(\alpha_2, f(\alpha_2))$ واقع بر نمودار $f(x)$ ، خطی بر نمودار تابع مماس کرده و آن را با محور x قطع دهیم، تقریب بعدی ریشه معادله، یعنی α_3 به این صورت حاصل می‌گردد:

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{f(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)}$$

و به صورت کلی، α_n ، از روی α_{n-1} به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{f(\alpha_{n-1})}{f'(\alpha_{n-1})}$$

حد دنباله $\{\alpha_n\}$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، ریشه معادله $f(x)=0$

خواهد بود (البته به شرط برقراری شرایطی خاص در مورد α_1)

■ برداشت سوم

❑ **جبر مجرد، بازگشت به جبر ویتی با درجه بالاتری از انتزاع**

انتزاع یک توانایی بشری است که به وی اجازه رویارویی با پیچیدگی‌های موجود در یک مسئله را می‌دهد. در حقیقت هر انتزاع یک برش با مرزهای نامشخص از دنیای واقعی است. یکی از ویژگی‌های بارز ریاضیات، انتزاعی بودن آن است، اما با یک ویژگی برتر. به عبارت دیگر، الزامی بودن نتایج ریاضی، علیرغم انتزاعی بودن آن، سرچشمه پویایی و ماندگاری ریاضیات در کوره راه زمان است. انتزاع در ریاضیات، در دو جنبه مطرح است: مفاهیم و روش‌ها. انتزاعی بودن مفاهیم در ریاضیات چیزی است که نیاز به توضیح و تشریح ندارد. مفهوم عدد در حوزه علم حساب به تمام معنای مفهوم انتزاعی است. مفاهیم نقطه، خط، صفحه، شکل و ... در هندسه نیز اینگونه‌اند. به طور کلی مفاهیم ریاضی از راه یک رشته انتزاع پیاپی و سپس تعمیم آنها به وجود می‌آیند.

اما در حوزه روش‌ها، روش‌های ریاضی نیز انتزاعی‌اند، چراکه اثبات یک قضیه برای ریاضیدان این معنا را می‌دهد که آن را از راه بحث درباره ویژگی‌های ابتدائی، که برای مفاهیم مورد استفاده این قضیه ذاتی هستند بیرون بکشد. گفتیم که سرچشمه زنده بودن ریاضیات در این جاست که مفاهیم و نتایج آن، با همه انتزاعی بودنشان، ناشی از واقعیت بوده و کاربرد فراوانی در تمام

زمینه های زندگی بشر پیدا می کنند؛ اما انتزاع در ریاضیات دارای یک جنبه بسیار جالب دیگر نیز هست و آن این که، انتزاعی ترین مفاهیم ریاضی که در داخل خود ریاضی پدید آمده است و محرکی از طرف دانشهای طبیعی و یا صنعت نداشته است نیز، کاربردهای عملی کاملاً ثمربخشی پیدا کرده است: مثلاً کاربرد اعداد موهومی در حل مسأله مربوط به تراوش آب زیر سدها و یا کاربرد هندسه ناقلیدسی در نسبیت و یا کاربرد مفهوم فضای بی نهایت بعدی در مکانیک کوانتومی. خلاصه کلام: ریاضیات در عین انتزاعی بودن دارای نتیجه گیری های دقیق و متقاعدکننده ای است و این سرچشمه زنده بودن و پویایی ریاضیات است.

باز می گردیم به بحث اصلی خود: نقطه نظر تازه و سوّم درباره این که جبر چیست، به پیدایی برخی مفاهیم در مکانیک، فیزیک و نیز خود ریاضیات باز می گردد. در سده های گذشته، در علوم اخیر الذکر، موضوعاتی پیدا شد که لازم بود اعمال جمع و تفریق و گاهی حتی ضرب و تقسیم درباره آنها مورد بررسی قرار گیرد، در حالی که این عمل ها از قوانینی پیروی می کردند که با قوانین مربوط به این اعمال روی اعداد گویا متفاوت بود (ماتریس ها، تانسورها، بردارها، اسپینورها، اعداد فوق مختلط و ...). در این جا نیز همه مقادیر مذکور را با حرف نشان می دهند، ولی برای حالات مختلف این مقادیر، قوانین عمل با هم فرق دارند. هر وقت که برای مجموعه ای از چیزها (که به کمک حرف نشان داده شده اند) اعمالی تعریف و قوانینی که درباره این اعمال صادق است، معین شده باشد، گویند که یک دستگاه جبری داده شده است. به این ترتیب جواب این پرسش که جبر چیست، در این دوران مشخص می گردد:

جبر علمی است که هدف آن بررسی دستگاه های مختلف جبری است.

چنین جبری را جبر اصل موضوعی یا جبر مجرد گویند. از آن جهت جبر اصل موضوعی نامیده می شود، که برای ساختن آن همیشه از اصولی آغاز می کنند که بنیان های دستگاه را تشکیل می دهد و جبر مجرد نامیده می شود چرا که تفاوتی ندارد که در دستگاه مورد نظر، چه چیزهایی را به وسیله حرف نشان داده اند، بلکه تنها این مهم است که چه اصولی (قانون هایی) درباره عمل های این دستگاه صدق می کند.

به این ترتیب، دوباره به همان نقطه نظر اول (جبر ویتی) بازگشتیم، منتهی در سطحی بالاتر از انتزاع:

جبر عبارتست از نظریه محاسبات حرفی

این که منظور از حرفها چه چیزهایی است برای ما تفاوتی نمی کند. تنها موضوع مهم، وجود قانون هایی است که می توان در اعمال حرفی، از آنها استفاده کرد.

در ادامه، به بیان برخی از معضلات و مسائل پیدا شده در ریاضیات می پردازیم که منجر به برداشت سوّم (جبر مجرد) از مفهوم جبر شده است. اگر هنوز به یاد داشته باشید، گفتیم که در سده های ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ یکی از مسائل ریاضی در شاخه جبر به شدت در کانون توجه ریاضیدانان قرار گرفت: حل رادیکالی معادله درجه n یک مجهولی. تلاشهای زیادی در این راستا و صرفاً به منظور حل این مسأله صورت گرفت، اما غالباً بی نتیجه بودند. لاگرانژی یکی از ریاضیدانانی که روی این مسأله کار می کرد در یادداشت های خود می نویسد: «مسأله حل معادله ها (به مفهوم حصول دستوری که شامل رادیکال ها باشد)، وقتی که درجه ای بالاتر از ۴ داشته باشد، یکی از مسائل غیر قابل حل است، اگر چه هیچ چیز این امتناع حل را ثابت نمی کند.» وی در ادامه می گوید: «از بررسی های ما نتیجه می شود که کاملاً مشکوک است که روش های مورد استفاده ما بتواند راه حلی برای معادله درجه ۵ پیدا کند.»

یکی از کارهای لاگرانژ در این دوران، تنظیم روندی کلی برای حل معادله های درجه ۲ و ۳ و ۴ بود. روندی واحد، که ایده های آن بعدها در کارهای آبل و گالوانیز به کار رفت. لاگرانژ علی رغم عدم توفیق در حل مسأله «حل رادیکالی معادله درجه n یک پیش بینی شگفت انگیز کرد که گذشت زمان درستی آن را نشان داد. وی پیش بینی کرد که بنیان تمام پرسش، بر نظریه تبدیل ها قرار دارد؛ چیزی که سالها بعد، گالوانیز درستی آن را نشان داد.

گفتیم که لاگرانژ به روشی واحد در حل رادیکالی معادله های درجه ۲ و ۳ و ۴ ره یافت و گمان می کرد که با تعمیم این روش بتواند کاری از پیش برده و معادله درجه ۵ یا درجه های بالاتر را در حالت کلی حل کند، اما موفق نشد [به ضمیمه الف نیز رجوع کنید]. روش کار لاگرانژ به این صورت است که وی در بررسی های خود به عبارت: $L = \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^n c + \varepsilon^{n+1} b + a$ از ریشه های a و b و c و ... و L معادله درجه n می رسد که در آن ε عبارتست از ریشه n ام واحد. سپس ارتباط این عبارت ها را که آنرا حلال لاگرانژ می نامند، با حل رادیکالی معادله نشان داد.

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3m^2 - 4n \\ \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = 3(m^2 - 16m^2n - 16n^2 + 16mp - 64q) \\ \alpha^2\beta^2\gamma^2 = (m^2 - 4m + 8p)^2 \end{cases}$$

با فرض $y^2 = t$ به معادله درجه سوم t بر حسب t می رسیم که اگر t' و t'' و t''' ریشه های آن باشند آنگاه:

$$\begin{cases} a+b-c-d = \sqrt{t'} \\ a+c-b-d = \sqrt{t''} \\ a+b-b-c = \sqrt{t'''} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}(-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}) \\ b = \frac{1}{4}(-m + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}) \\ c = \frac{1}{4}(-m - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}) \\ d = \frac{1}{4}(-m - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}) \end{cases}$$

نیز $a + b + c + d = -m$

به این ترتیب حل معادله درجه چهارم، منجر به حل معادله درجه سوم می شود.

■ کشف آبل: پایان تمام تلاش ها

در نهایت حیرت، سرانجام آبل جوان در بهار ۱۸۲۴ در جزوه ای به نام «یادداشتی درباره معادله های جبری» ثابت کرد که اگر ضرایب a_1 و a_2 و ... و a_n معادله را حرف های ساده شده ای به حساب آوریم، هیچ عبارت رادیکالی از این ضرایب وجود ندارد که ریشه های معادله متناظر بالاتر از درجه چهارم را تعیین کند. این پایان تمام تلاش های خستگی ناپذیر سه سده کوشش ریاضیدانان در حل این مسأله بود. این جزوه که به زبان فرانسه منتشر شد، برهانی واضح از این امتناع را ارائه می کند.

■ نظریه گالوا: گامی نو در راهی دیگر

بعد از آبل وضع به این ترتیب شد که اگرچه، بنابر آنچه آبل ثابت کرد، معادلات کلی بالاتر از درجه چهارم، به طور کلی بر

می دهد. ما در این جا روش حلال های لاگرانژ را در حل رادیکالی معادله درجه ۴ نشان می دهیم:

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0 \quad (2)$$

ریشه های معادله (۲) را a و b و c و d می گیریم. حلال $a+b-c-d$ [یعنی مقدار حلال به ازای $\varepsilon = -1$] بدست می آید. با جابه جا کردن a و b و c و d در آن به $4! = 24$ حالت ممکن بر می خوریم که روی هر ۶ عبارت مختلف بدست می آید:

$$\begin{cases} a+b-c-d : \alpha \\ a+c-b-d : \beta \\ a+d-b-c : \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} -a-b+c+d : -\alpha \\ -a-c+b+d : -\beta \\ -a-d+b+c : -\gamma \end{cases}$$

بنابراین، معادله درجه ۶ ای که این عبارات ریشه های آن باشد، دارای ضرابی است که به ازای هر کدام از ۲۴ تبدیل a و b و c و d تغییر نمی کند، زیرا هر کدام از ۲۴ تبدیل، تنها این عبارتها را به یکدیگر تبدیل می کند و ضرایب معادله درجه ۶ مورد نظر نیز به چگونگی انتخاب ردیف ریشه ها بستگی ندارد.

$$\begin{aligned} & (y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y+\alpha)(y+\beta)(y+\gamma) \\ &= (y^2 - \alpha^2)(y^2 - \beta^2)(y^2 - \gamma^2) \\ &= y^6 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)y^4 + (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)y^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

اما با توجه به اینکه:

$$\begin{cases} a+b+c+d = -m \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd = n \\ abc+abd+acd+bcd = -P \\ abcd = q \end{cases}$$

لذا:

a و b را معلوم و x را مجهول در نظر بگیریم، می‌توانیم اتحاد را به این صورت توضیح دهیم که معادله ناقص درجه سوم $H(x)=0$ مقدار $x=-b-a$ را به عنوان یک ریشه می‌پذیرد. معادله عمومی درجه سوم ناقص به صورت زیر است:

$$x^3 + ux + v = 0 \quad (2)$$

همیشه می‌توان (۱) و (۲) را با تعیین a و b بر حسب u و v، به عنوان ریشه‌های معادله درجه دوم همانند کرد.

$$a^3 + b^3 = v \quad -3ab = u \rightarrow a^3 b^3 = \frac{-u^3}{27} \quad (3)$$

رابطه (۳) نمایانگر این است که a^3 و b^3 ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$y^3 - vy - \frac{u^3}{27} = 0 \quad (4)$$

اگر ریشه‌های این معادله درجه دوم حلال را A و B بنامیم، در این صورت $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ یا $x = -\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ خواهد بود که x ریشه معادله درجه سوم (۲) خواهد بود. (فرمول کاردان)

حل لاگرانژ در مورد معادله درجه چهارم ناقص

$$x^4 + ux^2 + vx + w = 0 \quad (5)$$

نیز طریق مشابهی دارد؛ اتحاد زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & (a+b+c+x)(a-b-c+x)(-a+b-c+x) \\ & (-a-b+c+x) \equiv \\ & (a^4 + b^4 + c^4 + x^4) - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ & + x^2a^2 + x^2b^2 + x^2c^2 + 8abcx = H(x) \end{aligned} \quad (6)$$

این اتحاد نشان می‌دهد که ریشه‌های معادله درجه ۴ ناقص

حسب رادیکال‌ها حل نمی‌شوند، لیکن هرچقدر که بخواهیم، معادلات خاص مختلف با درجه دلخواه وجود دارد که بر حسب رادیکال‌ها قابل حل هستند (نظیر $x^n=A$). سؤال جدیدی که مطرح شد چنین بود که شرط لازم و کافی را برای این که معادله‌ای بر حسب رادیکال‌ها قابل حل باشد پیدا کنید. پاسخ این سؤال توسط «اواریست گالوا» داده شد.

گالوا در اثبات خود عبارت درجه اولی نسبت به ریشه‌های a و b و c و... در نظر می‌گیرد (شبه لاگرانژ)

$$V = Aa + Bb + Cc + Dd + \dots$$

ولی ضرایب A و B و C و... را ریشه‌های واجد فرض نمی‌کند، بلکه آنها را اعداد درست و گویا برمی‌گزیند. وی سپس مفاهیم تازه‌ای را در جبر وارد می‌کند؛ مفهومی چون تحویل‌ناپذیری چند جمله‌ای‌ها در یک میدان عددی داده شده و... نهایتاً گالوا با پذیرش مفاهیم تازه‌تر و با استدلال‌های ساده ولی دقیق نتیجه می‌گیرد که شرط لازم و کافی برای این که معادله درجه n یک مجهول‌لی $(a_i \in \mathbb{R})x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ بر حسب رادیکال‌ها حل شود، این است که گروه G از تبدیل‌های شماره‌های ۱ و ۲ و... و n در شرط معینی صدق کند. بدین ترتیب، پیش‌بینی لاگرانژ مبنی بر این که بنیان تمام پرسش، بر نظریه تبدیل‌ها قرار دارد، درست از آب درآمد.

■ ضمیمه الف

□ بحثی مختصر و زیبا در باب معادلات درجه ۳ و ۴

حدس لاگرانژ درباره این که ریشه‌های معادلات با درجه بالاتر از ۴ نمی‌توانند به وسیله رادیکال‌ها بیان شوند، به وسیله آبل و گالوا تأیید شد. بررسی روش‌هایی که اوایل و لاگرانژ در مورد این گونه معادلات به کار بردند، اطلاع زیادتری درباره ماهیت مسأله به دست خواهد داد.

اگر در اتحاد

$$\begin{aligned} H(x) &= x^3 + a^3 + b^3 - 3abx \\ &\equiv (x+a+b)(x^2 + a^2 + b^2 - ax - bx - ab) \quad (1) \end{aligned}$$

$H(x)=0$ عبارت اند از:

$$x = -a-b-c, -a+b+c, a-b+c, a+b-c$$

آیا می توان a و b و c را به طریقی تعیین نمود که دو

معادله (۵) و (۶) همانند گردند؟ داریم:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = \frac{-u}{\gamma} \\ abc = \frac{v}{\lambda} \\ a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \frac{u^2 - 4w}{16} \end{cases}$$

لذا $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = w$ (زیرا)

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{\frac{u^2}{\gamma}} =$$

$$\begin{aligned} & w + 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \\ \Rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 &= \frac{u^2 - 4w}{16} \end{aligned}$$

از روابط قبل نتیجه می شود که a^2 ، b^2 و c^2 ریشه های معادله (۷) می باشند:

$$y^2 + \frac{u}{\gamma}y + \frac{u^2 - 4w}{16}y - \frac{v}{\lambda} = 0 \quad (7)$$

اگر ریشه های این معادله درجه سوم حلال را با A و B و C نمایش دهیم، در این صورت:

$$x = -\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}, -\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}, \sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}, \sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}$$

ریشه های معادله درجه چهارم (۵) می باشند. در نظر داشته باشید که عناصر زیر رادیکال (A و B و C) معمولاً متضمن اعداد گنگ درجه سوم اند.

این طرز کار جالب این سؤال را مطرح می سازد که، چرا نتوان روشی را که با این کامیابی در مورد معادلات درجه سوم و چهارم به کار رفته است برای معادلات درجه پنجم و بالاتر مورد استفاده قرار داد؟ ممکن است یک اتحاد متقارن از درجه n با n پارامتر را مشابه با آنچه اوایلر و لاگرانژ به کار برده اند طرح نمود؛ با در نظر گرفتن یکی از پارامترها به عنوان مجهول می توان اتحاد را به مثابه یک معادله توضیح داد؛ با یکی شمردن این معادله با معادله کلی از درجه n می توان روابطی بین پارامترها و ضرایب به وجود آورد و بالاخره، به معادله ای شبیه به معادله های حلال اوایلر و لاگرانژ رسید.

در واقع کوشش هایی در این جهت نیز به عمل آمده است که قابل توجه ترین آنها، کارهای مالفتانی است؛ معادله حلال مالفتانی برای معادله عمومی درجه پنجم، از درجه ششم است و بدان وسیله او حدس زد که درجه m مربوط به معادله حلال یک معادله درجه n ام از رابطه زیر بدست می آید:

$$m = \frac{1}{\gamma}(n-1)(n-2)$$

و در نتیجه، برای هر مقدار n بزرگتر از ۴، درجه معادله حلال بزرگتر از درجه معادله اصلی است.

این مطلب، برداشتی است از صفحات ۴۰۰ تا ۴۱۰ مرجع [۴]. برای مطالعه بیشتر می توانید به [۴] مراجعه کنید.

ضمیمه ب

قضیه رل و اثبات دو نتیجه

قضیه رل: اگر اعداد حقیقی a و b ، ریشه های یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی باشند، در این صورت عددی مثل c ، بین a و b وجود دارد که c ریشه مشتق چند جمله ایست.

برهان: از اثبات این قضیه صرف نظر می کنیم. برای دیدن اثبات این قضیه به مراجع [۵ و ۶ و ۹] رجوع کنید. از قضیه رل، نتایج زیر (لااقل تا جایی که به بحث ما مربوط می شود) قابل حصول است:

طرفی بین هر دو ریشه $f(x)$ نیز یک ریشه $f'(x)$ قرار دارد. در مورد این ریشه‌های بینابین بحث وجود دارد؛ همه آنها مثبت اند اما، یک ریشه مثبت دیگر نیز احتمالاً وجود دارد و آن ریشه مثبت احتمالی بین x_1 و x_{k-1} (بزرگترین ریشه منفی $f(x)$) است؛ پس:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^k (m_i - 1) + (k - 1) + 1}_{\text{قطعا}} = P-1 \text{ یا } P$$

مراجع

- [1]: الگوریتم‌های عددی، محاسبات در علوم و مهندسی - ای. وی. کریش نامورتی، اس. کی. سن - ترجمه دکتر فائزه توتونیان و دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا - انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.
- [2]: تاریخ جبر، از خوارزمی تا امی نوتر - ب. ل. وان درواردن - ترجمه: دکتر محمدقاسم وحیدی اصل و دکتر علیرضا جمالی - انتشارات مکتوران
- [3]: روش‌های محاسبات عددی - نوشته دکتر بهروز قلی‌زاده - چاپ از: مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف تهران - ۱۳۷۷
- [4]: عدد زبان علم - تویبایس دانتزیگ - ترجمه مهندس عباس گرمان - انتشارات: شرکت سهامی کتابهای جیبی (با همکاری مؤسسه انتشارات فرانکلین)
- [5]: حساب دیفرانسیل و انتگرال - تام. م. آپوستل - ترجمه: علیرضا ذکائی، مهدی رضائی دلفی، علی اکبر عالم‌زاده، فرخ فیروزان - مرکز نشر دانشگاهی - چاپ دوم، ۱۳۶۳ - جلد اول
- [6]: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی - تألیف: جرج. بی. توماس، راس. ال. فینی ترجمه: علی اکبر عالم‌زاده، داریوش بهمدی - انتشارات پژوهش - چاپ پنجم، ۱۳۷۳ - جلد اول
- [7]: سرگذشت ریاضیات - نوشته پرویز شهریاری - انتشارات مهاجر - ۱۳۷۸
- [8]: آشنایی با تاریخ ریاضیات - نوشته: هاورد. و. هیوز - ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل - مرکز نشر دانشگاهی تهران - چاپ دوم ۱۳۷۲ (با تجدیدنظر) - جلد دوم
- [9]: متمم جبر و آنالیز - تألیف محمد عابدی - انتشارات مدرسه
- [10]: مجله ریاضی برهان برای دانش‌آموزان دبیرستان - سال ششم - پائیز ۱۳۷۵ - شماره مسلسل ۱۸ - (برهان قضیه اصلی جبر منسوب به آران، از مقاله طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۶) در این شماره از مجله فوق برداشت شده که این مقاله ترجمه ایست از آقای غلامرضا یاسی پور از: 100 Great Problems of Elementary Mathematics)
- [11]: یادداشت‌های مصنف مقاله در باب این موضوع که عمدتاً مربوط به کتاب «ریاضیات» محتوی، روش و اهمیت، نوشته آقای پرویز شهریاری است (متأسفانه منبع کامل این یادداشت‌ها در دسترس نبود).
- در صورت تمایل به مطالعه بیشتر در باب جبر مجرد می‌توانید به مراجع زیر مراجعه کنید:
- (۱) ریاضیات گسسته و ترکیبات از دیدگاه کاربردی - نوشته رالف. پ. گریمالدی - ترجمه علی عمیدی - مرکز نشر دانشگاهی - ۱۳۷۷ - جلد دوم
- (۲) نخستین درس در جبر مجرد - جان. ب. فرالی - ترجمه مسعود قرزان - مرکز نشر دانشگاهی - ۱۳۷۵ - چاپ چهارم - جلد اول

(I) اگر در چند جمله‌ای $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ، همه ریشه‌ها حقیقی باشند، آنگاه همه ریشه‌های مشتق آن هم حقیقی هستند؛ ضمناً بین هر دو ریشه پشت سر هم $f(x)$ ، یک ریشه از $f'(x)$ قرار دارد که حتماً ریشه‌ای ساده است.

اثبات: اگر $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ راریشه‌های تکراری $f(x)$ و به ترتیب از مرتبه‌های $m_1, m_2, \dots, m_k$ بگیریم، روشن است که خواهیم داشت $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ (توجه داریم که ممکن است بعضی m_i ها واحد باشند، یعنی ریشه x_i متناظر با آنها، ریشه‌ای ساده باشد)؛ در این صورت، مشتق $f'(x)$ ، بنابر قضیه مربوط به ریشه‌های تکراری، دارای ریشه‌های تکراری $x_1, x_2, \dots, x_k$ ، منتهی به ترتیب از مرتبه‌های $m_1 - 1, m_2 - 1, \dots, m_k - 1$ است و نیز بنا به قضیه رل دارای ریشه‌های $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ که بین هر کدام از فواصل $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{k-1}, x_k)$ ، یعنی بین هر دو ریشه مجاور $f(x)$ قرار دارند، می‌باشد، لذا تعداد ریشه‌های حقیقی $f'(x)$ دست کم برابر است با

$$\begin{aligned} & (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_k - 1) + (k - 1) = \\ & (m_1 + m_2 + \dots + m_k) - k + (k - 1) = n - k + k - 1 \\ & = n - 1 \end{aligned}$$

اما $f'(x)$ از درجه $n-1$ است پس، دارای $n-1$ ریشه (حقیقی یا مختلط) می‌باشد لذا:

اولاً همه ریشه‌های $f'(x)$ حقیقی اند؛

ثانیاً $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ ریشه‌های ساده $f'(x)$ هستند،

ثالثاً $f'(x)$ ریشه دیگری ندارد.

(II) اگر همه ریشه‌های چند جمله‌ای $f(x)$ حقیقی و در بین آنها P ریشه مثبت وجود داشته باشد، (با احتساب هر ریشه به تعداد تکرار آن)، در این صورت $f'(x)$ دارای P یا $P-1$ ریشه مثبت خواهد بود.

اثبات: فرض می‌کنیم ریشه‌های مثبت معادله $f(x) = 0$ عبارتند از $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ (که ریشه x_1 به تعداد m_1 مرتبه تکرار شده است) لذا $m_1 + m_2 + \dots + m_k = P$ خواهد بود. اما $f'(x)$ دارای همین ریشه‌ها منتهی به تعداد $m_i - 1$ مرتبه است و از

ایجاد فرصت‌های یادگیری ریاضی از طریق انجام فعالیت

سهیلا غلام آزاد

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی

دیدگاه ساخت و سازگرایی باشد که تا دهه ۱۹۸۰، تأثیری بر تفکر برنامه‌ریزان درسی نگذاشته بود. ولی با مطالعه برنامه‌های درسی قبلی، مشاهده می‌شود که این رویکرد مربوط به دهه‌های ۴۰ و ۵۰ میلادی است.

«روش فعال باید در همه کلاس‌های ریاضی تمرین شود. این یک قاعده راهنما است که ارزش آن، دیگر مورد اعتراض نیست. یادداشت انفعالی بعضی از ایده‌ها، حقایق و ... نمی‌تواند تعلیم و تربیتی مبتنی بر تفکر آموزی را تشکیل دهد. برای هریک از دانش‌آموزان ضروری است که در زمانهای مختلف و در طول درس، به طور واقعی در امر یادگیری شرکت داشته باشند. ... علاوه بر آن، بخش قابل ملاحظه‌ای از فعالیت دانش‌آموزان باید صرف مطالعه و تحقیق در راه حل‌های مسئله باشد ...»

(Instructions generals, 1st October, 1946)

بنابراین، مسئله‌ها پایه‌های فعالیت را تشکیل می‌دهند و هدف از آنها تأمین امکاناتی جهت تفکر آموزی است. در اینجا فعالیت به عنوان یک روش برای تمرین در طول درس به نظر می‌رسد.

«یادگیری ریاضیات فقط از طریق تجربه کردن، سؤال کردن، کشف کردن، رد کردن، توضیح دادن و بحث کردن صورت می‌گیرد. بنابراین، برای یادگیرنده، ریاضی باید نوعی از یادگیری باشد که به حداقل دانش پایه‌ای^۱ و مقدار زیادی تجربه در بررسی موقعیت‌ها، با استفاده از انواع خاصی از مهارت‌های فکری، احتیاج داشته باشد.»

(Better Mathematics, 1987.)

شما تا چه حد با این ایده موافقت می‌کنید؟

از سال ۱۹۸۶ «فعالیت» در برنامه‌های درسی جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده است. ممکن است این سؤال پیش بیاید که آیا واژه فعالیت در برنامه‌های درسی قبلی نیز به حساب می‌آمده است؟ اگر پاسخ مثبت است از چه موقع، و به چه معنا این واژه وارد برنامه درسی شده است.

به استثنای برنامه درسی سال ۱۹۷۱ که تنها برنامه درسی‌ای بود که خود را محدود به دانش ریاضی کرده بود، رویکرد همه برنامه‌های درسی به آموزش ریاضی از سال ۱۹۴۵ تا ۱۹۹۰ اساساً بر پایه فعالیت دانش‌آموز و در نظر گرفتن مشارکت مثبت دانش‌آموز در طراحی درس بوده است. شاید تصور شود که طراحی فعالیت برای دانش‌آموزان و مشارکت آنها در یادگیری، مخصوص

«دست‌رسی به ایده‌های پایه‌ای نمی‌تواند قابل حصول باشد، مگر وقتی که از حالات واقعی دنیایی که کودک توانایی کشف آن را دارد شروع کنیم زیرا، کودک می‌تواند بر اساس آن کشف‌ها عمل کند؛ بنابراین، نقش معلم هدایت این اکتشاف، تلاش برای برانگیختن حس کنجکاوی و حرکت‌های خودجوش است. او موقعیت‌هایی را پیشنهاد خواهد کرد که از آنها رفته رفته حقایقی که شایسته نگرداشتن باشند پدیدار شود. سپس آنها را جدا کرده، از یکدیگر تمیز دهد و به عنوان ابزاری برای تشخیص دوباره از آنها استفاده کند.»
(Instructions, January 1957)

فعالیت به عنوان ماده‌ای اولیه موقعیت‌های یادگیری مطرح می‌شود. اما نه می‌توانیم به وضوح ببینیم این فعالیت دانش‌آموز در کجا واقع می‌شود و نه می‌توانیم ببینیم که شامل چیست. فرایند یادگیری پیشنهاد شده توسط دینز^۲ شرح مناسبی برای این دو سؤال است:

«تفسیرهای متعصبانه مطرود است. تعریف‌ها و ویژگی‌ها از طریق مثال‌ها باید معرفی شوند. ... آموزش باید به طور مستمر بر پایه فعالیت دانش‌آموزان باشد. معلم باید همه پاسخ‌ها را حتی اگر خام و پر از غلط هم باشند، به حساب آورده و پیشنهادهایی ارائه کند که از طریق آنها حقایق آشکار شوند. ...»
(April 1977)

در اینجا، یادگیری بر اساس مسأله را که در برنامه درسی سال ۱۹۴۶ مطرح شده بود و به اشتباهات دانش‌آموزان توجه داشت دوباره می‌بینیم، همچنان که شاهد فراموش کردن رویکرد اصل موضوعی تحمیلی برنامه درسی ۱۹۷۱ نیز هستیم.
در ژانویه ۱۹۸۱ در قانونمندی برای کلاس دوم^۳ می‌خوانیم:

«در قلب همه یادگیری‌های خوب، وجود برخورد واقعی و حسی، برانگیختن فعالیت شخصی دانش‌آموز و توسعه وسایل تحقیق است که مستقیماً در دنیای اطراف ما به کار می‌رود. ... فعالیت ریاضی با باز کردن یک دنباله از قضیه‌های خوب مرتب شده یکی نیست. آنچه لازم است، آن است که برای معرفی هر ایده یا قضیه‌ای باید ابتدا مطالعه یک موقعیت به اندازه کافی غنی برای آشکارسازی سودمندی آن ارائه شود.»
در اینجا اهمیت مدل‌سازی و فعالیت ریاضی مسلماً به عنوان یک فعالیت فکری فرض شده است. برنامه درسی ۱۹۸۵ فرانسه، دیدگاه زیر را پیشنهاد می‌کند.

«تحصیل ریاضیات برای دانش‌آموزان نباید محدود به دانش رسمی^۴ (صوری)، تعریف‌ها، نتیجه‌ها، تکنیک‌ها و اثبات‌ها شود. برای دانش‌آموز ریاضی مهم است که معنایی برای پرسش‌هایی که از خودش می‌کند به دست آورد و آنچه را که می‌داند برای حل مسأله‌ها به کار برد.»
(Bulletin officiel pour college, page 79 of the 1985 edition, CNDP)

در اینجا تأکید بر فضای دانش و در نتیجه بر توسعه فعالیت‌های ریاضی برای حل مسأله است. از سال ۱۹۹۰، با غلبه دیدگاه ساخت و سازگرایی در روند برنامه ریزی درسی، شیوه‌های تدریس دبیرستان نیازمند تحول شد و در نتیجه برای کسانی که درگیر تدریس بودند، سؤالاتی مطرح شد:

- آیا دانش‌آموزان ما که قبلاً حالت انفعالی داشتند، حال باید فعال باشند؟
- آیا این نامعقول است که در سطح دبیرستان، آموزش ما دارای تعصب آموزش دانشگاهی باشد؟
- چگونه می‌توانیم فعالیت‌هایی طراحی کنیم که بخشی از فرایند یادگیری علمی را دربرگیرد؟
- برای دانش‌آموز این سؤال پیش می‌آید که اگر برای

انجام فعالیت‌ها و وقت بگذارم آیا واقعاً به من کمک خواهد کرد تا دانش و فهمی که به دست می‌آورم بهتر از حالتی باشد که از انجام تعداد زیادی تمرین به دست می‌آورم؟ ■ برای معلم این سؤال پیش می‌آید که آیا انجام فعالیت‌ها می‌تواند استفاده خوبی از وقت برای کار کردن روی پیدا کردن راه حل‌هایی برای یک مسأله که هنوز در درس مطرح نشده است باشد؟ و چگونه می‌توانیم این جستجو را ارزیابی کنیم؟ ژرارد ورگنده می‌گوید:

«عمل کردن منبع و ملاک دانش است.»

حال در ریاضی این عمل به بررسی مسأله‌ها مربوط می‌شود، جایی که یادگیرنده در موقعیتی قرار می‌گیرد که نیاز دارد از خودش سؤال‌های بسیاری بپرسد.

فعالیت‌های ریاضی در کلاس درس

معلم‌ها در کلاس‌هایشان در تماس دائم با دانش‌آموزان هستند و در نتیجه دارای یک دید کلی از جریان پیشرفت آنها در طول یک دوره آموزشی می‌باشند. ولی طراحان و محققان برنامه درسی نمی‌توانند تمام عوامل تأثیرگذار بر روی زندگی روزانه کلاس درس را در نظر بگیرند، به همین دلیل تعریف آنها از فعالیت و درک آنها از آن، مستقل از زندگی کلاس درس است. امروزه، معلم از یک طرف دارای آزادی قابل ملاحظه‌ای در انتخاب استراتژی و روش اداره کلاس است و از طرف دیگر دچار فقدان دانش راه‌های مختلفی است که از طریق آن یادگیری اتفاق می‌افتد. بنابراین ما هنوز هم می‌توانیم معلمان دبیرستانی‌ای پیدا کنیم که اظهار می‌کنند: «من درس می‌دهم - دانش‌آموزان تمرین می‌کنند - در نتیجه آنها یاد می‌گیرند» و این دیگر به دلیل ناآگاهی از مفاهیم یادگیری نیست بلکه آنها به تدریس سنتی که در طول سال‌ها حفظ کرده‌اند عادت دارند و علی‌رغم تغییر برنامه درسی و تغییر نوع دانش‌آموزان، آنها هنوز هم به شیوه‌های قبلی تدریس می‌کنند.

در برنامه‌های درسی جدید، «فعالیت» در مقابل حالت «انفعالی» قرار می‌گیرد، حالتی که در آن دانش‌آموز خودش را در موقعیتی حس می‌کند که درگیری فکری ندارد.

یک رویکرد یادگیری که به دانش‌آموز فرصت می‌دهد در تحصیل دانش خویش نقش داشته باشد شامل آموزش از طریق فعالیتها و حل مسأله است. این روشها از یک طرف توسط طراحان برنامه درسی توصیه می‌شوند و از طرف دیگر توسط معلمان اجرا می‌شوند. در واقع، در ارتباط معلم - ریاضی، معلم مسلماً متقاعد شده که این روش اقدام به علت معنایی که این ارتباط، به مفاهیم ریاضی مورد بررسی می‌دهد مؤثر است؛ حال این معنا مربوط می‌شود به کاربرد مفاهیم آموخته شده دانش‌آموز در مباحث مختلف، استفاده از آنها در کارها و کنترل او روی کارهایی که تولید می‌کند. اما در ارتباط معلم - دانش‌آموز، معلم آزموده یا بی تجربه، با محدودیت‌هایی مواجه می‌شود.

محدودیت زمان

زمان تدریس ریاضی در مدارس محدود است. محتوای ریز مواد در حالت کلی بر اساس جدول زمانی است. اما حل مسأله نیازمند زمان است، در مرحله جستجو وقتی که دانش‌آموز درگیر فعالیت فکری واقعی است نیم ساعت از وقت را می‌گیرد، در مرحله اعتباربخشی، زمانی که بحث علمی می‌تواند اتفاق بیافتد، دانش‌آموز نظراتش را به بحث می‌گذارد و نتایجش را مقایسه می‌کند، و این زمانی احتیاج دارد که در چند دقیقه تمام نمی‌شود. بنابراین معلم باید تعادلی بین وقت صرف شده (اما واجب) جهت انجام فعالیت دانش‌آموز برای به دست آوردن معنای مفاهیم و رشد علمی‌شان و برای فعالیت‌های الگوریتمی ایجاد کند. همچنین در تنظیم جدول زمان بندی، معلم باید اهداف کوتاه مدت و اهداف درازمدت را نیز در نظر بگیرد.

(اهداف کوتاه مدت بیشتر در سطح محتوای برنامه درسی خاص می‌باشد؛ به عنوان مثال «مجموع زاویه‌های

داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

اهداف درازمدت بیشتر در سطح طرز تلقی و نوع نگرش دانش آموزان نسبت به مسایل است؛ به عنوان مثال ایجاد عادت بازتاب فعال نسبت به نتایج به دست آمده و اشراف نسبت به آن مسایل، به طوری که بتوانند آنها را در ذهن خویش سازماندهی کرده و در مناسبت های مختلف، از آنها استفاده صحیح کنند.

مقیاس زمان معلم، طول سال تحصیلی است که به ساعت های کلاسی تقسیم می شود، اما مقیاس زمان برای یادگیرنده می تواند یک دوره، یعنی چندین سال باشد.

محدودیت انتخاب فعالیت ها

معلم باید توانایی شناسایی فعالیت مناسب را داشته باشد. معلم باید توانایی فرق گذاشتن بین فعالیت هایی را که به فعالیت های فکری سوق داده می شوند و آنهایی که فقط مشغول کننده هستند، داشته باشد وگرنه نمی تواند اطمینان کند که انجام این کار تسهیل کننده آموزش است یا نه!

محدودیت ارزشیابی

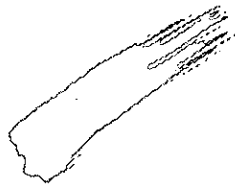
معلم برای ارزشیابی دانش آموزان باید از آموخته های آنها بر اساس دانش شان در طول یک سال تحصیلی استفاده کند. اما چون این ارزیابی می تواند تکالیف ریاضی را که نتایج آنها نمی تواند به صورت یک نوشته ارایه شود، یا ریاضی که از ایده هایی استفاده می کنند که جزء ریز مواد نیست، ولی استفاده از آنها در معنادهی به عنوانهایی که در ریز مواد است کمک می کند، در نظر بگیرد؟

علاوه بر آن، امتحان های نهایی و امتحان های ورود به دانشگاه نیز وجود دارند که در آنها نوع خاصی از سؤالات مطرح می شود. بنابراین با توجه به این محدودیت ها آیا معلمان در ارزیابی هایی تکوینی و فعالیت های الگوریتمی، تکرارپذیر و به سادگی اندازه گیری شده اغوا نخواهند شد؟ و بنابراین آیا غیر ممکن نخواهد بود که روی کار دانش آموزان در موقعیت های یادگیری ارزش گذاری شود؟ و به همان دلیل آیا معلمان مقدار زمان صرف شده

روی فعالیت های اکتشافی را برای آموزش دانش آموزان شان جهت امتحان های «معمولی» تقلیل نخواهند داد؟

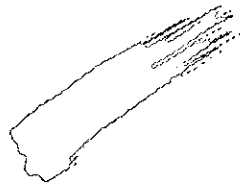
بنابراین معلم مجبور است تعادلی ایجاد کرده و مدیریت مناسبی نسبت به این برخورد ها داشته باشد. او نباید اغوا شده و از انجام فعالیت هایی که وقت زیادی می گیرد و در کوتاه مدت نمی تواند ارزیابی شود چشم پوشی کند؛ را، فعالیتی که یک یا چند هدف اولیه دارد، وقتی به عنوان یک کار (تکلیف) مطرح می شود، تعدادی هدف ثانویه نیز تولید می کند.

فعالیت های واقعی، معنای خود را هنگام اجرا نشان می دهند، مانند یک کار تئاتر که نویسنده آن در اینجا معلم است؛ او صحنه ها را به طور مرتبط به هم خلق می کند ولی هنگام اجرا، فی البداهه توسط بازیگران ساخته می شود، معلم و دانش آموز با یکدیگر کار می کنند. بنابراین به خاطر تمام این دلایل، دانش آموز نباید فقط تماشاچی بازی ای باشد که توسط معلم اجرا می شود، ما نباید کلاس هایمان را از فعالیت محروم کنیم.



چرا ریاضیات مدرسه ای در سطح جهانی تغییر کرده است؟

■ توسعه ریزپردازنده ها که باعث ارزانتر و نیرومندتر شدن نرم افزارها شده است. قسمت عمده ریاضیات مدرسه، شامل محاسبه، ترسیم نمودار، کشفیات هندسی، آمار، جبر و حسابان در حال حاضر می توانند بسیار ساده تر و سریعتر در این محیط الکترونیکی انجام پذیرند. همچنین ماشین حساب ها و کامپیوترها می توانند به عنوان ابزار تحقیقات یادگیری مورد استفاده قرار گیرند. ■ در مورد راهی که ریاضی توسعه پیدا کرده است،



در طراحی یک فعالیت غنی ریاضی باید نکات زیر را در نظر بگیریم :

- در شروع برای همه قابل دسترس باشد؛
- قابلیت تعمیم داشته باشد؛
- دانش آموزان را درگیر مشاهده، حدسیه سازی، توضیح دادن، ثابت کردن، رد کردن و تفسیر بکند؛
- بحث‌ها، نیروی ابتکار و اختراع را ارتقا بخشد؛
- به همکاری تشویقشان کند؛
- مبارز طلب باشد؛
- به طور شایسته از تکنولوژی استفاده شود؛
- به زندگی واقعی دانش آموزان مربوط باشد؛
- از مدلسازی ریاضی استفاده شود؛
- یک مؤلفه فرهنگی، اجتماعی، تاریخی را دربرگیرد؛
- دانش آموزان را به تصمیم‌گیری دعوت کند؛
- لذت بخش باشد.

اطلاعات جدیدی داریم و دیری نمی‌پاید، که ریاضی دیگر به صورت عینی، خطی و استنتاجی، یا حقایق جهانی مستقل از هر متن تاریخی ارایه نمی‌شود بلکه در حال حاضر به عنوان محصول یک فرایند ادراکی و خلاق، با ساختاری که منعکس کننده قالب‌های تاریخی و اجتماعی که در آن توسعه یافته است معرفی می‌شود.

- تأکید فزاینده‌ای بر تفکر ریاضی وجود دارد و تأکید بر قواعد خاص ریاضی و رویه‌ها رو به کاهش است.
- یادگیری باید به صورت یک فعالیت که در آن دانش آموزان سازنده دانش خودشان هستند شناخته شود.

«در حقیقت هیچ کس نمی‌تواند ریاضیات را تدریس کند. معلمان تأثیرگذار آنهایی هستند که می‌توانند دانش آموزان را ترغیب به یادگیری ریاضی کنند. تحقیقات آموزشی شواهد متقاعد کننده‌ای ارایه می‌کند که دانش آموزان فقط زمانی ریاضی یاد می‌گیرند که سازنده درک ریاضی خودشان باشند، در گروه‌ها کار کنند، در بحث‌ها شرکت کنند، نظراتشان را عرضه کنند و از طرف دیگر عهده‌دار یادگیری خودشان باشند.»

(Every body Counts, 1989)

جامعه بعضی مهارت‌های کلی مانند انعطاف پذیری، خلاقیت، تکنیک‌های همکاری و حل مسأله را از فرایند آموزش مطالبه می‌کند.

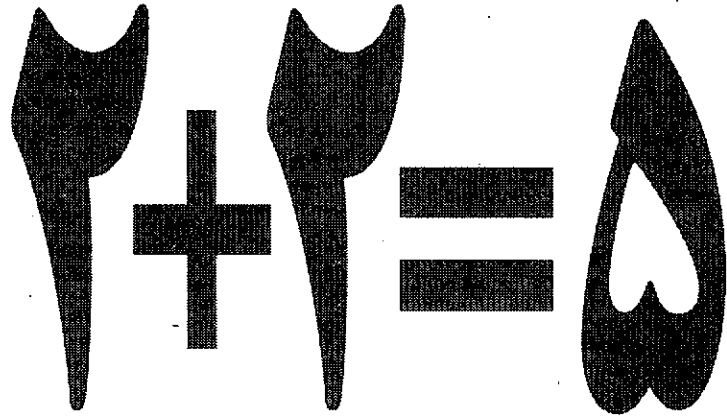
بنابراین، معلم‌ها باید حال و هوای کلاس درس را به گونه‌ای عوض کنند که از طریق آن، فعالیت‌های ریاضی طراحی و اجرا شوند. معلم‌های ریاضی باید بر تدریسی که در آن درس را شرح می‌دهند تأکید کمتری کنند و تأکید فزاینده‌ای بر نقش خودشان به عنوان تسهیل کننده یادگیری با استفاده از تکنیک‌های تعامل و تصمیم‌گیری‌های مشترک داشته باشند. محیط کلاس درس باید تبدیل به جایی شود که در آن به سبک‌های تفکر انفرادی دانش آموزان بها داده شود و جایی که دانش آموزان با همکاری یکدیگر به ریاضی که یاد می‌گیرند، معنا دهند.

زیر نویس‌ها

1. Factual Knowledge
2. Dienes
3. Regulations for the second class
4. formal knowledge
5. Gerard vergnaud

مراجع

- ۱- زهرا گویا و همکاران، هندسه ۱، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. ۱۳۷۴.
2. Mathiaud, M., Using Activities to Teach Mathematics: Does it Make Sense?, Irem de Paris VII May-June 1995.
3. Neyland, J., Designing Rich Mathematical Activities, vol. 1, 1994 Wellington College of Education: New Zealand.



نویسنده: هوستن اوپلر^۱
مترجم: محمد صالح مصلحیان،
گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

یافته‌های جدید دلالت بر این دارد که انجمن برادری فیثاغورسی^۵ برهانی برای $2 + 2 = 5$ کشف کرده بودند، اما این برهان هرگز نوشته نشد. برخلاف انتظار، عدم ظهور این برهان به علت سرپوش نهادن از نوع کاری که فیثاغورسیان در مورد اصم بودن $\sqrt{2}$ انجام دادند، نبود، بلکه آنها نمی‌توانستند به سادگی از عهده‌هزینه کتابت آن برآیند. زیرا پول اختصاص یافته را به خاطر اعتراضات یک طرفدار حقوق گاوها نسبت به روش انجمن برادری در تجلیل کشف قضایا، از دست داده بودند. به این ترتیب فقط تساوی $2 + 2 = 4$ در «اصول»^۶ اقلیدس^۷ مورد استفاده قرار گرفت و برای چندین قرن، چیز دیگری درباره $2 + 2 = 5$ شنیده نشد.

حدود سال ۱۲۰۰ میلادی، لئوناردو فیبوناتچی^۸، اهل پیزا^۹، کشف کرد که چند هفته پس از قرار دادن ۲ خرگوش نر و ۲ خرگوش ماده در یک قفس، به طور قابل ملاحظه‌ای به بیشتر از ۴ خرگوش دست می‌یابیم. لئوناردو، با هراس از این که مبادا عدد ۴ که توسط اقلیدس (برای حاصل $2 + 2$) داده شده است مورد مخالفت شدید واقع شود، محافظه کارانه گفت: « $2 + 2$ بیشتر شبیه ۵ است تا ۴»؛ ولی حتی این تفسیر محتاطانه در آن زمان محکوم شد و منجر به ملقب شدن لئوناردو به «آدم بنی کله»^{۱۰} گشت. با این حال وی در برآورد نقصانی تعداد خرگوشهایش پافشاری کرد. (مدل مشهور جمعیت خرگوش وی مبتنی بر این که هر تولدی متشکل از فقط دو بچه است، یک برآورد نقصانی قطعاً ناهنجار بود.)

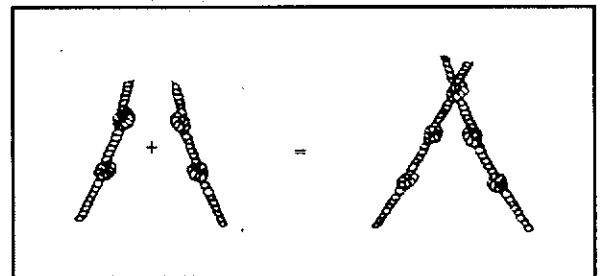
۴۰۰ سال بعد، بار دیگر این ریسمان به وسیله

ابتدا و مهمتر از همه این است که او یک منطق دان بود. حداقل سی و پنج سال از نیم قرن هستی اش را منحصرراً اختصاص به اثبات این داده بود که ۲ و ۲ همیشه برابر ۴ است، به جز در حالات غیر معمول که بر حسب مورد، برابر ۳ یا ۵ می‌شود.

ژاکوب فوترل^۲، «مسأله حجره ۱۳»

اکثر ریاضیدانان با تساوی $2 + 2 = 4$ آشنا نیستند (یا حداقل مراجعی را در ارتباط با آن، در متون ریاضی دیده‌اند). با این حال تساوی $2 + 2 = 5$ دارای یک پشتوانه تاریخی غنی و پیچیده است. این تاریخ شبیه هر کمیت پیچیده دارای قسمتی واضح و قسمتی مبهم است و مادر این مقاله منحصرراً با قسمت اخیر سروکار داریم.

بسیاری از فرهنگ‌ها، به هنگام توسعه ریاضیات اولیه خود، تساوی $2 + 2 = 5$ را کشف کردند. برای مثال قبیله بالب^۳، از نژاد اینکاهای^۴ آمریکای جنوبی، با زدن گره روی طناب عمل شمارش را انجام می‌دادند. آنها به زودی دریافتند که وقتی یک طناب دو گره‌ای با یک طناب دو گره‌ای دیگر «جمع» شود، یک طناب پنج گره‌ای به دست می‌آید.



برهان بدون کلمه قبیله، بالب، از تساوی $2 + 2 = 5$

ریاضیدانان فرانسوی چنگ زده شد. دکارت^{۱۱} اعلام کرد: «من فکر می کنم $2+2=5$ ، پس این چنین هست.» لیکن دیگران به خاطر این که گفته وی چندان دقت نداشت، معترض بودند. از قرار معلوم فرما^{۱۲} برهانی دقیقتر داشت که در بخشی از یک کتاب ظاهر شد. اما این برهان و مطالب دیگر، با آن که می توانست در حاشیه پهن تری چاپ شود توسط ناشر بریده و حذف گردید.

در فاصله زمانی این حقیقت که هیچ اثبات معینی از $2+2=5$ قابل دسترس نبود و هیجان توسعه حسابان در حدود سال ۱۷۰۰، ریاضیدانان مجدداً علاقه خود را به این تساوی از دست دادند.

در واقع، تنها مرجع قرن هجدهمی شناخته شده برای $2+2=5$ منسوب به فیلسوف اسقف برکلی^{۱۳} است که او این تساوی را از یک نسخه قدیمی کشف کرد و توضیحات پیچیده ای راجع به آن بیان کرد: «خوب، من اکنون جایی را که همه کمیت های از دست رفته می روند می شناسم و آن جایی نیست جز طرف راست این تساوی». این شوخی آن قدر مردم هوشمند کالیفرنیا را تحت تأثیر قرار داد که یک شهر دانشگاهی را بعد از او به نامش کردند.

اما در اوایل نیمه نخست قرن نوزدهم، $2+2$ باز مورد توجه زیادی قرار گرفت. ریمان^{۱۴} حسابی را که در آن $2+2=5$ ، به موازات حساب اقلیدسی $2+2=4$ ، گسترش داد. به علاوه در طی این مدت، گاوس^{۱۵} حسابی ارائه کرد که در آن $2+2=3$. به طور طبیعی دهه های آشفتگی عظیمی برای مقدار واقعی $2+2$ در پی آمد. به علت تغییر آراء روی این موضوع یازده سال بعد از برهان کمپ^{۱۶} برای قضیه چهاررنگ^{۱۷} در سال ۱۸۸۰، فهمیده شد که وی عوضی قضیه پنج رنگ را ثابت کرده است. ددکیند^{۱۸} با مقاله ای تحت عنوان « $2+2$ چیست و چه می خواهد»^{۱۹} وارد گود شد. فرگه^{۲۰} فکر می کند که تساوی را ضمن آماده کردن نسخه خلاصه شده بگریف شریف^{۲۱} خویش، اثبات کرده است. این اختصار شامل چیزی بود که او به عنوان اثبات قطعی $2+2=5$ در نظر گرفته بود. اما بعد از آن فرگه نامه ای از برتراند راسل دریافت کرد که در آن راسل^{۲۲} به وی یادآوری کرد که خود فرگه قبلاً در مفاهیم اساسی ریاضی^{۲۳} $2+2=4$ را ثابت کرده است.

این تناقض آن قدر فرگه را دلسرد کرد که وی در کل ریاضیات را رها کرد و به بخش اداری دانشگاه رفت.

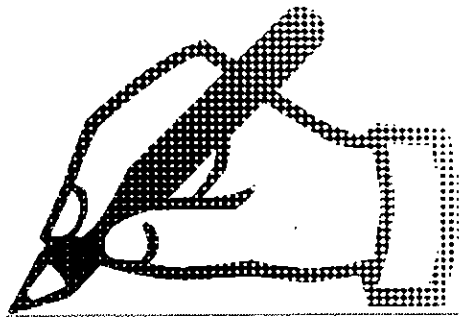
در مواجهه با سؤال بنیادی، عمیق و گیج کننده راجع به مقدار $2+2$ ، ریاضیدانان از خط مشی عملی ذیل پیروی کردند: «همه چیز را نادیده پندار». از این رو همه به $2+2=4$ برگشتند و بعد از آن در طی قرن بیستم هیچ تلاشی در ارتباط با تساوی رقیب صورت نگرفت. مشهور بود که بورباکی^{۲۴} در صدد تخصیص یک جلد کتاب برای $2+2=5$ بود (چهل صفحه اول برای نمایش نمادین عدد ۵ در نظر گرفته شده بود)، اما این مطلب تأیید نشد. با این حال اخیراً گزارش هایی از برهان، به کمک کامپیوتر برای $2+2=5$ ، نوعاً برای کامپیوترهای متعلق به شرکتهای عام المنفعه ارائه گردیده است. شاید در قرن بیست و یکم باز تجدید نظر دیگری از این تساوی تاریخی را ببینیم.

زیرنویس ها

1. Euler, Houston
2. Jacques Futrelle
3. Bolb
4. Incas
5. Pythagorean Brotherhood
6. Elements
7. Euclid
8. Leonardo Fibonacci
9. Piza
10. Blockhead
11. Descartes
12. Fermat
13. Bishop Bekeley
14. Riemann
15. Gauss
16. Kempe
17. The 4 - color theorem
18. Dedekind
19. «was ist und was soll 2+2?»
20. Frege
21. Begriffsschrift
22. Russell
23. Grundbeefen der Mathematik
24. Bourbaki

منبع اصلی

Euler, Houston, The History of $2+2=5$, Math. Magazine, Vol. 63, No. 5, Dec 1990, 338-339.



احیای معلمان

.....
نوشته یکی از دبیران ریاضی دوره راهنمایی
.....

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به عمل در می‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌ای خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آنها بپردازند.

در پنجمین کنفرانس ریاضی ایران که از ۸ تا ۱۰ بهمن ۱۳۷۹ در مشهد مقدس برگزار شد، توفیق آشنائی با یک معلم نابینای ریاضی از شیراز را پیدا کردم. ایشان یکی از مشکلات تدریس ریاضی خود را، آموزش نمودارهای مربوط به کتاب «آمار و مدل سازی» عنوان کردند که آموزش آن برای دانش آموزان علوم انسانی اجباری شده است. در همین رابطه، یکی دیگر از معلمان ریاضی آموزش و پرورش ناحیه ۴ مشهد سرکار خانم پروین بداغ آبادی از دبیرستان طلوع فجر، گفتند که «همه حق زندگی و حق استفاده از حقوق ذیحق خویش را دارند. در مقدمه توسط مؤلف کتاب، تکلیف دانش آموز از نظر بارم سؤالات و یا طریقه آموزش رسم نمودارها و غیره روشن شود.» و اشاره ایشان به دانش آموز نیمه بینا خانم زهره پورعلی بود که «در رسم نمودارها در آزمون درس آمار و مدل سازی، با وجودی که معدل کتبی او ۱۹/۷۵ یا بالاتر بوده، دچار اشکال شده است.» بعد از شنیدن این صحبت‌ها، مسأله آموزش ریاضی به نابینایان برایم جدی‌تر شد. به یاد آوردم که یکی از دانشجویان دبیری ریاضی نیز که معلم شاغل هستند، روایتی راجع به مشکلات یکی از دانش آموزان نابینای خود نقل کردند. از ایشان خواهش کردم اجازه دهند آن روایت را چاپ کنیم. شاید این موارد فتح بابی باشد تا حقوق همه دانش آموزان در رابطه با یادگیری ریاضی جدی گرفته شود. همان طور که در یادداشت سردبیر «شماره قبل» ذکر شد، دیگر نمی‌توان انتظار کارآمدی از یک برنامه یکسان و بی انعطاف برای همگان و با نیازهای متفاوت را داشت. احساسات بی شائبه این سه عزیز معلم، نشانه بلوغ فکری و تجلی انسانی جامعه نوین ایران است. این مسئولیت‌پذیری مبارک است. امیدوارم که سیاست‌گذاران و تصمیم‌گیرندگان آموزشی، با تکیه بر بلوغ فکری و تجارب ارزشمند معلمان، به برنامه ریزی از زاویه جدیدی نگاه کنند و به قول معروف، «همه را به حساب آورند»، که نابینایان عزیز نیز، بخشی از این «همه» هستند.

سردبیر

«رب اشرح لی صدری و یسر لی امری و احلل عقدۀ من لسانی یفقهوا قولی»

حدود چهار سال پیش به یکی از مدارس شهر تهران منتقل شدم. مدرسه ای که در آن مشغول به کار می شدم نسبتاً بزرگ، با حدود ۹۰۰ نفر جمعیت و ۲۲ کلاس بود. هر کلاس حدود ۳۶-۳۵ دانش آموز داشت. روزی که ابلاغم را به مدرسه تحویل دادم از من سؤال شد که در چه پایه ای مایلم که تدریس کنم. گفتم: فرقی نمی کند. علیرغم میل مدیر مدرسه (زیرا ایشان مایل بودند من در پایه سوم تدریس کنم.) و با درخواست یکی از معلمان ریاضی آن مدرسه من پایه اول و یک کلاس از پایه دوم را انتخاب نمودم. اکنون که به گذشته فکر می کنم می بینم که شاید درخواست معلم ریاضی آن مدرسه مصلحتی بوده که لااقل بتوانم هر چند اندک معلمی مفید برای یکی از دانش آموزانم باشم.

وقتی برای اولین بار وارد یکی از کلاسهای اولی که به من محول شده بود؛ شدم، مشاهده نمودم که یکی از دانش آموزانی که در ردیف اول نشسته بود متأسفانه نابینای مطلق است؛ متعجب شدم و از شما چه پنهان نگران. با خود فکر کردم که چگونه باید مطالب درس را به او تفهیم نمایم. بخصوص که هیچ تجربه ای در این زمینه نداشتم. ناگفته نماند با معلّم رابطی که هفته ای یک بار به مدرسه ما می آمد نگرانی ام را در میان گذاشتم. البته ایشان این امر را تا حدودی طبیعی دانستند. از ایشان خواهش نمودم در هر زمینه ای که می توانند مرا راهنمایی کنند. از ایشان و همچنین مادر دانش آموزم علت اینکه چرا وی در مدارس عادی مشغول به تحصیل است را جویا شدم. ایشان گفتند: به دلیل اینکه در مدارس استثنایی، سطح تدریس با مدارس عادی فرق می کند و نسبت به این مدارس سطح تدریس پایین تر است.

اوایل، کارم در آن کلاس بسیار دشوار بود. زیرا باید حواسم را جمع می کردم تا مطالبی را که پای تخته

می نویسم، فقط به نوشتن آن بسنده نکنم. و با اشاره در مورد آنها سخن نگویم. بلکه دقیقاً هر چه که پای تخته نوشته ام بیان نمایم و توضیح دهم. پس از آنکه به تدریس کلی در کلاس می پرداختم، هنگامی که دانش آموزان دیگر مشغول حل تمرینات در کلاس بودند من نیز از این فرصت ها استفاده می کردم و با حساب افزاری که این دانش آموز در دست داشت، تمرینهای کتاب و همچنین مفاهیم درسی را مجدداً به او می گفتم. کم کم متوجه شدم مطالب درسی را او زودتر و بهتر از دانش آموزان دیگر متوجه می شود و شاید با یک مثال بیشترین مفهوم را متوجه می شود. هنگام حل تمرینات کلاسی، وقتی به او نیز می گفتم تمرینات را حل کند، خیلی سریعتر از دانش آموزان دیگر به جواب می رسید. برایم جالب بود که اشتباهاتی که اکثر دانش آموزان در محاسبات مرتکب می شدند؛ او دچار آن نمی شد. بطور مثال: اکثر دانش آموزان در مخرج مشترک گرفتن بین دو کسر، و یا محاسبات اعداد توان دار و عملیات بین آنها و هندسه و ... دچار مشکل می شوند. ولی اشتباهات محاسباتی از او سر نمی زد.

به بخش هندسه که رسیدیم بیشتر از پیش نگران شدم. زیرا تصورم این بود که خیلی از مسائل هندسه از طریق مشاهده قابل حل است. اولین مبحث هندسه مربوط به خط و نقطه و ... بود. کاغذی برداشتم و بانوک خودکار کاغذ را سوراخ کردم. سپس کاغذ را از پشت به او دادم تا لمس کند، برجستگی که در اثر نوک خودکار ایجاد شده بود می توانست برای او نمایش یک نقطه باشد.

البته این کارها برای دانش آموزان کلاس هم نیز جالب بود. زیرا آنها این مطالب را از راه مشاهده شاید می توانستند بهتر یاد بگیرند. برای مفهوم خط، صفحه را تا نمودم و از پشت صفحه دادم که لمس کند. نمایش خط را به او نشان دادم. برای مفهوم نیم خط، روی همان خط ایجاد شده سوراخی ایجاد کردم. برای پاره خط دو سوراخ روی آن خط ایجاد کردم. به مفهوم زاویه که رسیدیم، همین شیوه به عنوان شروع مطرح شد. سپس به دانش آموزان کلاس

به عنوان کار عملی گفتم که با مقوا یک زاویه متحرک (که) رأس آن بوسیله پونز بهم وصل شده باشد) درست کنند. بهترین و ملموس ترین آنها را انتخاب کردم و در دست او، زاویه های تند، باز، راست و ... را کار کردم.

هندسه های سال اول را با این روش و با کمک دانش آموزان کلاس با او کار کردم. جالب اینجاست، همانطور که گفتم اکثریت دانش آموزان در تساوی مثلثها دچار مشکل می شوند. ولی وی به راحتی می توانست مسائل هندسه و بخصوص تساوی مثلثها را حل کند، بدون کوچکترین اشکالی. از زوایا، خط، پاره خط ... تعاریف دقیقی می نمود. بطوری که، می توانستم متوجه شوم که مطلب در ذهنش کاملاً نقش بسته است.

به هر حال سال اول را با موفقیت چشمگیری پشت سر گذاشت. تا جائیکه به یاد دارم نمره سه ثلث او هیچوقت کمتر از ۱۹ یا ۱۸ نشد.

سال دوم، خواستم که پایه دوم را به من بدهند. متأسفانه مدیر مدرسه عوض شده بود و خیلی طول کشید تا آنها قبول کنند که این دانش آموز در کلاس من باشد. در این سال دیگر دلهره سابق را نداشتم و تقریباً فهمیده بودم که چگونه با وی کار کنم. در بخش هندسه به ساختن اشکال و احجام هندسی مشغول می شدیم که برای دانش آموزان نیز کار جالبی به حساب می آمد.

اعداد و علامتهای نوشتاری آنان با ما فرق داشت. مشتاق شده بود که بدانند ما از چه علائمی استفاده می نماییم، که به مرور با حرکت انگشتانش به روی نیمکت به او نشان می دادم.

این سال هم به لطف خداوند و تشویق و کمک معلم رابطشان تمام شد و او مجدداً نیز با موفقیت این سال را به پایان رسانید. البته لازم به تذکر است که بگویم در این مدت، امتحاناتی که از او به عمل می آوردیم به گونه ای دیگر بود؛ به جای مسائل رسم سعی می کردیم از سؤالات دیگری استفاده کنیم که ضمناً به مفاهیمی که باید یاد بگیرد لطمه ای وارد نشود.

سال تحصیلی که تمام شد، از مدیر مدرسه خواستم که در سال تحصیلی آینده لااقل یک کلاس از پایه سوم به من بدهند. متأسفانه ایشان شدیداً مخالفت نمودند. به دلیل اینکه چندین سال بود که خانم ... در پایه سوم تدریس می کردند و اصلاً نمی شد که یک کلاس سوم را از ایشان بگیرند و به من بدهند. علت را از من خواستند. گفتم به دلیل اینکه دانش آموزی با این شرایط دارم و دو سال است که با او کار کرده ام و می دانم که چگونه با او باید کار کرد. ایشان در نهایت بی اعتنایی فرمودند: «دلیل شما قانع کننده نیست. مگر شما چه کار خاصی کرده ای؟» [جالب است بدانید ایشان اصرار داشتند که خانم ... پایه سوم را تدریس کنند. متأسفانه رشته ایشان اصلاً ریاضی نبود و در یکی از شاخه های علوم انسانی لیسانس گرفته بودند].

دیدم بحث و گفتگو با ایشان جایز نیست. به طور تمام وقت خود را به مدرسه دیگری نزدیک همان مدرسه منتقل نمودم. و یک پایه سوم هم از همان مدرسه گرفتم. سال تحصیلی جدید شروع شد. و من نگران دانش آموزی بودم که او را در آن مدرسه رها کرده بودم. اوایل به خود دلداری دادم که شاید نگرانی من بی جهت است. و هر کس دیگری خواهد توانست که با او کار کند. ولی بعد از حدود سه هفته که از سال تحصیلی گذشت، طاقت نیاوردم، با معلم رابط او تماس گرفتم. از ایشان شنیدم که والدین او جویا شده اند که آیا در مدرسه ای که هستم پایه سوم دارم یا خیر که من پاسخ مثبت دادم. لذا طی تماس و هماهنگی با مادر ایشان و پس از در جریان قرار دادن مدیر مدرسه، این دانش آموز به کلاس من آمد.

طی ۲-۳ جلسه، درس هایی را که او در کلاس حضور نداشت با هم کار کردیم. در نتیجه خیلی زود با کلاس هماهنگ شد.

تا دو ثلث سال سوم هم مشکلی نداشتیم و مانند سالهای گذشته از او آزمون کتبی بعمل می آمد. مشکل از امتحان نهایی بوجود آمد. اولاً روز امتحان، چون معلم رابطشان در حوزه دیگری بود، معلم دیگری جای ایشان

آمدند. (البته با تماسی که با معلم رابط و اولیاء این دانش آموز داشتیم در جریان این امور قرار گرفتیم). ثانیاً مدت امتحان ریاضی او همان مدت امتحانی دانش آموزان دیگر بود. ثالثاً برخی از سؤالات که او قادر به پاسخگویی نبود - بیشتر منظورم رسم و بعضی از اشکال هندسی است - جزء سؤالات امتحانی او به حساب می آمد. البته سؤالات هندسه را می توانست پاسخ دهد ولی طبیعتاً به وقت بیشتری نیاز بود. رابعاً برگه او بدون توجه به این نکات مانند دانش آموزان دیگر تصحیح شد.

در نتیجه متأسفانه نمره امتحان ثلث سوم این دانش آموز ۱۴-۱۵ شد. متأسفانه نتوانستیم اولیاء وی را در جریان این مسأله قرار دهیم، زیرا ایام تعطیلات بود و آنها به مسافرت رفته بودند. با شروع سال تحصیلی امسال، روزی مادر ایشان تماس گرفتند و گفتند که به اداره مراجعه کرده اند و راجع به نمره دخترشان اعتراض کرده اند. ولی ترتیب اثر داده نشد و گفته اند که مهلت اعتراض تمام شده است. در صورتی که در همان روزها من شاهد تغییر نمرات دانش آموزانی بودم که با اعتراض نمره زیر ده آنها به ده می رسید! حال چون این دانش آموز وضعیتی بحرانی مانند آنها نداشت، مهلت اعتراضش تمام شده بود!

آنها زنگ زده بودند، که دانش آموزم معذرت خواهی کند! به دلیل اینکه از پس امتحان خوب برنیامده بود. در صورتی که من اطمینان دارم که اگر شرایط امتحانش بهتر از این وضعیتی که گفتم بود؛ نتیجه امتحان او نیز با گذشته فرقی نمی کرد.

در هر صورت، به ایشان گفتم که در زمینه ریاضیات دبیرستانش نیز اگر از من کمکی ساخته است حاضرم انجام دهم. متأسفانه مطلع شدم که معلم دبیرستانشان (حال یا حواش نیست و یا جمعیت دانش آموزان زیاد است و یا هر دلیل دیگری که من نمی دانم) تمرین هایی را که پای تخته نوشته می شود و یا توضیحات درسی را بلند نمی خواند. گویی اصلاً این دانش آموز در کلاس حضور ندارد (به تعبیر خودش می گوید اصلاً انگار که من وجود ندارم). معلم رابطش نیز عوض شده است. و در نتیجه

در این زمینه مشکلش دوچندان شده است. تأسف من دوچندان شد وقتی متوجه شدم که امسال با تشویق معلم رابط جدیدش و گفته آنها مبنی بر اینکه با شریایی که دارد ممکن است معلم موفق نشود، به او گفته اند اگر رشته انسانی را انتخاب کند بهتر است و آینده بهتری خواهد داشت. سابق براین هر موقع که از او سؤال می شد چه رشته ای را می خواهد انتخاب کند می گفت می خواهد رشته ریاضی را انتخاب کند و معلم شود.

با وجود این مطالبی که شنیدم من ماندم و دنیایی از نگرانی؛ نه تنها نسبت به این دانش آموز بلکه هر کس دیگری که دارای چنین شرایطی است، و محکوم این شرایط شده است. محدودیت هایی که ما در شرایط عادی زندگی می کنیم و از همه نعمات خداوند برخورداریم برای چنین اشخاصی بوجود آورده ایم. این رفتار خشک و قانونمند ما مرا ناخواسته به یاد این جمله هلن کلر می اندازد که: «... من غالباً با خود اندیشیده ام که اگر هر انسانی در دوران نوجوانی اش چند روزی نابینا و ناشنوا شود، از نعمت بزرگی برخوردار شده است. تاریکی او را نسبت به بینایی قدر دان تر می کند، سکوت به او لذت صدرا را می فهماند». آیا قوانین دست و پاگیر ما باید آنقدر محکم و تثبیت شده باشد که اصلاً به شرایط توجه نکند و بدون هیچ انعطافی برخورد نماید؟ و آیا این غیر قابل انعطاف بودن قوانین برای همه افراد یکسان است؟ اگر مسئولین محترم به این مسائل توجه نمایند قطعاً راه برای پیشرفت این قبیل افراد (که ناخواسته برایشان محدودیتهایی ایجاد شده است) باز خواهد شد. چرا که آنان نیز مانند همه افراد جامعه حق انتخاب و پیشرفت در رشته مورد علاقه خود را باید داشته باشند.

به امید روزی که قوانین ما را در بند نکشند.

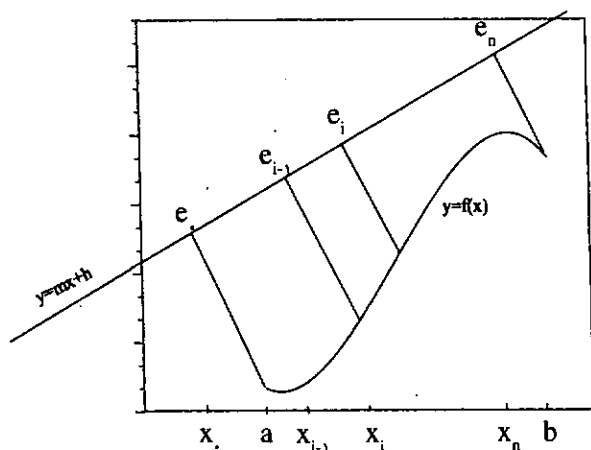
بلکه ما برای بهبود زندگی تک تک

افراد جامعه از آن استفاده نماییم.

به امید آن روز.

حجم حادث از دوران یک منحنی حول خطی مایل

محمدحسین پور سعید - گروه ریاضی - دانشگاه لرستان



اگر پاره خط حد فاصل بین دو نقطه حاصل از تلاقی خطوط قائم با خط مایل را به n قسمت افراز کرده و نقاط تلاقی حاصل از حل دستگاههای (۱) را با e_0 و e_n نشان دهیم در این صورت طول این دو نقطه بصورت زیر خواهد بود:

$$x_1 = \frac{a + mf(a) - mh}{m^2 + 1}, \quad x_n = \frac{b + mf(b) - mh}{m^2 + 1}$$

و در نتیجه مختصات A و B بصورت زیر بدست می آید:

$$e_0(x_1, mx_1 + h) \quad e_n(x_n, mx_n + h)$$

همچنین اگر فاصله بین نقاط e_i, e_{i-1} ($i=1, 2, \dots, n$) به عنوان زیر بازه i -ام در نظر گرفته شود، مختصات نقاط کرانی این زیر بازه بصورت زیر است:

$$e_{i-1}(x_{i-1}, mx_{i-1} + h) \quad e_i(x_i, mx_i + h)$$

بنابراین در دوران منحنی نمایش $f(x)$ حول خط مایل، اگر عنصر حجمی i -ام را حادث از دوران عنصر تقریباً مستطیلی i -ام با قاعده $e_{i-1}e_i$ (و محصور بین منحنی و خط مایل در زیر بازه) بدانیم اندازه قاعده برابر است با:

چکیده: در مورد تعیین اندازه حجم حاصل از دوران یک منحنی حول محور X ها یا محور Y ها یا به موازات آنها در بیشتر کتابهای ریاضی عمومی دانشگاهی بحث شده است. در این مقاله اندازه حجم حاصل از دوران منحنی تابعی پیوسته حول خطی مایل مورد بررسی قرار می گیرد.

واژه های کلیدی: افراز، عنصر حجمی، مجموع ریمانی؛

همانطور که جهت تعیین اندازه حجم حاصل از دوران یک منحنی حول محور X ها در ساده ترین وضعیت فرض می شد که منحنی مربوط به نمودار یک تابع باشد در اینجا نیز بدون اینکه خللی به کلیت مسئله وارد آید فرض کنید می خواهیم اندازه حجم حاصل از دوران منحنی تابع پیوسته $f(x)$ در فاصله $a \leq x \leq b$ را حول خطی مایل مانند $y=mx+h$ بیابیم بطوریکه هر خط قائم بر خط مایل بیش از یک نقطه تلاقی با منحنی نداشته باشد.

حال از دو نقطه کرانی واقع بر منحنی با طولهای a و b دو خط قائم بر خط مایل رسم می کنیم. جهت تعیین مختصات نقاط تلاقی این خطوط قائم با خط مایل، می توان از حل دو دستگاه زیر کمک گرفت:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{m} + \frac{a}{m} + f(a) \\ y = mx + h \end{cases}, \quad \begin{cases} y = -\frac{x}{m} + \frac{a}{m} + f(b) \\ y = mx + h \end{cases} \quad (1)$$

و مقدار حجم تقریبی عنصر حجم i -ام نیز بصورت زیر خواهد بود:

$$\Delta_i v \equiv \frac{\pi \left[(g(x_i) - x_i)^2 + (f(g(x_i)) - (mx_i + h))^2 \right]}{\sqrt{m^2 + 1} \cdot \Delta_i x}$$

بنابراین اگر V را میزان حجم حادث از دوران بدانیم، میزان تقریبی این حجم یک مجموع ریمانی بصورت $v \equiv \sum_{i=1}^n \Delta_i v$ خواهد بود. بنابراین میزان دقیق حجم برابر است با:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta_i v \\ &= \int_a^b \pi \left((g(x) - x)^2 + (f(g(x)) - (mx + h))^2 \right) \sqrt{m^2 + 1} \, dx \\ &= \pi \sqrt{m^2 + 1} \int_a^b \left((g(x) - x)^2 + (f(g(x)) - (mx + h))^2 \right) dx \end{aligned}$$

مثال: می خواهیم مقدار حجم حادث از دوران منحنی $f(x) = x^2 - x + 3$ را حول خط مایل $y = x + 2$ در فاصله $1 \leq x \leq 3$ محاسبه نماییم.

$$\begin{aligned} a &= 1, \quad b = 3, \quad y = x + 2 \\ \Rightarrow m &= 1, h = 2, \quad f(1) = 3, \quad f(3) = 27 \\ x_1 &= \frac{1 + 1(3) - 1(2)}{1^2 + 1} = 1, \quad x_n = \frac{3 + 1(27) - 1(2)}{1^2 + 1} = 14 \end{aligned}$$

حال جهت تعیین ضابطه $g(x_i)$ بایستی جواب دستگاه زیر را بیابیم:

$$\begin{cases} y = -x + 2x_i + 2 \\ y = x^2 - x + 3 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{2x_i - 1} = g(x_i)$$

$$\Rightarrow g(x) = \sqrt{2x - 1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (\sqrt{2x - 1})^2 - \sqrt{2x - 1} + 3 \\ V &= \pi \sqrt{1^2 + 1} \int_1^{14} ((\sqrt{2x - 1} - x)^2 + (f(g(x)) - (x + 2))^2) dx \\ &= \frac{205172}{105} \sqrt{2} \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{e_{i-1} e_i} &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (mx_i + h - mx_{i-1} - h)^2} \\ &= \sqrt{m^2 + 1} \cdot \Delta_i x \end{aligned}$$

که در آن $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ می باشد.

جهت محاسبه حجم تقریبی عنصر حجمی i -ام با در نظر گرفتن عناصر مستطیلی محیطی یا محاطی متناظر با آن و تعیین مساحت عنصر مستطیلی، می توان بصورت مقتضی عمل نمود. همچنین برای تعیین ارتفاع عنصر مستطیلی در زیر بازه i -ام می توان یکی از نقاط کرانی زیر بازه، مانند e_i را در نظر گرفت که برای محاسبه ارتفاع نیازمند تعیین مختصات نقطه تلاقی خطی هستیم که از نقطه e_i عبور کرده و بر خط مایل، عمود است. بنابراین اگر معادله این خط را با y نشان دهیم خواهیم داشت:

$$y_i = -\frac{x}{m} + \frac{m^2 + 1}{m} x_i + h$$

که برای تعیین مختصات نقطه تلاقی این خط و منحنی نمایش $f(x)$ بایستی دستگاه زیر حل گردد:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{m} + \frac{m^2 + 1}{m} x_i + h \\ y = f(x) \end{cases}$$

اگر نقطه تلاقی را با M نشان دهیم با توجه به دستگاه فوق و حل معادله $f(x) = -\frac{x}{m} + \frac{m^2 + 1}{m} x_i + h$ طول نقطه تلاقی تابعی از x_i مانند $g(x_i)$ خواهد بود و در نهایت مختصات نقطه تلاقی بصورت زیر تعیین می گردد:

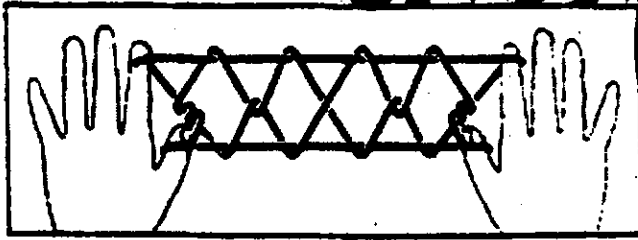
$$M(g(x_i), f(g(x_i)))$$

بنابراین ارتفاع عنصر مستطیلی در زیر بازه i -ام بصورت

$$\sqrt{(g(x_i) - x_i)^2 + (f(g(x_i)) - (mx_i + h))^2}$$

ریاضیات درخ بازی

نویسنده: مهناز پاک خصال
دبیر ریاضی منطقه ۴- تهران



احتمالاً شما نیز هنگام نوجوانی در شبهای طولانی زمستان و ایام تعطیل تابستان نخ بازی کرده اید و از اشکالی که به دست می آید، متعجب شده اید. این موضوع فقط مختص ایرانیان نیست و اساساً در بین هر ملتی که دارای سابقه فرهنگی زیادی باشد، بازی بانخ یکی از هنرهای آنان خواهد بود.

اکثر الگوهای نخ که وجه تشابهی خیالی با حیوان یا شیء دارند، به همان اسم نامگذاری می شوند و حتی روحیه و حرکات آنها نیز ضمن عمل مجسم می شود. از میان الگوها نیز بعضی ها آنچنان پیچیده و بغرنج می باشند که هنوز راه حل ساختن آنها حتی از روی نقشه های قدیمی آشکار نشده است.

کاپیتان ویلیام بلی در یادداشت های مسافرت خود در سال های ۱۷۸۷-۱۷۹۰ از رواج بازی بانخ در بین بومیان تاهیتی سخن به میان آورده است. جامعترین کتاب در این زمینه در سال ۱۹۰۶ با عنوان «الگوهای نخ و طریقه ساختن آنها» به چاپ رسیده است. در این کتاب که بیش از چهار صد صفحه دارد، تصاویر و طرز ساختن متجاوز از یکصد الگوی

مختلف تشریح شده است که می تواند منبع جالبی برای پر کردن اوقات فراغت باشد.

علاقه به این بازیها و عمومی شدن آنها نیز طی دوره های مختلف در نوسان بوده است یعنی گاهی این بازیها به فراموشی سپرده شده اند و گاهی نیز آنقدر مطالب عمومیت یافته که به روزنامه ها کشیده شده است و آنان جهت تأمین نظر خوانندگان خود، به این مقوله پرداخته اند.

جذابیت موضوع گره ها، اتصالات و ارتباط بین آنها بیش از هزار سال است که ذهن افراد ریاضی اندیش را بخود معطوف داشته است. اما در دهه ۱۹۲۰ بود که ریاضیدانان با تشخیص گره ها، انواع گره ها و مفهوم گره و اتصال، شروع به چالش با این موضوع نمودند. این بررسیها منجر به علم توپولوژی گردید که امروزه بعنوان یک ابزار بسیار قوی در دست ریاضیدانان بشمار می رود.

در دهه گذشته تئوری گره ها وسعت زیادی یافته که اکثر آن را مرهون ابداع جونز^۱ است که امروزه آن را به عنوان چند جمله ای جونز می شناسند. در این چند جمله ای

مشخصات یک گره توسط یک فرمول جبری بیان می شود. این بدان معنی است که اگر دو گره دارای چند جمله ای های متفاوت باشند از لحاظ توپولوژی بایکدیگر تفاوت دارند و نمی توانند به یکدیگر تبدیل شوند. البته این غیر قابل تبدیل بودن گره ها قبلاً کشف شده بود ولی چند جمله ایهای جونز اولین گروه از نسل جدید فوق مستقل ها^۲ را ارائه کرد که اینکار بسیار بهتر از کارهای پیشینان بود.

با این وجود باید توجه داشت که چند جمله ایهای فوق نیز نمی توانند به تمام سؤالات ما درباره گره ها و اتصال بین آنها پاسخ دهند. البته شاید بعضی از این سؤالات به توپولوژی نیز مربوط نباشند. در این مقاله به بعضی از این سؤالات پرداخته می شود و اساساً سعی در آن است که بصورت تفریحی به چالش با مسائل ریاضی پرداخته شود. شاید تعجب کنید ولی در طی اینکار یک بازی دوران کودکی که شاید همه شما نیز بازی کرده باشید، مورد بررسی قرار می گیرد و آن چیزی نیست جز نخ بازی (کش بازی).

هدف از این بررسی آن است که افراد بازوایای ریاضی این بازی آشنا

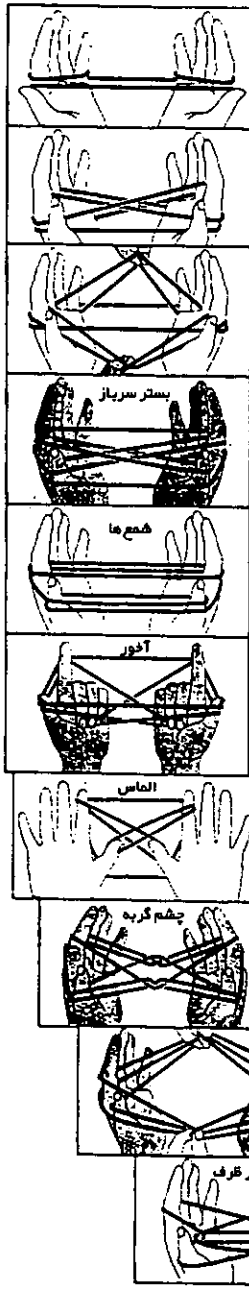
شوند. در این بازی هشت شکل مجزا بوجود می آید. البته به همین صورت می توان اشکال زیادی ایجاد کرد، فقط باید نخ را از بین انگشتان دودست رد کرده و یا به دور آنها پیچاند. این بازی نشان می دهد که توپولوژی حلقه های نخ (مثلاً تعداد گره ها) نمی تواند در مورد خواص اشکال هندسی حاصله توضیحی دهد.

احتمالاً باید بتوان صورت جبری نحوه تغییرات در این بازی را طی حالات مختلف بیان نمود. یکی از ابتدایی ترین موفقیت های کسب شده در زمینه گره ها، توسط امیل آرتین ارائه گشت.

طبق تعریف، یک بافته^۲ عبارتست از سیستمی از نخ ها (یا منحنی ها) که به موازات یکدیگر می باشند. البته این نخ ها یا منحنی ها حق دارند که به دور دیگری بچرخند، همانند حالتی که در موهای بافته شده اتفاق می افتد. آرتین در این زمینه جبری را بوجود آورد که می توانست بافته هایی را که از لحاظ توپولوژیکی شبیه به یکدیگر نبودند، تشخیص دهد. این بدان معنی بود که اگر دو بافته دارای فرمول جبری یکسان باشند معادل هستند و در غیر این صورت معادل یکدیگر

نیستند. در اینجا باید گفت همین ایده های آرتین بوده که انگیزه های جونز را تشکیل داده است.

از چندین جهت اشکال بوجود آمده در نخ بازی شبیه بافته ها می باشند. در عوض در انتهای یک بافته مجموعه ای از انگشتان قرار دارد که نخ



به دور آن می پیچد. البته قابل ذکر است که حرکت های بازی بانخ، غنی تر از حرکت های تئوری (ایده) آرتین است چون مثلاً چندین نخ می تواند به دور یک انگشت پیچد. از این جهت است که برای توصیف شکل های بوجود آمده در بازی بانخ، جبر بافته ها کافی نمی باشد. از سوی دیگر تمامی این شکل های بوجود آمده از لحاظ توپولوژیکی معادل یک حلقه بدون گره می باشند.

برای نخ بازی شما به یک تکه نخ صاف بطول حدوداً یک متر نیاز دارید که باید دو سر آن را بهم گره بزنید و البته به یک همبازی نیز احتیاج دارید. فکر کنید که حمید و مجید این بازی را انجام می دهند. ابتدا مجید بازی را آغاز می کند که وضعیت اولیه در شکل نشان داده شده است. همان طور که شاید شما نیز بدانید، یک حرکت عمومی وجود دارد که تقریباً همیشه تکرار می شود و بازی نیز از همان جا شروع خواهد شد. همان طور که در شکل نیز دیده می شود، روی دستان مجید دو حالت ضربدری بوجود آمده است که حمید این دو ضربدر را با دودست خود از بالا گرفته و به سمت بیرون می کشد و از روی لبه های کناری به سمت پایین برده و از وسط به سمت بالا می آورد. همان طور که حمید دست های خودش را به کنار برده و انگشت نشانه و شست خود را آزاد می کند، مجید نیز نخ را شل تر خواهد کرد تا عمل انتقال

به دستان حمید انجام شود. در این وضعیت شکل جدید روی دستان حمید بوجود آمده است. اصطلاحاً به این شکل نام بستر سرباز^۴ اطلاق می شود. حال اگر بار دیگر حمید همان حرکات حمید را انجام دهد، شکل جدیدی حاصل خواهد شد که به آن نام شمع ها^۵ اطلاق شده است. بار سیدن به شکل بعدی باید حرکت جدیدی انجام داد. حمید باید با انگشتان کوچک خود نخ های داخلی را به سمت مخالف بکشد و انگشت شست و نشانه خود را از زیر وارد مرکز شکل نماید. این حرکت نیز همانند همان حرکت عمومی است فقط حالت ضربدري نخها وجود ندارد. در نهایت حمید انگشتان شست و از یک سو انگشتان اشاره خود را باز کرده و نخ را به سمت بیرون فشار می دهد و از سوی دیگر انگشتان کوچکتر خود را می بندد. شکل حاصله یک آخور^۶ خواهد بود. سوای از بحث ریاضی، این شکل شبیه همان شکل اول است فقط وارونه شده است. برای مرحله بعدی بهتر آن است که ضربدرها را از پایین گرفته و همان حالت عمومی را انجام دهید. شکل حاصله یک بستر سربازی وارونه است که اصطلاحاً به آن شکل الماس^۷ گونه گویند.

اجرای حرکت عمومی باعث خواهد شد که یک شکل شبیه چشم گربه^۸ به وجود آید. حرکت بعدی اندکی متفاوت است یعنی نخها

به عقب کشیده می شوند ولی مجدداً از زیر به سمت بالا نخواهد آمد و شکلی را به وجود می آورند که به آن نام «ماهی در ظرف»^۹ اطلاق می شود.

شکل آخر اندکی گمراه کننده است. حمید از انگشتان کوچک خود برای جدا کردن نخهای مرکزی استفاده کرده و ضربدرهای به وجود آمده را مانند حالت های قبلی می گیرد. سپس انگشتان اشاره و شست را به سمت پایین و بالا حرکت می دهد تا شکل هشتم یعنی شکل ساعت^{۱۰} حاصل شود. البته ایده ای در مورد وجه تسمیه این شکل نداریم شاید یکی از خوانندگان به ما بگوید!!!

اگر شما حرکت های دیگری را انجام دهید شاید بتوانید ترتیب این شکلها را بر هم زده و برای مثال از همان شکل اول به شکل شمعها برسید و یا از بستر سرباز مستقیماً به حالت چشم گربه ای دست یابید. محاسبات خوب برای این بازی قادر است که تمامی این تغییرات را به زبان ریاضی بیان دارد. مثلاً دو حرکت خاص ممکن است همان نتیجه عکس شدن توان را داشته باشد. هدف این تنویری باید توصیف حالت های واقعی اشکال نخ باشد و نباید صرفاً تپولوژی آنها را بیان کند. برای بیان حالت های رخ داده می توان وضعیت را بر اساس انگشتان بیان نمود؛ مثلاً بیان کرد که حلقه از انگشت وسط دست راست به فلان انگشت در دست چپ منتقل شده است و غیره.

البته یک نفره نیز می توان به اشکال جالبی رسید. در انجام محاسبات مربوط به نخ بازی قبلی بهتر است از این مورد شروع کرد. برای اینکه به جذابیت موضوع پی ببرید در اینجا شکل الماس های هندی^{۱۱} را نشان می دهیم. این نیز به همان صورت بازی قبلی شروع می شود ولی دقیقاً مثل آن نیست (به شکل صفحه بعد رجوع کنید). شکل های ۱ و ۲ و ۳ بخوبی بیان کننده حرکات اولیه می باشند. در مرحله بعدی با آزاد کردن نخ از شست ها و کشیدن دست ها به طرفین تصویر ۴ حاصل می شود. برای مرحله بعدی باید پشت دست ها را به طرف خود چرخاند و با انگشت شست خود نخ را که زیر سایر رشته ها قرار دارد، به طرف خود کشید که مسیر این کار را شکل ۴ نشان داده است و حاصل کار شکل ۵ خواهد بود. حال شست ها را به سمت داخل خم کرده و با پشت آنها رشته های نشان داده شده در شکل ۵ را به سمت بیرون می کشیم که حاصل این کار شکل ۶ خواهد بود.

حال باید انگشتان کوچک را از نخ آزاد کرد و دست ها را بازتر کرد که نتیجه شکل ۷ است. حال باید دستان را بسمت داخل بچرخانیم به نحوی که کف دست ها به سمت ما باشد حال انگشت کوچک را از روی نخ متصل به انگشت نشانه عبور داده و رشته بعدی، یعنی رشته ای که دور انگشت شست است را با پشت انگشتان

بانخ تنها مشتی بوده اند نمونه خروار و برای اطلاعات بیشتر می توانید به کتاب الگوهای نخ و طریقه ساختن آنها نوشته کارولین جین^{۱۲} که در سال ۱۹۷۵ توسط انتشارات دوور^{۱۳} منتشر شده است مراجعه کنید. باید توجه داشت که با تمام قابلیت های سرگرم کنندگی این شکل ها، توپولوژی هنوز نتوانسته است بر این بازی بچگانه باستانی احاطه پیدا کند. نویسنده اعتقاد راسخ دارد که نظرات موجود در توپولوژی می تواند با این اشکال چالش نماید. بنابراین شما می توانید این دعوت به مبارزه را پذیرفته و حساب نخ بازی را اختراع کنید و یا آنکه صرفاً از ساختن این اشکال با یک تکه نخ خوشحال شده و باز آن را تکرار کنید.

زیر نویس ها

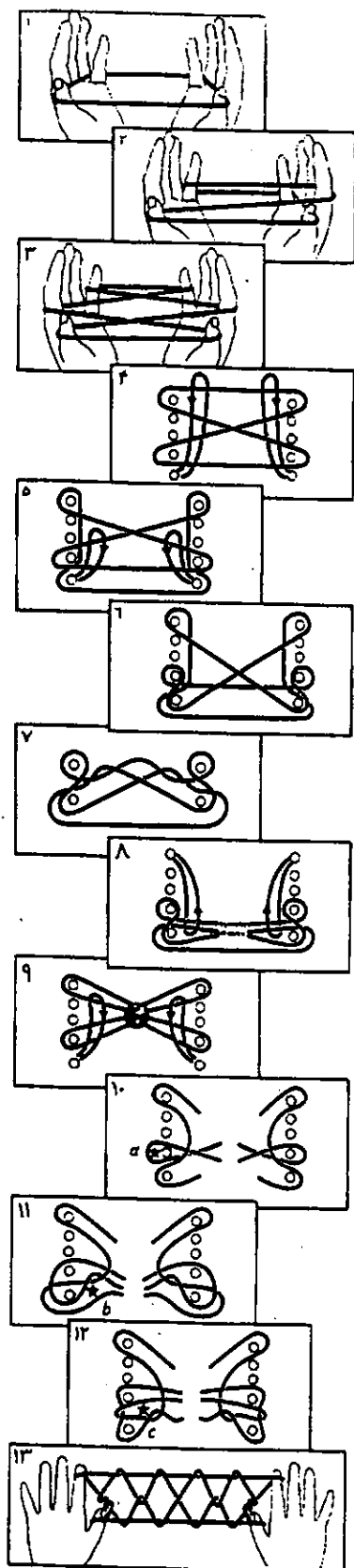
1. vaughan Jones
2. super invariants
3. braid
4. soldier's bed
5. candles
6. manger
7. diamonds
8. cat's eye
9. fish on dish
10. clock
11. Indian Diamonds
12. caroline F.Jayne
13. Dover publications

مراجع

- ۱- ریاضیات در سرگرمی ها - ترجمه هرمز شهریاری - انتشارات فردوس - ۱۳۶۸
- ۲- تفریحات ریاضی - ترجمه هرمز شهریاری - کتابهای سیمرغ - ۱۳۵۶
3. Scientific American, December 1997.

کوچک می گیریم و دست ها را به نحوی قرار می دهیم که روبروی هم باشد، حال انگشت شست را از نخ ها آزاد می کنیم. شکل حاصل، شکل ۹ یا حالت پروانه مانند است، که یک گره عجیب و غریب نیز در مرکز آن قرار دارد. برای رسیدن به شکل ۱۰ شست خود را خم کرده و از روی نخ های انگشتان سیابه (نشانه) عبور داده و با پشت آنها ریسمان ماقبل آخر (همانند شکل ۹) را بلند کرده و دست را به حالت اولیه بازی می گردانیم. در این مرحله کاری را انجام می دهیم که تاکنون مرسوم نبوده است یعنی با انگشتان شست و نشانه دست راست نقطه a در شکل ۱۰ را گرفته و به انگشت شست دست چپ منتقل می کنیم و همین عمل را روی دست چپ انجام می دهیم، شکل ۱۱ حاصل خواهد شد. برای رسیدن به شکل ۱۲ نخ زیرین انگشت شست چپ را با انگشتان شست و نشانه راست در نقطه b گرفته و از روی نخ فوقانی عبور داده و آزاد می کنیم و همین اعمال را برای دست راست انجام می دهیم. حال انگشتان نشانه خود را خم کرده و داخل مثلثی که با علامت C در شکل ۱۲ نشان داده شده است فرو برده و نخ انگشتان کوچک را رها می کنیم و دست ها را به نحوی می گیریم که شست آنها به طرف ما باشد، شکل نهایی ۱۳ حاصل می شود.

مثال های بازی دو نفره و یک نفره





نهمین کنگره بین المللی آموزش ریاضی

ICME 9

گزارشگران:

شهرناز بخشعلی زاده، دفتر برنامه ریزی و تألیف

سویلا غلام آزاد، دفتر برنامه ریزی و تألیف

سخنرانی) و گروه های کاری و گروه های مطالعاتی به صورت موازی برگزار شد که امکان شرکت در تمام جلسات برای هر شرکت کننده وجود نداشت. لذا شرکت کنندگان با توجه به زمینه کاری و نیاز برنامه آموزشی ریاضی در تعدادی از جلسات موازی و گروه های کاری و گروه های مطالعاتی شرکت نمودند.

عناوین گروه های کاری عبارت بودند از:

- آموزش ریاضی قبل از دبستان و دبستان
- آموزش ریاضی دوره ی راهنمایی
- آموزش ریاضی دوره ی متوسط
- آموزش ریاضی دانشگاه و دو ساله ی کالج
- آموزش بزرگسالان و آموزش مادام العمر
- آموزش قبل و ضمن خدمت معلمان ریاضی
- تحقیق، عمل، تئوری آموزش ریاضی
- ارتباطات و زبان در آموزش ریاضی
- ارزش یابی در آموزش ریاضی
- استفاده از تکنولوژی در آموزش ریاضی
- ابعاد سیاسی، اجتماعی آموزش ریاضی
- تاریخ و فرهنگ در آموزش ریاضی

عناوین گروه های مطالعاتی عبارت بودند از:

- تدریس و یادگیری جبر
- تدریس و یادگیری هندسه
- تدریس و یادگیری حسابان
- تدریس و یادگیری آمار
- مواد آموزشی و کمک آموزشی در آموزش ریاضی

کنگره ی جهانی آموزش ریاضی با هدف توسعه و پیشرفت ریاضی و تعمیم و انتقال نوآوری ها در امر آموزش و شیوه های جدید آموزش و تدریس در سطح جهان شروع به کار نمود. اولین اجلاس کنگره در سال ۱۹۶۹ در لیون فرانسه با شرکت ۶۰۰ نفر محقق و معلم ریاضی برگزار شد. در طول سه دهه که از عمر برگزاری این کنگره می گذرد، تبادل نظرات و تضارب آرا میان معلمان و محققان ریاضی در بهبود کار معلمان و ارتقاء سطح حرفه ای آنان بسیار مهم بوده است. کمیسیون جهانی تدریس ریاضی (ICMI) به عنوان یکی از سازمان های طرف مشورت یونسکو هر چهار سال یک بار برگزاری کنگره ICME را به یکی از انجمن های وابسته واگذار می کند.

با توجه به وضعیت کنونی ریاضی در سطح کشور و نظر به بازنگری برنامه های آموزش عمومی ریاضی و با هدف آگاهی از آخرین تحقیقات و آشنایی با روش های نوین آموزشی لزوم شرکت کارشناسان دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی در نهمین کنگره ی بین المللی آموزش ریاضی که از تاریخ ۷۹/۵/۱۰ لغایت ۷۹/۵/۱۷ در ژاپن برگزار می شد، احساس شد.

زبان رسمی کنفرانس انگلیسی بود. در این اجلاس برنامه های مختلفی از قبیل سخنرانی های افتتاحیه و اختتامیه، میزگرد بین المللی، سخنرانی های عمومی، سخنرانی های موازی، گروه های کاری و گروه های مطالعاتی، نمایشگاه کتاب و پوستر و کارگاه های آموزشی، بازدید از مدارس و ... تدارک دیده شده بود.

حضور در میزگرد بین المللی، سخنرانی های عمومی، افتتاحیه و اختتامیه برای تمام شرکت کنندگان ممکن بود. لکن به دلیل تنوع موضوعات مورد بحث، سخنرانی ها (حدوداً ۴۵۰)



قدرت را در کلاس بر هم می زند. دانش آموزان بیش تر از معلمین خود با ابزار تکنولوژی آشنایی دارند. پس معلمین باید به آموزش و یادگیری تکنولوژی توجه کنند. TIMSS منبع خوبی برای مطالعه است. باید بر درک مفاهیم و تفکر منطقی تأکید شود. با توجه به کاهش ساعت درس ریاضی در برخی کشورها، اهمیت روش تحقیق بیش تر به چشم می خورد. معلمین باید در استفاده از تکنولوژی مهارت پیدا کنند.

۲- نقش ریاضیات در آماده سازی دانش آموزان برای محیط های کاری: محیط های کاری مفاهیم و معانی مختلفی دارند. در حال حاضر محیط های کاری، محیط های همراه با ابزار تکنولوژی می باشند. پس ما باید توانایی یادگیری درباره ی علوم و دانش های جدید را به دانش آموزان بدهیم. زیرا حتی نمی توان گفت که محیط های کاری در آینده چگونه خواهند بود، پس برنامه ی درسی باید بر توانایی که دانش و تفکر ریاضی می تواند ایجاد کند، تأکید داشته باشد.

۳- معلمین ریاضی دوره ی ابتدایی چه اندازه ریاضی باید بدانند؟ پیشرفت در آموزش روی آموزش اثر گذاشته است. معلمین باید مهارت های بیش تری کسب کرده و باید توانایی تدریس را افزایش داد. باید معلمین محقق داشته باشیم و تأکید بر این که چگونه باید به ریاضی دست پیدا کرد. جنبه های شناختی را باید به معلمین شناساند.

۴- آموزش در متن زندگی: در یادگیری باید از کاربردهای ریاضی در زندگی استفاده کرد ولی باید توجه داشت که کاربردها در زندگی چه کسی مطرح است. کاربردها در زندگی واقعی دانش آموز، کدام دانش آموز؟ معلم، کدام معلم؟ ... در این راستا باید از قدرت و تأثیر مراکز و منابع اجتماعی و عمومی در بهبود ریاضی بهره برد.

○ ○ ○ ○ سخنرانی های عمومی ○ ○ ○ ○

۱- موضوعات کلیدی و روش های تحقیق در آموزش ریاضی

□ سخنران: موگن نیس از دانمارک

به نظر می رسد که در راستای تبیین، توصیف و بحث روی موضوعات و روش های تحقیقات در آموزش ریاضی، نکات مورد توجه متنوع و بسیاری وجود دارد. در این سخنرانی سه

- آموزش راه دور در آموزش ریاضی
- استفاده از چند رسانه ای ها در آموزش ریاضی
- مدل سازی ریاضی و ارتباط بین ریاضی و دروس دیگر
- بافت های ریاضی و علوم ریاضی و انعکاس آن ها بر آموزش ریاضی
- حل مسئله در آموزش ریاضی
- اثبات و اثبات کردن در آموزش ریاضی
- یادگیری ریاضی و فرآیندهای شناختی
- ساخت گرایی در آموزش ریاضی
- آموزش ریاضی برای کودکان با نیازهای خاص
- خلاقیت در آموزش ریاضی و آموزش دانش آموزان با استعدادهای خاص
- آموزش ریاضی و عدالت و تساوی
- رقابت های ریاضی و آموزش ریاضی
- آزمون های ورودی و عمومی در آموزش ریاضی
- ریاضیات قومی
- موضوعات آموزش ریاضی در کشورهای آسیایی
- TIMSS و مطالعات تطبیقی در آموزش ریاضی

گزارش میزگرد بین المللی

- مدیر ناظر: رایوسوک ناگاوکا (ژاپن)
- موضوع: نقش ریاضیات در آموزش عمومی قرن ۲۱ در راستای حرکت سال جهانی ریاضیات-۲۰۰۰
- هدف: آگاهی عمومی برای جلب توجه عموم به آخرین تحقیقات و وقایع در آموزش ریاضی
- شرکت کنندگان حضوری: هیمان باس، امریکا/ گیلالدر، استرالیا/ پی نیگ بی، سنگاپور/ نوزاکی آکی هیرو، ژاپن
- شرکت کنندگان از طریق ماهواره: بروس آلبرتز، آمریکا/ آریما اکتیو، ژاپن/ تین هنگ، سنگاپور

خلاصه عناوین مورد بحث:

- ۱- استفاده از IT (تکنولوژی اطلاعات): باید اطمینان حاصل نمود که دانش آموزان با استفاده از IT توانایی پرداختن به زندگی واقعی را به دست آورده اند و برای این کار نیاز به معلمینی آموزش دیده داریم. در این راستا باید دقت نمود تا دانش آموزان با به دست آوردن پاسخ به کمک ابزار تکنولوژی بدون درک صحیح از مسئله قانع نباشند. تکنولوژی تعادل



خارج سیستم مدرسه تحمیل شود بلکه باید بر پایه‌ی توانایی‌های خود به خود درونی سیستم مدرسه ساخته شود. در نتیجه‌ی این دیدگاه سیستماتیک تکاملی از تغییر و تحول، معلمین نباید فقط به عنوان استفاده‌کنندگان ساده از نتایج تحقیقات در نظر گرفته شوند، بلکه به عنوان همکارانی فعال در فرآیند رشد دیده شوند.

۴- چگونه آموزش ریاضی، سیستم‌های استدلال دانش‌آموزان را رشد می‌بخشد

□ سخنران: ترزینا نونس از برزیل/ انگلیس

کودکان یادگیری در مدرسه را از زمانی آغاز می‌کنند که قبلاً توانایی حل برخی از مسائل را از طریق عینی ساختن آن مسائل دارند. آن‌ها در مدرسه می‌توانند ابزارهای ریاضی و فعالیت‌های حل مسئله‌شان را با هم یکی کنند و سیستم استدلال‌های قوی‌تر بسازند. حل‌کنندگان مسئله، اگر دسترسی محدودی به فرهنگ و ماهیت ریاضی داشته باشند، ممکن است بتوانند به خوبی استدلال کنند ولی به مسائلی که حل می‌کنند محدود می‌شود. بر عکس آن نیز ممکن است. یعنی دانش‌آموزانی که ابزارهای ریاضی را شناخته‌اند ولی آن‌ها را در فعالیت‌های استدلالی خود در نیامیخته‌اند که آن‌ها نیز ممکن است محدود به مسائلی شوند که می‌توانند حل کنند. در این سخنرانی به تقویت رشد و استدلال دانش‌آموزان با یادگیری ریاضی از طریق برخورد آن‌ها با اجزاء نمادین فکر در فرهنگ ریاضی اشاره شد.

○ ○ ○ ○ سخنرانی‌های موازی ○ ○ ○ ○

۱- چشم‌اندازی از تدریس ریاضیات در دوره ابتدایی بر اساس تحقیقات

□ سخنران: جری پکر از آمریکا

ریاضیات دوره‌ی ابتدایی در بیش‌تر کشورها بر اساس توصیه‌های مطابق با اسناد ملی هر کشور در حال تغییر می‌باشد. یک سخن مشترک در تمام این اسناد، انتقال از «آموزش به عنوان مداوا و یادگیری به عنوان اثر آن» به «نگاه به دانش‌آموزان به عنوان سازنده‌های فعال ریاضی» است. در این جلسه، چشم‌اندازی از این که ریاضیات مدرسه در دوره‌ی ابتدایی چه

نکته مورد توجه و بحث قرار گرفت:

● کدام موضوعات و تحقیقات در آموزش ریاضی عمومیت بیش‌تری دارند و این تحقیقات و موضوعات به چه موضوع یا منظوری اشاره دارند؟

● ویژگی‌های روش‌های تحقیق محققین در این زمینه چیست و چگونه این روش‌ها با پاسخ‌های به دست آمده ارتباط پیدا می‌کنند.

● مشکلات و چالش‌های کنونی و آینده در زمینه‌ی آموزش ریاضی.

۲- اهداف آموزش ریاضی و شناخت اصول ریاضیات کاربردی

□ سخنران: هیروشی فوجیتا از ژاپن

آموزش ریاضی باید در دانش‌آموزان سواد ریاضی را پرورش داده و قدرت تفکر ریاضی که در زندگی، شغل و آینده‌ی آن‌ها تأثیر دارد را افزایش دهد. بنابراین بررسی ماهیت و شناخت اصول ریاضیات کاربردی در رابطه با آموزش ریاضی ارزشمند می‌باشد. در این جلسه نکات زیر مورد بررسی قرار گرفت:

● نمی‌توان به ریاضیات کاربردی به طور مجزا و منفرد نگاه کرد بلکه باید ارتباط آن را با دیگر موضوعات نزدیک نمود.

● مفاهیم، روش‌ها و اهداف لغات کلیدی برای توصیف شناخت اصول ریاضیات کاربردی هستند.

● در ریاضیات کاربردی از کامپیوتر نه فقط به عنوان ابزاری برای محاسبه و به دست آوردن نتیجه بلکه به عنوان وسیله‌ای برای برانگیختن حس درک و بصیرت استفاده می‌شود.

● برای آن که به قله‌ی جدیدی در ریاضیات دست پیدا کنیم، باید مفهوم ریاضی کاربردی به عنوان جزئی از علوم ریاضی حفظ شود.

۳- رشد و توسعه‌ی آموزش ریاضی در یک فرآیند سیستماتیک

□ سخنران: اریک ویتان از آلمان

آموزش و یادگیری ریاضیات فرآیندهای اجتماعی پیچیده‌ای هستند. بنابراین رشد و توسعه‌ی آموزش ریاضی نمی‌تواند از



دیگری به تجربیات تدریس در مقیاس کوچک، جایی که رویکردهای مبتنی بر تئوری‌ها توسط تعداد معدودی از معلمان به اجرا درمی‌آید. در این جلسه به نتایج برخی تحقیقات روی مدارس ابتدایی انگلیس اشاره شد.

۵. دانش دنیای واقعی و مدل‌سازی مسائل مدرسه‌ای

□ سخنران: لیون فرشال از بلژیک

در طول سال‌ها این بحث بوده است که مسائل مطرح شده در مدارس کنونی، حرکت دانش‌آموزان را در جهت مدل‌سازی ریاضی پرورش نمی‌دهند. انتقاد اصلی در این ارتباط به قرار زیر است:

به جای آن‌که به زمینه‌های مورد توجه به شکل گرایانه توجه و عمل شود و یا این‌که دانش‌آموزان را وادار کنیم تا از درک و دانش و تجربیات خود در کاربرد مسائل و مراحل مختلف حل مسئله استفاده کنند، مسائل محاسباتی مدرسه‌ای چون تکالیف و معماهای تصنعی که به دنیای واقعی نیز ارتباطی ندارند به دانش‌آموزان ارائه می‌شوند. در این جلسه به نتایج برخی مطالعات انجام شده در زمینه‌ی «توقف درک و معنی بخشی» در حل مسائل در فرهنگ آموزش ریاضی و نیز طرح‌هایی برای غلبه بر این مشکل ارائه شد.

۶. محاسبات مقدماتی بر اساس ساخت گرای پیازه

□ سخنران: کنستانس کامی از آمریکا

پیاژه به صورت علمی نشان داد که کودکان به مفاهیم اعداد از طریق ساخت‌های درونی دست پیدا می‌کنند. بر اساس این تئوری، سخنران فرض کرد که کودکان باید بتوانند مفاهیم جمع کردن، تفریق کردن، ضرب و تقسیم را حتی بدون هرگونه کتاب درسی، کتاب کار، تمرینات تکراری و الگوریتم‌های سستی در خود بسازند. سپس به ساختن هدف‌ها در مقابل هدف‌های تعالیم سستی اشاره نمود و چگونگی استفاده‌ی سه فعالیت به جای کتاب درسی اشاره شد. این فعالیت‌ها عبارتند از: مباحثه روی وضعیت‌های روزمره (به طور مثال: رأی دادن)، مسائل کلامی و بازی‌ها. داده‌هایی برای نشان دادن این‌که رویکرد ساخت‌گرایی نتایج کاملاً بهتری نسبت به رویکرد

ویژگی‌هایی باید داشته باشد اشاره شد. در این جلسه به اصول سازمان‌دهی تدریس، ارزش‌یابی و آموزش معلم اشاره شد.

۲. دشواری‌های آماده‌سازی معلمان برای تدریس

ریاضی در چهارچوب ساخت‌گرایی

□ سخنران: باتریس دی‌آمبروز از آمریکا

در این جلسه درک دانشجو معلمان از تفکر ریاضی دانش‌آموزان مورد بررسی قرار گرفت. در یک جو ساخت‌گرا معلم باید به دانش‌آموزان گوش دهد تا بفهمد آن‌ها چگونه درک می‌کنند تا بتواند محیط و فضایی برای یادگیری طراحی کند و برای دانش‌آموزان فرصتی فراهم آورد تا بتوانند ایده‌های ریاضی را بفهمند. سپس این سؤال مورد بررسی قرار گرفت که اجزاء یک برنامه‌ی آموزش معلم چه باید باشند تا معلمان بتوانند یادگیری را تسهیل نمایند.

۳. زمانی که ماشین (کامپیوتر، ماشین حساب) کارها و اعمال ریاضی را انجام می‌دهند، معلم‌ها باید چه آموزش دهند؟

□ سخنران: جان کنلی از آمریکا

در اواخر دهه‌ی ۱۹۸۰ ماشین حساب‌های رسام تحولی در آموزش و استفاده از نمودارها ایجاد کردند. به جای آن‌که نمودارها «پاسخ» باشند، شروعی برای تمرکز روی «بحث بر روی پاسخ» شدند. در اواخر دهه ۱۹۹۰ کامپیوترهای شخصی چنین تحولی را در جبر ایجاد نمودند.

حال باید دید پاسخی که ما از دانش‌آموزان انتظار داریم چیست؟

۴. تحقیقات راجع به تدریس مؤثر ریاضی به کودکان

۶ تا ۱۳ ساله به ما چه می‌گویند؟

□ سخنران: مارگريت براون از انگلیس

دو سنت تحقیقاتی با خصوصیات جداگانه موجود می‌باشد: یکی به مطالعات در مقیاس‌های بزرگ در جهت بررسی ارتباط آماری بین نتایج آزمون‌ها و عوامل قابل اندازه‌گیری در ارتباط با معلم یا روش تدریس توجه دارد و



ستی دارد، ارائه شد.

۷- غلبه بر موانع دموکراتیزه کردن آموزش ریاضی

□ سخنران: آلن بیشاپ از استرالیا

جامعه‌ی مدرن، دانش ریاضی خیلی بیش‌تری را نسبت به گذشته از شهروندان تقاضا می‌کند. بر این اساس چالش اصلی آموزشگران ریاضی که به مقولات دموکراسی علاقه‌مند هستند معطوف به این موضوع گشته که چگونه آموزش ریاضی مناسبی برای بیش‌ترین تعداد شهروندان بر اساس اصل عدالت آموزشی تأمین کنند. در این سخنرانی ایده‌ها از منظر تحقیقات انجام شده ارائه گردید و تأکید شد که تحقیق در آموزش ریاضی اساس توسعه‌ی این رشته است که از طریق آن حمایت عقلانی عمده در مقابل کوتاه‌نظران و مطالبات عموم مردم از سیاستگذاران آموزشی تأمین می‌شود.

۸- استانداردهای ملی، کنترل محلی برنامه‌ی درسی:

جا انداختن جریان آموزش ریاضی در ایالات متحده

□ سخنران: جوآن فرینی - مآندی از آمریکا

در آمریکا، کشوری با بیش از ۱۴۰۰۰ ناحیه‌ی آموزشی، ۲/۷ میلیون معلم و ۴۷ میلیون دانش‌آموز مدارس عمومی، آموزش عمومی به عنوان موضوع مورد بحث تصمیم‌سازان محلی و مسئولیت اساسی ایالات باقی است. تعامل بین خط مشی‌ها و ابتکارات آموزش ریاضی محلی، ایالتی و ملی، سیر تاریخی جالبی داشته‌اند. در این سخنرانی تأثیر استانداردهای ملی ریاضی (چهار سند استانداردهای تولید شده توسط انجمن ملی معلمان ریاضی [NCTM]) در طول دهه‌ی گذشته، بررسی شد. به ویژه، تعامل پیچیده‌ی بین اسناد ملی تهیه شده مانند آن چه توسط NCTM تولید شده و تلاش‌هایی که برای بهبود تدریس ریاضی در همه‌ی سطوح انجام شده بود مورد توجه قرار گرفت.

۹- اهمیت اثبات در آموزش ریاضی

□ سخنران: گیلانا از کانادا

در ابتدا دلایل آن که چرا اثبات باید نقش مهمی در برنامه‌ی درسی ریاضی داشته باشد، با تأکید بر اهمیت آن در ارتقاء درک

و فهم مورد بررسی قرار گرفت. بعد از نگاهی به بعضی مشکلات در تدریس اثبات، در مورد رهیافت‌ها و اکتشاف به عنوان چالش‌های ممکن برای اهمیت اثبات در آموزش ریاضی بحث شد. سپس سه فرصت برای تدریس مؤثرتر ریاضیات در حالت کلی و اثبات در حالت خاص به صورت: استفاده از اثبات‌های توضیحی، استفاده از نمایش‌های بصری و استفاده از بحث‌هایی از فیزیک در اثبات‌های ریاضی مورد بررسی قرار گرفت.

● ● ● ● گزارش گروه‌های کاری ● ● ● ●

WG1: آموزش ریاضی در پیش دبستان و دوره‌ی

ابتدایی

همهانگ کنندگان: لیندا شِف فیلد از آمریکا و آن اندرسون

از کانادا

تعداد جلسات: سه جلسه‌ی ۱۲۰ دقیقه‌ای

در هر یک از این جلسات ابتدا دو نفر هر کدام به مدت ۲۰ دقیقه در زمینه‌ی مورد بحث روز سخنرانی کرده، سپس همهانگ کنندگان جلسه، سوالات هدایت‌کننده در زمینه موضوعات مطروحه بیان کرده و معلمین، محققین و شرکت‌کننده‌گان در این گروه کاری روی موضوعات به بحث و گفت‌وگو می‌پرداختند.

جلسه اول

موضوع: درک و ارزش‌یابی تفکر ریاضی کودکان

هدف: درک و شناخت تفکر ریاضی کودکان و تعیین

استانداردهای ارزش‌یابی

سوالات هدایت‌کننده: چگونه می‌توانیم به بهترین روش، استدلال ریاضی کودکان را درک و ارزش‌یابی کنیم؟ از طریق رسمی، ابزارها و روش‌های غیررسمی یا استاندارد؟ هدف اصلی از این کار چیست؟ درک تفکر کودکان یا ارزش‌یابی و ارائه نتایج حاصل؟

□ سخنران اول: بیان تامپسون از انگلیس

عنوان سخنرانی: محاسبات ذهنی و تفکر ریاضی

۱۵ سال دولت‌های موفق به معرفی دامنه‌ی وسیعی از تغییرات در جهت بالاتر بردن استانداردهای آموزش در سیستم



جنبه های استدلال دانش آموزان که باید در فرآیند تصمیم گیری تأثیرگذار باشند عبارتند از:

● توصیف سطوح رشد در یک مفهوم خاص
● تشخیص و تعیین ایده های ریاضی نو در تفکر دانش آموزان به گونه ای که آن ها را بتوانند به وضوح درک کنند، با دیگران به اشتراک بگذارند و رسمیت داده شوند.

● تشخیص و تعیین بدفهمی ها، تناقض ها و ساختارهای محدودکننده در شکل گیری مفهوم یک موضوع خاص در دانش آموزان.

● تشخیص و تعیین ساخت های ریاضی (انواع مسائل) که برای ساخت مفاهیم ریاضی در دانش آموزان مهم و اساسی هستند.

● تشخیص و تعیین وضعیت های مناسب نقطه ی آغاز در خط مشی های یادگیری

● تأثیر زمینه های فرهنگی مختلف کلاس درس در استدلال دانش آموزان

فهرست بالا را می توان در اغلب تحقیقات کنونی در آموزش ریاضی مشاهده نمود. در این سخنرانی سؤالات زیر مطرح شدند:

● آیا طراحان برنامه ی درسی و معلمین این برداشت از یادگیری و ارزش یابی را به عنوان ابزاری در حرفه ی خود به اشتراک می گذارند؟

● اگر ما به این برداشت اعتقاد داشته باشیم، چگونه می توانیم برداشت و ایده ی ارزش یابی عمقی را با معلمین و طراحان برنامه درسی به اشتراک بگذاریم؟

جلسه دوم

موضوع: رشد توانایی و قدرت ریاضی کودکان

هدف: افزایش درک ریاضی کودکان، تشویق در جهت رشد تفکر ریاضی دانش آموزان، استفاده از ابزار مناسب برای رشد استدلال ریاضی.

سؤالات هدایت کننده: چگونه می توان به بهترین وجه، قدرت ریاضی کودکان را رشد داد؟ آیا تکنولوژی نقش مهمی دارد یا خیر؟

□ سخنران اول: اِرنایاکل از امریکا

موضوع: ایجاد محیط ریاضی کلاس درس به گونه ای که بحث و استدلال ریاضی را پرورش دهد.

انگلیس پرداختند. دو نوآوری که به موضوع جلسه مربوط بودند، عبارت بودند از: آزمودن برنامه ی درسی ملی و راهبردهای ملی در زمینه ی سواد ریاضی در انگلیس.

علاوه بر آزمون سنتی GCSE برای ۱۶ ساله ها و آزمون پیشرفته ی A-LEVEL برای ۱۸ ساله ها، تمام کودکان در سنین ۷ و ۱۱ و ۱۴ سالگی به طور رسمی امتحان می دهند. آخرین نوآوری که در تمام مدارس انگلیس به اجرا درآمد راهبردهای ملی در زمینه ی سواد ریاضی بود که طرح آن در دوره ی ابتدایی پیاده شد و به زودی در مدارس دوره ی متوسطه نیز به اجرا درخواهد آمد.

یک جنبه ی مهم این دو نوآوری، نقش محاسبات ذهنی است. در سال ۱۹۹۸ برای اولین بار با استفاده از نوارهای کااست از پیش تهیه شده، محاسبات ذهنی را روی گروه سنی ۱۱ و ۱۴ سال مورد آزمایش و امتحان قرار دادند. قابل ذکر است که هر کدام از این دو نوآوری، رویکرد متفاوتی در ارزش یابی محاسبات ذهنی دارند. تست های ملی جمععی هستند، در صورتی که رویکرد راهبردهای ملی سوادآموزی با تأکید بر تعامل تمامی افراد کلاس در تدریس و سؤالات غنی و بحث ها، ماهیتاً تکوینی هستند. سپس به تحقیقاتی که در انگلستان در زمینه ی راهبردهای جمع و تفریق ذهنی اعداد دو رقمی انجام شده بود، اشاره شد.

□ سخنران دوم: هنلی موری از آفریقای جنوبی

عنوان سخنرانی: ارزش یابی عمیق از استدلال ریاضی کودکان.

یادگیری ریاضی، مجموعه ای از گام ها و فعالیت های دانش آموزان با ساختارهای شخصی و اجتماعی است که مستقیماً بر ساختارهای گذشته آن ها بنا می شوند. پس به کیفیت ساختارهای گذشته، عقیده ی دانش آموزان راجع به ماهیت ریاضی و نیز نوع رفتار مورد انتظار از طرف دانش آموز و انواع تکالیف و وظایف محوله به دانش آموز، محدود می شود. ثانیاً تمایل سیستم آموزشی در دو سطح کلان (طراحی آموزشی) و خرد (کلاس درس) را در قبال برنامه های یادگیری مبتنی بر اطلاعات به دست آمده از چگونگی تفکر دانش آموزان نشان می دهد. (چه این تفکر دقیقه به دقیقه در کلاس درس شکل گرفته باشد و چه در طول دوره ی چهار - پنج ساله توسط سیاست گذاران شکل گرفته باشد).



موضوع: تقویت معلمان در درک و ارزش‌یابی و رشد ریاضیات کودکان از طریق به اشتراک گذاردن افکار کودکان در قبال ایده‌ی درک عمیق و در سطح بالاتری از ریاضیات، شاید چهارچوبی دیگر که بر درک واضح از «نقاط رشد» کلیدی ریاضی در یادگیری کودکان متمرکز است بیش‌تر مورد نیاز باشد. چنین چهارچوبی می‌تواند درک از ریاضیاتی که معلمان باید تدریس کنند را افزایش دهد و عینکی را برای دیدن رشد کودکان بر چشمانشان قرار دهد. در این سخنرانی با آوردن مثالی از پروژه‌ی تحقیقاتی باسودی در استرالیا، توانایی این چهارچوب در درک، ارزش‌یابی و رشد و توسعه‌ی تفکر ریاضی کودکان نشان داده شد. در ابتدای سال تحصیلی، معلمان یک مصاحبه‌ی نیم‌ساعته یک‌به‌یک با دانش‌آموزان برای سنجش عملکرد و تعیین درک ریاضی هر یک از دانش‌آموزان دارند. معلمان در طول سال در مدرسه، مناطق آموزشی و استان‌ها جهت رشد حرفه‌ای خود با هم ملاقات می‌کنند و در این جلسات از تجربیات و راهنمایی‌های یکدیگر بهره‌مند می‌شوند.

□ سخنران دوم: هسین-مای ادیت هوانگ از تایوان
موضوع: تقویت و حمایت معلمان دوره‌ی دبستان در درک و ارزش‌یابی و رشد و توسعه‌ی توانایی‌های ریاضی کودکان در تایوان

در سال‌های گذشته تحول آموزشی به‌طور کامل در تایوان انجام شد. راه‌کارهای برنامه‌ی درسی و ارتباط بیش‌تر برنامه مدارس با دنیای واقعی خارج از مدرسه تأکید داشت. که این برنامه از سال ۲۰۰۱ به اجرا درخواهد آمد. برنامه‌ای که در حال حاضر در تایوان اجرا می‌شود برگرفته از برنامه‌ی درسی ارائه شده در سال ۱۹۹۳ و براساس استانداردهای NCTM (۱۹۸۹-۹۱) می‌باشد. با وجود آن که تفاوت‌هایی در این دو برنامه‌ی درسی وجود دارد، هر دو برنامه دیدگاه جدید ساخت‌گرایی را می‌پذیرند. این دیدگاه مبتنی بر یادگیری مفهومی است و زمانی ایجاد می‌شود که کودکان به‌طور فعال در ساخت اطلاعات براساس تجارب خود شرکت دارند و بین دانسته‌های خود ارتباط برقرار می‌کنند.

دیدگاه‌هایی که براساس آن‌ها می‌توان چگونگی یادگیری دانش ریاضی در کودکان را توضیح داد را می‌توان در برنامه‌ی درسی ریاضی دوره ابتدایی سال ۱۹۹۳ دید. تغییر نقش معلم

با پذیرش دیدگاه تعاملی که در آن مفاهیم زمانی ساخته می‌شوند که افراد با یکدیگر در تعامل باشند، بررسی ماهیت تعامل‌های کلاس ریاضی مهم و اساسی است. توجه صریح به معیارهای اجتماعی و ریاضی-اجتماعی کلاس درس و سخنرانی‌های کلاس می‌تواند به افزایش رشد در مناظره منجر شود. کودکان زمانی که یاد می‌گیرند تا تفکرات خود را برای دیگران توضیح دهند و توجه کنند، استقلال ذهنی خود را رشد و توسعه می‌دهند.

در این سخنرانی به معیارهای کلاس درس اشاره شد و مثال‌هایی از مدارس ابتدایی آورده شد.

□ سخنران دوم: نوبوهیکو نوهادا از ژاپن
موضوع: مطالعه روش رویکرد-باز در آموزش ریاضی مدرسه‌ای

برای بهبود تدریس و یادگیری، مطالعه روی فعالیت‌های کلاس درس و تجزیه و تحلیل راهبردهای دانش‌آموزان و مشکلات آن‌ها در حل مسئله غیرقابل صرف نظر است. به نظر می‌رسد که این راهبردها و مشکلات متأثر از برخی فاکتورهای اجتماعی از قبیل زبان، نمادها و غیره می‌باشند. مطالعاتی برای تعیین دقیق تأثیر روش رویکرد-باز بر تدریس و یادگیری معلمان و دانش‌آموزانی که درگیر حل مسئله، به خصوص استفاده از الگوهای ریاضی در حل مسئله هستند، انجام شده است. ما باید از فرآیندهای انتقال اطلاعات که تعامل بین معلم و دانش‌آموز را در توضیحات معلم و رویکرد حل مسئله دانش‌آموز نشان می‌دهند، آگاه باشیم.

جلسه سوم

موضوع: تقویت و حمایت معلمان در درک، ارزش‌یابی و رشد و توسعه‌ی توانایی‌های ریاضی کودکان
هدف: توسعه سیستم حمایت و تقویت برای معلمان تازه‌کار و باتجربه

سوالات هدایت‌کننده: چگونه می‌توان به بهترین صورت معلمان را تقویت و حمایت کرد؟ از طریق آموزش محتوای ریاضی به معلمان یا آموزش درک چگونگی شکل‌گیری یادگیری در کودکان به معلمان؟ چگونه این کار را به بهترین شکل می‌توان انجام داد؟

□ سخنران اول: باربارا کلارک از استرالیا



ولی توصیه های آموزشی تهیه شده است که در سطح ملی در اختیار معلمان قرار می گیرد، از جمله در نظر داشتن اثر متقابل جبر و هندسه بر یکدیگر.

البته هنوز بر سر آن که برنامه ی درسی چه چیزهایی را شامل باشد بحث است. توجه به چگونگی برنامه ی درسی به طوری که نیاز همه ی دانش آموزان را ارضاء کند، دسترسی به تکنولوژی و انتخاب اهداف برنامه ی درسی از جمله موضوعات مورد بحث دیگر است و یکی از مسائل موجود در سطح جامعه ی آموزشی آن ها، کمبود معلم با کیفیت عنوان شد.

سخنران بعدی مایکل آرتیگ از فرانسه بود که درخصوص سیر تحول برنامه درسی ریاضی فرانسه در سده ی اخیر صحبت کرد. او رویکرد برنامه ی درسی را در سه دوره ۱۹۶۰-۱۹۰۲، ۱۹۸۰-۱۹۶۰ و از ۱۹۸۰ تاکنون با یکدیگر مقایسه نمود. از سال ۱۹۰۲ تا ۱۹۶۰ *Scientific humanity* رویکرد حاکم بود و تأکید بسیار بر حساب دیفرانسیل و انتگرال وجود داشت و ریاضیات در مرکز دانش طبیعی قرار داشت، خط کش و پرگار و جدول های عددی بعضی توابع مورد استفاده قرار می گرفتند. از سال ۱۹۶۰ تا ۱۹۸۰ صورتگرایی رویکرد حاکم بود و تأکید زیادی بر نظریه ی اعداد وجود داشت. دانش ریاضیات اصل بود و ابزاری مانند خط کش مهندسی مورد استفاده قرار می گرفتند.

از دهه ی ۸۰ به بعد ریاضیدانان خود را از برنامه ریزی کنار کشیدند و رویکرد حاکم به سمت بهره گیری از کامپیوتر و ماشین حساب سوق پیدا کرد ولی در سال ۲۰۰۰ این سؤال مطرح شد که چه موضوعی باید مورد تأکید باشد و محوریت برنامه ها چه باید باشد. بی تردید در سال ۲۰۰۰ ماشین حساب های علمی و گرافیکی و همچنین نرم افزارهای هندسه ی پویا و صفحه گسترده از جمله ابزاری هستند که مورد استفاده قرار می گیرند. امروزه در فرانسه موضوع تحقیق، چگونگی ایجاد تعادل بین معلم محوری و دانش آموز محوری است و سؤالی که در ابتدای قرن بیستم توسط کلین مطرح شد مبنی بر این که: «چه کسی باید به مهندسان درس بدهد - ریاضیدانان یا مهندسان؟»

هنوز باز باقی مانده است.

در پایان جلسه ی اول شرکت کنندگان به تناسب گرایشات کاری خود در سه گروه تقسیم شدند:

از یک نقش مستقیم به رویکرد ساخت گرایی، تغییری بسیار بزرگ است. ارزش یابی و رشد توانایی ریاضی کودکان نیز از موضوعات مهمی هستند که باید در نظر گرفته شوند. برای حمایت و تقویت معلم های دوره ابتدایی و رشد حرفه ای آنها و درک تفکر ریاضی کودکان، برنامه ها باید شامل موارد زیر باشند:

- ۱- گروه های کاری کوچک برای انجام پروژه های اکتشافی و بررسی موضوعات خاص.
 - ۲- یکپارچگی و وحدت بین برنامه درسی ریاضی و مدرسه ی خارج از کلاس درس.
 - ۳- ارزش یابی بر اساس فعالیت ها و تکالیف ریاضی
 - ۴- بیان مسئله و فعالیت ها در جهت حل مسئله
 - ۵- معلم به عنوان محقق آموزشی
- و ادار نمودن معلمین به تغییر، کار دشواری است. همکاری و کار کردن روی معلمین، یک رویکرد منطقی هم برای رشد معلمین و هم برای رشد محققین است.

WG3: آموزش ریاضی در دبیرستان

هماهنگ کنندگان: مایکل آرتیگ از فرانسه

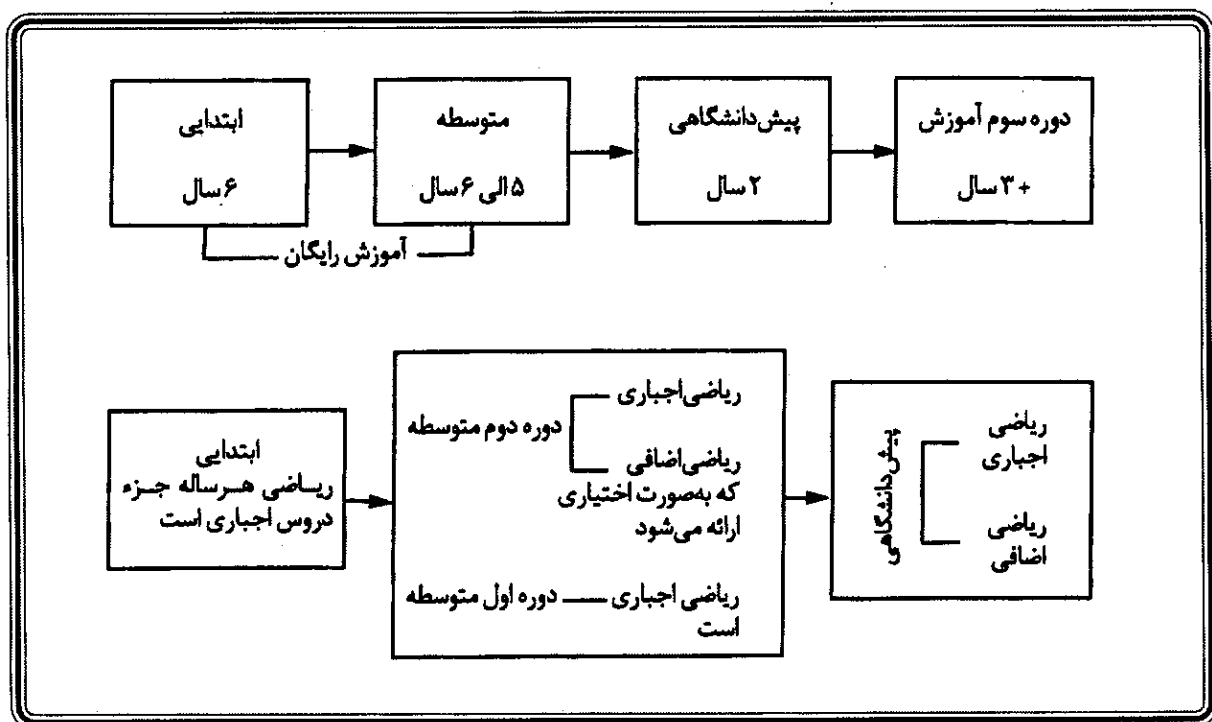
تعداد جلسات: سه جلسه ی ۱۲۰ دقیقه ای

در هر یک از این جلسات ابتدا دو نفر هر کدام به مدت ۲۰ دقیقه سخنرانی کرده، سپس هماهنگ کنندگان جلسه، سؤالات هدایت کننده در زمینه ی موضوعات مطرح شده بیان کرده و شرکت کنندگان در گروه های کوچک تر روی آن ها بحث و گفت و گو کردند.

جلسه اول

در این جلسه ابتدا جوآن فررینی - مانی از امریکا مطالبی درخصوص برنامه ی درسی ریاضی در دبیرستان های امریکا به شرح زیر اظهار نمود.

در امریکا برنامه ی ملی برای دبیرستان ها وجود ندارد. به طور سنتی برنامه ی درسی برای کسانی که می خواهند به کالج بروند شامل جبر ۱، جبر ۲، هندسه، حسابان مقدماتی که مثلثات را نیز شامل می شود، حسابان، ریاضی گسسته و آمار است و دانش آموزانی که قصد ورود به دانشگاه را ندارند مطالب عمومی ریاضی و هندسه را می گذرانند. با وجودی که برنامه ی ملی در سطح دبیرستان حاکم نیست



- ۱- چگونگی به کارگیری ابزار تکنولوژیک در ارتقای کیفی آموزش؟
- ۲- محتوای برنامه ی درسی؟
- ۳- تجارب غنی تدریس و مدل سازی آن ها.
- ۱- شرایط در کشورهای دیگر چگونه است؟
- ۲- نیازهای واقعی دانش آموزان چیست؟
- ۳- پیشرفت تکنولوژی اطلاعات (IT) در برنامه ی درسی چه تأثیری دارد؟
- ۴- اصول حاکم بر برنامه ی درسی ریاضی چیست؟

جلسه دوم

گروه مطالعات موضوعی

آموزش و یادگیری آمار

در راستای ارتقاء علمی و حرفه ای معلمان و محققین در زمینه ی آمار، دو جلسه ی ۹۰ دقیقه ای در طول این کنفرانس برگزار شد. در این جلسات مقالاتی در زمینه های آموزش آمار برای سنین ۱۸-۱۱ سال، در دانشگاه و بزرگسالان ارائه شد. در این مقالات موضوعات زیر مورد بررسی قرار گرفت:

- تحقیقاتی که در زمینه یادگیری آمار در دانش آموزان انجام شده است.
- نوآوری هایی که در آموزش آمار می توان از آن ها استفاده نمود.
- مثال های علمی آماری که در کشورهای در حال توسعه انجام شده بودند.

در این جلسه ابتدا یک سخنران از ژاپن درخصوص منطق فازی و چگونگی ورود آن به برنامه های درسی مدرسه صحبت کرد و این که این منطق چه مزیت هایی نسبت به منطق دو ارزشی دارد صحبت نمود.

سپس یک سخنران از مالزی درخصوص سیستم آموزشی در این کشور صحبت کرد و شمای کلی آن را در قالبی به شکل نمودار بالا ارائه نمود.

سؤالی که در حال حاضر از جانب والدین و دانش آموزان مطرح می شود آن است که والدین معتقدند فرزندانشان به ریاضی اضافی احتیاجی ندارند و دانش آموزان ادعا می کنند که ریاضی اضافی برای آن ها سخت است و بسیاری از آن ها قادر به گذراندن این دروس نیستند.

در پایان سخنرانی، سؤالاتی را که در سطح جامعه ی آموزشی آن ها مطرح بود به شرح زیر اعلام نمود:



گزارش بازدیدها

بازدید از دبستان «سه تاگیا» وابسته به دانشگاه «گاکوجی»، توکیو

شرکت کنندگان در این بازدید فرصت شرکت در کلاس های درس واقعی این دبستان را در پایه های سوم تا پنجم دبستان داشتند.

شرایط فیزیکی کلاس درس: کلاس ها حدوداً ۵۰ متر مربع مساحت داشتند.

تعداد شاگردان کلاس ها: ۳۵-۴۰ نفر
آرایش کلاس ها: دانش آموزان به شکل نیم دایره روبه تخته می نشینند. دو نوع تخته سیاه و لوح سفید در کلاس ها موجود است.

در انتهای کلاس کتابخانه ای کوچک و یک کامپیوتر قرار دارد.

یک آورهد در جلوی کلاس و در کنار میز معلم قرار دارد. در جریان این بازدید شاهد تدریس «تساوی زاویه ها» در کلاس سوم دبستان بودیم. روش تدریس به شکل کاملاً فعال بوده و در تمام طول تدریس دانش آموزان هم به صورت انفرادی و هم گروهی (در گروه های سه نفره) با استفاده از ابزار کمک آموزشی (قیچی، نقاله، پرگار، کاغذهای رسم) به تحقیق روی تساوی زاویه ها و بررسی روش تحقیق تساوی زاویه ها پرداختند و به نوبت نتایج تجربه ی خود را با استفاده از آورهد برای دیگر دانش آموزان کلاس به نمایش می گذاشتند. پس از اتمام تدریس و جلسه ی درس در نشستی با مسئولین و معلمین به سؤالات بازدیدکنندگان پاسخ داده شد. سؤالات در زمینه های نظام آموزشی، روش های تدریس و امتحانات، روش گزینش معلم و ... بودند.

بازدید از دبیرستان دخترانه «ای» وابسته به دانشگاه «اکانومیزو»، توکیو

دبیرستان دخترانه وابسته به دانشگاه اکانومیزو تقریباً در مرکز توکیو قرار داشت. ساختمان این دبیرستان قدیمی و در محوطه ی دانشگاه قرار داشت. در این دبیرستان، قوانین خاصی حاکم بود. از جمله در آوردن کفش ها در ساختمان استفاده از دمپایی های مخصوص، مسئولیت نظافت ساختمان مدرسه با دانش آموزان بود که به نوبت عهده دار آن می شدند.

آموزش ریاضی بر مبنای محیط های کاری و ارتباط آن با کلاس درس

چگونه می توان آموزش آمار را در آینده بهبود بخشید.

این جلسات فرصت خوبی را فراهم آورد تا روی ریز مواد آموزشی درس آمار و مدل سازی که به تازگی در دبیرستان های ایران تدریس می شود بحث و گفت و گو شود.

آموزش و یادگیری جبر

جبر یکی از مباحثی است که همواره در آموزش ریاضیات مدرسه ای جایگاه ویژه ای داشته است. از این رو، علی رغم تحقیقات زیادی که در خصوص چگونگی گزینش محتوا و آموزش این مبحث انجام شده، هنوز هم تحقیقات اصلی در این زمینه در حال اجرا می باشد. در کنگره ی ICME9 نتیجه ی تعدادی از این تحقیقات به صورت مقالاتی در دو جلسه ی ۹۰ دقیقه ای ارائه شد و مورد بحث و تبادل نظر قرار گرفت. موضوعات این مقالات عبارت بودند از:

نمادها به عنوان بازنمایی تفکر جبری و به عنوان ابزاری برای یادگیری جبری

معرفی فعالیت جبری در سطح ابتدایی

ساختار فرایند یادگیری با تمرکز بر «چهارچوبی برای بازنمایی فعالیت های تفکر»

برخی مقولات کلیدی در آموزش مقدمات جبر

کمک به معلمان ابتدایی در توسعه ی تفکر جبری بچه ها

رویکرد تفکر جبری در مدارس اجباری: تربیت معلم و فرایندهای کلاس درس

استفاده از راهکارهای حل مسئله توسط دانش آموزان سال دوم جبر: موضوع پروژه ریاضیات مدرسه ای در دانشگاه شیکاگو، جبر پیشرفته

رویکردهای نوین آموزش جبر

تمرینات جبر در علوم مدرسه ای

نکته ی قابل توجه در این جلسات، تأکید بر شروع آموزش جبر از مدارس ابتدایی و توسعه مفاهیم در طول سال های آموزش مدرسه ای ضمن توجه به کاربردهای عملی مفاهیم کاربرد آن ها در سایر شاخه ها و علوم بود.

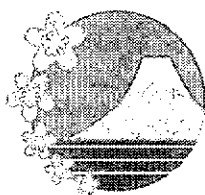


دیگر مانند انجمن ریاضی (انگلستان)، انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا (NCTM)، پروژه‌ی ریاضیات مدرسه (SMP)، گروه تحقیق آموزش ریاضی استرالیا، انجمن آموزش ریاضی ژاپن و ... تنها به ارائه تازه‌ترین دستاوردهای خود به منظور نمایش بسنده کرده بودند.

انجمن معلمان ریاضی ژاپن حضور فعالی در این بخش داشتند. در غرفه‌ی این انجمن که توسط معلمان ریاضی اداره می‌شد بسیاری از وسایل کمک آموزشی و دست‌ورزی‌های مختلف که به منظور تسهیل امر یادگیری طراحی شده بودند به نمایش گذاشته شده بود و امکاناتی پیش‌بینی شده بود تا بازدیدکنندگان نیز امکان ساخت و به کارگیری این وسایل را بیابند. هم‌چنین، کارگاه وسیعی با عنوان سرزمین اُریگامی که توسط انجمن معلمان ریاضی ژاپن اداره می‌شد، جمع‌وسیی از بازدیدکنندگان را جذب خود کرده بود.

کمپانی‌های CASIO و Texas Instruments غرفه‌های وسیعی را برای عرضه‌ی آخرین دستاوردهای خود طراحی کرده بودند. در مجاور این غرفه‌ها کارگاه‌های آموزشی توسط کارشناسان این کمپانی‌ها برگزار می‌شد تا شرکت‌کنندگان مستقیماً با کارآیی نرم‌افزارها و ابزار تکنولوژیک آن‌ها آشنا شوند.

تقریباً نیمی از فضای سالن به ارائه پوسترها اختصاص یافته بود. این پوسترها که عموماً توسط معلمان ریاضی تهیه شده بود به نوآوری‌های آموزشی، ارزش‌یابی و برنامه‌ریزی اختصاص داشت. در این بخش امکان ارتباط مستقیم و بحث و تبادل نظرهای تهیه‌کنندگان پوسترها وجود داشت. از این رو این نمایشگاه از جمله فعال‌ترین بخش‌های کنفرانس محسوب می‌شد. ضمناً در حاشیه سالن نمایشگاه‌ها، سایت کامپیوتری جهت استفاده‌ی شرکت‌کنندگان از شبکه‌ی اینترنت و پست الکترونیکی پیش‌بینی شده بود.



کلاس‌های درس، کارگاه‌های هنری، سایت کامپیوتر و ... همه در فصل تابستان فعال بودند. برای بازدیدکنندگان امکان حضور در کلاس ۱۰ این دبیرستان مهیا شده بود. در این کلاس حدوداً ۲۵ دانش‌آموز حضور داشتند. نحوه‌ی آرایش صندلی‌ها در این کلاس از قالب سنتی پیروی می‌کرد (دانش‌آموزان رو به تخته و معلم در مقابل آن‌ها سخنرانی می‌کرد). در حاشیه‌ی کلاس یک کتابخانه‌ی کوچک و یک دستگاه کامپیوتر وجود داشت و یکی از دیوارهای کلاس به نصب کارهای هنری دانش‌آموزان اختصاص یافته بود.

برنامه‌ی آموزشی کلاس در آن روز مبحث منطق بود. این مبحث در کتاب «Math A» مطرح است. در طرح درس معلم آمده بود که از دانش‌آموزان انتظار می‌رود توانایی استدلال کردن بیابند و به طور گسترده از آن در ریاضیات استفاده کنند. در شروع درس معلم با بیان یک عبارت سعی در ایجاد انگیزه و ورود به مبحث نمود. سپس با ارائه‌ی عبارات‌های مختلف، انواع عبارات و نمادها را آموزش داد. نکته‌ی قابل توجه در این کلاس نحوه‌ی اداره‌ی آن بود. اگرچه بیان مفاهیم در قالبی کاملاً نو و با رویکردی جدید طراحی شده بود؛ ولی شیوه‌ی ارائه‌ی آن با قالب سنتی تدریس تفاوت زیادی نداشت. بعد از پایان کلاس، شرکت‌کنندگان فرصت آن را داشتند که در مورد شیوه‌ی ارائه‌ی درس بحث کنند و سپس از ساختمان مدرسه بازدید داشته باشند.

گزارش بازدید از نمایشگاه

در محل برگزاری کنفرانس، سالن وسیعی به برپایی نمایشگاه‌ها اختصاص یافته بود. در این محل علاوه بر ناشران داخلی ژاپن، بسیاری از ناشران معتبر از کشورهای انگلستان، آمریکا، آلمان، استرالیا، فرانسه، هلند و سوئد نیز محصولات خود را عرضه داشتند. بازدید از این نمایشگاه‌ها فرصت مغتنمی برای شرکت‌کنندگان بود تا با تازه‌ترین دستاوردها در زمینه‌ی آموزش ریاضی آشنا شوند. برخی از این ناشران مانند:

Key Curriculum Press

Kluwer

Cambridge University Press

محصولات خود را به منظور فروش عرضه کرده بودند و برخی



CONTENTS:

Managing Editor: Alireza Hajianzadeh
Editor: Zahra Gooya
Executive Director: Soheila Gholamzad
Graphic Designer: Fariborz Siamaknejad

P.O.Box : Tehran 15875 - 6585

E-mail : Roshd.of@yahoo.com

برگه اشتراک مجلات آموزشی رشد

نام و نام خانوادگی :

تاریخ تولد :

میزان تحصیلات :

تلفن :

نشانی کامل پستی :

استان :

شهرستان :

خیابان :

کوچه :

پلاک :

کد پستی :

مبلغ واریز شده :

شماره رسید بانکی :

تاریخ رسید بانکی :

مجله درخواستی :

امضاء:

شرایط اشتراک

۱ - واریز حداقل مبلغ ۱۰۰۰۰۰ ریال به عنوان پیش پرداخت به حساب شماره ۳۹۶۶۲۰۰ بانک تجارت شعبه سرخه حصار، کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال رسید بانکی به همراه برگه تکمیل شده اشتراک به نشانی دفتر انتشارات کمک آموزشی.

۲ - شروع اشتراک از زمان وصول برگه درخواست اشتراک است. بدیهی است یک ماه قبل از اتمام مبلغ پیش پرداخت، به مشترک جهت تجدید اشتراک اطلاع داده خواهد شد.

1 Editor's Note

4 Learning psychology of math teachers
by: Z. Gooya

10 Geometry - Euclidean and non - Euclidean
by: M. A. Allahyari

16 Curriculum and Assessment Standards of NCTM
by: T. A. Romberg Tran: N. Shahamat Naderi

25 Algebra through history
by: M. M. Khalili Maybodi

36 Preparing learning opportunity through doing activities
by: S. Gholamzad

41 $2 + 2 = 5$
by: H. Euler Tran: M. S. Moslehian

43 Teachers' Narrative

47 Volume of the solid generated by rotating about an arbitrary line
by: M. Poorsaeed

49 Mathematical Recreations
by: M. Pak Khasal

53 A report from ICME9
by: Sh. Bakhshalizadeh & S. Gholamzad

