وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۱۰۰

دوره‌ی بیست و هفتم/ شماره‌ی۴ /تابستان۱۳۸۹ / ۱۰۴ صفحه/ ۴۵۰۰ ریال

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

www.roshdmag.ir

ویژه‌نامه

ISSN: 1606-9188

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۱۰۰

دوره‌ی بیست و هفتم/ شماره‌ی ۴/ تابستان ۱۳۸۹

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

فهرست

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد ،می پذیرد . لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه‌ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه‌ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه‌ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه‌ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده‌ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمه‌ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- پی‌نوشت ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره‌ی صفحه‌ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از اثر و مقاله‌ی ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
- در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود.

هم چنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

- **نشانی دفتر مجله :** تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
- **تلفن :** ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴)
- **نمابر:** ۸۸۳۰۱۴۷۸
- **پایگاه اینترنتی:** www.roshdmag.ir
- **رایانامه:** riazi@roshdmag.ir
- **تلفن پیام‌گیر نشریان رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲
- **کد مدیرمسئول:** ۱۰۲ ● **کد دفتر مجله:** ۱۱۳ ● **کد امور مشترکین:** ۱۱۴
- نشانی امور مشترکین : تهران، صندوق پستی : ۱۶۵۹۵/۱۱۱
- **تلفن امور مشترکین :** ۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۶۶۵۵
- **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)
- **شمارگان:** ۱۰۰۰۰

صده یا سده!؟

مسئله، تولید صد مجموعه است!

بالاخره، مجله‌ی ما تا صد شماره تداوم یافت و الهی که به همت همه‌ی دوستدارانش، صدساله هم بشود! در فرهنگ فارسی، صد نشانه‌ی اوج و بلوغ و تکامل و بی‌شماری و امثال آن است: الهی که **صد**ساله شوی! **صد**بار گفتم که...! صد شب و روز صبر می‌کنیم تا به بالندگی بهار برسیم ـ یعنی جشن سده. خلاصه گاهی حتی به جای هزار، از **صدها** استفاده می‌کنیم، انگار که اندازه‌ی **صد**، بزرگ‌تر از هزار است و هزار با آن موجودیت می‌یابد!

بگذریم و به انتشار صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی بپردازیم. صد شماره‌ای که حاصل تلاش جمعی چندین انسان علاقه‌مند، با پشتکار، مصمم و معتقد به اثربخشی این کار بوده است. اینان کاری را انجام داده‌اند که شاید اگر بعضی‌ها از بیرون به آن نگاه کنند، بگویند: این همه زحمت برای چه بوده است!؟ کار نوشتن و تولید مجله مرا به یاد «مناظره‌ی سوزن و رفوگر» می‌اندازد که پروین اعتصامی، با شیوایی و زیرکی و عمق فراوان، به آن پرداخته است:

گفت سوزن با رفوگر وقت شام
شب شد و آخر نشد کارت تمام
روز و شب بیهوده سوزن می‌زنی
هر دمی، صد زخم بر من می‌زنی

اما قلم آگاه نیست که این کار، پایانی ندارد زیرا کمال، نقطه‌ی انتهایی ندارد و چیزی که مهم است، تلاش برای حرکت و پیشرفت مستمر است حتی اگر به اندازه‌ی سر سوزنی باشد؛ پیشرفتی که قلم تنها ابزار آنَ است و رفوگر در جواب سوزن نیز که ابزار اوست چنین پاسخ می‌دهد:

گفت در پاسخ رفوگر کای رفیق
نیست هر رهپوی، از اهل طریق
سوزنی، برتر ز سوزن نیستی
آگهی از جامه، از تن نیستی
من نهان را بینم و تو آشکار
تو یکی می‌دانی، اما من هزار

نویسندگان عزیز مجله که اکثراً معلمان محترم ریاضی ایران هستند، تلاش کرده‌اند تا **نهان‌های** کلاس درس ریاضی را با قلم خود به تصویر بکشند و آن **هزارهایی** را که از واقعیت تدریس و یادگیری تجربه کرده‌اند، در اختیار دیگران بگذارند تا چشم‌های معلمان و محققان را نسبت به امر خطیر یادگیری مدرسه‌ای روشن‌تر کنند.

من درین جا هرچه سوزن می‌زنم
سوزنی بر چشم روشن می‌زنم

و می‌دانند که فرصت هر فرد برای ایفای نقش و پذیرش مسئولیت خویش، اندک است و بدین سبب، خسته نمی‌شوند و ادامه می‌دهند:

من چو گردم خسته، فرصت بگذرد
چون گذشت، آن‌گه که بازش آورد؟

و هشدار می‌دهند که:

دیده را چون عاقبت نادیدن است
به که نیکو بنگرد تا روشن است
از چه وامانم؟ چو فرصت رفتنی است
چون نگویم؟ کاین حکایت گفتنی است.

اما مخاطبان مجله، توقع و انتظار خود را بارها در قالب نوشته‌ها و نامه‌ها و بیان دیدگاه‌هایشان اعلام کرده‌اند که به هر قلم و قلم‌زنی نیاز ندارند، بلکه تقاضایشان این است که فرصت‌ها را ـ هرچند اندک ـ از دست ندهیم و تا می‌توانیم، از لحظه‌ها استفاده کنیم، کمبودها را با چاشنی عشق و علاقه جبران کنیم و به‌جای فکر کردن به نداشته‌ها، داشته‌هایمان را قدر بدانیم و از آن‌ها، در جهت اعتلای آموزش بهره بگیریم!

سوزنی باید که در دل نشکند
جای جامه، بخیه اندر جان زند
جهدَ را بسیار کن، عمر اندک است
کار را نیکو گزین، فرصت کم است
کاردانان چون رفو آموختند
پاره‌های وقت، بر هم دوختند
عمر را باید رفو با کار کرد
وقت کم را با هنر، بسیار کرد

نصایح پروین اعتصامی چراغ راهمان بوده است. همه‌ی دست‌اندرکاران مجله می‌دانستند و می‌دانند که جز دوختن پاره‌های وقت به هم و با هنرمندی جبران کمبود را کردن، چاره‌ای نیست. از همه مهم‌تر این‌که همه می‌دانیم که در هر جای این هستی، افراد محدود به شرایط و چارچوب‌هایی هستند که در آن‌ها قرار دارند. پس به‌جای عذر و بهانه آوردن، وقت را غنیمت می‌شمریم و ضمن تبریک انتشار صدمین شماره‌ی مجله به خوانندگان محترم که مشوقان ما در این راه طولانی بوده‌اند، با توجه به چارچوبی که دفتر انتشارات کمک‌آموزشی برای ارتقای کمی و کیفی مجلات رشد تهیه کرده است، برنامه‌های آتی مجله را به آگاهی مخاطبان می‌رسانیم و معترفیم که:

کار را از وقت چون کردی جدا
این یکی گردد تباه، آن یک هَبا
گرچه اندر دیده و دل نور نیست
تا نفس باقی است، تن معذور نیست

در چارچوب پیشنهادی دفتر برای ارایه‌ی برنامه‌ی سالانه‌ی مجله بر این موارد تأکید شده است:

بحث و بررسی «شیوه‌های بهبود کیفیت مجلات رشد» از منظرهای «نیازسنجی از مخاطبان»، «برنامه‌ریزی سالانه»، «تولید محتوای فرهنگی»، «ویرایش»، «تولید فنی ـ هنری» «چاپ»، «توزیع»، «نظرسنجی و تحلیل محتوا» و «رویه‌های عملیاتی تولید مجلات».

در این مختصر، موضوع‌هایی را که به تولید محتوای مجله مربوط می‌شود، مورد

بررسی اجمالی قرار می‌دهم و راجع به موضوع‌هایی که مربوط به بخش فنی هستند، تنها به ارائه‌ی نظر می‌پردازم زیرا تخصصی در آن بخش‌ها ندارم و اما، نظر من درباره‌ی تولید محتوا نظرات جسته و گریخته‌ای است که در گردهمایی‌های معلمان ریاضی شنیده‌ام و یا نامه‌هایی که از طریق دفتر مجله دریافت کرده‌ام. در ضمن نظراتی که بیان می‌کنم، بازتاب نظرات اعضای محترم هیئت تحریریه نیز هست.

شیوه‌های بهبود کیفیت مجلات رشد

امیدواریم که با عنایت به تجربه‌ی گران‌بهای تولید صد شماره‌ی مجله، و با تجزیه و تحلیل محتوای آن‌ها، بتوانیم شیوه‌های کارآمدتر و اثربخش‌تری بیابیم تا با تأسی به آن‌ها، کیفیت مجله را به‌طور مستمر، بهبود بخشیم. بعضی از راهکارهایی که تا به حال اندیشیده‌ایم و اثرات مثبت آن‌ها را در ارتقای مجله دیده‌ایم، از منظرهای طرح شده توسط دفتر، به شرح زیرند:

الف. نیازسنجی از مخاطبان

برای آشنایی بیشتر با نیازهای بالقوه و عینی مخاطبان، راهکارهای زیر را به کار برده‌ایم:

۱. توجه به مبانی نظری حوزه‌ی آموزش ریاضی به‌طور عام و حوزه‌ی آموزش معلمان ریاضی و برنامه‌ی درسی ریاضی به‌طور خاص؛

۲. سفارش و تشویق نویسندگان به تألیف و ترجمه‌ی مقالات نظری حوزه‌های بالا برای پاسخ‌گویی به نیازهای شناخته شده، از طریق تحقیقات بنیادی و توسعه‌ای و کاربردی در آموزش ریاضی؛

۳. ایجاد ستون **دیدگاه** برای آشنایی عینی‌تر و ملموس‌تر با نظرات و نیازهای ابراز شده توسط مخاطبان؛

۴. تهیه و توزیع پرسش‌نامه برای **نیازسنجی از مخاطبان** در یازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی و استفاده از نتایج آن در توجه به این امر خطیر؛

۵. توجه به نیازهای اعلام شده از جانب مخاطبان از طریق نامه‌های ارسالی.

ب. برنامه‌ریزی سالانه

در این بخش، برنامه‌های کلان مجله توسط اعضای محترم هیئت تحریریه‌ی مجله بازنگری می‌شود و با توجه به نتایج بخش (الف) و در صورت لزوم، برنامه‌ی سالانه‌ی مجله جرح و تعدیل می‌گردد. در این بازنگری‌ها، یافته‌های جدید پژوهشی در حوزه‌ی آموزش ریاضی در سطح جهانی، تغییرات انجام شده در سطح ملی، ویژگی‌های جدید جمعیتی جامعه‌ی دانش‌آموزی در ایران و از همه مهم‌تر ارتقای سطح شعور و آگاهی و توقع و انتظارات معلمان و آموزشگران، موردنظر هستند.

پ. تولید محتوای فرهنگی

اعضای هیئت تحریریه‌ی مجله تلاش می‌کنند تا در زمینه‌ی تخصصی آموزش ریاضی که شامل آموزش معلمان، برنامه‌ی درسی، کتاب‌های درسی، ارزش‌یابی، روش‌های یاددهی ـ یادگیری و تدریس ریاضی است، محتوا تولید کنند و از این طریق فرهنگ جامعه‌ی آموزش ریاضی ایران و به تبع آن، فرهنگ آموزشی و مدرسه‌ای و تدریس ریاضی را ارتقا دهند. از نظر هیئت تحریریه، وظیفه‌ی مجله، **تولید محتوای فرهنگی** در حوزه‌ی تخصصی آموزش ریاضی است که برای آن، مأموریت یافته و مسئولیت پذیرفته است. در واقع، تحریریه‌ی مجله نسبت به حوزه‌ی فرهنگی مرتبط خود واقف است و تلاش می‌کند که تولیدات خود را بر این حوزه متمرکز کند. البته این تمرکز، مانع توجه به برنامه‌ی درسی تلفیقی و رویکردهای میان‌رشته‌ای معنادار نیست.

ت. ویرایش

با پذیرش توضیحات سردبیر توسط مسئولان محترم مجلات، سال‌هاست که کار **ویرایش** این مجله توسط تحریریه‌ی مجله انجام می‌شود. علت این امر این است که حوزه‌ی آموزش ریاضی به‌عنوان یک دیسیپلین جدید، نسبتاً نوپاست و واژگان تخصصی و منابع آن، قبلاً در ادبیات آموزشی ایران حضور نداشته است. بدین سبب، با رعایت شیوه‌نامه‌ی مجلات، مسئولیت ویرایش به عهده‌ی مجله است. امیدواریم در میان‌مدت، بتوانیم واژگان تخصصی این رشته را به صورت کتاب، منتشر کنیم که انتشار چنان کتابی، مدیون معادل‌های انتخاب شده برای محتوای مجلات از طریق ویرایش و یکسان‌سازی معادل‌هاست.

ث. تولید فنی ـ هنری

با توجه به رهنمودهایی که در جلسات توجیهی یا بازآموزی دفتر کمک‌آموزشی دریافت کرده‌ایم، سعی نموده‌ایم که **هنر** را از دید ریاضی و نیازهای مخاطبان آن ببینیم. البته بسیار پیش آمده است که این زاویه‌ی دید، با انتظارات تخصصی حوزه‌ی عمومی فنی ـ هنری تفاوت‌های ماهوی داشته است. ولی در هر صورت، تلاش کرده‌ایم تا بدون عبور از چارچوب‌های تعیین شده، به هنر از دیدگاه ریاضی و آموزش ریاضی عنایت داشته باشیم که بیشترین مسئولیت این کار نیز، به عهده‌ی مدیر داخلی مجله است که فردی هنرمند و هنرشناس و از نظر اجرایی واقع‌بین، کارآمد و قاعده‌مند است.

ج. چاپ

در زمینه‌ی چاپ، هیئت تحریریه‌ی مجله نقشی ندارد، زیرا این حوزه، مشخصاً اجرایی است و بستگی به سیاست‌گذاری‌های اجرایی دارد.

چ. توزیع

برای توزیع مجلات، هیئت تحریریه پیشنهاد دارد که علاوه بر ارسال مجله برای مشترکان و از طریق بخش‌های دولتی آموزش و پرورش در استان‌ها، تمهیداتی اندیشیده شود تا علاقه‌مندان، بتوانند مجله را از طریق مکان‌های دیگری مانند دکه‌های روزنامه‌فروشی تهیه نمایند.

ح. نظرسنجی و تحلیل محتوا

توضیحات مربوط به این بخش، در بند الف آمده است و تکرار آن، غیر ضروری است.

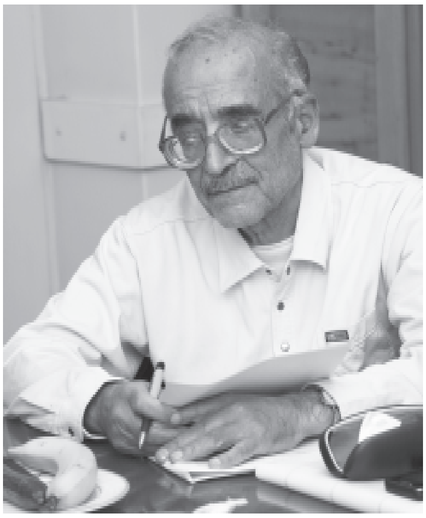
خ. رویه‌های عملیاتی تولید مجلات

این حوزه هم بیشتر مربوط به سیاست‌های اجرایی است و اگر مسئولان محترم لازم بدانند، اعضای تحریریه‌ی مجله با کمال رضایت، اگر پیشنهاد قابل اجرایی داشتند، ارائه می‌دهند.

بالاخره، انتظار داریم و امید داریم که همه‌ی این تلاش‌ها، افراد زیادی را آموزش دهد و علاقه‌مندشان کند تا به تداوم مجله و تنوع محتوای آن، کمک کنند. شاید که آیندگان، تولد دوصده‌ی مجله را جشن بگیرند و همه بدانیم که گذشته، واقعاً چراغ راه آینده است.

از میلاد تا میلاد
یا از بهار ۶۳ تا ...

میرزا جلیلی
عضو هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی



از سال ۱۳۴۵، در «سازمان کتاب‌های درسی ایران»، مجلات غیرتخصصی تحت عنون «پیک دانش‌آموز»، «پیک معلم» و بعدها «پیک راهنمایی»، ... منتشر و مستقیماً هم‌چون کتب درسی ابتدایی، در کلاس‌های درس توزیع می‌شد.

بعد از انقلاب، این مجلات با عنوان جدید «رشد دانش‌آموز» و «رشد معلم»، با آرایش و دیدگاه‌های نو کار خود را آغاز کرد که مورد استقبال مدارس قرار گرفت و توزیع این مجلات نیز در مدارس انجام می‌گیرد.

لازم به یادآوری است که تنها مجله‌ی اختصاصی ریاضی قبل از انقلاب، مجله‌ی «یکان» بود که با هزینه‌ی شخصی و مسئولیت آقای دکتر عبدالحسین مصحفی و مدیریت داخلی همسرش که رئیس مرکز تربیت معلم دختران بود منتشر می‌شد. در آن مجله، مسائل و مطالب مختلف مورد بحث و تجزیه و تحلیل قرار می‌گرفت، از جمله مسائل کنکور و مخاطبان مجله، دبیران و دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی بودند.

متأسفانه این مجله در سال ۱۳۵۶ با مشکلات مالی مواجه شد و در آستانه‌ی تعطیلی قرار گرفت. گروه ریاضی سازمان کتاب‌های درسی موضوع را با رئیس وقت سازمان مطرح نموده پیشنهاد کردند که چون «یکان»، مجله‌ی مفیدی برای معلمان و دانش‌آموزان است، در صورت امکان، از طرف سازمان کمک مالی به آن داده شود تا تعطیل نشود که البته تقاضا مورد توجه قرار نگرفت.

بعد از انقلاب با شرایط جدیدی که به وجود آمده بود؛ مجدداً موضوع کمک مالی به یکان پی‌گیری شد که باز به نتیجه‌ای نرسید اما مشکلی که در این زمان وزارت آموزش و پرورش با آن مواجه شد، مسئله‌ی «کاهش تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی» بود. بدین معنا که تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی در کلاس، یک‌باره تقلیل یافت و کلاس‌های ریاضی خلوت شد.

برای بررسی این مسئله، شورای اُفت ریاضی از استادان، دبیران ریاضی و رؤسای مدارس و به کارگردانی گروه ریاضی در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف تشکیل شد، این شورا بعد از یک سال یا بیشتر، با بحث در جلسات تفکیکی خود، به این نتیجه رسید که علت اُفت عبارت بوده است از:

۱. تعطیلی موقت دانشگاه‌ها و عدم وجود انگیزه برای انتخاب رشته‌ی ریاضی؛

۲. ممنوعیت تدریس آقایان در مدارس دخترانه؛

۳. بازنشسته شدن عده‌ی زیادی از دبیران قدیمی و باتجربه.

این علل موجب شده بود که خود معلمان تازه‌کار در تدریس مطالب رشته‌ی ریاضی ضعف داشته و دانش‌آموزان از کلاس‌ها ناراضی باشند.

شورای اُفت در پایان کار خود، چندین پیشنهاد به مسئولان داد که از جمله گفته شد لازم است یک مجله‌ی ریاضی از طرف دفتر برنامه‌ریزی و تألیف با همکاری گروه ریاضی منتشر شود تا مؤلفان و کارشناسان مستقیماً با دبیران کشور در تماس باشند و عین مفاهیم پایه‌ای کتاب‌ها به زبان ساده و باز شده در مجله مطرح شود تا مورد استفاده‌ی معلمان قرار گیرد.

در سال ۱۳۶۲، گروه ریاضی دفتر تألیف، مسئول انتشار این مجله شد.

در گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم ـ که از سال ۱۳۵۹ مشغول همکاری با گروه ریاضی دفتر بود ـ و با شناختی که نسبت به آقای دکتر علیرضا جمالی وجود داشت که فردی جدّی، دقیق، کاردان و صاحب‌نظر و علاقه‌مند است؛ از طرف دفتر از ایشان دعوت به عمل آمد تا به عنوان «سردبیر» مجله، کار خود را آغاز کند.

خوشبختانه ایشان نیز دعوت دفتر را پذیرفته و شروع کردند و عده‌ای از علاقه‌مندان شورای برنامه‌ریزی که در آن زمان مشغول تنظیم و تألیف کتب ابتدایی و راهنمایی جدید بودند و جمعی از اعضای شورای ریاضی، به عنوان اعضای هیئت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی انتخاب شدند؛ در حقیقت، همان افراد برنامه‌ریز و مؤلف، مسئولیت کارگردانی مجله را نیز به عهده گرفتند.

در بهار ۱۳۶۳، اولین شماره‌ی مجله‌ی «رشد آموزش ریاضی» به بهای ۱۰۰ ریال از چاپ خارج و وارد مدارس شد. این، هم اولین **شماره‌ی رشد ریاضی** بود و هم نخستین **مجله‌ی تخصصی** از سری رشدهای اختصاصیِ دبیران، هم‌چون فیزیک، شیمی، زیست ... که بعدها به تدریج انتشار یافتند.

در بهار ۱۳۶۳، اولین شماره‌ی مجله‌ی «رشد آموزش ریاضی» به بهای ۱۰۰ ریال از چاپ خارج و وارد مدارس شد. این، هم اولین شماره‌ی رشد ریاضی بود و هم نخستین مجله‌ی تخصصی از سری رشدهای تخصصی، هم‌چون فیزیک، شیمی، زیست ... که بعدها به تدریج انتشار یافتند

در صفحه‌ی دوم «جلد مجله»، بعد از نشانی چنین آمده بود:

«مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نشریه‌ی «**گروه ریاضی**» دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی سازمان پژوهش است که هر ۳ ماه یک‌بار منتشر می‌شود.

هدف از انتشار این مجله در وهله‌ی اول، ایجاد ارتباط متقابل بین معلمین ریاضی کشور و دفتر مذکور به منظور تبادل تجارب و آراء در زمینه‌ی آموزشی ریاضی است و در مرحله‌ی بعد، طرح و بررسی مسائل بنیادی ریاضیات و مطالب جنبی و مفید درسی به منظور ارتقای سطح علمی و معلومات **دبیران ریاضی دبیرستان‌هاست**». این مقدمه تا چند سال در آن‌جا آورده می‌شد.

هم‌چنین، در صفحه‌ی اول نخستین شماره مطلبی تحت عنوان «پیش‌گفتار»، به قلم مسئول وقت سازمان آمده که در آن «موضوعاتی» که لازم است مورد توجه قرار بگیرد به طور مفصّل مورد بحث قرار گرفته است:

دانش‌افزایی، آشنایی با روش‌های تدریس، معرفی وسایل کمک آموزشی و استفاده از آن‌ها در کلاس، تاریخ ریاضی (علوم)، آشنایی با معلمین موفق از طریقه مصاحبه با آن‌ها، آگاهی از مسائل و پرسش‌های معلمین نمونه، طرح موضوعات مربوط به آینده‌ی رشته‌ی ریاضی، آگاهی از تصمیم‌گیری‌ها و بخشنامه‌ها، آگاهی از تغییر برنامه‌ها و برنامه‌ریزی و تألیف (تغییرات کتب درسی) و اظهارنظر درباره‌ی آن‌ها، اطلاع از تحقیقات و اخبار به روز مربوط به رشته‌ی

ریاضی، معرفی نشریات و کتب.
قابل توجه است که در این مقدمه یا پیشگفتار نامی از دانش‌آموز به میان نیامده است، در حقیقت هدف از انتشار «رشد آموزش ریاضی» صرفاً **بهبود تدریس دبیران و معلمین ریاضی کشور بوده و خواهد بود.**

بعدها دفتر کمک آموزشی تصمیم گرفت که مجله‌ای نظیر رشد به نام «برهان» برای دانش‌آموزان منتشر کند که مطالب و محتوای برهان بیشتر موضوعات ریاضی مدرسه‌ای و بحث‌های مربوط به آن است.

مجلات رشد تخصصی، در ابتدا مستقیماً از طرف دفتر برنامه‌ریزی و تألیف و در همان چاپ‌خانه‌هایی که کتب درسی را چاپ می‌کردند، حروف‌چینی و آماده می‌شد و هم‌چون کتب درسی ابتدایی، در مدارس توزیع می‌گردید.

دبیران، مخصوصاً تهرانی‌ها گله داشتند که مجله توی بساط روزنامه‌فروش‌ها (روی دکه)، نیست و به دست آن‌ها نمی‌رسد. ابتدا تا چندین شماره، این مجلات به وسیله‌ی دو نفر از اعضای علاقه‌مند هیئت تحریریه، به کتاب فروشی‌های خیابان انقلاب ـ روبه‌روی دانشگاه تهران ـ برده و بین کتاب‌فروشی‌ها توزیع می‌شد. البته مشکل توزیع مجله همیشه مطرح بوده است.

مقالات اولین شماره‌ی رشد آموزش ریاضی، به شرح زیر است:

ـ نگرشی بر فلسفه و آموزش ریاضیات (دکتر بیژن‌زاده)، درباره‌ی هندسه (حسین غیور)، گفتاری در باب منشاء و مبدأ ریاضیات (دکتر محمد قاسم وحیدی)، زندگینامه‌ی خوارزمی، اصول مجموعه‌ای اعداد طبیعی و بحثی در اصل استقراء ریاضی (دکتر لآلی)، میانگین‌های حسابی و هندسی و کاربردهایی از آن (رضا شهریاری اردبیلی)، مثال‌هایی در رابطه با آموزش مفهوم «**گروه**» در ریاضیات مقدماتی (دکتر علیرضا جمالی)، احتمال هندسی (دکتر عبدالرحمن آذری)، حل یک مسئله با استفاده از جبر بول (دکتر اسماعیل بابلیان)، یک روش مقدماتی برای اثبات دستور محاسبه‌ی مساحت دایره، مسائل، مسئله‌ی برج **هانوئی وشگفتانه‌های حسابی**، آشنایی با فعالیت‌های گروه ریاضی دفتر تحقیقات و تألیف، گزارشی از برگزاری اولین مسابقه‌ی ریاضی اصفهان، معرفی کتاب، نامه‌ها؛ که البته در شماره‌های بعدی، سؤالات کنکور و بررسی آن‌ها یا مسائل مسابقات المپیادهای ریاضی نیز چاپ و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. در برهه‌ای از زمان انتشار، به علت حضور آقایان؛ شادروان حسین غیور، ابراهیم دارابی، محمود نصیری، دکتر امیر خسروی که همه از علاقه‌مندان هندسه بودند، مطالب مربوط به هندسه در مجله بر سایر مباحث فزونی گرفته و بیشتر بود.

علاقه‌مندی و دیدگاه هر «سردبیر» در نوع مقالات مجله تأثیرگذار بود. مثلاً زمانی که جناب دکتر قاسم وحیدی اصل سردبیر مجله بودند، مقالات مربوط به تاریخ ریاضیات همیشه جزو مقالات مجله بود یا آقای دکتر علیرضا مدقالچی به مقالات آنالیزَ علاقه‌مند بودند و...

یکی از سری مقالاتی که از شماره‌های ۵ یا ۶ در مجله دیده می‌شود، مقالات آقای دکتر غلامرضا دانش ناروئی تحت عنوان: «نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت» بود که با استقبال خوانندگان مواجه شد.

استادان محترم دیگری که با مجله همکاری مرتب داشتند، دکتر جواد بهبودیان از دانشگاه شیراز، دکتر محمود خاتون‌آبادی از اصفهان، دکتر محمدرضا درفشه از دانشگاه تهران، دکتر عین‌اللّه‌پاشا دانشگاه تربیت معلم، زنده‌یاد دکتر مسعود فروزان از دانشگاه تربیت معلم بودند.

سردبیران محترم مجله در این ۲۵ سال به ترتیب عبارت بوده‌اند از:

دکتر علیرضا جمالی، دکتر علیرضا مدقالچی، دکتر قاسم وحیدی، دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، دکتر علیرضا مدقالچی (نوبت دوم) و سرکار خانم دکتر زهرا گویا که تاکنون بیش از ۵۰ شماره را منتشر کرده‌اند.

مدیران داخلی مجله به ترتیب: رضا شهریاری، محمدعلی بصام‌تبار، میرزا جلیلی، سهیلا غلام آزاد و سپیده چمن‌آرا بوده‌اند.

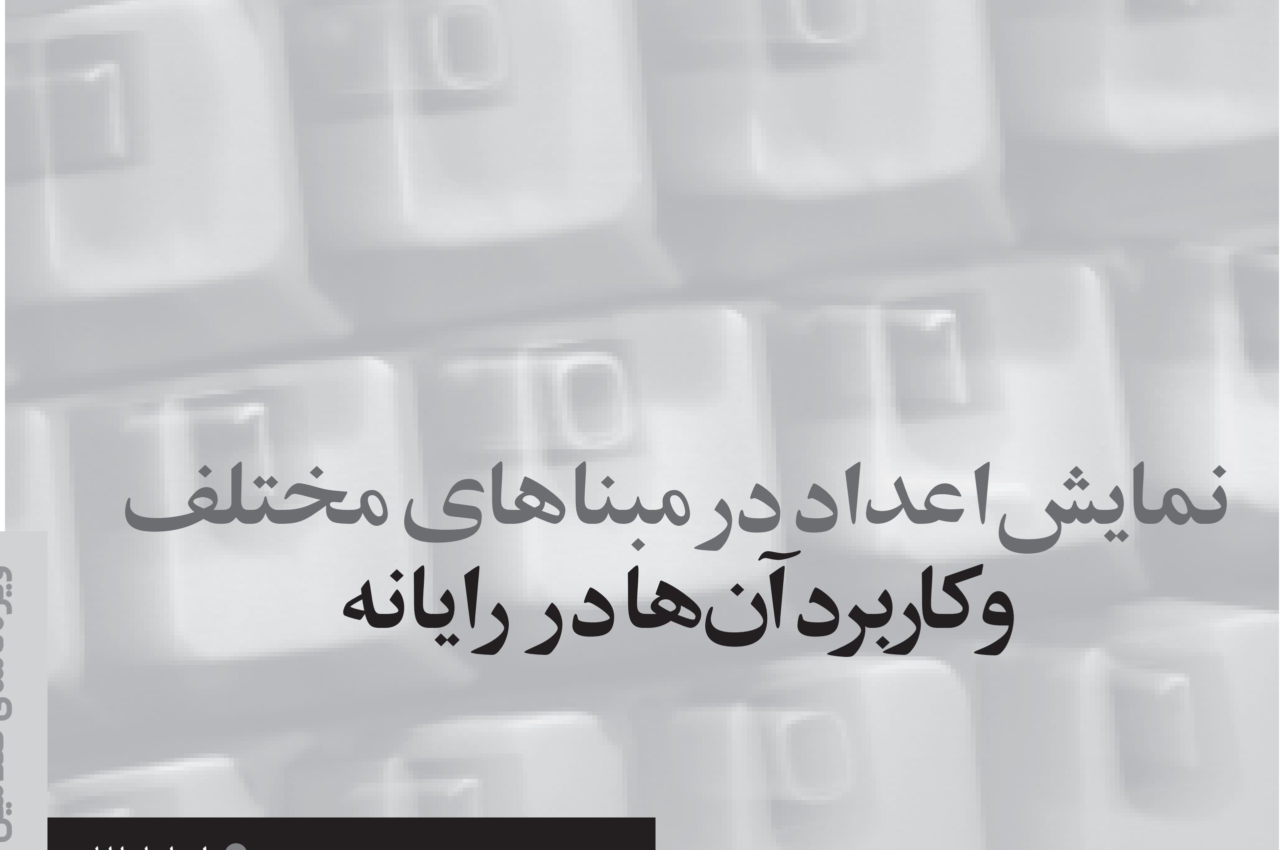
در رابطه با گفت‌وگو با معلمان موفق، مجله به ترتیب با آقایان: زنده‌یاد غلامرضا عسجدی، زنده‌یاد حسین غیور، جلیل قره‌گوزلو و میرزا جلیلی مصاحبه کرده است.

از نظر ارتباط مجله با دبیران در ۱۰ یا ۱۲ سال اول انتشار، خاصه سال‌های اول و دوم، بسیار عالی به نظر می‌رسید. چه شروع انتشار مجله هم‌زمان با **تألیف جدید کتب ابتدایی و راهنمایی** بود. این فرصت مناسبی بود که تغییرات کتاب‌ها یا مواد حذف شده یا جابه‌جا شده از طریق مجله به اطلاع معلمان رسانده شود. به‌خصوص از طرف دفتر برنامه‌ریزی و تألیف بخشنامه شده بود که شورای معلمان هر شهرستان تشکیل شود در آن شورا، اشکالات و مشکلات کتاب‌ها مطرح و همه‌ی جلسه‌ها به **رشد** ارسال گردد.

از جمله دبیران قدیمی که بسیار با مجله در تماس بوده و مقالات ارسال می‌کردند، آقایان: علی‌اکبر بناگر، علی‌اکبرجاویدمهر و فؤاد ابراهیمی بوده‌اند.

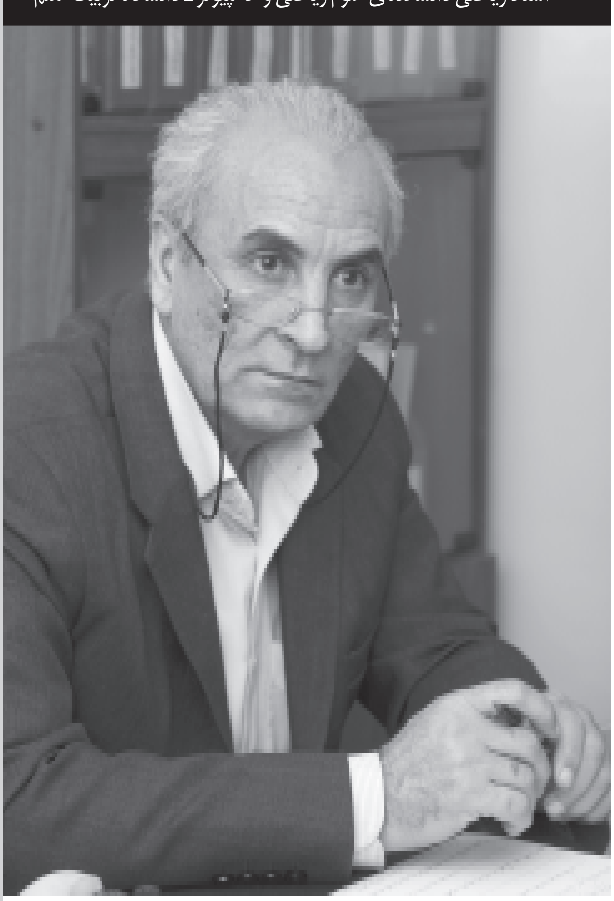
در خاتمه، این جانب به عنوان یک همکار ۳۰ ساله و با تجربه، به گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف پیشنهاد می‌کنم رابطه‌ی گروه را با مجله‌ی خودشان قطع نکنند؛ به ویژه، در این زمان که تألیف کتاب‌های جدید ریاضی مطرح می‌باشد، لازم است که راجع به اهداف، روش‌ها و شیوه‌های آموزش این کتاب‌ها به مجله مقاله بدهند و از دبیران سراسر کشور نیز بخواهند که نظرات خود را در مجله منعکس نمایند. به عبارت دیگر، ارتباط خود را با دبیران از طریق مجله قوت بخشند.

و این، همان‌طور که گفته شد، **هدف اصلی انتشار مجله‌ی «رشد آموزش ریاضی»** بوده است.



نمایش اعداد در مبناهای مختلف و کاربرد آن‌ها در رایانه

اسماعیل بابلیان
استاد ریاضی دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر ـ دانشگاه تربیت معلم



چکیده

تاکنون چنین متداول بوده است که بسط هر عدد حقیقی در مبنای یک عدد صحیح بزرگ تر از یک، نوشته شود. در این مقاله، در مورد امکان استفاده از یک عدد صحیح کوچک تر از ۱- به عنوان مبنا بحث می شود.

ضمناً، با معرفی اعداد مختلط گاوسی بسط این اعداد را در مبناهای مختلف، به ویژه برای ذخیره در رایانه، مورد بررسی قرار می‌دهیم. کاربرد بسط اعداد مختلط در مبناهای مختلف نیز ذکر خواهد شد.

کلید واژه‌ها: نمایش اعداد، مبنای عددی، رایانه، اعداد مختلط گاوسی، بسط اعداد.

۱. مقدمه

مبنایی که در رایانه برای بسط و نمایش اعداد به کار می رود، مبنای ۲ است. علت انتخاب ۲ به عنوان مبنا این است که نمایش هر عدد صحیح در این مبنا، با ارقام ۰ و ۱ میسر است و از نظر فیزیکی، ایجاد دو وضعیت متفاوت برای نمایش ۰ و ۱ آسان است. البته، برای سرعت بخشیدن به تبادل اطلاعات، از مبناهای ۸ و ۱۶ نیز به دلیل ارتباط ساده و نزدیکی که با مبنای ۲ دارند، استفاده می شود.

برای نمایش یک رقم در مبنای ۲ از عنصری به اسم بیت (BInary digiT $\rightarrow$ BIT) استفاده می شود و برای نمایش یا ذخیره‌ی یک عدد صحیح، چند بایت (Byte) به کار می رود. هر بایت دارای ۸ بیت است.

۲. نمایش اعداد صحیح

به طور معمول، اگر n عددی صحیح باشد بسط درمبنای ۲ نوشته می‌شود و اگر n منفی باشد، کنار بسط |n| نماد (ـ) قرار می‌گیرد. اما در رایانه برای نمایش (±) باید فکری کرد. فرض کنید اعداد صحیح قابل نمایش در یک بایت (۸ بیت) مورد نظر باشند. یک روش این است که بیت اول را مخصوص علامت عدد بگیریم و در ۷ بیت بعدی ارقام قدر مطلق عدد را ذخیره کنیم. در این صورت، تعداد اعداد قابل ذخیره در یک بایت عبارت است از:

$$۲\times ۲^{۷}-۱=۲^{۸}-۱=۲۵۵ \qquad \text{(از ۱۲۷- تا ۱۲۷+)}$$

نمایش اعداد ۷۱- و ۱۰۱ را در زیر ملاحظه می‌کنید:

۷۱−	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱۰۱	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در این نحوه‌ی نمایش ۰± داریم!

برای جلوگیری از این مشکل، از روش مکمل دوها (Twos Complement) استفاده می‌شود. ابتدا به مثالی در مبنای ۱۰ توجه کنید.

تفریق اعداد در مبنای ۱۰ را می‌توان با استفاده از جمع به‌دست آورد! مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}۳۱۴-۱۳۹&=۳۱۴+(۱۰۰۰-۱۳۹)-۱۰۰۰\\&=(۳۱۴+۸۶۱)-۱۰۰۰\\&=۱۱۷۵-۱۰۰۰=۱۷۵\end{aligned}$$

توجه کنید:

$$\begin{aligned}۱۰۰۰-۱۳۹&=۹۹۹-۱۳۹+۱\\&=۸۶۰+۱=۸۶۱\end{aligned}$$

عدد ۸۶۱ بدون هیچ زحمتی به دست می‌آید! عدد ۸۶۱ مکمل عدد ۱۳۹- نسبت به ۱۰۰۰ است.

معادل عملیات بالا در مبنای ۲ صورت می‌گیرد. مثلاً برای نمایش ۵- چنین عمل می‌کنیم:

$$۵=(۱۰۱)_{۲}$$

و

$$\begin{aligned}&(۱۱۱۱۱۱۱۱-۱۰۱)+۱\\&=۱۱۱۱۱۰۱۰+۱=۱۱۱۱۱۰۱۱\end{aligned}$$

ملاحظه کنید که

$$۱۱۱۱۱۰۱۱+۱۰۱=۱\boxed{۰۰۰۰۰۰۰۰}$$

در واقع برای رقم ۱ که در محل نهم قرار می‌گیرد جایی وجود ندارد، لذا حذف می‌شود! بنابراین، برای ذخیره‌ی اعداد منفی، مکمل دوهای آن‌را ذخیره می‌کنیم. به این ترتیب در ۳ بیت می‌توان

$$۲^{۳}=۸$$

عدد به صورت زیر ذخیره کرد:

۱	۱	۱	۱−	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۲−	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۳−	۲	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۴−	۳	۰	۱	۱

ملاحظه می‌شود که در ۳ بیت، ۸ عدد ذخیره می‌شود (از $۲^{۲}$ – تا ۱ - $۲^{۲}$). به این ترتیب در ۸ بیت می‌توان ۲۵۶ = $۲^{۸}$ عدد ذخیره کرد (از $۲^{۷}$– تا ۱ - $۲^{۷}$).

۱.۲ تفریق

البته نحوه‌ی بالا برای نمایش اعداد منفی، مبنایی برای تفریق اعداد نیز شد.

$$\begin{aligned}۷-۲&=۷+(-۲)\\&=(۰۰۰۰۰۱۱۱)_{۲}+(۱۱۱۱۱۱۱۰)_{۲}\\&=(۰۰۰۰۰۱۰۱)_{۲}=۵\end{aligned}$$

۲.۲ تقسیم

رایانه‌ها تقسیم یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر را با استفاده از تفریق‌های مکرر انجام می‌دهند. به یک مثال در مبنای ۱۰ توجه کنید:

$$\begin{array}{lll}۱۴\div ۴\rightarrow & ۱۴-۴=۱۰ & ۱\\ & ۱۰-۴=۶ & ۲\\ & ۶-۴=\boxed{۲} & \boxed{۳}\end{array}$$

خارج قسمت ۳ و باقیمانده ۲ است. در حقیقت تعداد تفریق‌ها، تا رسیدن به عددی کوچک‌تر از مقسوم‌علیه، با خارج قسمت برابر است. برای انجام تقسیم بالا در مبنای ۲، چنین عمل می‌کنیم:

$$۱۴=(۱۱۱۰)_{۲} \qquad \text{مکمل ۴} = (۱۱۱۱۱۱۰۰)_{۲}$$

$$\begin{array}{l}
\boxed{۱} \qquad \begin{array}{r} ۱\ ۱\ ۱\ ۰ \quad \\ +\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۰\ ۰ \\ \hline ۰\ ۰\ ۰\ ۰\ ۱\ ۰\ ۱\ ۰ \end{array} \\
\boxed{۱۰} \qquad \begin{array}{r} +\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۰\ ۰ \\ \hline ۰\ ۰\ ۰\ ۰\ ۰\ ۱\ ۱\ ۰ \end{array} \\
\boxed{۱۱} = ۳ \qquad \begin{array}{r} +\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۰\ ۰ \\ \hline ۰\ ۰\ ۰\ ۰\ ۰\ ۰\ ۱\ ۰ \end{array} = ۲
\end{array}$$

۳. استفاده از مبنای منفی

سؤالی که در این جا مطرح است این است که «آیا می‌توان هر عدد صحیح را در مبنای یک عدد صحیح کوچک‌تر از ۱- نوشت؟» اگر این کار امکان‌پذیر باشد، ذخیره‌ی این اعداد در رایانه نیز آسان خواهد بود؟ برای پاسخ به این سؤال، قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه: هر عدد صحیح را می‌توان در مبنای (۲-) نمایش داد.

اثبات این قضیه یکی از مسائل جالب در زمینه‌ی استقرای ریاضی است. اما چرا از این مبنا در رایانه استفاده نمی‌شود؟ علت این‌راکه از مبنای ۲- استفاده نمی‌شود توضیح می‌دهیم. فرض کنید فقط از سه بیت (سه رقم) استفاده کنیم.

$۰ = (۰۰۰)_{-۲}$	$۲ = (۱۱۰)_{-۲}$
$۱ = (۰۰۱)_{-۲}$	$۳ = (۱۱۱)_{-۲}$
$-۱ = (۰۱۱)_{-۲}$	$۴ = (۱۰۰)_{-۲}$
$-۲ = (۰۱۰)_{-۲}$	$۵ = (۱۰۱)_{-۲}$

اگر از ۴ بیت استفاده کنیم، اعداد ۱۰- تا ۵ قابل نمایش هستند! چرا؟ یک علت این موضوع را می‌توان در قضیه زیر دید. (عدم تقارن).

قضیه: اگر $m = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (-2)^i$ ، $\alpha_n = 1$ و $\alpha_i \in \{0,1\}$ ، آن‌گاه اگر n زوج (فرد) باشد m مثبت (منفی) است.

علت دوم را در جمع دو عدد که در مبنای ۲- نوشته شده‌اند می‌توان یافت. با توجه به این‌که

$$۲ = (۱۱۰)_{-۲}$$

وقتی دو عدد در مبنای ۲- را با هم جمع می‌کنیم

$$۱ + ۱ = (۱۱۰)_{-۲}$$

و این کار جمع کردن را مشکل می‌کند. توجه کنید:

$$+\begin{array}{r} ۵ \\ ۲ \\ \hline ۷ \end{array} \rightarrow +\begin{array}{r} (۱\ ۰\ ۱)_{-۲} \\ (۱\ ۱\ ۰)_{-۲} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} ۱\ \ ۱\ \quad\quad \\ ۱\ ۰\ ۱ \\ +\ ۱\ ۱\ ۰ \\ \hline (۱\ ۱\ ۰\ ۱\ ۱)_{-۲} \end{array} = ۷$$

یعنی به جای ده بر یک در مبنای ۱۰ یا ۲ بر ۱ در مبنای ۲، باید عدد ۱۱ را به دو ستون چپ اضافه کنیم.

مثال

$$+\begin{array}{r} ۲۱ \\ ۳ \\ \hline ۲۴ \end{array} \rightarrow +\begin{array}{r} ۱\ ۱\ \quad\quad\quad\quad \\ ۱\ ۱\ \quad\quad \\ ۱\ ۰\ ۱\ ۰\ ۱ \\ ۱\ ۱\ ۱ \\ \hline (۱\ ۱\ ۰\ ۱\ ۰\ ۰\ ۰)_{-۲} \end{array} = ۲۴$$

۴. اعداد گاوسی و بسط آن‌ها در مبنای یک عددگاوسی

عدد $z = a + ib$ را که در آن $a, b \in Z$ و $i^2 = -1$ یک عدد گاوسی نامند. مجموعه‌ی اعداد گاوسی را با $Z[i]$ نمایش می‌دهند.

در اعداد صحیح، وقتی $b > 1$ به‌عنوان مبنا انتخاب می‌شود، ارقام مجاز در این مبنا اعضای مجموعه‌ی $D = \{0, 1, \dots, b-1\}$ هستند. لذا در حالت کلی، می‌توان مجموعه‌ی D را انتخاب کرد و بر حسب کاربرد لازم، محدودیت‌هایی روی آن گذاشت.

به این ترتیب تعریف زیر را داریم:

تعریف. $b \in Z[i]$ با مجموعه‌ی ارقام D (که $0 \in D \subseteq Z[i]$) را یک مبنای معتبر برای $Z[i]$ نامند اگر هر عدد صحیح گاوسی غیر صفر z را بتوان به‌شکل منحصر به فردی به صورت $z = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r b^r$ نوشت که k عددی حسابی است و $\alpha_r \in D$ و در این صورت می‌نویسند $z = (\alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_1, \alpha_0)_b$.

داویو و گروسارت (۱۹۷۸) ثابت کردند که $b = 2 + i$ با مجموعه‌ی ارقام $D = \{0, \pm 1, \pm i\}$ یک مبنای معتبر برای $Z[i]$ است. گاوس نشان داد که اگر m و n نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی $\{0, 1, \dots, n^2 + m^2 - 1\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به پیمانه‌ی $b = n + mi$ تشکیل می‌دهد. هم‌چنین، شرط لازم برای آن‌که بتوان تمام اعداد صحیح گاوسی را با استفاده از اعداد حسابی به عنوان ارقام در مبنای b نمایش داد آن است که $m = \pm 1$ (زیرا قسمت موهومی توان‌های

طبیعی b ، یعنی $(n+im)^r$ مضرب m هستند). در نتیجه، تنها مبنای ممکن $n \pm i$ با ارقام $\{0,1,...,n^2\}$ است که $n \in Z$.

کاتایی و زابو (۱۹۷۵) ثابت کرده‌اند که تمام اعداد صحیح گاوسی غیر صفر را می‌توان به صورت منحصر به فردی در مبنای $-n+i$ با استفاده از $D=\{0,1,...,n^2\}$ نوشت. مبنای $b=(-1+i)$ با مجموعه‌ی ارقام $\{0,1\}$ سال‌هاست که توسط دانشمندان علوم کامپیوتر مورد استفاده قرار گرفته است (کنوت، ۱۹۸۱). بسط برخی از اعداد مختلط را در این مبنا ملاحظه کنید:

$$2+3i=(1011)_{-1+i} \qquad 5-3i=(101110)_{-1+i}$$
$$-1-i=(110)_{-1+i} \qquad 9=(111000001)_{-1+i}$$
$$2-5i=(11101001010)_{-1+i} \qquad 1+2i=(1110101)_{-1+i}$$

۱.۴ محاسبه در مبناهای مختلط

ارقام مجاز در مبنای $-n+i$ عبارتند از $0,1,...,n^2$. پس اگر مجموع یک ستون (در جمع دو عدد) از n^2 تجاوز کند، آن‌گاه n^2+1 یا مضربی از آن به ستون‌های سمت چپ آن منتقل می‌شود.

چون $n^2+1=(1\ \ 2n-1\ \ (n-1)^2\ \ 0)_{-n+i}$ پس سرریز n^2+1 در یک ستون به این معنی است که ارقام $(n-1)^2$، $2n-1$ و ۱ به سه ستون سمت چپ آن منتقل می‌شود. برای مبنای $-1+i$ باید ارقام ۰، ۱ و ۱ به سه ستون سمت چپ اضافه شوند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{array}{r} 2+3i \\ +\ (-1-i) \\ \hline 1+2i \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & & & & \\ & & 1 & 1 & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & & & & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2+3i \\ \times\ (-1-i) \\ \hline 1-5i \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & & \times & 1 & 1 & 0 \\ \hline & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & + 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & 1 & 1 & 0 & & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & & & & & \\ & & 1 & 1 & 0 & & & & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & & & & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

البته روش دیگری هم وجود دارد که در زیر، آن‌را توضیح می‌دهیم.

هر نمایش یک عدد در مبنای b را می‌توان به صورت یک چند جمله‌ای با متغیر b در نظر گرفت و جمع، تفریق و ضرب را بدون درنظر گرفتن انتقال‌ها در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های صوری $Z[b]$ انجام داد. تا این مرحله هیچ محدودیتی برای ضرایب توان‌های b ایجاد نمی‌شود. پس از پایان محاسبات چندجمله‌ای، حاصل باید **واضح** شود، یعنی تمام ضرایب در مجموعه‌ی D قرار گیرند.

چندجمله‌ای $b^2+2nb+(n^2+1)$ در مبنای $-n+i$ صفر است. این چند جمله‌ای را **چندجمله‌ای مینیمم** نامند که اضافه کردن هر مضرب آن به هر چندجمله‌ای از b تغییری حاصل نمی‌کند. لذا هر ضریبی که خارج از مجموعه‌ی D باشد، توسط مضربی از $(1\ \ 2n\ \ n^2+1)_b$ واضح‌سازی می‌شود. برای مبنای $-1+i$ داریم $n=1$ و از $(1\ \ 2\ \ 2)_{-1+i}$ استفاده می‌شود. جواب مثال قبل را به این روش به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{r} 2+3i \\ +\ (-1-i) \\ \hline 1+2i \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 0 \\ \hline & & & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & & -1 & -2 & -2 & \\ \hline & & & 0 & -1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 2 & 2 & & \\ \hline & & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ & -1 & -2 & -2 & & & \\ \hline & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

توجه کنید که رقم‌های ۲ و ۱- در $\{0,1\}$ نیستند.

مثال: اگر $b=-3+i$ آن‌گاه $D=\{0,1,...,9\}$ محاسبات زیر حاصل ضرب دو عدد را حساب می‌کند:

$$(182)_{-3+i}\times(38)_{-3+i}=(13546)_{-3+i}$$

از سمت راست واضح‌سازی انجام می‌دهیم

برای مبنای $b = -۳ + i$ داریم

$$(۱\ \ ۶\ \ ۱۰)_b = b^۲ + ۶b + ۱۰ = ۰$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & ۱ & ۸ & ۲ \\
\times & & & ۳ & ۸ \\
\hline
 & & ۸ & ۶۴ & ۱۶ \\
 & ۳ & ۲۴ & ۶ & \\
\hline
 & ۳ & ۳۲ & ۷۰ & ۱۶ \\
 & & -۱ & -۶ & -۱۰ \\
\hline
 & ۳ & ۳۱ & ۶۴ & ۶ \\
 & -۶ & -۳۶ & -۶۰ & \\
\hline
 & -۳ & -۵ & ۴ & ۶ \\
۱ & ۶ & ۱۰ & & \\
\hline
۱ & ۳ & ۵ & ۴ & ۶
\end{array}$$

الگوریتم واضح‌سازی، روشی برای نوشتن بسط یک عدد گاوسی در یک مبنا به دست می‌دهد.

برای نوشتن عدد گاوسی $s + it$ در مبنای $n+i$ – داریم:

$$s + it = t(-n + i) + (s + nt)$$

اما ممکن است $s + nt$ یا t به مجموعه‌ی $D = \{۰, ۱, \ldots, n^۲\}$ تعلق نداشته باشد. با عمل واضح‌سازی ضرایب را متعلق به D می‌سازیم.

مثال: عدد ۹ را در مبنای $-۱ + i$ با $D = \{۰, ۱\}$ بنویسید.

می‌دانیم که $(۱\ ۲\ ۲)_{-۱+i} = ۰$ با کم و زیاد کردن sb^r برابر $(۱\ ۲\ ۲)$ به طوری که اگر $a_r \notin D$، $۰ \le a_r + s(n^۲ + ۱) \le n^۲$ ضرایب را واضح‌سازی می‌کنیم.

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & & & & & ۹ \\
 & & & & & -۴ & -۸ & -۸ \\
\hline
 & & & & & -۴ & -۸ & ۱ \\
 & & & & ۴ & ۸ & ۸ & \\
\hline
 & & & & ۴ & ۴ & ۰ & ۱ \\
 & & & -۲ & -۴ & -۴ & & \\
\hline
 & & & -۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\
 & & ۱ & ۲ & & & & \\
\hline
 & & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\
 & -۱ & -۲ & & & & & \\
\hline
 & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\
۱ & ۲ & ۲ & & & & & \\
\hline
۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱
\end{array}$$

$$(۱\ ۱\ ۱\ ۰\ ۰\ ۰\ ۰\ ۱)_{-۱+i} = ۹$$

۲.۴ بسط یک عدد مختلط (گاوسی یا غیرگاوسی) در مبنای مختلط

همان‌گونه که هر عدد حقیقی را می‌توان در مبنای دلخواه و صحیح $b > ۱$ بسط داد، در مورد هر عدد مختلط نیز می‌توان چنین کرد. هر عدد مختلط را در مبنای b می‌توان به صورت $z = \sum_{i\ =-i}^{\alpha} \ b^i$ نوشت که $\alpha_i \in \{۰, ۱, \ldots, n^۲\}$ و به صورت زیر نشان داد:

$$z = (\alpha_k \ \ \alpha_{k-۱} \ \ldots \alpha_۱ \ \ \alpha_۰ \ . \ \alpha_{-۱} \ \ \alpha_{-۲} \ldots)_b$$

مثلاً

$$\frac{۵ + i}{۴} = ۱ + (-۱ + i)^{-۲} + (-۱ + i)^{-۳} = (۱/۰۱۱)_{-۱+i}$$

$$\frac{۱}{۳} = (۱/\overline{۴۶۲۴})_{-۳+i}$$

$$\sqrt{۲} + i = (۱۵/۴۹۷۷۸۰۱۶\ldots)_{-۳+i}$$

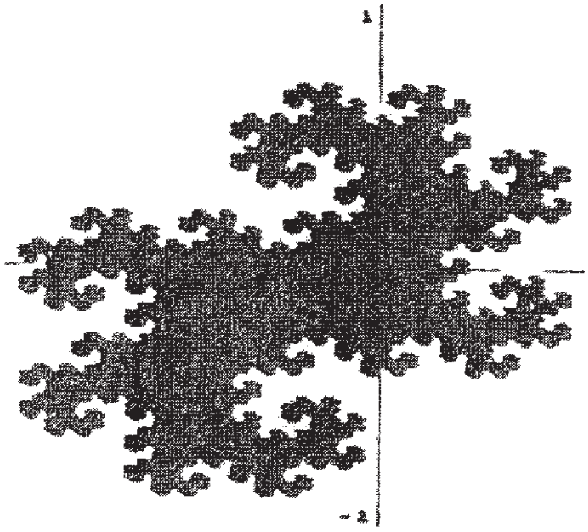
$$\frac{۱ - ۲i}{۵} = (۰/\overline{۰۰۱})_{-۱+i} = (۱\overline{۱۰۰})_{-۱+i} = (۱۱۱/\overline{۰۱۰})_{-۱+i}$$

ملاحظه می‌شود که همانند وجود چند بسط برخی اعداد در مبنای ۲ یا ۱۰، در این‌جا هم یک عدد ممکن است چند بسط داشته باشد.

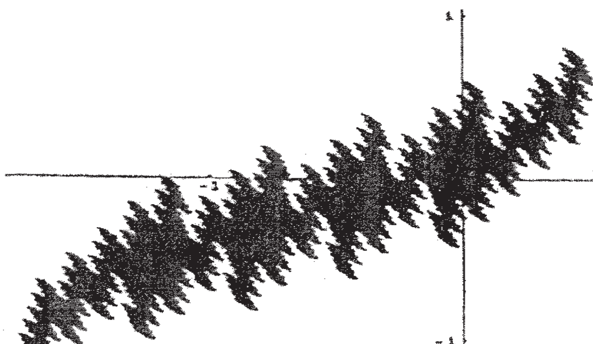
مشابه دستگاه اعداد حقیقی، اگر در $x+iy$، x و y گویا باشند، بسط آن متناهی یا نامتناهی و متناوب است و در غیر این صورت، بسط نامتناهی و غیرمتناوب است.

۳.۴ کاربرد در طراحی و کاشی‌کاری

اصولاً منظور از کاشی‌کاری سطح، **پیدا کردن منحنی‌های**



(الف)



(ب)

مسطح صفحه پرکن است. یعنی، پوشاندن تمام صفحه توسط اشکال هندسی به طوری که هم‌پوشانی نداشته باشند. این نقوش، دارای **مرز خطی** نیستند بلکه **مرز فراکتالی** دارند.

تعریف: به ازای هر مبنای b و مجموعه‌ی ارقام D ناحیه‌ی $T(b ، D)$ را مجموعه‌ای از اعداد مختلط درنظر می گیریم که در مبنای b، دارای نمایشی با قسمت صحیح صفر باشند. یعنی، $T(b,D) = \{(۰/\alpha_۱\alpha_۲...)_b | \alpha_i \in D\}$. اگر b یک مبنای معتبر باشد، **$T(b,D)$ یک مجموعه‌ی بسته با مساحت یک** است که با استفاده از آن می‌توان صفحه را کاشی کاری کرد. به عبارت دیگر، اگر مجموعه‌ی بالا را با تبدیلات متناظر با اعداد صحیح گاوسی انتقال دهیم، تمام صفحه بدون هم‌پوشانی کاشی کاری خواهد شد و نواحی فقط دارای مرز مشترک هستند. در حقیقت، اگر مجموعه‌ی $T(b,D)$ را تحت عدد گاوسی z انتقال دهیم، مجموعه‌ای حاصل می‌شود که حاوی تمام اعداد با قسمت صحیح عدد z است.

در شکل (الف) مجموعه‌ی $T(-۱+i,\{۰,۱\})$ و در شکل (ب) مجموعه‌ی $T(-۲+i,\{۰,۱,۲,۴\})$ را ملاحظه می‌کنید.

به این ترتیب، با استفاده از رایانه و bهای مختلف، می‌توان منحنی‌های زیادی تولید کرد که دارای مرز فراکتالی هستند. مثلاً اگر $b=-۱-i$، منحنی حاصل یک منحنی برف‌دانه (snow flake) است (گیلبرت، ۱۹۸۲).

منابع

1. Davio, M. Deshamps, J.P. and Grossart, G. (1978). **Complex Arithmetic. Philips M.B.L.E. Research Lab.. Report R369**, Brussels (May 1978).

2. Gilbert, W.J. (1982). Complex Numbers With Three Radix Expressions. **Canada J. Math**. 34. 1348-1355.

3. Katai. I. and Szabo, J. (1975). **Canonical Number Systems for Complex integers**. Acta. Sei. Math. (Szeqed) 37, 255-260

4. Knuth, D.E. (1981). **The Art of Computer Programming**. Vol. 2; Semi Numerical Algorithms, Addison-Wesley, Reading MA, 1981.

جبر و احتمال به روایت تاریخ

● بیژن ظهوری زنگنه
استاد ریاضی دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

در بعضی از دروس مقدماتی احتمال، تأکید زیادی بر روش‌های شمارش و ترکیبیاتی مانند ترکیب و ترتیب می‌گردد. تجربه‌ی تاریخی نشان داده است که این تأکید، باعث می‌شود که کسانی که از این روش‌ها خوششان نمی‌آید، علاقه‌مندی به احتمال را هم از دست داده‌اند

چکیده

سال‌ها پیش، با یکی از همکاران دانشگاهی صحبت می‌کردیم. گفت در نام کتاب «جبر و احتمال» اشتباهی رخ داده! حتماً نام این کتاب «جبر و مثلثات» یا «آمار و احتمال» بوده است زیرا این عنوان، بی‌معنی است. به او گفتم درست است که این عنوان غیرمتعارف و غریب است، ولی لحظه‌ای فکر نکرده‌اید که در پشت این نام، فلسفه‌ای وجود دارد؟ و نفس انتخاب آن، می‌خواهد که خواننده را به چالش بکشد و وادار به تفکر کند؟! سؤال این همکار، انگیزه‌ی نوشتن این مقاله شد.

در این مقاله تاریخ شکل‌گیری کتاب جبر و احتمال و فلسفه‌ی آموزش آن بیان و تبیین شده است.

کلید واژه‌ها: کتاب درسی جبر و احتمال سال سوم ریاضی، برنامه‌ی درسی، آموزش متوسطه.

کتاب جبر و احتمال و حسابان در سال سوم رشته‌ی ریاضی فیزیک تدریس می‌شوند. از سال ۱۳۷۱ و با شروع نظام جدید آموزش متوسطه، کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول و دوم، برنامه‌ریزی و به تدریج تألیف شدند و در ابتدا، با عنوان ریاضی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ در چهار نیم‌سال اول تحصیلی دوره‌ی متوسطه، مورد استفاده قرار گرفتند. یعنی هم‌زمان با ورود دانش‌آموزان به هر پایه‌ی تحصیلی جدید، کتاب‌های آن پایه هم تألیف می‌شد. برای پایه‌ی سوم رشته‌ی ریاضی فیزیک، ۶ واحد ریاضی درنظر گرفته شده بود که شامل یک درس یک ساله و یک درس یک ترمی بود که درس یک‌ساله (با دو کتاب پشت سر هم) به حسابان اختصاص پیدا می‌کرد و در ادامه‌ی دروس ریاضی ۱ تا ۴ بود و قرار بود که ماهیت محاسبه‌ای و مدل‌سازی داشته باشد. بدین جهت، یک درس با ماهیت استدلالی و ارایه‌ی روش‌های مختلف استدلالی متناسب با استانداردهای مطرح برنامه‌ی درسی ریاضی دوره‌ی متوسطه در چارچوب درس حسابان نمی‌گنجید و ظرفیت جدیدی می‌طلبید. این مفاهیم شامل استدلال استنتاجی و استقرایی، استراتژی‌های حل مسأله، جبر مجموعه‌ها، رابطه و نمودارهای هندسی آن‌ها،

نامساوی‌ها، احتمال هندسی، احتمال و اعداد مختلط بودند.

توجه به این نکته مهم است که در ابتدا، نامی که برای دروس حسابان (۱) و (۲) درنظر گرفته شده بود، ریاضی ۵ و ۶ بود و برای این درس جدید که ماهیت استدلالی داشت نیز نام ریاضی ۷ درنظر گرفته شده بود. اما پس از شور و مشورت‌های بسیار، واژه‌ی «حسابان» برای درس‌های ریاضی ۵ و ۶ و عنوان «جبر و احتمال» برای ریاضی ۷ پذیرفته شد که داستان شکل‌گیری کتاب اخیر، هدف اصلی این مقاله است.

در کتاب جبر و احتمال، فصل اول به انواع استدلال از جمله استدلال‌های استقرایی و استنتاجی اختصاص یافته که مستقل از فصل‌های دیگر نیست و در واقع، ابزاری برای یادگیری و تدریس مفاهیم فصل‌های دیگر کتاب است؛ به همان ترتیبی که فصل‌های دیگر کتاب نیز، ابزاری برای تعمیق یادگیری انواع استدلال‌های استقرایی و استنتاجی است. فصل دوم کتاب مربوط به یکی از مباحث جالب و جذاب قابل طرح در سطح متوسطه است که در نظام سابق نیز این مبحث در ریاضیات جدید سال اول تدریس می‌شد. همین مبحث، ابزاری برای یاددادن و یادگرفتن استدلال استنتاجی و استراتژی‌های مختلف اثبات مانند برهان خلف است. ولی در کتاب ریاضیات جدید نظام سابق، این بحث بدون این‌که از آن به طور منسجم استفاده گردد، ارایه می‌شد و در نتیجه، ابتر باقی می‌ماند. احتمال ریاضی هم با توجه به اصول موضوع ساده‌ی آن، بهترین دستگاه برای آموزش نظام اصل موضوعی است که در آن، **جبر مجموعه‌ها** نقش اصلی را بازی می‌کند. بنابراین، اصول موضوع احتمال و ارتباط آن با نظریه‌ی مجموعه‌ها، به مباحث انسجام می‌دهد و مثلاً اگر احتمال را از این برنامه و کتاب حذف کنیم، ناقص می‌شود. در بخش نظریه‌ی احتمال، استفاده‌ی مکرر از استقرای ریاضی و نظریه‌ی مجموعه‌ها و با مطرح شدن احتمال هندسی و ارتباط هندسه‌ی مختصاتی با جبر و احتمال، وحدت ریاضی برقرار می‌شود یعنی ریاضی به صورت یک‌پارچه دیده می‌شود. مباحثی که ظاهراً ارتباطی با هم نداشتند در یک شکل منسجم به هم ارتباط و اتصال پیدا می‌کردند و بدین ترتیب، ارتباطات ریاضی‌وار که اتفاقاً، یکی از استانداردهای مطرح آموزش ریاضی شورای ملی معلمان ریاضی بود، به بهترین نحوی برقرار می‌گشت. علاوه بر این، رویکردی که برای برنامه‌ریزی درسی این کتاب درنظر گرفته شد، برنامه‌ی درسی تلفیقی بود، بدین معنا که دو حوزه‌ی مجزای ریاضی یعنی ریاضیات پیوسته و گسسته از طریق این برنامه، به هم پیوند می‌خورد و درهم تنیده می‌شد. هم‌چنین، «جبر و احتمال» حتی بین به ظاهر دورترین حوزه‌های ریاضی نیز وحدت برقرار می‌کرد. مسلماً این نام در جای دیگری مطرح نشده و از لغات ساخته‌شده‌ی شورای برنامه‌ریزی ریاضی بین سال‌های ۱۳۷۳ تا ۱۳۷۸ است. اهمیت دیگر موضوع کتاب این بود که تلفیق ریاضی با زمینه‌های بین رشته‌ای به‌خصوص با محوریت احتمال، بحث اصلی ریاضیات روز است و یکی از بهترین شاهدان این ادعا، بیست و پنجمین کنگره‌ی بین‌المللی ریاضی‌دانان است که در سال ۲۰۰۶ میلادی (۱۳۸۵)، در مادرید برگزار شد. این کنگره، ۲۰ سخنران عمومی و ۱۷۸ سخنران مدعو داشت که علت انتخاب و دعوت آن‌ها، پوشش متعادلی از موضوعات بحث‌انگیز، جذاب، به روز و رو به رشد ریاضی عنوان شده بود.

این کنگره تجلی واقعی ریاضیات مفهومی بود؛ ریاضیاتی که به شدت چهره‌ی تلفیقی و بین رشته‌ای داشت و ارتباط و اتصال شاخه‌های مختلف ریاضی در آن‌ها مشهود بود و به همین دلیل، از ریاضیات سنتی فاصله گرفته بود. در واقع ریاضیات مطرح شده در این کنگره، از ریاضیات سنتی بیشتر به منزله‌ی ابزار استفاده کرده بود، ابزارهای متداولی که زمانی هر یک مفهوم عمیقی در ریاضی بوده‌اند ولی در حال حاضر، ریاضی‌دان‌ها از آن‌ها، به‌خوبی، به عنوان ابزاری عادی اما عمیقاً مهم و مفید برای خلق مفاهیم پیچیده و تلفیقی استفاده می‌کنند. علاوه بر این، اکثر جایزه‌های مهم ریاضی در سال ۲۰۰۶، به کسانی تعلق گرفت که در احتمال و فرایندهای تصادفی تحقیق کرده بودند که ماهیتی تلفیقی و بین رشته‌ای داشت.

ویژگی‌های برنامه‌ی درسی جبر و احتمال

در بعضی از دروس مقدماتی احتمال، تأکید زیادی بر روش‌های شمارش و ترکیبیاتی مانند ترکیب و ترتیب می‌گردد. تجربه‌ی تاریخی نشان داده است که این تأکید، باعث می‌شود که کسانی که از این روش‌ها خوششان نمی‌آید، علاقه‌مندی به احتمال را هم از دست داده‌اند. واضح است که یکی از شاخه‌های رشته احتمال، «احتمال ترکیبیاتی» است و علاقه‌مندان به خود را نیز دارد ولی این تمام احتمال نیست. برای این منظور در برنامه‌ریزی درسی برای کتاب «جبر و احتمال»، سعی شد با وجود استفاده از این روش‌ها، تمام مباحث مقدماتی را وابسته به این مباحث نکنیم و بنابراین، از احتمال هندسی استفاده کردیم. چون بنابه باور آموزشی خود، تبدیل احتمال مقدماتی به روش‌های ترکیبیاتی را هم ظلم به احتمال و هم ظلم به ترکیبیات می‌دانستیم.

یکی دیگر از مباحثی که در این کتاب مطرح شد، اعداد مختلط بود. معرفی «اعداد مختلط» در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای،

جایگاه ویژه‌ای دارد و از چند دهه‌ی گذشته، در دوره‌های متوسطه‌ی اغلب کشورهای دنیا ـ به جز ایران ـ تدریس شده است. برای تدریس «اعداد مختلط» در دوره‌ی متوسطه، دلیل‌های موجهی وجود دارند که از آن جمله می‌توان به حل معادلات درجه دوم و کاربرد آن در هندسه و فیزیک الکتریسیته‌ی دوره‌ی متوسطه اشاره کرد.

در حال حاضر، به دلیل حذف و اضافه‌های مکرر این مبحث در دوره‌ی متوسطه، معمولاً در ابتدای تدریس ریاضی عمومی (۱) دانشگاه، «اعداد مختلط» تدریس می‌شود که سازگاری با سایر مباحث ریاضی دانشگاهی سال اول را ندارد. اما به دلیل ضروری دانستن آن برای تمام دانشجویان علوم پایه و مهندسی، در ابتدای ریاضی عمومی به این بحث پرداخته می‌شود. همه‌ی این‌ها در حالی است که جایگاه اصولی «اعداد مختلط» به شکل مقدماتی، محاسباتی و جبری آن، در دوره‌ی متوسطه است.

به هر حال و به دلایل تاریخی، در گذشته این مطلب در برنامه‌ی درسی دوره‌ی متوسطه ایران حضور نداشته است. در حالی که اگر به استانداردهای برنامه درسی ریاضی کشورهای پیشرفته توجه شود، آشنایی با «اعداد مختلط» در تمام آن‌ها وجود دارد.

باز هم برای آشنایی بیش‌تر با سیر تاریخی برنامه‌ی درسی ریاضی دوره‌ی متوسطه و دانشگاه در ایران، می‌توان به درس «متمم جبر» در دانشگاه‌ها اشاره کرد. این درس شامل اعداد مختلط، آنالیز ترکیبی و دترمینان بود. هدف این درس همان‌طور که از نام آن پیدا است، پرکردن خلاء‌های مدرسه‌ای بود که در زمان مناسب خود، به آن پرداخته نشده بود. به تدریج که این مباحث از سال ۱۳۵۰ وارد برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای در دوره‌ی متوسطه شد، این درس در دانشگاه، از موضوعیت خارج شد و از برنامه‌ی درسی دانشگاهی حذف گردید، اما تنها قسمتی از این درس که وارد برنامه‌ی درسی متوسطه نشد، مبحث «اعداد مختلط» بود.

در ابتدا، کتاب جبر و احتمال به عنوان یک درس ۲ واحدی در نظام نیم‌سالی واحدی جدید، در چهار فصل استدلال، جبر مجموعه‌ها، احتمال و اعداد مختلط برنامه‌ریزی و تألیف شد و در اولین چاپ آن در سال ۱۳۷۳، به بازار آمد. البته بعد از سالی واحدی شدن نظام جدید، جبر و احتمال به یک درس ۳ واحدی تغییر یافت و در نتیجه، برای آن، برنامه‌ریزی جدید انجام گرفت. در سال ۱۳۷۹ این کتاب با بازسازی کلی برای یک درس سه واحدی چاپ گردید و مبحث استدلال بدون تغییر ماند و فصل احتمال شرطی اضافه شد و اعداد مختلط و جبر مجموعه‌ها نیز بازسازی کلی شد. اما تغییرات به اینجا ختم نشد و مجدداً با موج دیگری، این درس دوباره به ۲ واحد تقلیل پیدا کرد و ۱ واحد این درس به درس دیگری داده شد و فصل‌های احتمال شرطی و اعداد مختلط از این کتاب حذف شدند.

نوآوری در بستر واقع‌بینی

با وجود تغییرات پی‌در پی و بدون توضیح و توجیه علمی ـ آموزشی، کتاب جبر و احتمال به سبب وجود نوآوری‌های منحصر به فردی که از

رویکردی که برای برنامه‌ریزی درسی این کتاب درنظر گرفته شد، برنامه‌ی درسی تلفیقی بود، بدین معنا که دو حوزه‌ی مجزای ریاضی یعنی ریاضیات پیوسته و گسسته از طریق این برنامه، به هم پیوند می‌خورد و درهم تنیده می‌شد

نظر برنامه‌ریزی درسی ریاضی داشت، با کمترین مشکل در تدریس مواجه شد. معلمان که قبلاً ریاضیات جدید تدریس می‌کردند، به تدریس این کتاب روی آوردند و به زودی بر آن مسلط شدند. معلمان تازه‌کار نیز چون از تحصیلات جدید دانشگاهی برخوردار بودند، از لحاظ موضوعی با تدریس این کتاب مشکلی پیدا نکردند.

از همه مهم‌تر این‌که دانش‌آموزانی که مباحث جبر و احتمال را در دبیرستان یادگرفته بودند، به مباحث آن به خصوص احتمال، علاقه‌مند شدند و در این شاخه‌ی جاذب و پویای ریاضی، به فعالیت پرداختند.

چرا آمار و احتمال نباید با هم تدریس شوند

بعد از جبر و احتمال، تصمیم گرفته شد به منظور بالا بردن «سواد کمّی شهروندی»، یک درس آمار و مدل‌سازی برای تمام دانش‌آموزان دبیرستانی اجباری گردد به خصوص آن‌که مبارزه با بی‌سوادی کمّی، یکی از اهداف سال جهانی ریاضیات بود. ریزمواد و اهداف درس آمار و مدل‌سازی متناسب با این اهداف، تنظیم و به گروه تألیف داده شد. در این درس، هدف این بود که به جای تدریس تکنیک‌های آماری صرف، دانش‌آموزان یاد بگیرند که بتوانند با جمع‌آوری داده‌ها و تجزیه و تحلیل آن‌ها، به ارتقای توانایی‌های کمّی خود بیفزایند و با انتخاب مسائل ملموس، مهارت‌های شهروندی خود را افزایش دهند.

در این کتاب، مطالب مقدماتی و تجربی احتمال می‌توانست مفید باشد اما اهداف این درس، با جبر و احتمال کاملاً متفاوت بود. احتمال به عنوان بخشی جذاب و چالش‌برانگیز از ریاضی مدرسه‌ای برای دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی طراحی شده بود که توانایی حل مسأله، قدرت استدلال و تفکر تصادفی آن‌ها را ارتقا دهد. در صورتی که هدف کتاب آمار و مدل‌سازی، ایجاد یک درس عمومی برای همه‌ی شهروندان با حداقل دانش ریاضی اما استفاده از ظرفیت‌های آن بود. هدف آمار و مدل‌سازی این بود که مثلاً اگر دانش‌آموز اخبار اقتصادی تلویزیون یا روزنامه‌ها می‌شنود یا می‌خواند، بتواند آن را دنبال کند و به طور تجربی، به جمع‌آوری داده‌ها و تجزیه و تحلیل و تفسیر این داده‌ها بپردازد.

در نتیجه، برای تدریس آمار و مدلسازی، به معلمانی که با آمار و کاربردهای واقعی آن در علوم انسانی تسلط داشته باشند احتیاج است. در صورتی که در تدریس جبر و احتمال، به معلمانی که به ریاضی، شیوه‌های اثبات و استراتژی حل مسئله تسلط داشته باشند نیاز است. بنابراین، معلمان این دو درس، متفاوت و دارای علاقه‌مندی‌های گوناگون می‌باشند.

توصیه‌هایی برای بازنگری

اهداف مجله

- **مهدی رجبعلی پور/** استاد ریاضی و عضو فرهنگستان علوم ایران
- **محمدرضا فدایی/** عضو هیئت علمی دانشگاه شهید باهنر کرمان

محمدرضا فدائی

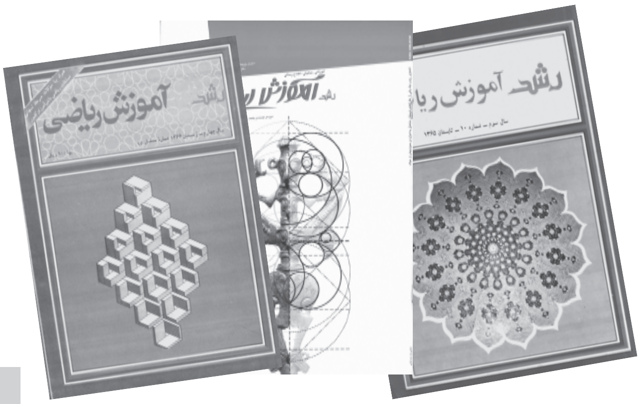
به فضل الهی و با همت دست‌اندرکاران تحریریه و اجرائی و با حمایت مسئولان امر، صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی توسط دفتر انتشارات کمک‌آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش‌وپرورش منتشر می‌گردد. انتشار مستمر این مجله در ربع قرن گذشته، جایگاهی ویژه و نقش‌آفرین در حوزه‌ی آموزش ریاضی کشور داشته است. به‌عنوان آموزشگر ریاضی، ضمن ابراز خرسندی، بر خود لازم می‌دانیم از زحمات همه‌ی عزیزان دست‌اندر کار، تقدیر و تشکر به‌عمل آورده و اجر معنوی آنان را از خداوند متعال مسئلت نماییم.

سیر تکاملی انتشار ۲۷ ساله‌ی این مجله، همگام با تحولات آموزشی، رشد سریع تکنولوژی، افزایش انجمن‌های علمی و مجلات آموزشی، و نهایتاً شکل‌گیری و نهادینه‌شدن گردهمایی‌ها و کنفرانس‌های آموزشی در خور توجه است. در ادامه‌ی راه، بازنگری و تأمل در تدوین خط‌مشی آینده‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی ضروری به‌نظر می‌رسد. چنانچه در اهداف مجله، بر توسعه‌ی حرفه‌ای آموزش ریاضی تأکید شود، انتشار آن با مشارکت جمعی و رعایت نکات زیر، به عنوان یک مرجع فرهنگ‌ساز، خلاء موجود را در این حوزه مرتفع نموده و جایگاهش را بیش از پیش تحکیم می‌نماید.

۱. هماهنگی و وحدت نظر سیاست‌گذاران، برنامه‌ریزان و مجریان نظام آموزشی کشور و یاری داوطلبان این حوزه، شرطی اساسی و ضروری است تا اقداماتی یک‌پارچه و منسجم در جهت نیل به اهداف آموزشی ـ فرهنگی، به عمل آید. در این راستا، لازم است ارتباط مجله با واحدهای درون سازمانی وزارت آموزش و پرورش (از جمله دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، دفتر آموزش متوسطه، دفتر آموزش و ارتقای مهارت‌های حرفه‌ای و تربیت معلم، پژوهشکده‌های آموزشی و تربیتی، و...) نهادینه شود. این کار باعث می‌شود تا با تعامل با یکدیگر، بستر مناسبی برای ارائه‌ی تجربیات و رهنمودهای لازم به مراکز آموزشی که وظیفه‌ی تربیت آموزشگران ریاضی را عهده‌دارند فراهم شود و تداوم یابد.

۲. در شرایط فعلی که دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی ایام جوانی خود را سپری می‌کند و جای خالی مجلات علمی برای دانشجویان این دوره مشهود است، ایجاب می‌کند که مجله‌ی رشد آموزش ریاضی به عنوان یک منبع آموزشی خوب، این کمبود را در حد توان خود برطرف کند. بدین معنی که علاوه بر سایر رسالت‌ها، وظیفه‌ی ایجاد ارتباط بین دانشجویان دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و صاحب‌نظران این حوزه را عهده‌دار شود و آنان را با نظریه‌های پایه‌ای، دیدگاه‌های جدید و تحقیقات انجام شده، آشنا سازد.

۳. در برنامه‌ریزی محتوایی مجله، جایگاه ویژه‌ای برای بررسی مؤلفه‌های تشکیل دهنده‌ی حوزه‌ی آموزش ریاضی اعم از برنامه‌ریزی درسی، تألیف کتب درسی، ارزشیابی تحصیلی، دوره‌های بازآموزی معلمان و نظایر آن در نظر گرفته شود تا به بررسی و تجزیه و تحلیل این فعالیت‌ها از بعد نظری و عملکردی بپردازد.



مهدی رجبعلی‌پور

با عنایت به مطالب ذکر شده، جای نگرانی وجود ندارد اگر تغییراتی اساسی در اهداف و انتخاب محتوا، در جهت ارتقای سطح علمی مخاطبان، داده شود. این نکته که در بدو تأسیس این مجله، محتوای آن مناسب با نیاز دانشی دبیران وقت ـ که طبیعتاً در آن زمان، تعداد معلمان ریاضی با مدرک کارشناسی نسبت به تعداد معلمان دیپلمه یا دارای مدارک غیرمرتبط کمتر بوده است ـ در نظر گرفته شده با در نظر گرفتن این که اکنون اکثریت معلمان ریاضی، دوره‌های کارشناسی ریاضی را سپری نموده و تعدادی از آن‌ها دارای مدرک کارشناسی ارشد ریاضی نیز هستند، نکته‌ای حائز اهمیت و گویای ضرورت تغییر اهداف انتشار مجله می‌باشد.

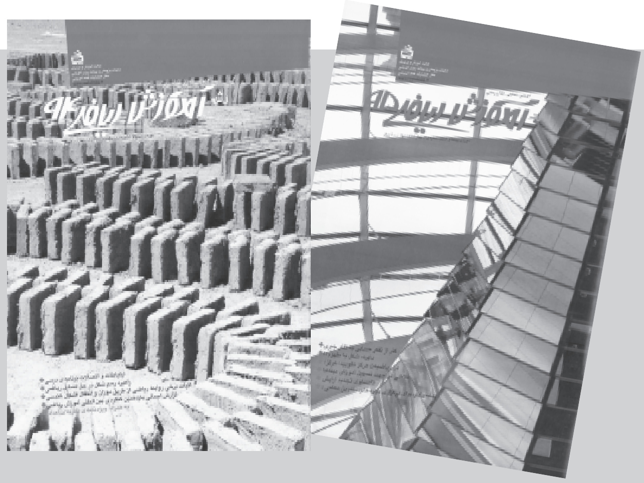
گزیده‌ی من
از شماره‌های ۹۴ و ۹۵ مجله

● شیوا زمانی
استادیار ریاضی دانشکده‌ی مدیریت و اقتصاد دانشگاه صنعتی شریف

به عنوان عضو کمتر فعال مجله، به دنبال یافتن ایده‌ای برای نوشتن، چند شماره‌ی اخیر مجله را از شماره‌ی ۹۴ تا ۹۷ ورق می‌زنم. آن‌چه می‌بینم، مجموعه‌ای پر محتوا، آموزنده و در عین حال جذاب است و کم‌کم به این فکر می‌رسم که به جای نوشتن متنی برای ویژه‌نامه‌ی صدمین شماره ی مجله که معتقدم چیزی به دانسته‌های خوانندگان آن اضافه نمی‌کند، بهتر است در مقام یکی از همین خوانندگان، بخش‌هایی را که دوست داشته‌ام بازنمایی کنم. بنابراین، آن‌چه در این نوشته می‌آید، گزیده‌ای است دوست‌داشتنی از دید من.

بخشی با عنوان «ارزیابی برای یادگیری» از مقاله‌ی «ره‌آوردی از ICMEII»، در رشد آموزش ریاضی شماره‌ی ۹۵ که از در میان گذاشتن اهداف یادگیری با دانش‌آموزان سخن می‌گوید:

«ارزیابی برای یادگیری، فرآیند استفاده از ارزیابی‌های کلاسی برای بهبود یادگیری است، در حالی که ارزیابی یادگیری، اندازه‌گیری چیزی است که دانش‌آموزان می‌توانند انجام دهند،



و معمولاً در پایان یک دوره‌ی یادگیری (یک درس) انجام می‌شود. در ارزیابی یادگیری:

● معلمان اهداف یادگیری را با دانش‌آموزان در میان می‌گذارند؛

● دانش‌آموزان اهدافی را که باید به سمت تحقق آن‌ها بکوشند، می‌دانند و تشخیص می‌دهند؛

● بازخورد معلم، دانش‌آموزان را به سمت شناسایی چیزی هدایت می‌کند که بعد از این باید انجام دهند تا یادگیری خود را بهبود بخشند؛

● فرض بر این است که (یادگیری) هر دانش‌آموزی می‌تواند بهبود یابد؛

● دانش‌آموزان، عملکرد و پیشرفت خود را مرور می‌کنند و بر آن بازتاب می‌نمایند و همراه با معلمان مهارت‌های (لازم) را در حین ارزیابی هم‌کلاسی‌ها و خود-ارزیابی، کسب می‌کنند.»

مطلب زیر نیز دریچه‌ای است به مقاله‌ی «در نگاه به آن‌چه نادرست است، چه چیزی درست است؟» از دبورا شیفتر، ترجمه‌ی سپیده چمن‌آرا، شماره‌ی ۹۴ رشد آموزش ریاضی:

معلم مسئله‌ی ضرب ۳۶×۱۷ را به دانش‌آموزان کلاس پنجم ابتدایی که قبلاً روش معمول ضرب اعداد چندرقمی را فراگرفته‌اند می‌دهد و از آن‌ها می‌خواهد روش‌های دیگری برای به‌دست آوردن جواب ابداع کنند. یکی از دانش‌آموزان استراتژی زیر را ارائه می‌دهد:

برای ساده‌تر کردن مسئله ۴ واحد به ۳۶ و ۳ واحد به ۱۷ اضافه می‌کنیم و اعداد حاصل یعنی ۴۰ و ۲۰ را در هم ضرب می‌کنیم که ۸۰۰ به‌دست می‌آید. سپس ۴ و ۳ را که قبلاً اضافه کرده بودیم از این حاصلضرب کم می‌کنیم.

این روش البته درست نیست و به نتیجه‌ی درستی هم منجر نمی‌شود، اما اگر بخواهیم همین روش را از طریق کم کردن مقادیر درستی از ۸۰۰ اصلاح کنیم، آن مقادیر درست چیست؟

ـ آیا ۸۰۰، ۴ تا ۱۷ و ۳ تا ۳۶ بیشتر از حاصلضرب ۳۶×۱۷ است؟

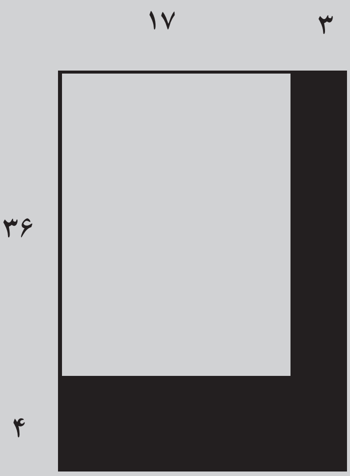
ـ آیا ۸۰۰، ۴ تا ۲۰ و ۳ تا ۴۰ بیشتر از حاصلضرب ۳۶×۱۷ است؟

ـ آیا ۸۰۰، ۴ تا ۲۰ و ۳ تا ۳۶ بیشتر از حاصلضرب ۳۶×۱۷ است؟

سه راه‌حل زیبای زیر پاسخ درست را مشخص می‌کند:

● ۴۰ دانش‌آموز در کلاس است، و هر یک از آن‌ها، مبلغ ۲۰هزار تومان برای اردو پرداخت می‌کند. معلم ۲۰×۴۰ یعنی ۸۰۰هزار تومان جمع می‌کند. ولی در روز اردو، ۴ دانش‌آموز غیبت می‌کنند، یعنی او باید ۲۰ تومان به هر یک از آن‌ها پس بدهد. پس از آن، معلم با ۳۶ دانش‌آموز به موزه می‌رود، ولی وقتی به آن‌جا می‌رسند، می‌بینند که بلیط ورودی به جای ۲۰هزار تومان، ۱۷هزار تومان است. این، یعنی باید به هر یک از ۳۶ دانش‌آموز باقی‌مانده، ۳هزار تومان پس بدهد.

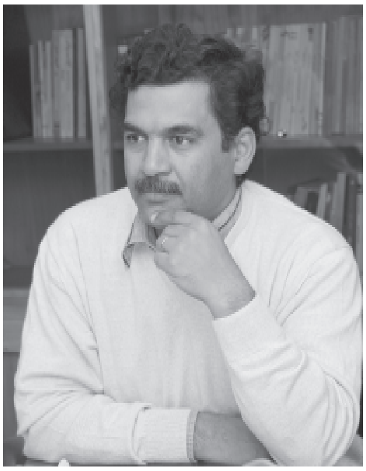
● به شکل زیر توجه کنید:



● راه حل سوم استفاده از خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع است:

(۴×۳)+(۴×۱۷)+(۳۶×۳)+(۳۶×۱۷)=(۱۷+۳)+(۴+۳۶)

(۲۰×۴)+(۳۶×۳)+(۳۶×۱۷)



$۰/\overline{۹} = ۱$

یک واقعیت ریاضی یا حقیقتی باور نکردنی!

● **مانی رضائی**
دانشجوی دکترای ریاضی با گرایش آموزش ریاضی

چکیده

در این مقاله، موضوعات متعددی به طور هم‌زمان مورد بررسی قرار گرفته است. اما تلاشی برای تفکیک آن‌ها نشده است. از جمله، موضوعات زیر قابل بیان است:

● آن چه که در مسیر آموزش ارایه می‌شود و دانش‌آموزان می‌آموزند (یا انتظار داریم که بیاموزند)؛

● مباحث تکمیلی که بعضی از معلمان به دانش‌آموزان ارایه می‌کنند؛

● برخی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد اعداد گویا؛ و در نهایت،

● بررسی یک باور عمومیِ رایج که در تناقض با یک واقعیت ریاضی است.

مقاله براساس مطالعه‌ی منابعی در این زمینه و تجربه‌ی تدریس نگارنده تهیه شده است. این مقاله در بندهای مختلفی ارایه شده است که هر یک به طور مستقل، قابل مطالعه است. تلاش شده تا ارتباط منطقی بین این بندها آشکار باشد و تا حد امکان، خلاصه گویی شده است. جمع‌بندی نهایی، بر عهده‌ی خوانندگان مجله که معلمان ریاضی هستند و به احتمال زیاد، تجربیاتی مرتبط در این زمینه دارند گذاشته می‌شود.

کلید واژه‌ها: واقعیت ریاضی، نمایش کسری، دوره‌ی گردش، بسط اعشاری

۱

توسعه‌ی اعداد از سه مسیر متفاوت قابل بررسی است: مسیر توسعه‌ی اعداد بر بستر تاریخ؛ مسیر منطقی توسعه‌ی اعداد با استفاده از اصول موضوع ریاضی و مسیری که در برنامه‌ی آموزشی گنجانده شده است. بررسی سیر تاریخی توسعه‌ی اعداد با سیر منطقی ریاضی آن را به فرصتی دیگر موکول می‌کنیم. در این نوشتار، روی سیر آموزشی اعداد و به‌طور خاص، بر روند آموزش اعداد گویا متمرکز می‌شویم.

آشنایی دانش‌آموزان با محور اعداد از سال دوم دبستان با معرفی اعداد طبیعی روی یک خط (خط‌کش) آغاز می‌شود و سپس با نمایش کسری اعداد گویا در سال سوم و بعد از آن، با نمایش اعشاری اعداد گویا در سال پنجم دبستان آشنا می‌شوند و در سال دوم راهنمایی، نمایش اعداد گویا و اعشاری روی محور اعداد را می‌بینند. دانش‌آموزان با استفاده از محور اعداد تا حدی ارتباط بین نمایش کسری و اعشاری اعداد گویا را تجربه می‌کنند.

برای مثال، نمایش مقدار «نیمی از واحد» به شکل $\frac{۱}{۲}$ و ۰/۵ با تقسیم طول واحد روی محور نشان داده می‌شود و تصور کسر به‌عنوان یک «تقسیم» در نمایش کسر اعداد گویا را برای دانش‌آموزان بدیهی می‌نمایاند. بدین‌ترتیب، دانش‌آموزان در مسیر آموزش، از همان ابتدا، تناظری بین اعداد و نقاط روی محور برقرار می‌کنند. در نتیجه، در دوره‌ی راهنمایی که اعداد دیگری روی محور شناسایی و معرفی می‌شود، این توجیه برای دانش‌آموزان تا حدودی بدیهی به‌نظر می‌رسد که برای هر عدد،

جایی روی محور پیدا می‌شود و برعکس، هر نقطه روی محور با یک عدد متناظر است.

۲

نمایش‌های متعددی برای یک عدد گویا وجود دارد. برای مثال، اعداد $\frac{۵}{۱}$، $\frac{۱۰}{۲}$، $\frac{۱۵}{۳}$، یا $\frac{-۵}{-۱}$ و...، شکل‌های گوناگونی از نمایش عدد ۵ است. چنان‌چه صورت و مخرج یک کسر در عددی صحیح ضرب شود، شکل دیگری برای نمایش کسری آن عدد گویا به‌دست می‌آید. دانش‌آموزان این موضوع را از همان ابتدای آشنایی با کسر بررسی می‌کنند. بدین‌ترتیب، می‌توان نمایش کسری اعداد گویا را چنین تعریف کرد: عددی به صورت $\frac{p}{q}$ را «گویا» می‌نامیم، اگر p عددی صحیح و q عددی طبیعی باشد. وجود علامت در شکل‌های دیگر نمایش کسر را می‌توان با قرارداد زیر معرفی کرد:

$$-\frac{p}{q}=\frac{-p}{q}=\frac{p}{-q}$$

۳

به روش‌های مختلف می‌توانیم دو عدد را باهم مقایسه کنیم و عدد بزرگ‌تر را شناسایی کنیم. به علاوه، در مجموعه‌ی اعداد صحیح، به ازای هر عدد داده شده، می‌توانیم عدد «بعدی» را «تعیین» کنیم. اما این کار در اعداد گویا ممکن نیست زیرا بین هر دو عدد گویا، یک «عدد گویا» وجود دارد، بنابراین، اگر عددی گویا داده شده باشد، نمی‌توان عدد «بعدی» را تعیین کرد. برخلاف بسیاری از جزییاتی که در مسیر آموزش مورد تأکید قرار گرفته است، وجود عددی گویا بین هر دو عدد گویای دلخواه، به‌طور پراکنده بیان می‌شود. اما در دوره‌ی دبیرستان از این ویژگی، به‌عنوان یک پیش‌فرض بدیهی استفاده می‌شود.

۴

به روش‌های مختلفی می‌توان عددی گویا بین دو عدد داده شده‌ی $a=\frac{p_۱}{q_۱}<\frac{p_۲}{q_۲}=b$ پیدا کرد.

روش نخست. میانگین هر دو عدد داده شده (از جمله اعداد گویا) بین آن دو عدد قرار دارد. برای اثبات کافی است به عبارت زیر توجه کنید:

$$a=\frac{a+a}{۲}<\frac{a+b}{۲}<\frac{b+b}{۲}=b$$

روش دوم. فرض کنید $\frac{p_۱}{q_۱}<\frac{p_۲}{q_۲}$ در نتیجه $p_۱q_۲<p_۲q_۱$. با استفاده از این رابطه، روش دیگری برای پیدا کردن یک عدد گویا بین دو عدد گویای داده شده معرفی می‌شود:

$$\frac{p_۱}{q_۱}=\frac{p_۱(q_۱+q_۲)}{q_۱(q_۱+q_۲)}=\frac{p_۱q_۱+p_۱q_۲}{q_۱(q_۱+q_۲)}$$

$$<\frac{p_۱q_۱+p_۲q_۱}{q_۱(q_۱+q_۲)}=\frac{(p_۱+p_۲)q_۱}{q_۱(q_۱+q_۲)}=\frac{p_۱+p_۲}{q_۱+q_۲}$$

و به‌طور مشابه داریم:

$$\frac{p_۱+p_۲}{q_۱+q_۲}=\frac{(p_۱+p_۲)q_۲}{(q_۱+q_۲)q_۲}=\frac{p_۱q_۲+p_۲q_۲}{(q_۱+q_۲)q_۲}$$

$$<\frac{p_۲q_۱+p_۲q_۲}{(q_۱+q_۲)q_۲}=\frac{p_۲(q_۱+q_۲)}{(q_۱+q_۲)q_۲}=\frac{p_۲}{q_۲}$$

در نتیجه؛

$$\frac{p_۱}{q_۱}<\frac{p_۱+p_۲}{q_۱+q_۲}<\frac{p_۲}{q_۲}$$

روش سوم. اگر $q_۱=q_۲$، آن‌گاه می‌توانیم عددی صحیح مانند c بین $p_۱$ و $p_۲$ بیابیم که کسر $\frac{c}{q_۱}$ بین این دو عدد است.

در حالتی که مخرج‌ها برابر نباشند، می‌توانیم دو عدد داده شده را به کسرهایی با مخرج‌های برابر تبدیل کنیم و در حالتی که $p_۱$ و $p_۲$ متوالی باشند، صورت و مخرج هر دو کسر را در عددی ثابت ضرب می‌کنیم تا فاصله‌ی بین صورت کسرها بیشتر شود و عددی صحیح بین آن دو پیدا شود.

برای مثال، با این روش بین دو عدد $\frac{۱۳}{۳۱}$ و $\frac{۴۰}{۹۳}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{۱۳}{۳۱}=\frac{۳۹}{۹۳}=\frac{۷۸}{۱۸۶}\\ \frac{۴۰}{۹۳}=\frac{۸۰}{۱۸۶}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۱۳}{۳۱}<\frac{۷۹}{۱۸۶}<\frac{۴۰}{۹۳}$$

بدین‌ترتیب، سه روش برای پیدا کردن عددی گویا بین دو عدد گویای داده شده معرفی شد. واضح است که روش‌های دیگری نیز برای تعیین چنین اعدادی وجود دارد.

۵

یکی دیگر از شکل‌های نمایش عدد گویا $\frac{p}{q}$، نمایش اعشاری آن است. نمایش اعشاری هر عدد گویا از تقسیم

صورت کسر بر مخرج آن به‌دست می‌آید. اگر در هر مرحله، باقی‌مانده‌ی تقسیم برابر با صفر شود، نمایش اعشاری آن عدد گویا متناهی است. اما چنان‌چه این باقی‌مانده در هیچ مرحله‌ای صفر نشود، از آن‌جا که به ازای هر q (مخرج کسر) $q-۱$ باقی‌مانده‌ی ناصفر متمایز داریم، بنابراین حداکثر به این تعداد، رقم‌های اعشاری مختلف به دست می‌آید و از جایی به بعد، باقی‌مانده‌ی تقسیم، تکرار می‌شود. یک مجموعه از این رقم‌های تکراری «دوره‌ی گردش» نامیده می‌شود و با گذاشتن یک خط بالای این رقم‌ها، آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

برای مثال، بسط اعشاری عددهای $\frac{۱}{n}$ به ازای $n=۲,۳,۴,........۹$ چنین است:

$$\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

$$\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳۳...=۰/\overline{۳}$$

$$\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

$$\frac{۱}{۵}=۰/۲$$

$$\frac{۱}{۶}=۰/۱۶۶۶۶۶...=۰/۱\overline{۶}$$

$$\frac{۱}{۷}=۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷...=۰/\overline{۱۴۲۸۵۷}$$

$$\frac{۱}{۸}=۰/۱۲۵$$

$$\frac{۱}{۹}=۰/۱۱۱۱۱...=۰/\overline{۱}$$

می‌توان فرض کرد هر عدد گویا به‌صورت حاصل جمع کسرهایی است که مخرج آن‌ها توانی از ۱۰ باشد:

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۱۰}$$

$$\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{۱۰}+\frac{۵}{۱۰۰}$$

$$\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۱۰}$$

$$\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۲}{۱۰۰}+\frac{۵}{۱۰۰۰}$$

و برای نمایش اعداد گویا که رقم‌های اعشاری آن‌ها متناهی نیستند نیز این حکم برقرار است. در این حالت، تعداد جمله‌ها نامتناهی است:

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰^۲}+\frac{۳}{۱۰^۳}+\frac{۳}{۱۰^۴}+...$$

$$\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۶}{۱۰^۲}+\frac{۶}{۱۰^۳}+\frac{۶}{۱۰^۴}+...$$

$$\frac{۱}{۷}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۴}{۱۰^۲}+\frac{۲}{۱۰^۳}+\frac{۸}{۱۰^۴}+\frac{۵}{۱۰^۵}+\frac{۷}{۱۰^۶}+...$$

$$\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰^۲}+\frac{۱}{۱۰^۳}+...$$

در حالت نامتناهی، مجموع هر تعداد متناهی از جمله‌های این عبارت‌ها (مجموع جزئی سری)، تقریبی از عدد گویای مورد نظر است. هم‌چنین، برای هر عدد گویا با دوره‌ی گردش نیز می‌توان چنین تقریبی را به‌دست آورد. اما همین رویکرد در پاره‌ای موارد می‌تواند مبدأ یکی از بدفهمی‌ها باشد.

برای مثال، عدد ۰/۳۳۳ تقریبی از عدد $۰/\overline{۳}$ است. در نتیجه، ۰/۳۳۳ تقریبی برای $\frac{۱}{۳}$ نیز هست. اما تجربه‌ی تدریس، نشان می‌دهد که در برخی موارد، دانش‌آموزان با تعمیم این تقریب، عدد $۰/\overline{۳}$ را به‌عنوان تقریب $\frac{۱}{۳}$ می‌دانند!

۶

چه رابطه‌ای بین نمایش اعشاری عدد گویای A و نمایش اعشاری $۱۰A$ وجود دارد؟ به‌جای بررسی حالت کلی، یک حالت خاص را مورد توجه قرار می‌دهیم. فرض کنید در نمایش اعشاری عدد موردنظر، تنها یک رقم تکرار شود، یعنی طول دوره‌ی گردش ۱ باشد مانند $A=۰/\overline{a}$. با نمایش کسرهای اعشاری این عدد داریم:

$$A=۰/\overline{a}=\frac{a}{۱۰}+\frac{a}{۱۰۰}+\frac{a}{۱۰۰۰}+...\frac{a}{۱۰^n}+...$$

$$۱۰A=۱۰(\frac{a}{۱۰}+\frac{a}{۱۰۰}+\frac{a}{۱۰۰۰}+...\frac{a}{۱۰^n}+...)$$

$$=a+\frac{a}{۱۰}+\frac{a}{۱۰۰}+\frac{a}{۱۰۰۰}+...=a/\overline{a}$$

یعنی علامت اعشاری یک رقم جابه‌جا شده است. با تعمیم این ویژگی، می‌توان نشان داد که اگر عددی گویا را در ۱۰^n ضرب کنیم، در نمایش اعشاری آن، علامت اعشاری آن به تعداد n جابه‌جا می‌شود.

۷

چگونه می‌توان نمایش اعشاری عدد گویا را به نمایش کسری آن تبدیل کرد؟ برای پاسخ به این پرسش، از ویژگی بند ۶ استفاده می‌کنیم و روش مربوط را در مثال‌های زیر بررسی می‌کنیم.

مثال. نمایش کسری عدد $A = ۰/\overline{۴}$ را بیابید.

$$\begin{array}{rl} ۱۰A = ۴/\overline{۴} & \\ -\quad A = ۰/\overline{۴} & \\ \hline ۹A = ۴ & \Rightarrow A = \frac{۴}{۹} \end{array}$$

مثال. نمایش کسری عدد $A = ۰/۱۲\overline{۳}$ را بیابید.

$$\begin{array}{rl} ۱۰۰۰A = ۱۲۳/\overline{۳} & \\ -\quad ۱۰۰A = ۱۲/\overline{۳} & \\ \hline ۹۰۰A = ۱۱۱ & \Rightarrow A = \frac{۱۱۱}{۹۰۰} \end{array}$$

برای دانش‌آموزان جالب است که نشان دهیم انتخاب دوره‌ی گردش، منحصر به فرد نیست.

برای مثال، عدد گویای $A = ۰/۱۹۱۹۱۹۱۹...$ را می‌توان به دو شکل $A = ۰/\overline{۱۹}$ و $A = ۰/۱\overline{۹۱}$ نمایش داد و داریم:

$$\begin{array}{rl} ۱۰۰A = ۱۹/\overline{۱۹} \\ -\quad A = ۰/\overline{۱۹} \\ \hline ۹۹A = ۱۹ \end{array} \qquad \begin{array}{rl} ۱۰۰۰A = ۱۹۱/\overline{۹۱} \\ -\quad ۱۰A = ۱/\overline{۹۱} \\ \hline ۹۹۰A = ۱۹۰ \end{array}$$

که در هر دو حالت، $A = \frac{۱۹}{۹۹}$.

۸

با کشف این که $A = ۰/\overline{a} = \frac{a}{۹}$، دانش‌آموزان می‌توانند نتایج جالب دیگری را نیز به دست آورند. فرض کنید a، b و c عددهایی یک‌رقمی باشند که $c = ab$. رابطه‌ی بین نمایش کسری دو عدد گویای $A = ۰/\overline{a}$ و $C = ۰/\overline{c}$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{array}{rl} ۱۰A = a/\overline{a} & \\ -\quad A = ۰/\overline{a} & \\ \hline ۹A = a & \Rightarrow A = \frac{a}{۹} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} ۱۰C = c/\overline{c} & \\ -\quad C = ۰/\overline{c} & \\ \hline ۹C = c & \Rightarrow C = \frac{ab}{۹} = bA \end{array}$$

برای مثال، $۲ \times ۰/\overline{۳} = ۲ \times \frac{۳}{۹} = \frac{۶}{۹} = ۰/\overline{۶}$. هم‌چنین اگر $c = a + b$، رابطه‌ای مشابه بین نمایش کسری دو عدد گویای $A = ۰/\overline{a}$، $B = ۰/\overline{b}$ و $C = ۰/\overline{c}$ وجود دارد.

$$A + B = \frac{a}{۹} + \frac{b}{۹} = \frac{a+b}{۹} = \frac{c}{۹} = C$$

اما توجه کنید که اگر حاصل ضرب یا حاصل جمع این عددها تک‌رقمی نباشد، این نتایج کارآمد نیست. با این حال می‌توانیم با استفاده از این ویژگی‌ها، حاصل را به دست آوریم. برای مثال در جمع زیر از نمایش کسری اعداد گویا استفاده شده است.

$$۰/\overline{۵} + ۰/\overline{۸} = \frac{۵}{۹} + \frac{۸}{۹} = \frac{۱۳}{۹} = ۱\frac{۴}{۹}$$
$$= ۱ + \frac{۴}{۹} = ۱ + ۰/\overline{۴} = ۱/\overline{۴}$$

۹

نمایش کسری برای عدد گویای $۰/\overline{۹}$ چیست؟

$$\begin{array}{rl} ۱۰A = ۹/\overline{۹} & \\ -\quad A = ۰/\overline{۹} & \\ \hline ۹A = ۹ & \Rightarrow A = \frac{۹}{۹} = ۱ \end{array}$$

به عبارت دیگر $۰/\overline{۹} = ۱$.

به ازای نمایش کسری هر عدد گویا، می‌توان با تقسیم صورت آن بر مخرج، نمایش اعشاری عدد را به دست آورد. اما نمی‌توان کسری مانند $\frac{p}{q}$ یافت که با عمل تقسیم، نمایش اعشاری $۰/\overline{۹}$ به دست بیاید. همین موضوع باعث شده تا در دوره‌های مختلف آموزشی، شاهد آن باشیم که دانش‌آموزان و دانشجویان، با وجود آن که اثبات‌های متعددی برای برابری ۱ با $۰/\overline{۹}$ می‌بینند، اما این برابری را باور ندارند! در ادامه، دو نمونه‌ی دیگر از اثبات‌های مورد اشاره آمده است.

۹

می‌دانیم $\frac{۱}{۹} = ۰/\overline{۱}$ و با استفاده از ویژگی‌های مورد اشاره در بند ۶، مضارب این کسر را می‌توانیم به‌دست آوریم، به‌طور خاص $۰/\overline{۳} = ۳ \times ۰/\overline{۱} = ۳ \times \frac{۱}{۹}$ یعنی $۰/\overline{۳} = \frac{۱}{۳}$ که پیش‌تر آن

را محاسبه کردیم. بدین ترتیب:

$$\frac{۳}{۹}=۰/\overline{۳}$$

هم‌چنین

$$\frac{۶}{۹}=۰/\overline{۶}$$

و در نتیجه، عبارت

$$\frac{۹}{۹}=۰/\overline{۹}$$

همان حکم موردنظر است، یعنی $۰/\overline{۹}=۱$.

۹

به‌عنوان اثباتی دیگر، فرض کنید چنین نباشد (برهان خلف). یعنی $۰/\overline{۹}<۱$. بنابر بند ۳، بین این دو عدد باید عددی گویا مانند M وجود داشته باشد که $۰/\overline{۹}<M<۱$. در این صورت M چیست؟ برای پاسخ به این پرسش، به نمایش اعشاری M توجه می‌کنیم. اگر در هر کدام از رقم‌های اعشاری M رقمی به‌جز ۹ باشد، $M<۰/\overline{۹}$ که با انتخاب M در تناقض است، و اگر تمام رقم‌ها ۹ باشد $M=۰/\overline{۹}$ که در هر دو حالت، با نتایج بند ۴ در تناقض است. پس چنین عددی نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین، فرض $۰/\overline{۹}<۱$ نادرست است. در نتیجه $۰/\overline{۹}=۱$.

۹

تا این‌جا، استدلال‌های گوناگونی برای این برابری ارایه شد و با وجود آن‌که بعضی از دانش‌آموزان و حتی دانشجویان سال‌های اول، برابری $۰/\overline{۹}=۱$ را به‌عنوان یک «واقعیت ریاضی»، می‌پذیرند، اما در عملکرد خود شواهدی مبنی بر باور آن کم‌تر به چشم می‌خورد. یکی دیگر از ایرادها، به شکل نمایش اعشاری این عدد است. از آن‌جا که نمایش اعشاری این عدد، «مشابه» عددهای بازه‌ی (۰,۱) است، برای بعضی از دانش‌آموزان، پذیرش این واقعیت که $۰/\overline{۹}$ «برابر» با ۱ است، در تناقض با تعریف «بازه‌ی باز» است.

۹

در تجربه‌ی معلمی، بارها شاهد آن بوده‌ایم که دانش‌آموزان این عبارت را یک «حقیقت باور نکردنی» برشمردند. تعبیر دانش‌آموزان از $۰/\overline{۹}$ دوگانه است. از یک سوی، آن را به عنوان عددی گویا می‌پذیرند، زیرا نمایش اعشاری آن دارای دوره‌ی گردش است. از سوی دیگر، با توجه به نامتناهی بودن رقم‌های این عدد، به نوعی برای آن ویژگی «حدی» قائل هستند و نقطه‌ای خاص (یا ثابت) روی محور اعداد به آن نسبت نمی‌دهند. این دانش‌آموزان معتقدند، در عین حال که $۰/\overline{۹}$ عدد است، مکان آن را روی محور اعداد «نمی‌توان» تعیین کرد، یعنی ماهیت این عبارت را حدی می‌دانند! در این حالت، مفهوم بینهایت به‌عنوان یک مقدار ایستا[1] یا یک مفهوم پویا[2] مخدوش می‌شود.

۹

در کلاسی که بحث در این مورد به پایان رسیده بود، در پاسخ به سؤال امتحانی «مقدار عددی $[۰/\overline{۹}]$ (جزء صحیح) چیست؟» بسیاری از دانش‌آموزان عدد صفر را به‌دست آوردند! هر چند آن‌ها اثبات $۰/\overline{۹}=۱$ را دیده‌اند، اما در محاسبه‌ی $[۰/\overline{۹}]$ این عدد را مقداری کوچک‌تر از یک فرض کردند! در ریشه‌یابی این مشکل، وجود برخی میان‌بُرهای آزمون‌های تستی برجسته شد. گروهی از دانش‌آموزان معتقدند مقدار $۰/\overline{۹}$ برابر با «یک حدی» است! نه به‌طور دقیق یک اصطلاح «صفر حدی»، «یکِ حدی» و در حالت کلی‌تر «مقدار حدی» (نه «مقدار حد») در برخی موارد، در آزمون‌های تستی و با هدف ارائه‌ی روش‌هایی «سریع» برای محاسبه‌ی حد، به کار می‌رود. این‌که چنین مفهومی به چه معناست، حتی در بین بعضی معلمان «متخصص» این نوع آزمون‌ها، توافق وجود ندارد! اما روشن است که کاربرد آن برای این موضوع، می‌تواند موجب بدفهمی شود.

بحث در این باره و موضوعات پیش‌تر گفته شده و ریشه‌یابی این بدفهمی، نیازمند یک تحقیق آموزشی است. اما نباید با ارائه‌ی یافته‌های چنین تحقیقاتی، از جایگاه بحث‌های سازنده برای غنا بخشیدن به محتوای تدریسی کلاس، غافل شد.

• • •

کلاس درس، فرصتی برای اندیشیدن و بحث و تبادل نظر دانش‌آموزان است. در چنین محیطی، امکان بیشتری برای ایجاد ارتباط‌های مفهومی و توسعه‌ی شبکه‌ی مفهومی توسط خود دانش‌آموزان وجود دارد.

پی‌نوشت

1. Static
2. Dynamic

سه مرد گرسنه

و راهبرهای حل مسئله*

اقتباس: سهیلا غلام آزاد
دکترای آموزش ریاضی و عضو مؤسسه‌ی پژوهشی برنامه ریزی درسی و نوآوری های آموزشی

در ریاضی مسائلی وجود دارند که با وجود ظاهری ساده، از غنای آموزشی زیادی برخوردارند. از جمله این گونه مسائل می توان به مسئله‌ی سه مرد گرسنه اشاره کرد:

سه مرد گرسنه در حالی که کیسه‌ای سیب به همراه داشتند، در جایی به خواب رفتند. در نیمه‌های شب یکی از مردها بیدار شد، $\frac{1}{3}$ سیب‌ها را خورد، و به خواب برگشت. کمی بعد دومین مرد بیدار شد و $\frac{1}{3}$ باقی مانده‌ی سیب‌ها را خورد و برگشت و خوابید. بالاخره، مرد سوم بیدار شد و $\frac{1}{3}$ باقی مانده‌ی سیب‌ها را خورد. وقتی خوردن او تمام شد، ۸ سیب در کیسه باقی مانده بود. در ابتدا چند سیب در کیسه بوده است؟

شاید در نگاه اول، به‌نظر آید که طرح این مسئله به‌عنوان کاربردی از جبر مقدماتی مناسب است. ولی خواهید دید که این مسئله را ندیده‌اید، به شما توصیه می‌شود قبل از ادامه‌ی خواندن این مقاله، مسئله را از هر راهی که به نظر شما می تواند راه‌حل زیبا و خوش ساخت این مسئله باشد، حل کنید. این کار باعث خواهد شد که از خواندن ادامه‌ی این مقاله لذت بیشتری برده و ظرافت‌های این مسئله را بهتر ببینید.

جین واتسون** (۱۹۹۸) مسئله‌ی سه مرد گرسنه را در اختیار طیف وسیعی از دانش‌آموزان ابتدایی و متوسطه تا دانشجویان سال سوم دانشگاه قرار داد. این مسئله اساساً به‌عنوان بخشی از آزمون دانشجو-معلمان ابتدایی در قسمت کسرها مطرح بود، که در مقاله‌ی واتسون دست‌مایه‌ی پژوهشی در زمینه‌ی حل مسئله قرار گرفت. در مقاله‌ی حاضر، ضمن ارائه و بحث در مورد راه‌حل‌های منتخب واتسون، ظرفیت این مسئله به‌عنوان ابزاری برای آموزش حل مسئله دیده می‌شود. در پایان توصیه‌هایی برای معلمان در زمینه‌ی چگونگی به‌کارگیری مسئله‌های غنی مانند «سه مرد گرسنه» در آموزش ریاضی ارائه می‌شود.

کلید واژه‌ها: راهبردهای حل مسئله، حل مسئله، راه‌حل‌های متنوع برای یک مسئله.

راهبردهایی که از مسیر آخر به اول مسئله کارآیی دارند

حل مسئله بدون استفاده از کسرها

راه‌حل ارائه شده در زیر، حاصل کار گروهی ۴ دانش‌آموز دختر باهوش و زرنگ کلاس سوم ابتدایی است که هنوز هیچ آموزش رسمی در زمینه‌ی کسرها نداشته‌اند. معلم این دانش‌آموزان فقط در ابتدا اطمینان حاصل کرد که آن‌ها مفهوم $\frac{1}{3}$ را می‌دانند، سپس مسئله را به آن‌ها داد. او به جای کیسه‌ی سیب، از بشقاب سیب استفاده کرد.

حل (۱)

وقتی مردها سیب‌هایشان را خورده بودند، ۸ سیب باقی مانده بود. سپس مرد آخر ۱۲ سیب در بشقاب داشت قبل از آن‌که یک سوم خود را بخورد. یک سوم ۱۲، ۴ است، سپس مقدار باقی‌مانده در بشقاب بعد از آن‌که مرد سیبش را خورد ۱۲ به علاوه ۶ = ۱۸. سپس بعد از آن‌که مرد قبل از او سیب بخورد، ۱۸ سیب باقی بود. سپس مرد اول ۹ سیب خورد که جواب می‌شه ۲۷.

این دختران گفتند که توضیح راه‌حل‌شان سخت‌تر از انجام دادن آن بود.

شرکت‌کنندگان این مطالعه در سنین مختلف، نوعی از این راه‌حل را ارائه دادند که البته توضیحات بسیاری از آن‌ها، بهتر از توضیح ارائه شده در بالا بود.

حل مسئله با استفاده از کسرها

حل زیر، یک راه‌حل نمونه با استفاده از کسرها است که توسط یک دانش‌آموز پایه‌ی ۶ (معادل اول راهنمایی) ارائه شده است. استفاده‌ی ضعیف از علامت تساوی، مانند آن‌چه در حل ۲ مشاهده می‌شود در همه‌ی سطوح، حتی در سطح دانشجو‌ـ‌معلمان نیز قابل مشاهده بود.

یکی از مشاهدات جالب در بررسی راه‌حل‌های دانش‌آموزان عدم تمایل به استفاده از کلمات در توضیح راه‌حل مسئله‌ی ریاضی بود. این مشاهده را می‌توان به‌عنوان یک ویژگی نوعِ بسیاری از حل‌ها دانست.

حل (۲)

$۸ = \frac{۲}{۳}$

$\frac{۱}{۲}$ از ۸ $= \frac{۱}{۳}$

$۴ = \frac{۱}{۲}$ از ۸

$۸ + ۴ = ۱۲$

$۱۲ = \frac{۲}{۳}$

$\frac{۱}{۲}$ از ۱۲ $= \frac{۱}{۳}$

$۶ = \frac{۱}{۲}$ از ۱۲

$۱۲ + ۶ = ۱۸$

$۱۸ = \frac{۲}{۳}$

$\frac{۱}{۲}$ از ۱۸ $= \frac{۱}{۳}$

$۹ = \frac{۱}{۲}$ از ۱۸

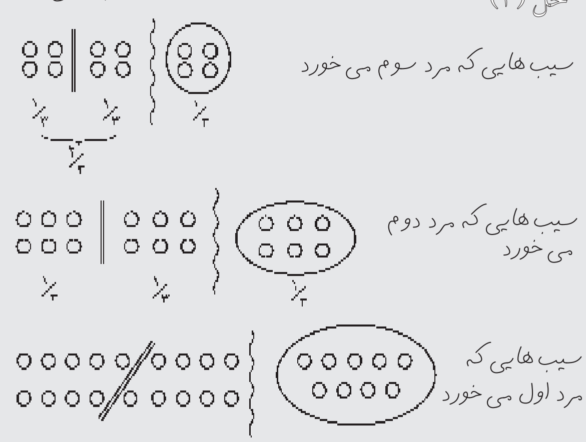
$۱۸ + ۹ = ۲۷$

تعداد سیب‌های داخل کیسه = ۲۷

حل مسئله از طریق رسم نمودار یا تصویر

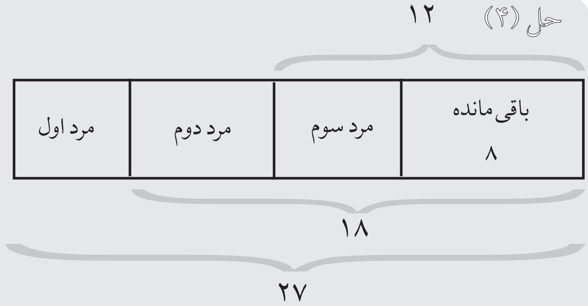
حل (۳)، با استفاده از رسم نمودار توسط یک دانشجو‌ـ‌معلم ارائه شد. احتمالاً او در ذهن خود به دنبال یک توضیح ملموس برای دانش‌آموزان ابتدایی بوده است.

حل (۳)



یک دانش‌آموز پایه‌ی ۸ نیز، حل (۴) را به‌عنوان قسمتی از راه‌حل خود ارائه داد.

حل (۴)



می‌خواهم در ذهنم تصویری از چگونگی خورده شدن سیب‌ها ببینم

حل مسئله به‌صورت نظام‌دار با استفاده از جبر

دانش‌آموزان پایه‌ی ۱۱ (معادل پایه‌ی سوم متوسطه) عموماً مسئله را با استفاده از جبر حل کردند. حل (۵)، نمونه‌ای از این

راه‌حل‌هاست. بعضی از این دانش‌آموزان نیز به جای یک متغیر از سه متغیر (x, y و z) استفاده کردند. لازم به ذکر است که تعداد بسیار کمی از دانش‌آموزان زیر کلاس ۱۰ قادر به به‌کارگیری موفقیت‌آمیز روش‌های جبری بودند.

حل (۵)

$$\frac{۲}{۳}x = ۸$$
$$\therefore ۲x = ۲۴$$
$$\therefore x = ۱۲$$ سیب

$$\frac{۲}{۳}x = ۱۲$$
$$\therefore ۲x = ۳۶$$
$$\therefore x = ۱۸$$ سیب

$$\frac{۲}{۳}x = ۱۸$$
$$\therefore ۲x = ۵۴$$
$$\therefore x = ۲۷$$ سیب

∴ بنابراین در ابتدا ۲۷ سیب در کیسه بوده است.

حل مسئله با استفاده از وارون یا نسبت

حل (۶) توسط یک دانشجوی سال سوم ارائه شد. او مسئله را با استفاده از مفهوم نسبت و به‌کارگیری وارون $\frac{۲}{۳}$ در یک روند سه مرحله‌ای حل کرد. جالب آن‌که هیچ‌کس حل کاملی از این مسئله با استفاده از تناسب مانند $\frac{۸}{x}=\frac{۲}{۳}$ و در ادامه‌ی آن $\frac{۱۲}{x}=\frac{۲}{۳}$ و غیره، ارائه نداد.

حل (۶)

بعد از سومی $=۸$

بعد از دومی $۸\times\frac{۳}{۲}=۱۲$

بعد از اولی $۱۲\times\frac{۳}{۲}=۱۸$

قبل از اولی $۱۸\times\frac{۳}{۲}=۲۷$

∴ ۲۷ سیب

خطاها در راهبردهایی که از مسیر آخر به اول مسئله به کار می‌روند

در نظر گرفتن ثلث‌های مساوی

حل ۷ توسط یک دانش‌آموز پایه‌ی ۶ ارائه شد. البته این فرض نادرست که هر سه مرد به یک تعداد سیب خوردند در راه‌حل بسیاری از دانش‌آموزان تا پایه‌ی ۹ نیز مشاهده شد. در تعیین تعداد سیب‌های خورده شده توسط هر مرد، به نظر می‌آید که دانش‌آموزان سلیقه‌ای عمل کردند. بزرگ‌ترین تعداد انتخاب شده از بین این اعداد ۱۵ بود!

حل (۷)

۱۴ سیب وجود داشتم

مرد اول ۲ سیب خورد

مرد دوم ۲ سیب خورد

مرد سوم ۲ سیب خورد

و ۸ سیب باقی‌مانده بود

نادیده گرفتن سیب‌های باقی‌مانده

حل (۸) توسط یک دانش‌آموز پایه‌ی ۸ انجام شد. البته خطای موجود در این حل در تمام سطوح تا سال سوم دانشگاه نیز مشاهده شد. جالب توجه این‌که تقریباً هیچ‌یک از این افراد از نتیجه‌ی به دست آمده، یعنی خورده شدن ۷۲ سیب توسط مرد اول نگرانی نداشتند!

حل (۸)

$$۸\div\frac{۱}{۳}=۲۴$$

$$۲۴\div\frac{۱}{۳}=۷۲$$

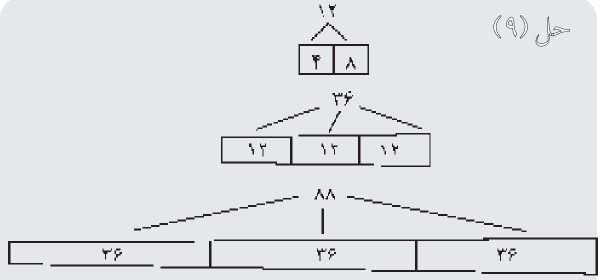
$$۷۲\div\frac{۱}{۳}=۲۱۶$$

در ابتدا ۲۱۶ سیب در کیسه بوده است.

تمایز $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$

یکی از مشکلاتی که دانش‌آموزان پایه‌ی ۸ به بالا با آن روبه‌رو بودند این بود که کدام‌یک از کسرهای $\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۲}{۳}$ برای نمایش اطلاعات مسئله مناسب است. حل (۹)، یک رویکرد بالقوه موفق با استفاده از رسم نمودار را نشان می‌دهد که در آن، رابطه‌ی صحیح بین ثلث‌ها را در مسئله در نظر گرفته است. اما بعد از مرحله‌ی اول، دوسوم باقی‌مانده را فراموش کرده است. در این حل، یک خطای ضرب نیز مشاهده می‌شود.

حل (۹)



در ابتدا ۸۸ سیب در کیسه وجود داشته است.

بازنمایی جبری

در حل (۱۰)، یک دانش‌آموز پایه‌ی ۸ تلاش کرده است از نمادهای جبری استفاده کند. این حل نشان می‌دهد که دانش‌آموز اصلاً این نکته را که «$\frac{۱}{۳}$» قسمت‌های باقی‌مانده خورده شده‌اند را درک نکرده است.

حل (۱۰)

فرض کنید تعداد سیب‌ها x باشد

$$x = (۸\times\frac{۱}{۳}) + (۸\times\frac{۲}{۳}) + (۸\times\frac{۳}{۳}) + ۸$$
$$= ۸\frac{۱}{۳} + ۸\frac{۲}{۳} + ۸ + ۸$$
$$= ۸\frac{۱}{۳} + ۸\frac{۲}{۳} + ۱۶$$
$$= ۱۹ + ۶$$
$$= ۳۷$$

در این حل، مشکلات ضرب اعداد صحیح با کسرها و همین‌طور جمع آن‌ها نیز مشاهده می‌شود. به‌نظر می‌آید دانش‌آموزی که حل (۱۱) را نوشته، فهمیده بود که ۸ قسمتی از سیب‌های باقی‌مانده بوده است. وقتی مرد سوم بیدار شد و در نتیجه کسری بزرگ‌تر از یک برای نشان دادن این رابطه برحسب مقدار باقی‌مانده لازم است. در روند این حل نیز خطاهای جمع به چشم می‌خورد

حل (۱۱)

فرض کنید این تعداد x باشد

$$x = ۸ + (۱\frac{۱}{۳}\times ۸) + (۱\frac{۱}{۳}\times ۸\times ۱\frac{۱}{۳})$$
$$+ (۱\frac{۱}{۳}\times ۸\times ۱\frac{۱}{۳}\times ۱\frac{۱}{۳})$$
$$= ۸ + ۱۰\frac{۲}{۳} + ۱۴\frac{۲}{۹} + ۱۸\frac{۲۶}{۲۷}$$
$$= ۸ + ۱۰\frac{۱۸}{۲۷} + ۱۴\frac{۶}{۲۷} + ۱۸\frac{۲۶}{۲۷}$$
$$= ۵۱\frac{۲۳}{۲۷}$$

راهبردهایی که از مسیر آخر به اول مسئله کارآیی دارند

حدس و آزمایش

راهبرد حدس و آزمایش در کلاس‌های ۶ تا ۹ رایج بود، خصوصاً بین آن‌هایی که ماشین حساب در اختیار داشتند. حل (۱۲) نشان می‌دهد که نویسندگان آن در مرحله‌ی آزمایش و بررسی جواب‌ها دقیق بودند و می‌دانستند که حدس بعدی باید بزرگ‌تر یا کوچک‌تر باشد. در بسیاری از پاسخ‌هایی که با این رویکرد نوشته شده بودند وقتی نویسنده به جواب غیرصحیح رسیده بود، حل متوقف شده بود.

حل (۱۲)

من از روش حدس و آزمایش استفاده کردم
۲۵ سیب

$$\frac{۱}{۳}\times ۲۵ = ۸/۳$$
$$-۸/۳$$
$$۱۶/۷ \div ۳ = ۵/۵۶$$
$$-۵/۵۶$$
$$۱۱/۱۴ \div ۳ = ۳/۷۱۳$$
$$-۳/۷۱۳$$
$$۷/۴۲۷$$

این جواب خیلی کوچک است،

پس ۲۷ را امتحان می‌کنم

$$۲۷ \div ۳ = ۹$$
$$-۹$$
$$۱۸ \div ۳ = ۶$$
$$-۶$$
$$۱۲ \div ۳ = ۴$$
$$-۴$$
$$۸$$

این جواب درست است

∴ ۲۷ سیب در کیسه بوده است.

حل مسئله از طریق روش‌های نظام‌دار

دانش‌آموزان پایه‌ی ۱۱ به بالا، بیشتر تمایل داشتند مسئله را از اول به آخر حل کنند. حل (۱۳) نشان می‌دهد که نویسنده موقعیت مسئله را به خوبی درک کرده و کاربرد کسرها را می‌داند، ولی در چگونگی به‌کارگیری علامت تساوی ضعیف است.

حل (۱۳)

$$\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۳} \qquad \frac{۳}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹} \qquad \frac{۲}{۳}-\frac{۲}{۹}=\frac{۴}{۹}$$

$$\frac{۴}{۹}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۲۷} \qquad \frac{۴}{۹}-\frac{۴}{۲۷}=\frac{۸}{۲۷}$$

$۸=\frac{۸}{۲۷}$ سیب‌ها

$\therefore ۱=\frac{۱}{۲۷}$ سیب‌ها

$\therefore ۲۷$ تعداد سیب‌ها

تشکیل معادله‌ی جبری

در تحقیقی که انجام شد، هیچ دانش‌آموز مدرسه‌ای نتوانست معادله‌ای برای حل این مسئله تشکیل دهد. حل (۱۴)، حاصل تلاش سخت یک دانشجو ـ معلم است که به دنبال یک معادله و سپس حل صحیح آن بود. در این حل، معادله بر حسب تعداد سیب‌های باقی‌مانده(۸) تشکیل شده است.

حل (۱۴)

فرض کنید تعداد کل سیب‌ها $= x$

مرد اول $\frac{۱}{۳}$ سیب‌ها را خورد $= \frac{۱}{۳}x$

$\therefore$ تعداد سیب‌های باقی‌مانده $= x-\frac{۱}{۳}x$

مرد دوم $\frac{۱}{۳}$ سیب‌های باقی‌مانده را خورد $= \frac{۱}{۳}\times(\underbrace{x-\frac{۱}{۳}x}_{\text{سیب‌های باقی‌مانده بعد از مرد اول}})$

$\therefore$ تعداد سیب‌های باقی‌مانده بعد از مرد دوم $= x-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}(x-\frac{۱}{۳}x)$

مرد سوم $\frac{۱}{۳}$ سیب‌های باقی‌مانده بعد از مرد دوم را خورد =

$$\frac{۱}{۳}\left[x-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}(x-\frac{۱}{۳}x)\right]$$

$$\therefore\quad x-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}(x-\frac{۱}{۳}x)-\frac{۱}{۳}\left[x-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}(x-\frac{۱}{۳}x)\right]=۸$$

$$x-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۹}x-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۹}x+\frac{۱}{۹}x-\frac{۱}{۲۷}x=۸$$

$$x-\frac{۳}{۳}x+\frac{۳}{۹}x-\frac{۱}{۲۷}x=۸$$

$$\frac{۳}{۹}x-\frac{۱}{۲۷}x=۸$$

$$\frac{۹-۱}{۲۷}x=۸$$

$$\frac{۸}{۲۷}x=۸$$

$$۸x=۸\times ۲۷$$

$$۸x=۲۱۶$$

$$\therefore x=۲۷$$

حل (۱۵)، رویکرد مشابه را برحسب تعداد کل سیب‌های داخل کیسه (x) نشان می‌دهد.

حل (۱۵)

فرض کنید x = تعداد کل سیب‌های داخل کیسه

$$x=\frac{x}{۳}+\frac{۲x}{۳}\times\frac{۱}{۳}+(x-\frac{x}{۳}-\frac{۲x}{۹})\times\frac{۱}{۳}+۸$$

مرد اول $\frac{۱}{۳}$ سیب‌ها را خورد.

با وجود این، در بین دانشجویان تا قبل از سال سوم خیلی رایج نبود که معادله‌ای برحسب تعداد سیب‌های باقی‌مانده، مانند آنچه در حل (۱۶) آمده بنویسند.

حل (۱۶)

$$x.\frac{۲}{۳}.\frac{۲}{۳}.\frac{۲}{۳}=۸$$

یعنی $\frac{۸x}{۲۷}=۸$

$$\therefore x=۲۷$$

خطاها در راهبردهایی که از مسیر اول به آخر مسئله کارآیی دارند

مفهوم $\frac{۱}{۳}$

حل (۱۷)، پاسخ نمونه‌ی بسیاری از دانش‌آموزان تا پایه‌ی ۶ (معادل اول راهنمایی) را نشان می‌دهد که فکر می‌کردند هر مرد ثلث یک سیب را خورده است.

حل (۱۷)

سیب درسته $۱=۳\times\frac{۱}{۳}$

سیب درسته ۸ + سیب درسته ۱

= ۹ سیب

تمایز بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$

حل (۱۸)، پاسخ نمونه‌ی دانشجویانی است که سعی کردند با استفاده از جبر، و لحاظ کردن فرضیات از اول به آخر، مسئله را در قالب یک معادله درآورند. نتیجه‌ی به دست آمده از این حل با نتیجه‌ی حل (۸) که با راهبردهای آخر به اول انجام شده بود، یکی بود.

حل (۱۸)

فرض کنید مقدار اولیه = x

$\therefore \frac{x}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} = ۸$

$\therefore \frac{x}{۲۷} = ۸$

$\therefore x = ۲۱۶$ ؟ (خیلی بزرگ)

آزمایش $\frac{۲۴}{۳} = ۸$ و $\frac{۷۲}{۳} = ۲۴$ و $\frac{۲۱۶}{۳} = ۷۲$

∴ در ابتدا ۲۱۶ سیب در کیسه بوده است.

حل (۱۹) پاسخی را نشان می‌دهد که در آن، دانش‌آموز سعی کرده برخوردی نظام‌دار را داشته باشد، اما به نظر می‌رسد بعد از گام اول گیج شده باشد.

حل (۱۹)

کیسه سیب با x سیب در آن

بعد از مرد اول $\frac{۲x}{۳}$ سیب‌ها باقی ماند

بعد از مرد دوم $\frac{۴x}{۹} = \frac{۲x}{۳} \times \frac{۱}{۳}$ سیب‌ها باقی ماند

بعد از مرد سوم $\frac{۲x}{۲۷} = \frac{۲x}{۹} \times \frac{۱}{۳}$ سیب‌ها باقی ماند

$\frac{۲x}{۲۷} = ۸$

(زیرا $\frac{۲x}{۲۷}$ سیب‌ها باقی می‌ماند. بنا به فرض ۸ سیب باقی مانده.)

$۲x = ۲۱۶$

$\therefore x = ۱۰۸$

∴ در ابتدا ۱۰۸ سیب وجود داشته است.

حل (۲۰)، حل معادله‌ی دیگری را نشان می‌دهد که فقط در مؤلفه‌ی آخر این معادله، نویسنده فراموش کرده $\frac{۱}{۳}$ باقی‌مانده را کم کند.

حل (۲۰)

فرض کنید تعداد اولیه سیب‌ها x باشد، حال

$$x - \frac{۱}{۳}x - \frac{۱}{۳}(x - \frac{۱}{۳}x) - \frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۳}(x - \frac{۱}{۳}x) = ۸$$

$$x - \frac{x}{۳} - \frac{x}{۳} + \frac{x}{۹} - \frac{x}{۹} + \frac{x}{۲۷} = ۸$$

$$۲۷x - ۹x - ۹x + ۳x - ۳x + x = ۸ \times ۲۷$$

$$۱۰x = ۲۱۶$$

$x = ۲۱/۶$ سیب

بازنمایی جبری $\frac{۱}{۳}$

بسیاری از دانش‌آموزان، از پایه‌ی ۸ تا دانشجو ـ معلمان که می‌خواستند مسئله را از روش‌های جبری حل کنند، در نمایش و به‌کارگیری $\frac{۱}{۳}$ مشکل داشتند. حل (۲۱)، پاسخ یکی از دانشجو ـ معلمان است که نمایانگر مشکلات او در کار با کسرها می‌باشد.

حل (۲۱)

$\frac{۱}{۳}$ از x

$\frac{۱}{۳}$ از $[x - \frac{۱}{۳}]$

$\frac{۱}{۳}$ از $[x - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳}] = ۸$

$$= \frac{۱}{۳} \times x = ۸ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳}$$

$$= \frac{۱}{۳}x = ۸ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳}$$

$$= x = \frac{۸ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}}$$

$$= \frac{۸ + \frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}}$$

$$= ۸\frac{۲}{۳} \times ۳$$

$$= \frac{۲۶}{۳} \times ۳$$

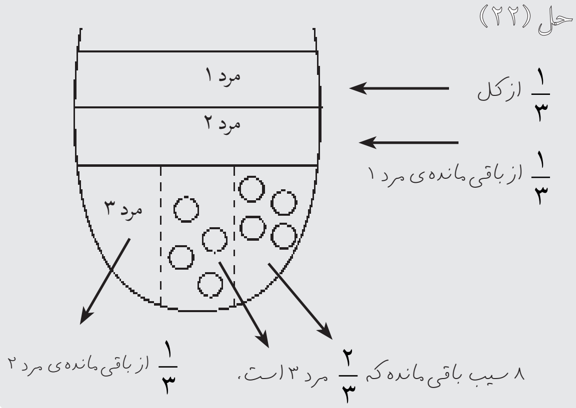
$$\therefore x = ۲۶$$

∴ رویهم ۲۶ سیب وجود داشت.

رسم نمودار اما ناتوانی در تکمیل آن

حل (۲۲)، پاسخی را نشان می دهد که سعی در سازمان دهی مسئله را در قالب یک نمودار داشته است، ولی بعد از آن هیچ اقدام دیگری صورت نگرفته است. بسیاری از دانش آموزان پائین تر از پایه ی ۱۰ نیز تصاویر مشابه یا کاریکاتورهایی از سه مرد گرسنه ترسیم کردند اما نتوانستند مسئله را حل کنند.

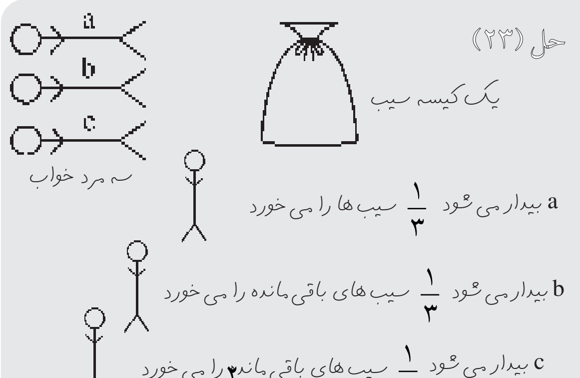
حل (۲۲)



راهبردهایی که از اول به آخر و از آخر به اول مسئله کارآیی دارند
توضیح دقیق

تعدادی از دانش آموزان، خصوصاً در پایه های ۸ و ۹، با دقت، تعبیر خود را از مسئله، از ابتدا توضیح دادند و بعد مسئله را از آخر حل کردند. گاهی این پاسخ ها با رسم تصاویر همراه بود. از این نمونه پاسخ ها، حل (۲۳) جالب است زیرا در پایان از روش جمع استفاده کرده است که احتمالاً با علاقه ی دانش آموز، با مسیر داستان هم خوانی دارد.

حل (۲۳)



۸ سیب باقی مانده، بنابراین = $\frac{۲}{۳}$

∴ $\frac{۱}{۳}$ = ۴ سیب

∴ c، **۴ سیب** می خورد

بعد از آن که b سیب هایش را می خورد ۱۲ سیب می ماند ∴

∴ ۱۲ سیب = $\frac{۲}{۳}$

∴ b، **۶ سیب** می خورد

بعد از آن که a سیب هایش را می خورد ۱۸ سیب می ماند ∴

∴ ۱۸ سیب = $\frac{۲}{۳}$

∴ a، **۹ سیب** می خورد

∴ ۸+۴+۶+۹=۲۷

∴ در ابتدا ۲۷ سیب در کیسه بوده است

نگه داشتن حساب هر سه مرد

چندین دانش آموز کلاس های ۵ و ۶ بعد از شروع حل مسئله، ظاهراً فراموش می کنند که چند مرد در مسئله شرکت داشتند. یکی از این پاسخ ها در حل (۲۴) آمده است.

حل (۲۴)

اولین مرد $\frac{۱}{۳}$ می خورد

دومین مرد $\frac{۱}{۳}$ سیب های باقی مانده را خورد

سومین مرد $\frac{۱}{۳}$ سیب های باقی مانده را خورد و ۸ سیب ماند

$\frac{۲}{۳}$ = ۸

$\frac{۲}{۳}$ = ۱۲

سیب هایی که با آن ها شروع کردند = ۱۸

اشارات

در عمل، راهبردهای درست و نادرست بسیار زیاد دیگری نیز برای این مسئله مشاهده شد، ولی به نظر می آید گزینش انجام شده برای نشان دادن میزان خوبی و امتیازات مسئله ی سه مرد گرسنه کفایت کند. در ادامه، اشارات تلویحی مسائل این چنینی در تدریس ریاضی از زاویه های مختلف بحث خواهد شد.

تدریس حل مسئله

تنها با در نظر گرفتن تعداد راهبردهای صحیح متفاوت برای مسئله ی سه مرد گرسنه، می توان آن را ابزاری خیلی خوب و مناسب برای آن دسته از معلمانی به حساب آورد که قصد بررسی راهبردهای حل مسئله را با دانش آموزانشان دارند. به ویژه، اگر این مسئله در سطح دبیرستان

مطرح شود، تقریباً همه‌ی دانش‌آموزان خواهند توانست مسئله را درک کنند و متوجه ارزش آن باشند.

در به کارگیری این مسئله، معلمان حتی می‌توانند به بعضی از راهبردهایی که به طور صریح در حل‌های ارائه شده در اینجا نیامده بود تأکید کرده و آن‌ها را بحث قرار دهند. برای مثال، راهبرد «خواندن با دقت مسئله» می‌تواند در مواردی که دانش‌آموزان تعبیر درستی از مسئله ندارند، مثلاً می‌گویند «$\frac{1}{3}$ از یک سیب» یا باقی‌مانده را فراموش می‌کنند، مورد اشاره قرار گیرد. به طور مشابه «ساختن یک مدل» به وسیله‌ی اشیای واقعی می‌تواند برای کودکان دوره‌ی ابتدایی با ارزش باشد، یا «ساختن یک جدول» می‌تواند به عنوان راهی برای ضبط اطلاعات مورد استفاده قرار گیرد. البته چک کردن پاسخ‌ها نیز یکی از جنبه‌های مهم حل مسئله است که بعداً مورد اشاره قرار خواهد گرفت.

در ارائه‌ی راه‌حل‌ها هیچ پیشنهادی در مورد این که کدام حل بهتر از دیگری است مطرح نشد. ممکن است به عنوان یک معلم، از دیدن این همه تنوع و ابتکار در راه‌حل‌ها ذوق زده شویم. توجه کنید که این تنوع می‌تواند نقطه‌ی شروع خوبی برای بحث و مقایسه‌ی راهبردها در کلاس درس باشد. بررسی طول و زیبایی راه‌حل‌ها می‌تواند میان بُرهایی به مسئله حل کن‌های علاقه‌مند پیشنهاد کند، خصوصاً آن‌هایی که مباحث جبر را خوانده‌اند ولی کاربردهای بسیار کمی از آن را دیده‌اند.

مشکلات بیان

ملاحظه شد که به کارگیری نادرست علامت تساوی، حتی در راه حل‌هایی که به جواب صحیح منجر می‌شد، عمومیت داشت. این مشاهده، تدریس اولیه‌ی ما را در مورد رایج‌ترین علامت ریاضی زیر سؤال می‌برد. به عنوان نمونه، آیا تاکنون پیش آمده از دانش‌آموزی که حلی مانند حل (۲۳) ارائه داده بخواهیم برای جلوگیری از ابهام و داشتن دقت لازم آن را دوباره‌نویسی کند؟ به‌ویژه اگر حل ارائه شده به جواب صحیح رسیده باشد! مثلاً در حل (۲)، دانش‌آموز ادعا می‌کند $\frac{2}{3} = 8$. واضح است که این دانش‌آموز متن سؤال را فهمیده بود، اما یقیناً نوشته‌ی او از نظر ریاضی صحیح نیست. در اینجا، آوردن چند واژه‌ی کمکی مانند «$\frac{2}{3}$ از سیب‌های باقی‌مانده» می‌توانست منظور را نشان دهد. یکی از روش‌های کارآمد برای رفع این گونه مشکلات آن دست که یک بحث خوب حول حلی مانند حل (۲) و چگونگی بهبود آن در کلاس به اجرا درآورد.

این مثال‌ها اهمیت زبان را در ریاضیات برجسته می‌کند. بسیاری از دانش‌آموزان نیازمند توجه و آموزش در چگونگی استفاده‌ی مؤثر از زبان در ارائه‌ی راه‌حل‌هایشان هستند.

توانایی استفاده‌ی صحیح از زبان می‌تواند در تجزیه و تحلیل دانش‌آموزان از مسئله‌ی اخیر باشد. هم‌چنین، می‌تواند به معلمان در رصد راهبردهایی که به بی‌راهه رفته‌اند یاری رساند. از نظر بسیاری از دانش‌آموزان، آشنایی با جبر نیاز آن‌ها را در به کارگیری واژگان کم می‌کند. شاید این به دلیل تأکید دائمی ما معلمان باشد که می‌گوییم جبر، زبان ریاضی برای حل مسائل است. بررسی راه‌حل‌های ارائه شده‌ی مسئله‌ی سه مرد گرسنه نشان می‌دهد که ما معلمان با این باور ممکن است برای سال‌ها دانش‌آموزان‌مان را به بی‌راهه هدایت کنیم. همان‌طور که ملاحظه شد حل‌های محض جبری ارائه شده در سطح مدرسه که پایان موفقیت‌آمیزی داشته باشند، خیلی کم بودند.

راه‌حل‌های نادرست

عموماً راه‌حل‌های نادرست مسائل، حرف‌های زیادی برای گفتن دارند. شاید تنوع راه‌حل‌های غَلط مسئله‌ی سه مرد گرسنه شما را متعجب کرده باشد.

ولی اگر بخواهیم مثل یک معلم خوب فکر کنیم، نیاز داریم از بسیاری از راه‌هایی که دانش‌آموزان ممکن است به اشتباه بروند آگاهی داشته باشیم. کلاسی را تصور کنید که در آن، دانش‌آموزان راهبردهای خود را برای جمع حاضر در کلاس توضیح می‌دهند و از ادعاهای خود دفاع می‌کنند. در این گونه بحث‌های کلاسی، دانش‌آموزان ضمن بررسی تفاوت‌های راه‌حل‌هایشان، مطالب زیادی می‌آموزند.

جالب است توجه کنید که در سطح مدارس ابتدایی، تعداد پاسخ‌های غیرواقع‌گرایانه برای مسئله‌ی سه مرد گرسنه بسیار کم بود. در واقع، این دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر بودند که خود را موظف به استفاده از روش‌های پیچیده‌ای شامل جبر می‌دانستند و در آخر نیز پاسخ‌های غیرواقع‌گرایانه‌ی خود را بدون تردید در درستی آن‌ها ارائه می‌دادند. از جمله‌ی این گونه پاسخ‌ها، می‌توان به حل‌های (۸)، (۱۱)، (۱۹) و (۲۰) اشاره کرد.

دانش‌آموزی که حل (۱۸) را نوشت، تنها کسی بود که جواب ۲۱۶ را مورد تردید قرار داد، ولی او نیز در پایان به مسئله‌ی اصلی برنگشت تا منطقی بودن جواب خود را بررسی کند. شاید یکی از مهم‌ترین جنبه‌های تدریس راهبردهای حل مسئله این باشد که از دانش‌آموزان بخواهیم جواب‌های خود را کنترل کنند و منطقی بودن آن را در مسئله‌ی اصلی مورد بررسی قرار دهند.

در اینجا قصد نداریم که اشتباهات را با هم مقایسه کنیم و بگوییم کدام‌یک جدی‌تر از دیگری است. احتمالاً خوانندگان نظر شخصی خود را در این زمینه دارند. ولیکن، این واضح است که بعضی از راهبردها به موفقیت نزدیک‌تر بودند. جالب است توجه کنید که برای این مسئله، جواب‌های غلط یکسان الزاماً از راهبردهای نادرست یکسان نتیجه نشده بودند. مثلاً جواب‌های ۲۱۶ و ۱۰۸ از چندین راه مختلف به دست آمدند. از این رو، لازم به نظر می‌رسد که به عنوان معلم مراقب باشیم که دانش‌آموزان را فوری براساس جواب آخری که عرضه می‌کنند طبقه‌بندی نکنیم. در واقع، مسئولیت ما خیلی بیشتر از آن است که فقط با یک علامت ضربدر قرمز، نادرستی پاسخ دانش‌آموزان‌مان را تأیید کنیم.

> **در واقع این که معلمان ابتدایی فقط به مهارت‌های جبری مجهز باشند باعث می‌شود که یا مسایلی مانند سه مرد گرسنه را در کلاس‌های خود مطرح نکنند یا دانش‌آموزان را به سمت استفاده از روش‌های جبری هدایت کنند که هنوز در حد درک و فهم آن‌ها نیست. لذا ضروری به نظر می‌رسد که در کنار معرفی روش‌های جبری، استفاده از روش‌های بدیل حل مسئله نیز در برنامه‌های آموزشی تربیت معلم لحاظ شود.**

تدریس جبر

اگرچه جبر تنها ابزار حل مسئله‌ی سه مرد گرسنه نیست، ولی اگر به طور صحیح مورد استفاده قرار گیرد، قطعاً می‌تواند برای این منظور کافی باشد. با این وجود بسیاری از دانش‌آموزانی که آموزش جبر دیده بودند برای حل این مسئله از راه‌حل جبری استفاده نکردند. شاید دلیل این باشد که ابزار جبری هنوز آن‌قدر مورد استفاده قرار نگرفته بود که آن را به عنوان یک ابزار کمکی ببینند، و بیشتر حکم یک چیز دست و پاگیر را برای دانش‌آموزان، خصوصاً در سال‌های اول دبیرستان، داشت. البته این عملکرد دانش‌آموزان دور از انتظار هم نبود. خود ما نیز وقتی با یک مسئله روبه‌رو می‌شویم، عموماً از آشناترین تکنیک‌ها برای حل آن استفاده می‌کنیم؛ تا استفاده از تکنیک‌های جدیدی که هنوز اعتماد به نفس کافی نسبت به آن‌ها نداریم. تبدیل تکنیک‌های جبری به ابزاری که دانش‌آموزان به طور طبیعی و ناخودآگاه برای حل مسئله به کار برند، نیازمند زمان است.

در طرف دیگر سکه‌ی جبر، دانشجو ـ معلمان بودند که اغلب ادعا می‌کردند به هیچ راه دیگری (غیر از جبر) برای حل این مسئله نمی‌توانستند فکر کنند. این‌که معلمان از جبر به عنوان یک ابزار حل مسئله استفاده کنند جای خوشحالی است، ولی این وضعیت در شرایطی که بخواهند مسئله را در سطح مدارس ابتدایی حل کنند باعث شرمندگی آن‌ها خواهد شد. در واقع این‌که معلمان ابتدایی فقط به مهارت‌های جبری مجهز باشند باعث می‌شود که یا مسایلی مانند سه مرد گرسنه را در کلاس‌های خود مطرح نکنند یا دانش‌آموزان را به سمت استفاده از روش‌های جبری هدایت کنند که هنوز در حد درک و فهم آن‌ها نیست. لذا ضروری به نظر می‌رسد که در کنار معرفی روش‌های جبری، استفاده از روش‌های بدیل حل مسئله نیز در برنامه‌های آموزشی تربیت معلم لحاظ شود.

قالب چند گزینه‌ای

در اینجا ممکن است این سؤال مطرح شد که اگر بخواهیم مسئله‌ی سه مرد گرسنه را در قالب سؤال چند گزینه‌ای قرار دهیم، چند گزینه برای آن مناسب است؟ با توجه به مشاهده‌ی عملکرد دانش‌آموزان، شاید برای پایه‌ی ۶، بهترین پاسخ‌ها می‌توانست ۳۲، ۲۷، ۲۴ و ۹ باشد. برای دانش‌آموزان دبیرستانی و دانشجویان نیز، بهترین بدیل می‌توانست ۲۷، ۷۲، ۱۰۸ و ۲۱۶ باشد. ولی در هر صورت، عرضه‌ی این مسئله در قالب چند گزینه‌ای، به معنای محدود کردن وسعت پاسخ‌های ممکن برای آن است. این همان بلایی است که بر سر بسیاری از مسائل دیگر نیز که در قالب چند گزینه‌ای آورده می‌شوند، می‌آید. تجربه‌ی تدریس ریاضی نشان می‌دهد که قالب سؤالات چندگزینه‌ای فقط برای پاسخ‌های سطح پایین، از نوع به‌یاد آوردن می‌تواند مناسب باشد.

نتیجه‌گیری

در پایان، شاید بررسی جزئیات مسئله‌ای مانند مسئله‌ی سه مرد گرسنه بتواند به ما کمک کند تا در این باور که **پاسخ، مهم‌ترین چیز در حل مسئله است** تجدیدنظر کنیم. عموماً، ما معلمان تمایل داریم که راه‌حل خودمان را بهترین راه‌حل ببینیم و دانش‌آموزان را به سمت آن روش هدایت کنیم، به ویژه وقتی دانش‌آموزی در حل مسئله گیر می‌کند. در صورتی که تشویق دانش‌آموزان در به کارگیری و امتحان راهبردهای متنوع ضمن ایجاد انگیزه در آن‌ها برای درگیر شدن در فرایند حل مسئله، می‌تواند دسترسی معلمان را به نوع تفکر، مشکلات و بدفهمی‌های محتمل دانش‌اموزان امکان‌پذیر سازد. شاید یکی از راه‌های پرورش دانش‌آموزان مسئله حل کن، ارائه‌ی مسائلی از نوع سه مرد گرسنه باشد و هم‌چنین، تشویق و پاداش درونی برای دانش‌آموزانی که برای پیدا کردن جواب مسئله، راه‌های جدیدی پیشنهاد می‌کنند.

پی‌نوشت

* Watson, J. (1988). Three Hungry Men and Strategies for Problem Solving. In: Pimm, D., Harper, K.O'shea, T. (Eds.). Designs for Learning: Elementary Mathematics (2002). Simon Fraser University.

** Jane Watson

تحقیق عمل

چرایی، ضرورت‌های تاریخی و چیستی

ـ سلسله مقالاتی جهت آشنایی بیش‌تر با تحقیق عمل ـ

(بخش نخست)

سپیده چمن‌آرا

عضو هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی راهنمایی منطقه‌ی ۲ تهران

چکیده

در این مقاله و مقالاتی که در چند شماره‌ی آینده به چاپ خواهد رسید، قصد داریم با «تحقیق عمل[1]» (که در برخی متون و کتاب‌ها، به صورت «پژوهش ضمن عمل»، «پژوهش در عمل» و «اقدام‌پژوهی» و نظایر آن نیز معادل‌سازی شده است) بیش‌تر آشنا شویم. در نخستین بخش از این مجموعه مقالات، به بررسی ماهیت و ویژگی‌های پژوهش‌های کلاسیک و انتقادهای وارد بر روش‌های علمیِ پژوهش در حوزه‌های علوم تربیتی و آموزش و علوم اجتماعی می‌پردازیم تا دلایل و ضرورت‌های روی آوردن به شکل‌های جدید پژوهش (به ویژه گرایش به «تحقیق عمل» در تحقیقات آموزشی و آموزش ریاضی) در این حوزه‌ها برایمان آشکار گردد و با مرور اجمالیِ تاریخچه‌ی پیدایش تحقیق عمل و نیز بررسی شباهت‌ها و تفاوت‌های این نوع تحقیق با سایر شکل‌های پژوهش، جایگاه «تحقیق عمل» در بدنه‌ی پژوهش‌های علمی و مشروعیت آن براساس دیدگاه‌های نهفته در پس آن را بشناسیم.

در بخش دوم این مقاله ـ که در شماره‌های بعدی این مجله به چاپ می‌رسند ـ با تفصیل بیشتری، «تحقیق عمل» را معرفی کرده و اهداف و نتایج حاصل از آن، پیش‌فرض‌های این نوع تحقیق و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم. مراحل انجام تحقیق عمل، شیوه‌های جمع‌آوری داده‌ها در آن، چگونگی کیفیت‌بخشی و بالاخره روایی نتایج حاصل از آن، موضوع بخش سوم از این مجموعه مقالات خواهد بود. آخرین بخش از این مقاله‌ها، به بررسی چند نمونه از تحقیق‌های انجام شده در حوزه‌ی آموزش ریاضی اختصاص دارد.

کلیدواژه‌ها: پژوهش (تحقیق)، تحقیق عمل (پژوهش ضمن عمل، پژوهش در عمل، اقدام‌پژوهشی)، معلم محقق (معلم پژوهنده، اقدام‌پژوه).

مقدمه

چندین سال است که واژه‌های «اقدام‌پژوهی» و «معلم پژوهنده» در واژگان آموزشی ما وارد شده است و آن‌ها را در بخش‌نامه‌های مختلف می‌خوانیم. جشنواره‌ی معلمان پژوهنده، یکی از مراسمی است که در هفته‌ی پژوهش یا مناسبت‌های مرتبط، به‌منظور شناسایی و تشویق معلمان فعال و اهل پژوهش، برگزار می‌شود. پژوهشکده‌های وابسته به وزارت آموزش‌وپرورش، زمان و انرژی فراوانی را روی بررسی اثر «پژوهنده» بودن معلمان بر روش‌های تدریس آن‌ها صرف کرده‌اند. اما معلمان ما تا چه حد با معنای واقعی این واژه‌ها و فلسفه‌ی وجودی و اهداف این نوع تحقیق آشنا هستند؟ و برگزاری این جشنواره‌ها تا چه حد توانسته است به هدف اصلی تحقیق عمل ـ که در ادامه خواهیم دید که «بهبود عمل تدریس معلم و ارتقای حرفه‌ای وی» است ـ نزدیک شود؟ در این مقاله، تنها قصد داریم به پرسش اول بپردازیم و با اقدام‌پژوهی (بخوانید «تحقیق عمل») بیش‌تر آشنا شویم. یادآور می‌شویم که پاسخ‌گویی به پرسش دوم، نیازمند بررسی اهداف تعیین شده برای این جشنواره‌ها و برنامه‌ها و تطابق آن‌ها با اهداف واقعی و تعریف‌شده برای تحقیق عمل توسط آموزشگران در حالت کلی و نیز اطلاعات بیشتری درباره‌ی پژوهش‌های ارائه شده و برگزیده در این جشنواره‌ها و معلمان پژوهنده‌ی نویسنده‌ی این پژوهش‌ها می‌باشد که دسترسی به آن‌ها از توان نگارنده خارج است.

از این پس در این مقاله، واژه‌ی «تحقیق عمل» را معادل واژه‌ی Action Research به‌کار خواهیم برد، مگر در مواردی که از منابع دیگر، نقل قول‌های مستقیم آورده شده باشد.

تحقیق و انواع آن

پیش از معرفی «تحقیق عمل» لازم است به اجمال مفهوم پژوهش (تحقیق)، انواع آن، ریشه‌های فلسفی‌ای که پژوهش‌های علمی کلاسیک بر مبنای آن استوار است و نیز نقدهای وارد بر آن پژوهش‌ها را بررسی کنیم.

دلاور (۱۳۸۰) به نقل از چند فرهنگ مختلف، واژه‌ی تحقیق را چنین معرفی می‌کند:

«واژه‌ی تحقیق از زبان عربی گرفته شده است و در لغت به معنای رسیدگی کردن، بررسی، بازجویی (فرهنگ قریب)، وارسی واقعیت (فرهنگ نفیسی)، راست و درست کردن، به حقیقت امری رسیدگی کردن و بازجویی کردن (فرهنگ عمید و لغت‌نامه‌ی دهخدا) است.»

وی در ادامه می‌افزاید: «اگر از معنای لغوی تحقیق که در زبان، تعبیرهای متفاوتی دارد و خود، بازتاب ذهنی و ذوقی اهل زبان طی زمان است صرف‌نظر کنیم، تعریف تحقیق از نظر روش‌شناسی، امر مشکلی است و از این جهت در بین صاحب‌نظران و پژوهشگران، اختلاف نظر زیادی وجود دارد. به همین دلیل ارائه‌ی تعریفی که مورد تأیید و موافقت همه‌ی پژوهشگران باشد، آسان نیست. عدم توافق در تعریف تحقیق، بیش از همه ناشی از بهای بیش از حدی است که به نوعی از آن، به نام تحقیق آزمایشی داده می‌شود. به این معنی که با گذشت زمان و با پیشرفت‌های چشم‌گیری که در علوم فیزیکی به‌وجود آمد، دانشمندان سایر روش‌های علمی را مورد بی‌مهری قرار دادند.» (ص ۴۴)

وی هم‌چنین ادامه می‌دهد: «در مباحث علمی، غالباً مفاهیم تحقیق و روش

علمی به‌صورت مترادف به‌کار برده می‌شوند... تحقیق، روندی رسمی‌تر و منظم‌تر و قوی‌تر از روش علمی است. تحقیق با ساختار منظم‌تری از کنکاش توأم است که معمولاً منجر به نوعی ثبت مراحل و گزارش نتایج و دست‌آوردها می‌شود. ... تحقیق، مرحله‌ی تخصصی‌تری از روش‌شناسی علمی است.» (ص ۴۶)

در نهایت، دلاور تحقیق را چنین تعریف می‌کند:

«تحقیق، مجموعه‌ی فعالیت‌های منظمی است که هدف آن کشف حقیقت یا رسیدن از علم اندک به علم بیش‌تر است، خواه با روش آزمایشی صِرف و خواه با روش‌های دیگر.» (ص ۴۷)*

گال، مردیت و گال (۱۳۸۴)، چهار نوع دانشی را که تحقیق برای حوزه‌ی تعلیم و تربیت فراهم می‌آورد، چنین برمی‌شمارند:

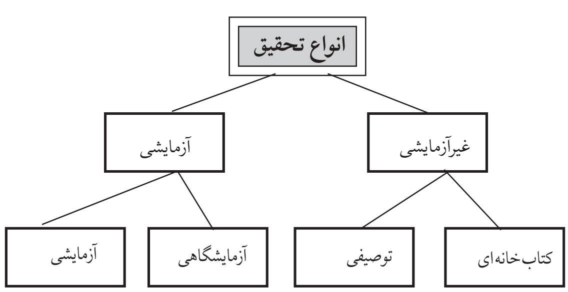
«(۱) توصیف[۲]، (۲) پیش‌بینی[۳]، (۳) بهبود[۴]، (۴) تبیین[۵]» ([۲]، ص ۱۹).

به این ترتیب می‌بینیم که در حوزه‌ی علوم تربیتی و آموزش، **بهبود عمل** یکی از نتایج مهم تحقیقات و پژوهش‌های این حوزه است که در حوزه‌ی علوم تجربی معنایی ندارد.

انواع تحقیق

از نظر ارزش‌ها و مقاصد و منابع مختلف، تحقیقات را به دو دسته‌ی بنیادی[۶] و کاربردی[۷] می‌توان تقسیم کرد ([۱]، صص ۴۸ تا ۵۰). این دو دسته از تحقیقات، از لحاظ هدف، زمان و مکان و شکل بیان مسئله، با یکدیگر متفاوت هستند و توجه به این تفاوت‌ها، ضروری است: از نظر هدف، تحقیق کاربردی در جست‌وجوی دست‌یابی به یک هدف عملی بوده و تأکید بر آن تأمین سعادت و رفاه توده‌ی مردم و مطلوب بودن فعالیت‌ها است. دانشی که از این طریق کسب می‌شود، راهنما و دستورالعملی برای فعالیت‌های عملی خواهد بود. از سوی دیگر، تحقیق بنیادی گرچه ممکن است کاربرد عملی نیز داشته باشد، ولی هدف عمده و اساسی آن، افزایش حیطه‌ی دانش و آگاهی است. هدف این نوع تحقیقات، کسب دانش و آگاهی نو بدون در نظر گرفتن ارزش آن‌ها در ایجاد تغییرات اجتماعی است. در چنین تحقیقی، تأکید بر مطالعه‌ی ارتباط درونی متغیرها است، نه بررسی قابلیت بشر در تأثیر گذاشتن بر ارتباط متقابل متغیرها. از نظر زمان و مکان، یافته‌های تحقیق کاربردی به میزان زیادی وابسته به زمان و مکان هستند در صورتی که تحقیقات بنیادی چنین نیستند. از نظر شکل بیان مسئله، تحقیق کاربردی، معطوف به عمل مؤثر است در حالی که تحقیق بنیادی، برای افزایش فهم و به‌طور کلی دانش بشری تلاش می‌کند. «با در نظر گرفتن ارتباط درونی بین علم و کاربرد، می‌توان نتیجه گرفت که تحقیق بنیادی و کاربردی نه تنها متضاد نیستند، بلکه مکمل یکدیگرند و توسط یکدیگر تغذیه می‌شوند» (دلاور، ۱۳۸۰، ص ۵۰)

یکی دیگر از انواع دسته‌بندی تحقیقات، دسته‌بندی آن‌ها از نظر روش تحقیق است. نمودار زیر این دسته‌بندی را نشان می‌دهد:



از منظر نوع داده‌های جمع‌آوری شده و شیوه‌های تحلیل آن داده‌ها نیز می‌توان تحقیقات را به دو رده‌ی کمّی[۸] و کیفی[۹]، دسته‌بندی کرد. پژوهش‌های علمی و اغلب پژوهش‌های کلاسیک، پژوهش‌های کمّی هستند. این پژوهش‌ها، بر فلسفه‌ی اثبات‌گرایی[۱۰] (یا تحصّل‌گرایی) استوار هستند. فرض اصلی اثبات‌گرایان این است که هر مسئله، راه حل خاص خود را دارد. آن‌ها هم چنین معتقدند که جلوه‌های محیط اجتماعی، واقعیت‌های مستقل را تشکیل می‌دهند و طی زمان و موقعیت‌ها، نسبتاً ثابت هستند.[۱۱] پژوهشگرانِ اثبات‌گرا، دانش را از طریق گردآوری داده‌های عددی و رفتارهای قابل مشاهده‌یِ نمونه‌ها و سپر عرضه‌ی این داده‌ها به تحلیل عددی، فراهم می‌آورند (گال، بورگ؛ گال، ۱۳۸۴، ص ۶۰).

از سوی دیگر، به اعتقاد دنزین و لینکلن، «تحقیق کیفی، تحقیقی ماهیتاً چند روشی است و متضمن رویکرد تفسیری[۱۲] و طبیعت‌گرایانه[۱۳] به موضوع مورد مطالعه می‌باشد. این بدان معناست که پژوهشگران کیفی، اشیاء را در موقعیت‌های طبیعی آن‌ها مطالعه می‌کنند و می‌کوشند پدیده‌ها را برحسب معناهایی که مردم به آن‌ها می‌دهند، مفهوم‌سازی یا تفسیر کنند» (نقل شده در گال؛ بورگ؛ گال، ۱۳۸۴، ص ۶۰). پژوهش‌های کیفی ریشه در فلسفه‌ی مابعد اثبات‌گرایی[۱۴] مانند فلسفه‌ی تفسیری و فلسفه‌ی انتقادی[۱۵] دادند. این پژوهشگران معتقدند که جلوه‌های محیط اجتماعی به عنوان تفسیرهایی به وسیله‌ی افراد ساخته می‌شوند و این تفسیرها، شکل گذرا و وابسته به موقعیت دارند. آن‌ها دانش را در درجه‌ی اول از طریق گردآوری داده‌های کلامی با مطالعه‌ی جدی و عمقی موارد و عرضه‌ی این داده‌ها به استقراء تحلیلی، فراهم می‌آورند (همان، ص ۶۰).

از انواع تحقیق‌های کیفی می‌توان به پژوهش تفسیری[۱۶]، پژوهش مطالعه‌ی موردی[۱۷] و پژوهش قوم‌شناسانه[۱۸] و... اشاره کرد.

نقدهای وارد بر پژوهش‌های کلاسیک و دلایل ظهور پژوهش مابعد اثبات‌گرایان

به‌طور کلی نقدهایی را که به پژوهش‌های کلاسیک در حوزه‌های علوم تربیتی و اجتماعی وارد شده است، می‌توان در موارد زیر خلاصه کرد:

- محقق، فردی خارج از موضوع است که درگیر عمل واقعیِ آن موضوع نیست؛
- نگاه محقق بیرونی، نهایتاً سودار است؛
- نظریه‌ها، بر عمل منطبق نیستند؛
- نتایج تحقیقات اغلب غیرکاربردی هستند؛
- لازم است کارورزان نیز در تحقیق درگیر شوند و در آن مشارکت کنند؛
- پیچیدگی‌های انسان در انقیاد قانون‌مندی‌های عام و فراگیر قرار نمی‌گیرد!

مهرمحمدی (۱۳۷۹) (نقل شده در رضایی، ۱۳۸۳ [۴]) با این باور که شناخت انسان و موقعیت‌های انسانی را نمی‌توان تحت انقیاد قانون‌مندی‌های عام و فراگیر به اصطلاح علمی درآورد، بر این عقیده است که ادعای شناخت، کنترل، پیش‌گویی و تبیین موقعیت‌های انسانی به پشتوانه‌ی قوانین عام و برخوردار از تعمیم‌پذیری عام با واقعیت وجودی آدمی، سازگار نیست. وی در مقابل اظهار می‌دارد: «اقدام‌پژوهی می‌تواند معرف رویکرد مطالعاتی سازگار با این اندیشه باشد. بدین معنا که با استفاده از این رویکرد می‌توان به دانش منطبق با شرایط و ویژگی‌های یک موقعیت خاص نائل آمد و لازم نیست دلالت‌های یافته‌های پژوهش‌های علمی و آکادمیک را به تصور برخورداری از تعمیم‌پذیری مطلق به کار گرفت» ([۴]، ص ۸۲).

کِلِمنتس والِرتون (۱۹۹۶) نیز درباره‌ی حوزه‌ی تحقیقات آموزش

ریاضی ابراز می‌دارند:

«به خوبی معلوم است که یافته‌های تحقیقات آموزش ریاضی تأثیر کمی بر روش‌های تدریس و یادگیری ریاضی در مدارس داشته است... در حقیقت رویکردهایی که توسط وزارت‌خانه‌های آموزش‌وپرورش پیشنهاد می‌شوند ـ صرف‌نظر از این که دارای مبنای تحقیقاتی اصیلی باشند یا نه ـ تأثیرات بیشتری بر ریاضیات مدرسه‌ای دارند تا رویکردهایی که بر مبنای یافته‌های حاصل از مطالعات تحقیقاتی دانشگاهی هستند» ([۵]، ص ۱۱۱).

به اعتقاد ایشان، در واقع در اغلب ایالت‌های کشور آمریکا و در اغلب کشورهای آسیای جنوب‌شرقی و اقیانوسیه (و احتمالاً در بسیاری از کشورهای دیگر)، معلمان ریاضی در هیچ‌یک از تصمیم‌گیری‌هایی که برای بهبود و ارتقای وضع آموزش ریاضی می‌شود، دخالتی ندارند و تنها به آن‌ها گفته می‌شود که چه‌کار کنند و چگونه آن کارها را انجام دهند و دائم با ارزیابی بیرونی، عملکردشان مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. آن‌ها معتقدند برنامه‌هایی مانند **توسعه‌ی معلمان**، **مشارکت معلمان** و **توانمندسازی معلمان**، تنها حرف‌هایی است که زده می‌شود و عواملی چون **تمرکز**، **استانداردسازی** و **منطق گرایی صرف**، مانع از تحقق آن‌ها می‌باشد.

منتقدینی مانند کلمنتس والرتون که به انواع برنامه‌های یکسان‌سازی و نیز به برنامه‌های یونسکو و کمک‌های بانک جهانی و سایر نهادهای مشابه به پیشرفت آموزشی کشورهای در حال توسعه، انتقادهای جدی دارند، معتقدند بسیاری از پروژه‌هایی که از سوی این نهادها هزینه می‌شود تا برای آموزش در کشورهای در حال توسعه صورت گیرد، اغلب برای این کشورها بی‌فایده است؛ زیرا برنامه‌های تجویزی است که در آن‌ها، نیازهای واقعی کلاس‌های درس این کشورها و مشکلات واقعی معلمان و دانش‌آموزان آن کشورها در نظر گرفته نشده است. ایشان معتقدند باید برای پروژه‌هایی هزینه شود که اجازه دهد صدای معلمان و دیگر آموزشگران که در این حوزه‌ها ـ به‌ویژه حوزه‌ی آموزش ریاضی ـ کار می‌کنند، شنیده شود (نقل به مضمون از [۵]، صص ۱۱۱ تا ۱۱۳).

رابطه‌ی معلمان با پژوهش

مهرمحمدی (۱۳۸۳) در [۴] اظهار می‌دارد:

«به‌طور کلی معلمان با اِعمال وظایف معلمی در مسیرهای چندگانه‌ی زیر، ایفای نقش پژوهشی می‌نمایند:

۱. به‌کارگیرنده‌ی یافته‌های پژوهشی (مصرف‌کننده‌ی دانش)؛

۲. معلم به‌عنوان مدرس پژوهش به دانش‌آموزان؛

۳. معلم به‌عنوان پژوهشگر (محقق در مورد عمل تدریس خویش)» ([۴]، صص ۲۵ـ۴۰).

در اولین زمینه، همان‌گونه که دیدیم، به دلایل بسیار متعددی، من‌جمله عدم کاربردی بودن نتایج بسیاری از تحقیقات دانشگاهی، جدایی نظریه‌های علمی از عمل واقعی، عدم آشنایی معلمان با زبان این نوع پژوهش‌ها، مقاومت معلمان در مقابل تغییرات، عدم پذیرش نتایج حاصل از تحقیقات توسط معلمان به‌دلیل عدم آشنایی ایشان با مبانی فلسفی و نظری تحقیقات و... بسیاری از تحقیقات آموزشی در حوزه‌ی عمل، مورد استفاده قرار نمی‌گیرند.

در زمینه‌ی دوم، که در واقع به آموزش مسئله ـ محور بازمی‌گردد. آشنایی کامل معلمان با شیوه‌های حل مسئله و روش‌های پژوهش علمی و باور آن‌ها به این نوع آموزش و ایجاد فرهنگ پرسش‌گری و پژوهش در کلاس درس، ضروری است.

و بالاخره زمینه‌ی سوم، همان چیزی است که کلمنتس والرتون (۱۹۹۶) نیز برای رفع مشکلات معلمان ریاضی پیشنهاد کرده‌اند: «تحقیق عمل در مدرسه، تحقیقی است که توسط معلمان انجام می‌شود، نه تحقیقی که برای معلمان یا در مورد معلمان و کلاس درس ایشان و توسط محققان بیرونی (خارج از کلاس درس) باشد» ([۵]ـ ص ۱۱۳).

«تحقیق عمل» آموزشی

گال و بورک و گال (ترجمه شده در ۱۳۸۶)، تحقیق عمل را به‌طور کلی چنین معرفی می‌کنند: «شکلی از پژوهش‌های کاربردی است که هدف اصلی آن، بهبود عملکرد حرفه‌ای محقق می‌باشد» ([۳]، ص ۱۲۷۰).

گویا (۱۳۸۳) نیز در [۴] نقل می‌کند که «تحقیق عمل آموزشی، نوعی روش تحقیق است که موضوع اصلی آن نفس عمل تدریس و محقق آن، معمولاً معلم شاغل به تدریس می‌باشد. معلمانی که در این نوع تحقیق شرکت می‌کنند، اغلب بر تغییرات عمل خود نظارت دارند و با بازتاب در عمل، هم عمل تدریس را به نظریه می‌کشند و هم نظریه‌های عمل یا دانش کاربردی خود را غنی‌تر می‌سازند» ([۴]، ص ۴۷).

در این تعریف، بر اهمیت نقش بازتاب[۱۹] در تحقیق عمل اشاره شده است که کمی بعد به این موضوع، بیش‌تر خواهیم پرداخت.

در [۴] رضایی (۱۳۸۳) بر این باور است که سابقه‌ی مفهوم تحقیق عمل، به آثار جان دیویی در دهه‌ی ۲۰ میلادی و کرت لوین در دهه‌ی ۴۰ میلادی باز می‌گردد. این واژه (Action Research) اولین‌بار توسط لوین در سال ۱۹۴۴ معرفی شد و در سال ۱۹۴۹، توسط استفن کُری، برای اولین‌بار در جامعه‌ی آموزشی مطرح شد ([۴]، ص ۶۸).

وی، بر تعاریف ارائه شده از تحقیق عمل، مروری دارد که برای آشنایی بیش‌تر با این روش تحقیق، به بررسی آن می‌پردازیم ([۴]، صص ۶۸ تا ۷۲):

بورلی (۱۹۹۳) در [۴]، اقدام‌پژوهی را پژوهشی آگاهانه، سنجیده و معطوف به راه‌حل تعریف می‌کند که به‌صورت فردی یا گروهی انجام می‌شود. بورلی (۱۹۹۳)، نظر جان الیوت را درباره‌ی اقدام‌پژوهی به این شرح بیان می‌کند: «اقدام‌پژوهی معلمان به مسائل عملی روزانه‌ای که ایشان تجربه کرده‌اند مربوط می‌شود، به جای این‌که به مسائل نظری تعیین شده از سوی پژوهشگران حرفه‌ای در یک رشته‌ی علمی ارتباط یابد.» کُری هم در همان منبع اقدام‌پژوهی را به‌عنوان فرآیندی تعریف کرد که از طریق آن، کارورزان آموزشی، اقدامات خود را مورد بررسی و پژوهش قرار می‌دهند تا مسائل عملی خویش را حل کنند. اقدام‌پژوهی، فعالیتی مبتنی بر تشریک مساعی و همکاری است که در آن کارورزان آموزشی با هم همکاری می‌کنند تا یکدیگر را در طراحی و انجام پژوهش در کلاس درس یاری رسانند.

کارسون و همکاران (۱۹۸۹) نیز در [۴] اقدام‌پژوهی را ترکیبی از عمل و پژوهش و تلاش برای شناخت اقدامات تربیتی به منظور اصلاح و بهبود محیط آموزشی تعریف می‌کنند و بر این نکته تأکید دارند که بیشتر کسانی که در یک پروژه‌ی اقدام‌پژوهی مشارکت داشته‌اند، از نقش و جایگاه تجربه سخن می‌گویند.

مسترز (۲۰۰۰)، اقدام‌پژوهی را پژوهشی نظام‌دار، گروهی، مبتنی بر همکاری، خود اندیشیده و انتقادی می‌داند که توسط شرکت کنندگان در این پژوهش انجام می‌شود [۴].

برایان (۱۹۹۶ ,[۴])، اقدام‌پژوهی را صورتی از تحقیقات آموزشی می‌داند که

در آن محقق، کسی است که عمل آموزشی را انجام می‌دهد یا جریان تغییر را هدایت می‌کند.

گلانز (۱۹۹۹) در [۴] اقدام‌پژوهی را شکلی از پژوهش نظام‌یافته معرفی می‌کند که به‌عنوان روشی برای درگیر کردن کارگزاران، معلمان و مدیران در شناخت بهتر اقداماتشان شکل گرفته و پدید آمده است.

مک نیف و همکاران (ترجمه‌ی آهنچیان ۱۳۸۲ ,[۴]) می‌گویند: «اقدام‌پژوهی نوعی پژوهش کارور است که می‌تواند به شما کمک کند تا در هر جایی که مشغول به کار هستید، وظایف شغلی خود را به نحو بهتری انجام دهید. به زبان ساده، پژوهش کارور بدین معناست که پژوهش توسط خود افراد و ضمن کارشان صورت می‌گیرد.»

کلمنتس والرتون (۱۹۹۶)، تحقیق عمل را رویکردی «جدید» معرفی می‌کنند که بر این فرض استوار است که اگر خود معلمان کاملاً به‌عنوان مشارکت‌کنندگان داوطلب در پروژه‌های تحقیقی آموزشی در نظر گرفته شوند، آن‌گاه یافته‌های تحقیقاتی به احتمال بسیار زیاد به عمل [تدریس] پیوند می‌خورند ([۵]، صص ۱۱۳ـ۱۱۴).

ضرورت تحقیق عمل در فرآیند یاددهی ـ یادگیری

مهم‌ترین ضرورت مطرح شدن تحقیق عمل در تحقیقات آموزشی، همان‌گونه که اشاره شد، انتقادهای وارد بر تحقیقات کلاسیک و در واقع ضرورت تاریخی وجود آن بود. ** از سوی دیگر به‌نظر می‌رسد «اقدام‌پژوهی، ابزاری مؤثر در رشد حرفه‌ای معلمان است» (رضایی، ۱۳۸۳ ,[۴]، صص ۸۶ تا ۸۹). لذا وجود آن برای توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان، ضرورت پیدا می‌کند.

در [۴]، کارسون و همکاران (۱۹۸۹) نیز دلایل چندی را برای توجیه درگیر شدن در پروژه‌ی تحقیق عمل برمی‌شمارند. این دلایل عبارتند از:

- تحقیق عمل با سؤالات و مسائل ما سروکار دارد نه مسائل و سؤالات شخص دیگر؛
- تحقیق عمل در لحظه‌ی حال و اکنون شروع می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان اجرای اقدام‌پژوهی را به سرعت آغاز کرد؛
- تحقیق عمل، بارها و بارها از این آزمون که از طریق آن مربیان می‌توانند شناخت بهتری از اقدامات آموزشی به‌دست آورده و آن‌ها را بهبود بخشند، موفق بیرون آمده است؛
- تحقیق عمل می‌تواند به تدریس بهتر و یادگیری مؤثرتر منجر شود؛
- تحقیق عمل می‌تواند به برقراری ارتباط‌های مفیدتر با همکاران کمک کند؛
- تحقیق عمل می‌تواند برخی از مرزهای سلسله مراتبی موجود را که بین مدیران و معلمان مدرسه جدایی ایجاد می‌کند از بین ببرد؛
- تحقیق عمل، مربیان و معلمان را با شیوه‌های دیگر بررسی و رویکرد نسبت به مسائل آموزشی و نیز با روش‌های جدید تأمل و توجه به اقدامات آموزشی آشنا و مجهز می‌سازد؛
- تحقیق عمل به مدیران و معلمان کمک می‌کند تا عاداتی را که کسب کرده‌اند، مورد بررسی و تجدیدنظر قرار دهند؛
- روی هم رفته می‌توان نتیجه گرفت که تحقیق عمل ابزاری در دست کارگزاران و دیگر افراد ذی‌نفع است که به آن‌ها کمک می‌کند تا نیازها را بشناسند، فرآیندهای رشد را ارزیابی کنند و نتایج تغییراتی را که تعریف، طراحی و اجرا کرده‌اند، ارزشیابی نمایند. (صص ۷۷، ۷۸).

شباهت و تفاوت تحقیق عمل با سایر اَشکال پژوهش

تحقیق عمل در مهم‌ترین خصیصه، یعنی استفاده از **روش علمی**، با سایر روش‌های تحقیق، وجه اشتراک دارد ([۴]، ص ۷۸). هم‌چنین، در تحقیق عمل، از داده‌های کمّی یا داده‌های کیفی یا از هر دو نوع داده استفاده می‌شود ([۳]، ص ۱۲۷۶).

رضایی (۱۳۸۳) به نقل از مک نیف و همکاران، وجود اشتراک تحقیق عمل با سایر تحقیقات را در ویژگی‌های زیر بیان می‌کند:

ـ به دانش جدید منجر و منتهی می‌شود؛

ـ شواهدی را برای پشتیبانی از این دانش تدارک می‌بیند؛

ـ فرآیند شکل‌گیری دانش جدید را آشکار می‌سازد؛

ـ دانش جدید را به دانش موجود پیوند می‌زند.

در خصوص تفاوت‌های تحقیق عمل با دیگر اَشکال تحقیق، باید به این نکته توجه کرد که تحقیق عمل، ذاتاً یک پژوهش چند روشی است ([۳]، ص ۱۲۷۶). هم‌چنین، محقق در تحقیق عمل، در جست‌وجوی راه‌حل برای یک مسئله‌ی خاص در یک موقعیت خاص است و این، مهم‌ترین تفاوت تحقیق عمل با سایر پژوهش‌های علمی است. «به‌عبارت دیگر، اقدام‌پژوهی کاملاً وابسته به موقعیت[۲۰] است یعنی محقق، پس از تشخیص مشکلی در یک موقعیت خاص، تلاش می‌کند تا آن مشکل را در همان موقعیت حل کند. این یکی از وجوه تفاوت اقدام‌پژوهی با پژوهش کاربردی است» (رضایی، [۴]، ص ۸۱). بنابراین نتایج حاصل از تحقیق عمل، تعمیم‌پذیر نیست و نیز خواننده در استفاده از آن، نقش دارد (گال، مردیت، گال، [۳]، ص ۱۲۷۸). در واقع محقق در تحقیق عمل، برخلاف سایر پژوهش‌های کاربردی، در پی یافتن نتایج و یافته‌هایی نیست که به موقعیت‌های مشابه، تعمیم‌پذیر باشند؛ بلکه روی یک مسئله‌ی ویژه در یک موقعیت خاص متمرکز می‌شود تا در ارتباط با آن موقعیت یا مقصود خاص، دانش دقیقی کسب کند (نقل به مضمون از رضایی، [۴]، صص ۸۱ و ۸۲).

برای مقایسه‌ی تحقیق عمل با دیگر پژوهش‌های علمی، به جدول پیوست (۳) این مقاله که از گال، بورگ و گال، ۱۳۸۶، ج ۲. ص ۱۲۷۲ گرفته شده است، مراجعه کنید.

بد نیست بدانیم که ساکی (۱۳۸۳)، به نقل از برین (۱۹۹۸)، ابراز می‌دارد که اقدام‌پژوهی با انواع نام‌ها شهرت دارد. پژوهش مشارکتی[۲۱]، بررسی گروهی[۲۲]، پژوهش رهایی‌بخش[۲۳]، یادگیری همراه با عمل[۲۴] و پژوهش در موقعیت[۲۵] از عناوین متعددی است که برای معرفی فعالیت اقدام‌پژوهی استفاده می‌شوند، اما همه‌ی آن‌ها مضمون مشترکی را دربرمی‌گیرند ([۴]، ص ۹۵).

واژه‌ی کارورز[۲۶] که در برخی متون با کارگزار یا کارور نیز معادل‌سازی شده است، به معنی کلیه‌ی افراد درگیر در تحقیق عمل است که با عمل مورد بررسی، ارتباط واقعی و عملی دارند.

هم‌چنین نویدی (۱۳۸۳)، ابراز می‌دارد که اَشکالی از تحقیق با عناوین «تحقیق مشارکتی[۲۷]»، «تحقیق تجربی و عمل‌گرا[۲۸]» که در طول تاریخ توسعه‌ی علمی، توسعه‌یافته‌اند، همگی رویکردهای مختلفی هستند که به خانواده‌ی تحقیق عمل تعلق دارند ([۴]، ص ۱۷۶).

کارورزان در تحقیق عمل، پژوهش را خود طراحی و اجرا می‌کنند. برخلاف پژوهش‌های مرسوم دانشگاهی که هدفشان یافتن روابط بین پدیده‌ها یا متغیرهاست، این نوع تحقیق با هدف بررسی موضوع‌هایی است که فرد یا افراد در محیط کار خود

در خصوص شغلشان با آن درگیر هستند و می‌خواهند از راه پژوهش، آن را حل کرده یا کاهش دهند؛ یعنی وضعیت موجود را تغییر دهند.

در شماره‌ی آینده‌ی این مجله و قسمت بعدی مقاله، با تحقیق عمل بیشتر آشنا خواهیم شد.

پیوست (۱)، مراحل تحقیق علمی

- بیان مسئله؛
- بیان فرضیه؛
- تعیین هدف پژوهش؛
- تعیین اهمیت پژوهش؛
- تعریف عملیاتی واژه‌ها؛
- بررسی پیشینه‌ی پژوهش؛
- روش اجرای پژوهش (نمونه‌گیری، طرح پژوهش، شیوه‌های سنجش)؛
- تجزیه و تحلیل داده‌های پژوهش؛
- نتیجه‌گیری؛
- بیان محدودیت‌ها و پیشنهادهایی در رابطه با پژوهش.

پیوست (۲)، تاریخچه‌ی مختصری از تحقیق عمل

در سال ۱۹۴۴، لوین برای مسائل اجتماعی و جنگ، این روش تحقیق را وضع کرد. هدف وی، بهبود اوضاع و شرایط از طریق بررسی اعمال انجام شده و به دنبال آن تصمیم‌گیری‌های مناسب بود. واضع واژه‌ی Action Research نیز خود لوین است.

در دهه‌ی ۵۰ تا ۷۰ میلادی، این نوع تحقیق عملاً کنار گذاشته شد و روش‌های علمی در انواع پژوهش‌ها در حوزه‌های مختلف علوم، مطرح شدند. پس از موفقیت شوروی سابق در پرتاب ماهواره‌ی اسپوتنیک به فضا در سال ۱۹۵۷ میلادی، و سایر موفقیت‌های فضایی این کشور، و نیز پس از شکست‌های آموزشی آمریکا در دهه‌ی ۷۰ میلادی، عدم کفایت تحقیقات کمّی صرف در تحقیقات آموزشی محرز شد و تحقیق عمل مجدداً اهمیت یافت. هم‌چنین جدایی بین نظریه و عمل، نیاز به تحقیقات متکی بر توسعه‌ی حرفه‌ای و علاقه به برنامه‌ی درسی کاربردی، از دیگر علل ظهور و پیدایش مجدد روش‌های تحقیق کیفی، به‌ویژه تحقیق عمل در آموزش می‌باشد(گویا [۴]، ص ؟).

در سال ۱۹۸۱ میلادی، در کنفرانسی در کشور استرالیا، تحقیق عمل رسماً معرفی شد و در حال حاضر استرالیا، پیش‌تاز این نوع تحقیق در دنیا می‌باشد. مطالعه‌ی ادبیات مربوط به تحقیق عمل این استنباط را به ما می‌دهد که این رویکرد، نوعی پاسخ خردمندانه به نیازهای علمی و اجتماعی انسان است که در بستر زمان به تدریج شکل گرفته و در عصر حاضر پدیدار شده است. علاوه بر عوامل فوق که برشمردیم، فلسفه‌ی عمل‌گرا (Pragmatism)، نظریه‌ی انتقادی (Critical Theory)، نظریه‌ی ساخت و سازگرایی (Constructivism)، روان‌شناسی انسان‌گرا (Humanistic) و روان‌شناسی سلامت (Health)، تفکر سیستم‌ها و معرفت‌شناسی ارسطویی و نیز نهضت فمینیسم و بعضی گروه‌های اقلیت، شرایط مناسب را برای ظهور و توسعه‌ی اقدام‌پژوهی فراهم ساختند.

پیوست ۳. جدول مقایسه‌ی تحقیق عمل با سایر پژوهش‌های علمی

عنوان	پژوهش رسمی	تحقیق عمل
آموزش مورد نیاز	آموزش مفصل	به تنهایی یا با کمک مشاور
اهداف مسئله	تولید دانش تعمیم‌پذیر	تولید دانش کاربردی در موقعیت خاص
شیوه‌ی بیان مسئله	مرور پژوهش‌های پیشین	مسائل یا اهدافی که اخیراً پیش آمده است
شیوه‌ی بررسی پیشینه	مفصل، با استفاده از منابع دست اول	موجز، با استفاده از منابع دست دوم
رویکرد نمونه‌گیری	نمونه‌گیری تصادفی یا خوشه‌ای	دانش‌آموزان یا مراجعانی که با آن‌ها کار می‌کنند
طرح پژوهش	کنترل شدید، چهارچوب زمانی طولانی	رویه‌های انعطاف‌پذیر، تغییر در خلال مطالعه، چهارچوب زمانی کوتاه و کنترل از طریق مثلث‌سازی
شیوه‌های سنجش	ابزارهای پیش آزمون و ارزشیابی	ابزارهای متداول یا آزمون‌های میزان شده
تجزیه و تحلیل داده‌ها	آزمون‌های آماری، تکنیک‌های کیفی	تأکید بر معنی‌داری عملی نه آماری، ارائه داده‌های خام و نمودارها
کاربرد نتایج	تأکید بر معناداری نظری، افزایش دانش درباره‌ی تدریس و یادگیری به‌طور عام	تأکید بر معناداری عملی، بهبود تدریس و یادگیری در یک کلاس خاص
گزارش نتایج	چاپ گزارش تحقیق، ارائه به مجلات علمی یا همایش‌ها	ارائه‌ی غیررسمی به همکاران، ارائه‌ی خلاص‌یه گزارش

پی‌نوشت

* مراحل تحقیق را در پیوست (۱) این مقاله مطالعه کنید.

** تاریخچه‌ی مختصری از تحقیق عمل را در پیوست (۲) این مقاله مطالعه کنید.

1. Action Research
2. Description
3. Prediction
4. Improvement
5. Explanation
6. Basic
7. Applied
8. Quantitative
9. Qualitative
10. Positivism

۱۱. افلاطون‌گرایان در فلسفه‌ی ریاضی، مانند اثبات‌گرایان در علم می‌اندیشند.

12. Hermeneotic
13. Naturalistic
14. Post Postivism
15. Critical Theory
16. Interpretive
17. Case Study
18. Ethnographic
19. Reflection
20. Situational

منابع

[۱] دلاور، علی. (۱۳۸۰). **مبانی نظری و عملی پژوهش در علوم انسانی و اجتماعی**، انتشارات رشد.

[۲] گال، مردیت؛ بورگ، والتر؛ گال، جویس. (۱۳۸۴). **روش‌های تحقیق کمی و کیفی در علوم تربیتی و روان‌شناسی** (جلد اول)، ترجمه‌ی گروه مترجمان (به اهتمام دکتر احمدرضا نصر)، مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی و سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت)

[۳] گال، مردیت؛ بورگ، والتر؛ گال، جویس (۱۳۸۶). **روش‌های تحقیق کمی و کیفی در علوم تربیتی و روان‌شناسی** (جلد دوم)، ترجمه‌ی گروه مترجمان (به اهتمام دکتر احمدرضا نصر)، مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت)

[۴] گروه نویسندگان (۱۳۸۳) (برنامه‌ریزی، تدوین و تولید رضا ساکی). **اقدام‌پژوهی: راهبردی برای بهبود آموزش و تدریس (اصول، نظریه‌ها و چارچوب عملی)**، چاپ سوم، انتشارات پژوهشکده‌ی تعلیم‌وتربیت، وزارت آموزش‌وپرورش.

[5] Clements, K; Elerton, N. (1996). **Mathematics Education, Past, Present, Future**, UNESCO.

میزگرد

اعضای هیئت تحریریه ی مجله ی رشد آموزش ریاضی
به مناسبت انتشار صدمین شماره ی مجله

اشاره

با نزدیک شدن به انتشار صدمین شماره ی مجله ی رشد آموزش ریاضی، بر آن شدیم تا به این مناسبت، نشستی با همه ی اعضای تحریریه ی مجله داشته باشیم و نظرات آن‌ها را بشنویم. آن‌چه می‌خوانید، صحبت‌های ایشان در میزگردی است که در تاریخ ۲۷ آبان ۱۳۸۸ برگزار شد.

خانم دکتر زهرا گویا: خانم چمن‌آرا پیشنهاد دادند که برای صدمین شماره ی مجله که تابستان ۸۹ منتشر می‌شود، یک میزگرد دوستانه با اعضای هیئت تحریریه داشته باشیم. با پذیرش این پیشنهاد، موضوع خاصی برای این میزگرد ـ مانند میزگرد اثبات یا میزگرد حل مسئله مشخص نکردیم. ولی مسئله این بود که به هر حال، این مجله به این دلیل تأسیس شده بود که در خدمت آموزش ریاضی باشد و در این مسیر، فراز و فرودهای زیادی از سال ۶۳ تا به الان داشته است. اما مهم این است که خوشبختانه، با تمام این فراز و فرودها، هیچ شماره‌اش از دست نرفته است. یعنی حتی یادم هست که گاهی وقت‌ها، از همان شماره‌های اول اگر اوضاع از نظر تولید و اجرا، بحرانی می‌شد، حتی گاهی دو شماره ی مجله در یک شماره درمی‌آمد اما منظم منتشر می‌شد. به هر حال، صدمین شماره را تقسیم بر چهار بکنید، نشانه ی تعداد سال‌هایی است که این مجله در خدمت آموزش ریاضی ایران بوده است. مشابه این مجله قبل از انقلاب، مجله‌های پیک‌های دانش‌آموزی،

پیک معلمان و ماهنامه‌ی آموزش و پرورش بود که به شکل‌های مختلف به معلمان خدمات ارائه داده‌اند. ولی بعد از این، توقفی داشتیم تا سال ۶۳ که اولین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی منتشر شد. همه فکر کردیم که برای این صدمین شماره‌ی مجله، به هر حال باید کاری بکنیم و جشن سده‌اش را بگیریم. آقای رضائی گفتند که صددرصد! بعد فکر کردم دیدم تفسیر قشنگی است! صد در صد! واقعاً صد در صد چی؟ چی کار کردیم که استحقاق طرح صددرصد را داشته باشیم! فکر کردم که با توجه به پیشنهادی هم که خانم چمن‌آرا دادند، لطف کنید تا با هم، مروری داشته باشیم بر صد شماره‌ی مجله. به اصطلاح بلند فکر کنیم راجع به اتفاقاتی که در این مدت رخ داده و این که مجله چه تأثیری در آموزش قبل و ضمن خدمت معلمان داشته، هم‌چنان که در ایجاد هویت برای رشته‌ای به نام **آموزش ریاضی** و کمک به تربیت نسل جدیدی از معلمانی که در ضمن، آموزشگر ریاضی هم هستند ایفای نقش کرده است. به هر حال، اگر صد شماره‌ی مجله را مروری بکنیم ـ مانند کاری که برای بیستمین سال تأسیس مجله، از شماره‌ی ۱ تا شماره‌ی ۷۶ را مرور کردیم ـ به نکته‌ی جالبی برمی‌خوریم که در ۷۶ شماره‌ی اول این مجله ندیده بودیم و آن نکته این بود که مخاطبان ما خیلی متنوع‌تر شده‌اند ـ اگرچه متأسفانه تهران هم‌چنان بی‌مخاطب است، زیرا به دلایلی که موضوع بحث الان ما نیست، در تهران توجه چندانی به مجله نشده است. با این وجود، از شهرستان‌هایی نامه گرفته‌ایم که واقعاً نام آن را صرفاً از روی همین مکاتبات شناختم. هم‌چنین، از تمام نقاط کشور، معلمان زیادی با ما همکاری کرده‌اند که برایمان قابل احترام‌اند و واقعاً ممنون همه‌ی آن‌ها هستیم. شمارگان مجله از سه هزارتا به بیست هزارتا رسیده که این، نشان‌دهنده‌ی افزایش چشم‌گیر مخاطبان آن است. به هر حال من فکر می‌کنم احساس مسئولیت کردن در مقابل بیست هزار نفر ـ اگر هر خریدار مجله فقط خودش مجله را مطالعه کند ـ حداقل بیست هزار نفر از نوشته‌های ما تأثیر می‌پذیرند. من خواهشم این است که وقتی بگذاریم و بیاندیشیم که چه کار بکنیم تا این بیست هزار نفر مخاطب ما، از مجله استفاده‌های بهینه کنند و به تدریج، جزو همکارانمان درآیند یعنی تعداد همکاران را بیشتر بکنیم. یادم هست که وقتی می‌خواستیم درخواست ارتقای رتبه‌ی مجله را به علمی ترویجی و حتی علمی ـ پژوهشی بکنیم (چون قابلیت علمی پژوهشی شدن را داشت) تا آستانه‌ی آن هم پیش می‌رفتیم و قاعده‌ها و شرایط این ارتقا را رعایت می‌کردیم، مانند ترکیب مقالات، درصد مقاله‌های پژوهشی و نسبت آن با مقالات ترجمه‌ای و نظایر آن، آقای دکتر رجبعلی‌پور در آن شماره که مخصوص بیستمین سال انتشار مجله درآوردیم گفتند که اگر این کار را بکنیم عملاً مجله، مجله‌ی دانشگاهی می‌شود و چون امتیاز دارد، دانشگاهی‌ها علاقه‌مندی بیشتری نشان می‌دهند. در کل عرض کردم و خطر بالقوه‌اش این است که تمام یا بخش عمده‌ای

تعمیم و تخصیص، از اولین شرط‌های یک کار علمی است یعنی اگر در یک مجله، بخواهیم راجع به عالم و آدم صحبت کنیم و تمام مسائل آموزشی را حل کنیم، امکان‌پذیر نیست. این مجله قرار بوده که در خدمت آموزش ریاضی باشد، پس باید رسالتش، ترویج و توسعه‌ی آموزش ریاضی در ایران باشد

از مخاطب معلم را از دست بدهیم و ما فکر کردیم که واقعاً این یک هشدار جدی است و این هشدار را جدی گرفتیم و اصلاً بی‌خیال آن شدیم که مجله هر رتبه‌ای می‌خواهد داشته باشد. مهم این است که بخشی از تاریخ آموزش ریاضی ایران شده. هم‌چنان که مثلاً فرض کنید ماهنامه‌های آموزش و پرورش همیشه بخشی از آموزش و پرورش نوین ایران هستند، حالا رتبه‌اش هرچه می‌خواسته باشد یا امتیازاتش هرچه که می‌خواسته باشد. عذرخواهی می‌کنم از این مقدمه‌ی شاید بی‌نظمی که خدمتتان گفتم، ولی چیزی بود که دلم می‌خواست مطرح کنم و امیدوارم کمکم کنید تا یک هم‌اندیشی با هم داشته باشیم و نتیجه‌ی آن را در قالب این میزگرد، در اختیار مخاطبان خود قرار دهیم.

آقای میرزا جلیلی: عرض کنم من در این زمینه مقاله‌ای نوشتم و جمع‌بندی کردم. در آن مقاله، ممکن است مطالبی از قلم افتاده باشد یا چیزی که لازم نیست، گفته شده باشد. از این جهت با دقت این مقاله را مرور کردم که اگر صلاح بدانید با عنوان انتخابی «از میلاد تا میلاد» یعنی از «بهار ۶۳ تا تابستان ۸۹» به چاپ برسانید. اما لازم می‌دانم بگویم که مشابه مجلات رشد، از سال

۱۳۴۵ در سازمان کتاب‌های درسی، مجلات غیرتخصصی تحت عنوان **پیک دانش‌آموز**، **پیک معلم** و بعد **پیک راهنمایی** منتشر می‌شد و مستقیماً، هم‌چون کتب درسی ابتدایی، در مدارس توزیع می‌شد. بعد از انقلاب این مجلات با عنوان‌های جدید **رشد دانش‌آموز و رشد معلم**، با آرایش و گام‌های نو، کار خود را آغاز کردند که مورد استقبال مدارس قرار گرفت و هنوز هم توزیع این مجلات در مدارس انجام می‌گیرد. لازم به یادآوری است که تنها مجله‌ی اختصاصی ریاضی قبل از انقلاب مجله‌ی «**یکان**» بود که با هزینه‌ی شخصی و مسئولیت آقای دکتر عبدالحسین مصحفی و مدیریت داخلی همسر ایشان که رئیس مرکز تربیت معلم دختران بود، منتشر می‌شد. در آن مجله، مسائل و مطالب مختلف مورد بحث و تجزیه و تحلیل قرار می‌گرفت، از جمله مسائل کنکور؛ و مخاطبان مجله دبیران و دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی بودند. متأسفانه این مجله در سال ۵۶ با مشکلات مالی مواجه شد و در آستانه‌ی تعطیلی قرار گرفت.

بعد از انقلاب، برای بررسی مسئله‌ی افت تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی، شورای افت مرکب از استادان و دبیران ریاضی، رؤسای مدارس و اعضای گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف در این دفتر تشکیل شد. این شورا بعد از یک سال یا بیشتر جلسات هفتگی خود، به این جمع‌بندی رسید که لازم است یک مجله‌ی ریاضی از طریق گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی انتشار یابد.

شروع انتشار مجله هم‌زمان با تألیف جدید کتب ابتدایی و راهنمایی بود و این فرصت مناسبی بود که تغییرات کتاب‌ها یا موارد حذف شده یا جابه‌جا شده، از طریق مجله به اطلاع معلمان و دانش‌آموزان رسانده شود.

خانم دکتر سهیلا غلام‌آزاد: من البته از آقای جلیلی که با حضور ذهن کامل و به تمام نکات ریز اشاره کردند، تشکر می‌کنم. ولی نکته‌ای که خیلی به چشم می‌آید این است که در این چند سال اخیر، افراد زیادی با مجله همکاری داشتند و مقاله‌ها، جنبه‌ی آموزشی زیادی داشته است. مقالاتی که در دوازده سال اخیر در مجله چاپ شده سعی کرده جهت‌گیری آموزشی مجله را برجسته‌تر کند. الان که به‌عنوان یک معلم در دانشگاه‌ها دروس رشته‌ی آموزش ریاضی را تدریس می‌کنم می‌بینم که چه‌قدر مقالات مجله‌ی رشد می‌تواند به‌عنوان مواد آموزشی مورد استفاده‌ی دانشجویان قرار گیرد. هم‌چنین در کنفرانس‌های آموزش ریاضی می‌بینم اغلب ارجاع‌های مقالات به مقالات مجلات رشد آموزش ریاضی هست و همین طور مثلاً در پایان‌نامه‌های این رشته، کمتر پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی هست که جایی به یکی از مقالات این مجله ارجاع نداده باشد. به همین خاطر، من می‌خواستم اگر موافق باشید، پیشنهادی بکنم خدمت شما. با توجه به این‌که به هر حال ما منابع آموزشی که خصوصاً در رشته‌ی آموزش ریاضی به زبان فارسی به صورت کتاب یا مجموعه مقالات باشد نداریم، اگر موافق باشید تعدادی از مقالات مجله را که مخاطب بیشتری را داشته یا بیشتر مورد ارجاع بوده را دست‌چین کنیم و بعد از ویرایش جدید، به صورت یک یا چند کتاب چاپ کنیم. به هر حال، مقالات ترجمه‌ای مجله، عمدتاً مقالات کلاسیکی بودند که ترجمه شده‌اند یا به این شکل گردآوری شده‌اند. اگر موافق باشید که چنین کاری انجام شود، فکر می‌کنم که خدمت بزرگی خواهد بود به رشته‌ی آموزش ریاضی که منبع خوبی در اختیار دانشجوها قرار بگیرد. من ایده‌ی این پیشنهاد را از کتاب کلاسیکس گرفتم. این کتاب مجموعه‌ای از مقالات کلاسیک در آموزش ریاضی است که توسط شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) در سال ۲۰۰۴ به چاپ رسیده است.

شروع انتشار مجله همزمان با تألیف جدید کتب ابتدایی و راهنمایی بود و این فرصت مناسبی بود که تغییرات کتاب‌ها یا موارد حذف شده یا جابه‌جا شده، از طریق مجله به اطلاع معلمان و دانش‌آموزان رسانده شود

گویا: چگونه این اطلاعات جمع‌آوری شد؟

غلام‌آزاد: فکر می‌کنم این شورا، با ۵۰ نفر از کسانی که در واقع آموزشگران سرشناس ریاضی بودند مکاتبه کردند و از آن‌ها خواستند که مقالاتی را که به نظرشان، مقالات کلاسیک در رشته‌ی آموزش ریاضی است و چاپ شده‌اند را معرفی کنند ـ چه در مجلات چه در کتاب‌ها یا بخشی از کتاب‌ها، یعنی به هر شکلی که مقاله در جایی چاپ شده است. این افراد، مقالات را معرفی کردند و هر کسی با توجه به تجربه‌ای که داشت، مقاله‌ای را که احساس می‌کرده در این رشته مقاله‌ی کلاسیک است، معرفی کرد. بعد عده‌ای هم آمدند و این‌ها را داوری کردند. در نتیجه، مقالاتی که بیشترین آراء را به دست آوردند، انتخاب شدند و به صورت یک مُجلد، چاپ شدند. این مقاله‌ها را که آدم مرور می‌کند، واقعاً احساس می‌کند که یک منبع درسی قوی است که در آن، هم زمینه‌های مختلف تحقیقاتی مطرح شده هم سیر تحولی زمینه‌ها و روش‌های تحقیق بیان شده است. مثلاً از سال فرضاً ۱۹۶۰ در رشته‌ی ریاضی چه تحقیقاتی مطرح بوده و تا الان، به چه شکلی تغییر و تحول پیدا کرده است. کلاسیکس مجموعه‌ی قوی و خوبی

است. من فکر می‌کنم با توجه به شرایطی که الان رشته‌ی آموزش ریاضی در ایران دارد، اغلب دانشجوهای این رشته مشکلی که دارند این است که نمی‌توانند مقاله‌ها را خودشان شخصاً پیدا کنند. اگر ما چنین کاری را انجام بدهیم و تعدادی از مقاله‌های چاپ شده در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی را با توجه به محتوای آن‌ها برحسب ترجمه یا تألیف انتخاب کنیم ـ می‌شود روی چگونگی این انتخاب فکر کرد که با چه سازوکاری این کار انجام شود ـ بعد هم عده‌ای مسئولیت ویرایش مجدد آن‌ها را عهده‌دار بشوند، فکر می‌کنم کتاب خیلی مناسبی تهیه شود. تأکید می‌کنم ویرایش مجدد زیرا شاید مقاله‌ای که خودم ۱۵ سال پیش ترجمه کردم را بخواهم الان دوباره انجام‌اش بدهم، با گذشته فرق کند و روان‌تر شود. لازم است واژه‌ها و معادل‌ها را هم‌سان کنیم و واژه‌هایی را که به هر حال در مقالات از آن‌ها استفاده می‌شود به صورت واژه‌نامه درآوریم. چنین کتابی می‌تواند خدمت با ارزشی حداقل به رشته‌ی آموزش ریاضی و آموزش معلمان ریاضی بکند.

آقای دکتر محمدرضا فدایی: ضمن تشکر از این که این جلسه را ترتیب دادید فرمودند که این مجله در خدمت آموزش ریاضی بوده، باشد و باید باشد که در واقع، هدف اصلی ایجاد این مجله همین بوده است. من این را در ذهن خودم چنین تعبیر می‌کنم که مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، باید محور وحدت و یگانگی در آموزش ریاضی در جهت ارتقاء و ترویج آموزش ریاضی به عنوان یک دانش مورد نیاز ملی قرار بگیرد. حالا این محور قرار گرفتن از چند جهت می‌تواند برای جایگاه علمی کشور یک یاری‌رسان باشد. در رابطه با دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، همان‌طور که خانم دکتر هم اشاره کردند، از دو جهت کلی می‌توانیم به این مجله نگاه بکنیم و خدمات آن را ارزیابی کنیم؛ یکی به عنوان منبع بسیار خوبی برای رشته‌ی آموزش ریاضی که به آن اشاره کردیم و دیگری این که جایگاه خوبی برای ایجاد ارتباط بین دانشجویان دوره‌ی کارشناسی ارشد است؛ جایگاهی که در واقع، آن‌ها می‌توانند نقطه نظرات خودشان را ارائه کنند و تحقیقاتی را که انجام داده‌اند، در جامعه مطرح کنند تا سایر آموزشگران ریاضی از آن‌ها استفاده کنند و اصل روابط، از این طریق شکل می‌گیرد. هم‌چنین، از این که گفتم مجله محور وحدت قرار بگیرد، این است که در خدمت توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان ریاضی است. این هم از دو جهت قابل بررسی است؛ یکی این که اگر مطالعات فردی معلمان ریاضی را در نظر بگیریم، دو نکته‌ی حائز اهمیت در آن‌ها می‌بینیم که یکی افزایش دانش حرفه‌ای معلمان از طریق مطالعه‌ی مقالات این مجله است و دیگر این که به معلمان کمک می‌کند تا بتوانند مسیر تدریسی خود را انتخاب کنند و برای این کار، منبع بسیار خوبی است. با این وجود نمی‌دانم که آیا مجله، مورد استفاده‌ی کارشناسان و برنامه‌ریزان آموزش ریاضی هست؟ چقدر این مجله توانسته است که نقاط قوت و نقاط ضعف را در حوزه‌ی آموزش ریاضی مطرح بکند و هشدارها و راهکارهای مناسب ارایه دهد؟

امیدوارم برای انتشار یک مجله زحماتی که کشیده می‌شود، بیشتر مورد توجه نظام برنامه‌ریزی آموزشی کشور قرار بگیرد.

خانم سپیده چمن‌آرا: می‌خواستم در واقع، مروری کنم بر تجربه‌ی خودم در زمینه‌ی آشنایی با این مجله و بعد آن‌چه که فکر می‌کنم تأثیرات این مجله در جامعه‌ی آموزشی ما باشد. من از زمستان سال ۸۰ افتخار همکاری با این نشریه را پیدا کردم. این سال، مصادف با زمانی شد که من دانشجوی اولین دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آموزش ریاضی شدم.

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، باید محور وحدت و یگانگی در آموزش ریاضی در جهت ارتقاء و ترویج آموزش ریاضی به عنوان یک دانش مورد نیاز ملی قرار بگیرد

از همان ترم اول که وارد دانشگاه شدم، مقاله‌ها و مطالب مجله را از یک سو به عنوان مدیر داخلی می‌خواندم که غلط نگارشی نداشته باشد و تصویر مناسب برای هر متن انتخاب کنم تا مجله آماده‌ی چاپ شود. از طرف دیگر به عنوان یک دانشجو مجله را می‌خواندم تا از آن‌ها، مطلب جدید یاد بگیرم و با این حوزه بیشتر آشنا بشوم و بیاموزم. همان‌طور که خانم دکتر غلام آزاد گفتند، واقعاً خیلی از مقاله‌های مجله که طی این سال‌ها چاپ شده، منابع خیلی خوبی برای بسیاری از پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد یا مقاله‌های توصیفی دیگری بوده که درخصوص آموزش ریاضی نوشته شده‌اند. این یک جنبه از اثرگذاری این مجله بر جامعه‌ی آموزشی بوده که به عنوان تأمین منابع، سعی کرده مطالب مناسب را جمع‌آوری کند و در اختیار معلمان ریاضی قرار دهد. اما به نظر من، بُعد دیگرش این است که مجله، محلی است برای این که معلمان ریاضی، تجربه‌های آموزشی خود را به ثبت برسانند. حالا این تجربه‌ها ممکن است تجربه‌ی آموزشی به معنی تجربه‌ی تدریس‌شان باشد؛ یعنی مجله یک وسیله‌ی ارتباطی برای تبادل تجربه بین معلمان ریاضی مختلف شده که در غالب روایت معلمان یا مقاله‌های توصیفیِ آموزشی، چاپ شده‌اند.

یک جنبه دیگر هم تجربه‌های آموزشی معلمان از جهت یاد

گرفتن و نوشتن هست؛ یعنی من از این جنبه هم به مجله توجه می‌کنم؛ برای این‌که می‌بینم در جلسات هیأت تحریریه، مقاله‌ها با دقت بررسی می‌شوند و توصیه‌هایی به نویسندگان یا مترجمان مقاله‌ها می‌شود که چه نکاتی را رعایت کنند تا مقاله‌های بهتری بنویسند. اگر مقاله‌ای برای مجله مناسب نبوده، همیشه سعی کرده‌ایم که با توصیه‌های مناسب و آن‌چه که فکر می‌کنیم مقاله را بهتر می‌کند و برای مخاطبش مفیدتر می‌شود، مقاله را به نویسنده برگردانیم که این کار، به افرادی که مایلند بنویسند کمک می‌کند. نوشتن کار سختی است، پس کسانی که علاقه‌مند هستند و وارد این حوزه شده‌اند و این جسارت را داشته‌اند، حداقل از این طریق به نوعی دارند آموزش می‌بینند و به تدریج، وارد جرگه‌ی افرادی می‌شوند که می‌نویسند و از این طریق، با دیگران ارتباط برقرار می‌کنند. من فکر می‌کنم همین جنبه هم یکی از جنبه‌های مهم مجله است که در زمینه‌ی آموزشی تأثیرگذار بوده است.

آقای دکتر مهدی رجبعلی‌پور: من از طرح خانم غلام آزاد استقبال می‌کنم و امیدوارم لطف کنند خودشان زحمتش را به عهده بگیرند. واقعاً تهیه‌ی چنین مجموعه‌ای یک مدیر می‌خواهد.

برای این کار، می‌توانیم مقالات پرارجاع مجله را در نظر بگیریم. هم‌چنین، پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد و احیاناً دکتری آموزش ریاضی را هم بگردیم ببینیم چقدر و به کدام مقالات مجله ارجاع داده می‌شود. این کار هم می‌تواند خیلی مفید باشد برای این‌که مستندات خوبی به دست می‌دهد.

آقای دکتر بیژن ظهوری زنگنه: جمع‌آوری مقالات به‌صورت کتاب واقعاً ایده‌ی خیلی خوبی است و چندین بار هم به شکل‌های مختلفی اقدام به این کار شده و مطالب مجله به صورت موضوعی تقسیم‌بندی شد، ولی به دلایلی به نتیجه نرسید. از جمله این که یک سؤال اساسی این بود که ناشر چنین مجموعه‌ای چه کسی خواهد بود؟

نکته‌ای که در مورد یکان بود و من فکر می‌کنم خیلی جالب است این بود که من وقتی که دانش‌آموز بودم، خیلی علاقه‌مند به یکان بود. یادم می‌آید روزی که یکان می‌آمد، یکی دو ساعت کنار روزنامه‌فروشی می‌ایستادیم تا یکان بیاید. ولی فکر می‌کنم دلیلی که از سال ۵۶، دیگر یکان درنیامد این بود که یکان، محور مسائلش براساس مسائل کنکورهای تشریحی پیچیده بود. یعنی فکر می‌کنم چیزی که برای دانش‌آموزان جذبه داشت، به تدریج از بین رفت.

تا قبل از سال ۵۶، مسائلی که در یکان می‌آمد، مسائل سختی بود که فراتر از کتاب‌های درسی بود و فقط بعضی وقت‌ها با مطالب کتاب‌های درسی حل می‌شد و بعضی مواقع هم مسائل یکان از منابع روسی ترجمه می‌شد. فکر می‌کنم سال ۴۷ اولین سالی بود که کنکور تستی جایگزین کنکور تشریحی شد و کم‌کم تبدیل به کنکور سراسری شد. تست زدن فرهنگ دیگری می‌خواست و در واقع، دانش‌آموزان و افرادی که می‌خواستند در کنکور موفق شوند، انگیزه‌ی خود را نسبت به یکان از دست دادند و پایان یافتن دوره‌ی یکان را رقم زدند.

گویا: عذر می‌خواهم، فکر می‌کنم بهترین کار این است که یک مصاحبه با خود آقای مُصَحفی بشود تا ببینیم خودشان در این مورد چه می‌گویند.

در این چند سال اخیر، افراد زیادی با مجله همکاری داشتند و مقاله‌ها، جنبه‌ی آموزشی زیادی داشته است. مقالاتی که در دوازده سال اخیر در مجله چاپ شده سعی کرده جهت‌گیری آموزشی مجله را برجسته‌تر کند

زنگنه: بله خیلی خوب است. به هر حال، من خودم جزو مشتاقان این مجله بودم و تمام شماره‌هایش را هم تا وقتی که در سال ۵۲ برای ادامه تحصیل به خارج از کشور رفتم، داشتم.

فدایی: دلیل این‌که الان مجله‌ی یکان با آموزش ریاضی مقایسه می‌شود این است که تصور می‌شد مخاطبانش یکی بودند. احتمالاً در جلسه‌ای که در مورد آموزش برهان ریاضی صحبت می‌شود بحث یکان خیلی پررنگ باشد. زیرا مخاطبانشان یکی هستند. اما اینجا که اصلاً به نظر نمی‌رسد وجه مشترک خیلی مشخص داشته باشند. زیرا رشد آموزِش ریاضی برای معلم‌های ریاضی و دانشجویان کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و برنامه‌ریزی‌های درسی ریاضی است و برهان برای دانش‌آموزان است.

زنگنه: وقتی که رشد شروع شد، در ذهن بسیاری این بود که این مجله، در ادامه‌ی یکان باشد. کم‌کم با گسترش رشته‌ی آموزش ریاضی، مجله بیشتر به سمت آموزش ریاضی که جایگاه طبیعی‌اش بود کشیده شد و برهان به نوعی، جانشین یکان شد ـ من اینجا توضیحی بدهم که یکان قبل از انقلاب، تنها مجله‌ای بود که برچسب ریاضی داشت. مثلاً وقتی که به گذشته نگاه می‌کنم، تنها چیزی که از مجله‌ی ریاضی در ذهنم می‌آمد یکان بود.

آقای دکتر اسماعیل بابلیان: آقای دکتر زنگنه مقداری از علت‌ها را گفتند. قبلاً، مجله‌های ریاضی خیلی کم بود و

کتاب و ترجمه هم اصلاً نبود. خود من آن موقع که دانش‌آموز بودم، واقعاً دنبال مسائل جدید بودیم که پیدا کنیم و حل کنیم. یکی از شگردهایی که یکان داشت این بود که این مسائل را از طریق دانش‌آموزان می‌گرفت و به اسم خودشان چاپ می‌کرد. یادم است خود من وقتی که دبیر بودم، یک مسئله فرستاده بودم که در مجله به اسم من چاپ شد. یعنی چند دسته بودند که این مجله را می‌خریدند؛ یک عده می‌خریدند که مسائل آن را حل کنند، معلم‌ها می‌خریدند که مسائل آن را زودتر از دانش‌آموزان حل کنند و فردا سر کلاس دست بسته نمانند. یک عده هم می‌خریدند ببینند مسئله‌ای که فرستاده‌اند چاپ شده یا نشده است و به این ترتیب، یکان رقابتی بین افراد ایجاد کرده بود.

دکتر مصحفی چون چندین سال را بدون حمایت دیگران گذرانده بود، فکر می‌کرد باز هم می‌تواند بدون کمک مالی ادامه دهد. شاید هم یکی از دلایل افول یکان همین آمدن کنکور تستی بود که باعث شد مجله، رونق خود را از دست دهد. اما در مورد مجله‌ی رشد آموزش ریاضی و این صددرصدی که آقای رضایی گفتند، من فکر می‌کنم مجله صددرصد در کنفرانس‌های آموزش ریاضی، دوره‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و حتی در نقد کتاب‌های درسی، تأثیر داشته است. ولی به گفته‌ی بسیاری از معلمان، ارتباط مجله با دانش‌آموزان صددرصد قطع شد. ما دیگر خود را به عنوان مخاطب دانش‌آموزان نمی‌بینیم و چندین سال بعد که خانم دکتر گویا آمدند و مجله مسیر خودش را پیدا کرد، باعث شد که مجله‌ی برهان به‌وجود بیاید تا خلاء یکان به نوعی پر شود. همان‌طور که اشاره شد، مجله‌ی آموزش ریاضی که از سال ۶۳ شروع شد، در ابتدا سعی کرد همان مسیر یکان را ادامه دهد؛ یعنی آقایان غیور و دارابی و نصیری همه معلمان ریاضی بودند که مسائل دبیرستانی را مرتب توی مجله‌ی رشد مطرح و حل می‌کردند.

گاهی از خوانندگان خواسته می‌شد که حل مسائل را بفرستند و دو سه شماره بعد هم حل آن‌ها نوشته می‌شد. گاهی اوقات هم اشاره می‌شد که این شخص، بهترین حل را فرستاده است. به هر جهت، فکر می‌کنم رسالت مجله‌ی ما این است که به آموزش ریاضی بپردازیم. من فکر می‌کنم چهار شماره‌ی مجله‌ی رشد در هر سال، در ارتقای نحوه‌ی نگارش مقالات توسط افرادی که در کنفرانس‌های آموزش ریاضی شرکت می‌کنند و مقاله می‌دهند، بسیار تأثیر داشته و امیدواریم که این تأثیر همین طور ادامه پیدا کند.

این را هم اضافه کنم که بعضی جاها که دوره‌ی کارشناسی ارشد گذاشتند، به پشتیبانی وجود همین مجله گذاشتند و مرتب اگر دانشجو از استادها سؤال کنند، می‌گویند مراجعه کن به مجله‌ی شماره فلان یا برو این مجله را زیر و رو کن که حتماً یک مطلب پیدا می‌کنی.

خانم دکتر شیوا زمانی: برای من که خیلی هم با آموزش ریاضی و دانش‌آموزان تماس ندارم، همین حضور در میان تحریریه‌ی رشد واقعاً فرصتی بود که از مطالبی که می‌شنوم استفاده کنم. نظرات بقیه برای من تجربه‌ی خوبی است. امیدوارم برای شروع صد شماره‌ی دوم بهتر از این بتوانیم کار کنیم.

نوشتن کار سختی است، پس کسانی که علاقه‌مند هستند و وارد این حوزه شده‌اند و این جسارت را داشته‌اند، حداقل از این طریق به نوعی دارند آموزش می‌بینند و به تدریج، وارد جرگه افرادی می‌شوند که می‌نویسند و از این طریق، با دیگران ارتباط برقرار می‌کنند. من فکر می‌کنم همین جنبه هم یکی از جنبه‌های مهم مجله است که در زمینه‌ی آموزشی تأثیرگذار بوده است

گویا: دقت خانم دکتر زمانی در داوری و اصلاح مقالات موضوعی و ترجمه‌ای بسیار باارزش و برای مجله حیاتی است.

آقای مانی رضائی: یک نکته‌ی مهم این است که سطح انتظاری که رشد آموزش ریاضی داریم، بیش از یک مجله است! واقعاً وقتی به یک مجله نگاه می‌کنیم، آن را مجموعه‌ای از مقالات و موضوع‌های مختلف علمی می‌بینیم. ولی الان، ما داریم هدایت دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی را به عهده‌ی این مجله می‌گذاریم. حتی فرض کنید از دل این مجله، می‌خواهیم مجموعه کتاب‌هایی به عنوان مرجع دربیاوریم. حتی از دل این مجله، انتظار داریم چیزهایی به عنوان پوشش دادن به نیازهای جامعه‌ی آموزشی و خیلی چیزهای دیگر بیرون آید، یعنی مجله دارد با صددرصد توانش کار می‌کند.

دکتر زنگنه نکته‌ای را در مورد کنکور و تأثیری که احتمالاً بر سرنوشت یکان گذاشته گفتند. در حال حاضر، مجله‌ی برهان نیازهای ریاضی جامعه‌ی مدرسه‌ای را تا حدی پوشش می‌دهد. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی هم واقعاً این تغییر موضع را داده است که در خدمت آموزش ریاضی باشد. من فکر می‌کنم الان کمی از این زاویه به مجله نگاه کنیم که حالا، خیلی از معلم‌های ما دست به قلم هستند، می‌نویسند و کار می‌کنند اما نیازمند نوعی فرهنگ‌سازی هستیم تا معلمان توانمند ما، بیشتر بنویسند. حالا چه جوری نمی‌دانم شاید مثلاً کمی سخت‌گیرانه‌تر مقاله

بپذیریم. بارها و بارها شاهد این موضوع بودیم که مطلبی فرستاده شده که از نسخه‌ی اولیه تا نسخه‌ای که چاپ شده، شاید نزدیک به ۱۸۰ درجه چرخیده است. این کار بدین صورت انجام شده که داور محترم مقاله، به دقت کار ویرایش علمی و تصحیح و توصیه را انجام داده است. سپس در تماس مکرر با نویسنده، گاهی مثل یک کلاس درس، چند بار مطلب ویرایش و بازنویسی شده، باز برگشته، باز رفته و دوباره برگشته است و در این رفت و برگشت‌ها، نوشته ارتقاء پیدا کرده است. امیدواریم که به تدریج، این فرهنگ ایجاد شود که نویسندگان محترم، تلاش کنند که مطالب ارسالی خود را به گونه‌ای ارتقا دهند که از داوری‌های جدی عبور کند و میزان رفت و برگشت و اصلاح و ویرایش، کاهش یابد. مهم این است که تلاشی که تا به حال شده، تأثیر خوبی بر جامعه‌ی آموزشی گذاشته و توانسته در جمع وسیعی از معلمان ریاضی، جسارت دست به قلم بردن و نوشتن مقاله‌های علمی را ایجاد کند. حتی می‌توان مجموعه‌ای در مورد چگونگی نوشتن و نگارش مقالات تهیه کرد و از طریق آن، آموزش منسجم‌تری برای چگونگی تحقیق و تألیف مقاله ایجاد شود.

زنگنه: من این نکته را بگویم که می‌توان سرمقاله‌های مجله را به صورت یک کتاب جداگانه منتشر کرد.

چاپ این سرمقاله‌ها می‌توانند خیلی مفید باشند زیرا شما می‌توانید سیر زمان را در آن‌ها ببینید و تغییر و تحولات اجتماعی ـ آموزشی را دنبال کنید.

جلیلی: ما الان شیوه‌ی برنامه‌ریزی کتاب‌هایمان طوری است که اگر سؤال کنید، ۵ درصد دبیران هم به حرف‌هایی که می‌زنیم توجه ندارند به علت این که در چارچوب خاصی باید حرکت کنند و امتحان‌های مکرر برگزار کنند. وقتی پای صحبت معلمان می‌نشینیم می‌گویند که ما تمام فشارمان روی برنامه و کتاب است که تمام شود. اگر بخواهم این نکاتی که در رشد آموزش ریاضی مطرح می‌شود در کلاس مطرح کنیم، شاید در طول سال $\frac{۱}{۲}$ کتاب را هم نتوانیم تدریس کنیم.

معلم چیزی می‌خواهد که کاربرد داشته باشد و در کلاس به دردش بخورد.

بابلیان: عرض کنم من در یک جمله جواب آقای جلیلی را بدهم. اگر معلم واقعاً بداند که دردش چیست، دوایش در این مجله هست، منتها چه دردهایی؟ اگر درد معلم این باشد که دنبال پاسخ سؤال‌هایی از این قبیل باشد که «چه کار کنم که دانش‌آموز انگیزه‌اش بیشتر شود» یا «چگونه درس بدهم که بازده کارم بالاتر برود و دانش‌آموزان بتوانند بهتر به سؤال‌ها پاسخ بدهند و نتیجه‌های بهتر بگیرند» و اگر دغدغه‌اش از این نوع باشد، جوابشان در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی هست. ولی این که فلان حد را چگونه حساب بکنید، الان تا بخواهید، کتاب‌های موضوعی هست که این نوع مسائل را حل کرده‌اند و معلمان می‌توانند پاسخ سؤال‌ها موضوعی خود را آن‌جا پیدا کنند.

> **وقتی که رشد شروع شد، در ذهن بسیاری این بود که این مجله، در ادامه‌ی یکان باشد. کم کم با گسترش رشته‌ی آموزش ریاضی، مجله بیشتر به سمت آموزش ریاضی که جایگاه طبیعی‌اش بود کشیده شد و برهان به نوعی، جانشین یکان شد.**

رجبعلی‌پور: من حرفی را که چند سال پیش زدم عوض می‌کنم! ببینید اگر واقعاً برهان و مجلات موضوعی ریاضی مشابه مانند فرنود و غیره هم هستند، آن وقت اشکال ندارد که حتی صدبار هم که لازم است تکرار بکنند که مثلاً پوشایی تابع یعنی چه؟ اینجکتیو یعنی چه؟ سوبجکتیو یعنی چه؟ زیرا معلم‌ها پیوسته در تدریس خود، به آن‌ها احتیاج دارند. در چنین حالتی، می‌توانیم کمک کنیم که این مجله به سمت یک مجله علمی ـ پژوهشی برود و اگر در این مسیر، تعدادی از مخاطبان قبلی خود را از دست بدهیم، بگذاریم بدهیم. این مشکل نیست زیرا در عوض، مخاطبان جدید پیدا می‌کنیم. من نگران دوستان یکانی بودم که برای جای خالی آن، چیزی نداشته باشند، اما حالا اگر مأوایی دارند که به آن تکیه کنند و خواسته‌های موضوعی آن‌ها برآورده شوند، خوب بگذارید ما مجله‌ی خودمان را به سمت مباحث علمی‌ـپژوهشی آموزش ریاضی ببریم.

گویا: اگر اجازه بدهید، از حضور فعال همه‌ی اعضای محترم هیأت تحریریه که کمک کردند و میزگردی که خیلی به آن فکر کرده بودیم و برایش هیچ ساختاری نداشتیم را به پیش ببرند، تشکر کنم. به نظر من، این میزگرد خود به خود ساختار پیدا کرد و جلو رفت و پیشنهادهای جالبی شد که به جمع‌بندی آن می‌پردازم: پیشنهاداتی که مطرح شد و اغلب مورد توافق جمع قرار گرفت، به قرار زیرند:

۱. انتشار مجموعه یا مجموعه‌هایی از مقالات پرارجاع مجله؛ ۲. انتشار مجموعه‌ای از سرمقاله‌ها؛ ۳. تلاش در جهت ارتقای توانایی‌های مخاطبان و معلمان ریاضی در ایران؛

۴. بازتاب نقاط قوت و ضعف آموزش ریاضی در ایران؛

۵. تشویق و ترغیب به انتشار مجله‌ها مناسب برای مخاطب‌های

گوناگون؛ ۶. تلاش برای ارتقای رتبه‌ی علمی ـ پژوهشی مجله.

یعنی فکر می‌کنم به جای این که همیشه، انتظار همه چیز را از یک مجله داشته باشیم، می‌توانیم مشوق و ترغیب کننده‌ی کسانی باشیم که بالقوه می‌توانند مجلات مختلف برای نیازهای گوناگون موضوعی و حرفه‌ای معلمان ریاضی منتشر کنند. مثلاً، ما می‌توانیم ماهنامه‌ی دانش‌آموزی دربیاوریم، ماهنامه‌ی تجربه‌های معلمان دربیاوریم، می‌توانیم مجله‌ای مربوط به روش‌های تدریس ریاضی دربیاوریم و می‌توانیم...! یعنی افراد توانمند را تشویق کنیم و منابع در اختیارشان بگذاریم تا مجله‌های متنوع دربیاورند.

من فکر کردم که کار دیگری که می‌توانیم انجام دهیم این است که اگر بتوانیم، صد نامی که با ما مکاتبه کرده‌اند و از دورترین نقاط ایران برای مجله مقاله فرستاده‌اند را از شماره‌های مختلف مجله استخراج کنیم. تلاش داریم که این کار را بکنیم و به نظرم کار قشنگی است. اما اگر بتوانیم! زیرا وقت زیادی می‌طلبد. نکته‌ی دیگری که می‌خواستم عرض کنم این است که تعمیم و تخصیص، از اولین شرط‌های یک کار علمی است یعنی اگر در یک مجله، بخواهم راجع به عالم و آدم صحبت کنیم و تمام مسائل آموزشی را حل کنیم، امکان‌پذیر نیست. این مجله قرار بوده که در خدمت آموزش ریاضی باشد، پس باید رسالتش، ترویج و توسعه‌ی آموزش ریاضی در ایران باشد. طبیعی است وقتی که دوره‌های تحصیلات تکمیلی در این رشته راه افتاده‌اند، از این طریق هم می‌شود به توسعه‌ی آموزش ریاضی کمک کرد و همان‌طور که دکتر رجبعلی‌پور فرمودند و بقیه همکاران نیز بر آن تأکید کردند، آموزش معلمان ریاضی از جمله هدف‌های اصلی مجله است. اتفاق مهمی که افتاده این است که معلمانی که معمولاً دست به قلم نبودند و نمی‌نوشتند. الان سالانه بین ۵۰۰ تا ۶۰۰ مقاله برای کنفرانس‌های آموزش ریاضی ارسال می‌کنند و این شهامت و جسارت را پیدا کرده‌اند که خودشان را در عرصه‌ی نقد و داوری قرار بدهند. من فکر می‌کنم این خود، گام بلندی در جهت آموزش معلمان ریاضی بوده است. ما برای معلمان عزیز ریاضی جایگاه والایی قائلیم و امیدواریم که از تجربیاتشان استفاده کنیم.

باز هم از همکاری اعضای محترم هیئت تحریریه در برگزاری این میزگرد و از پیشنهادهای ارزنده‌ای که دادند تشکر می‌کنم و امیدوارم که این توصیه‌ها، راهنمای عمل ما از شماره‌ی ۱۰۰ به بعد باشد.

یک نکته‌ی مهم این است که سطح انتظاری که رشد آموزش ریاضی داریم، بیش از یک مجله است! واقعاً وقتی به یک مجله نگاه می‌کنیم، آن را مجموعه‌ای از مقالات و موضوع‌های مختلف علمی می‌بینیم. ولی الان، ما داریم هدایت دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی را به عهده‌ی این مجله می‌گذاریم

چه می‌دانیم و چگونه می‌دانیم؟*

میشل آرتیگ، دانشگاه پاریس دیدرو- پاریس-۷
جرمی کیل پاتریک، دانشگاه جورجیا

ترجمه‌ی: **فاطمه اصل مرز (با همکاری علی رجالی)**
خانه‌ی ریاضیات اصفهان

درباره‌ی نویسندگان این مقاله: خانم پرفسور **میشل آرتیگ**[۱]، استاد بخش ریاضی «دانشگاه پاریس – ۷»[۲] و سرپرست مشترک برنامه‌ی فوق‌لیسانس آموزشی در آن دانشگاه و رئیس کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی[۳] است. بعد از دریافت درجه‌ی دکترا در منطق، او به تحقیقات در زمینه‌ی آموزش ریاضی در سطوح ابتدایی تا دانشگاه پرداخت. یاددهی و یادگیری ریاضیات با استفاده از فناوری‌های الکترونیکی، موضوع اصلی تحقیق ایشان در ۱۰ ساله‌ی اخیر است.

آقای پروفسور **جرمی کیل پاتریک**[۴] نیزاستاد آموزش ریاضی دانشگاه جورجیا[۵] در آمریکاست که قبلاً در کالج معلمان دانشگاه کلمبیا[۶] و قبل از آن در دبیرستانی در برکلی کالیفرنیا تدریس کرده است. جرمی لیسانس و فوق‌لیسانس خود را از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی[۷]، و دکترای خود را از دانشگاه استانفورد[۸] اخذ کرده و یک دکترای افتخاری نیز از دانشگاه گوتنبرگ[۹] سوئد دریافت نموده است.

او درس‌های زیادی را در دانشگاه‌های اروپا و آمریکای لاتین تدریس کرده و به دریافت جوایز فولبرایت[۱۰] برای کارهایش در نیوزیلند، اسپانیا، کلمبیا و سوئد نایل شده است. به علاوه عضو کمیسیون آموزش علوم و ریاضی آمریکا و دو دوره هم معاون کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی بوده است. دیگر فعالیت‌های او عبارت است از سردبیر سری مطالعات مسکو در زمینه‌ی روان‌شناسی یادگیری ـ یاددهی ریاضی، سردبیری مجله‌ی تحقیقات در آموزش ریاضی و سردبیر و عضو هیئت تحریریه‌ی مطالعات متعددی در زمینه‌های آموزش ریاضی. وی در یازدهمین کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی (۲۰۰۷) نیز به دریافت مدال فلیکس کلاین[۱۱] کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی نایل آمد.

متن زیر که با دریافت اجازه‌ی خاص برای ترجمه و انتشار در مجله‌ی فرنود آماده شده است، در اصل سخن‌رانی عمومی نخستین روز کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی یازدهم، است که توسط این دو استاد ایراد شد. این متن توسط خانم **اصل مرز** با همکاری این‌جانب ترجمه و توسط خانم دکتر **غلام‌آزاد** ویرایش شد.

علی رجالی

سمت راست: جرمی کیل پاتریک؛
سمت چپ: میشل آرتیگ

کمیته‌ی بین‌المللی برنامه‌ریزی یازدهمین کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME-11) پیشنهاد کرده بود که ما فعالیت‌های علمی این کنگره را با گفت‌وگو درباره‌ی مباحث مهم آموزش ریاضی، مانند مباحث زیر آغاز کنیم:

- در زمینه‌ی آموزش ریاضی، اکنون چه می‌دانیم که ۱۰ سال پیش نمی‌دانستیم و چگونه به آن دست یافته‌ایم؟
- چه نوع شواهد و مستنداتی قابل دست‌رسی است و در آموزش ریاضی بایستی در جست‌وجوی چه بود؟
- انتظارات اجتماعی از رشته‌ی ریاضی که زمینه‌ی کاری ماست چیست و ما خود را با این انتظارات چگونه تطبیق می‌دهیم؟
- دیدگاه‌های یاددهی ـ یادگیری ریاضیات و شواهد مربوط به آن تا چه حد می‌تواند از چندگونگی[۱۲] فرهنگی و محتوای آموزشی فراتر رود؟
- امروزه آموزش ریاضی با چه چالش‌های اساسی روبه‌روست؟

ما، در این سخن‌رانی مشترک، با ارائه‌ی نظرات خود نسبت به تحولات رشته‌ی ریاضی بررسی عوامل و نیروهای مؤثر در این زمینه و نتایج حاصل در طول ۱۰ الی ۱۵ سال اخیر، سعی کرده‌ایم چنین گفت‌وگویی را آغاز کنیم و نظرات خود را در رابطه با چالش‌های اساسی که امروزه با آن روبه‌رو هستیم و

چگونگی رویارویی و برخورد با آن‌ها مورد بحث قرار دهیم. مقاله‌ی حاضر برای گزارش در این کنگره نوشته شده است و بحث را از دو جنبه‌ی محتوایی و شکل ظاهری آن منعکس می‌کند.

توضیحات مقدماتی: ما چه می‌دانیم و چگونه به آن دست یافته‌ایم؟

سخنان میشل آرتیگ

همان‌گونه که هرکسی می‌تواند تصور کند، پاسخ دادن به این سؤال بسیار دشوار است. مشکلاتی که هنگام تلاش برای پاسخ‌گویی به این سؤال با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم، خود سرچشمه‌ی نگرشی نو برای درک رشته‌ی آموزش ریاضی و پویایی آن است و این‌که دانش در این زمینه چگونه پیشرفت می‌کند.

این سؤال می‌تواند بر اساس مفهومی که برای آموزش ریاضی منظور می‌شود و بر اساس موقعیت و تجربه‌ی شخصی فرد در این زمینه، از جنبه‌ها و موقعیت‌های متفاوتی مورد بررسی قرار گیرد. من شخصاً یک عضو هیئت علمی وابسته به بخش ریاضی هستم و به تدریس ریاضیات مشغولم. اولین زمینه‌ی پژوهشی من منطق بود، اما در حال حاضر زمینه‌ی پژوهش در تعلیم و تربیت ریاضیات را دنبال می‌کنم. تجربه‌ی پژوهشی من به طرز چشم‌گیری تحت تأثیر فرهنگ تعلیم و تربیت کشوری که در آن زندگی می‌کنم، یعنی فرانسه شکل گرفته است. شکی نیست که دیدگاه من در آموزش ریاضیات در دهه‌ی اخیر، به دلیل شرکت در جلسات تحت نظارت کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی (ICMI)، به طرزی قابل توجه تحت تأثیر قرار گرفته است. هنگام آماده‌سازی این سخن‌رانی، اولین سؤال مطرح شده را برای دوستان و همکاران خود در کشورهای گوناگون مطرح کردم که مایلم در این‌جا از آن‌ها به خاطر پاسخ‌های الهام‌بخششان تشکر کنم. همان‌گونه که انتظار می‌رفت، پاسخ‌هایی که دریافت کردم، بسیار گوناگون بودند. با این حال، این گوناگونی‌ها، روندهای مشترکی را دنبال می‌کردند. پاسخ‌های دیگران، در درک بهتر آن‌چه که سعی در بیان کردن آن داشتم به من کمک کرد و حالا، حتی اگر سؤال به تفصیل بیان شده باشد و از کلمه‌ی «ما» به مفهوم گروهی استفاده کنم، پاسخ من الزاماً پاسخی فردی خواهد بود.

سخنان جرمی کیل پاتریک

پاسخ‌های من نیز، بسیار مشروط و محدود به موقعیت و تجربه است. من به مدت ۵۰ سال، آموزشگر ریاضی بوده‌ام و در حال حاضر، در یک دانش‌سرای تربیت‌معلم در بخش آموزش ریاضیات و علوم مشغول تدریس هستم. من از میان دانشجویان کارشناسی، که دوره‌های آمادگی دبیری را طی می‌کنند و دانشجویان دوره‌ی دکترای آموزش ریاضی، بیشتر به دانشجویان دوره‌ی دکترا آموزش می‌دهم؛ ضمن این‌که از گذشته تا امروز، در هر نوع فعالیت تحقیقاتی، از حل مسئله گرفته تا کارهای اخیر در ارزش‌یابی، تدوین برنامه‌ی درسی و تاریخ آموزش ریاضی نیز شرکت داشته‌ام.

علاقه‌ی من به تاریخ رشته‌مان به نوعی مرا مظنون ساخته بود. اغلب می‌شنیدم که آموزشگران ریاضی می‌گویند: «اکنون می‌دانیم که ...»، و بعد آن‌چه را اکنون می‌دانیم، می‌گویند. برخی از ما که کمی بیشتر از دو یا سه سال در صحنه بوده‌ایم، می‌گوییم: «خب در واقع قبلاً کسانی بوده‌اند که این را می‌دانستند». بنابراین، داشتن دیدگاهی تاریخی در زمینه‌ی کاری خودمان مفید خواهد بود. پاسخ من نیز همانند میشل، فردی خواهد بود و احتمالاً وابسته به ویژگی‌های شخصی‌ام. من قطعاً خود را نماینده‌ی ایالات متحده که مکانی با فرهنگ‌های گوناگون است، نمی‌دانم.

ما در آموزش ریاضیات چه می‌دانیم که ۱۰ سال قبل نمی‌دانستیم و چگونه به آن دست یافته‌ایم؟

میشل:

در پاسخ به این سؤال که ما در زمینه‌ی آموزش ریاضی چه می‌دانیم که ۱۰ و یا حتی ۱۵ سال پیش نمی‌دانستیم، قطعاً برخی پاسخ خواهند داد: «هیچ». همان‌گونه که شما تصور می‌کنید، این نظر من نیست. با نگاهی به ۱۵ سال گذشته (من زمان را اندکی طولانی‌تر گرفته‌ام)، من شخصاً زمینه‌ای از دانش را می‌بینم که در آن پیشرفت آشکاری صورت گرفته است. این پیشرفت دارای ابعاد گوناگونی بوده است: نه تنها با مباحث ریاضی که به‌طور گسترده‌ای مورد نظر پژوهش‌های علمی‌اند، مانند اعداد، جبر و یا هندسه مرتبط بوده است، بلکه در مباحثی نیز که بیش از پیش اهمیت خود را در ریاضیات و آموزش نشان‌داده‌اند، مانند احتمالات و آمار، پیوند خود را نشان داده است. این‌که کمیته‌ی اجرایی ICMI چند سال پیش اعلام کرد، زمان آن رسیده است که این کمیسیون در آموزش آمار مطالعه‌ای را آغاز کند، به هیچ وجه تصادفی نبوده است. همایش مربوط به این مطالعه اخیراً در مونتری برگزار شد.

حتی زمانی که تمرکز روی مباحث ریاضی است ـ مانند آن‌چه که اشاره کردم ـ پیشرفت زمینه‌ی مورد نظر، کاملاً به تکامل جهانی آن، به ساخت‌ها و دیدگاه‌هایی که تدریجاً معرفی و اصلاح شده‌اند و به تلاش‌های انجام شده در دهه‌ی اخیر وابسته‌اند که به منظور درک این که چرا پژوهش‌های آموزشی ظاهراً این قدر غیر مؤثر بوده، و این‌که چرا در عمل تأثیر چندانی نداشته، صورت پذیرفته‌اند. از نقطه‌نظر جهانی مایل هستم سه عامل اصلی این پیشرفت را در این‌جا یادآور شوم:

اولین آن‌ها همبستگی روش‌های فرهنگی ـ اجتماعی و ماهیت طبیعت انسانی در آموزش ریاضیات است. من فکر می‌کنم این موضوع به ما کمک کرده است تا درک و دیدگاه بهتری از بعد اُسلوب‌پذیر واقعیت آموزشی که آن را مطالعه می‌کنیم، داشته باشیم. این موضوع به ما کمک کرده است تا محدودیت‌هایی را که آموزش در سطوح متفاوت قطعیت[13] (این اصطلاح اولین بار توسط ایوز شوالارد[14] سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۷ معرفی شده است) شکل می‌دهد، درک کنیم؛ از آن‌هایی که در سطح مباحث ریاضی هستند گرفته تا آن‌هایی که در اوج تمدن قرار گرفته‌اند. درست در زمانی که محدودیت‌های دیدگاه «ساخت‌وسازگرایی»[15] آشکار می‌شد، نگرشی نو در طبیعت روندهای آموزشی به ما ارائه داد. این مسئله تصاویر جدیدی برای رسیدن به این‌که چگونه معلمان می‌توانند در فرایند یادگیری هدایت و راهنمایی کنند ارائه داد؛ آن هم در زمانی که عده‌ای قصد داشتند فراموش کنند معلمان نمی‌توانند برای ایجاد ارتباط دانش‌آموزانشان با دانش ریاضی، فقط نقش تشکیلاتی داشته باشند. آن‌ها باید آموزش دهند. همان‌طور که همکاران ژاپنی ما می‌گویند، آن‌ها باید «راه را نشان دهند».

نکته‌ی دوم رشد پژوهش پیرامون باورها، بازنمایی‌ها[16]، شیوه‌ها، دانش،

تجربه‌ی آماده‌سازی و پیشرفت حرفه‌ای معلمان بوده است. برای مثال، انتشار مجله‌ی آموزشی معلمان ریاضی[17] و اخیراً یک کتاب مرجع ویژه[18] مؤید آن است. می‌توانم بگویم در ۱۵ سال اخیر، معلم به عنوان یک بازیگر مشکل‌ساز در روابط تعلیم و تربیتی، همانند دانش‌آموزان دو دهه قبل مطرح بوده است. این موضوع به جست‌وجو در مورد نیازهای ریاضی لازم برای حرفه‌ی معلمی و تفاوت‌های آن با نیازهای ریاضی‌دانان حرفه‌ای منجر شد. و هم‌چنین به شناسایی طبیعت کار حرفه‌ای معلمان و دلایلی که بیانگر علت انتخاب روش‌های تعلیم و تربیتی خاص خودشان برای درک معقول بودن شیوه‌های تجارب معلمی آنان شد. من فکر می‌کنم در نتیجه‌ی این پژوهش، ما امروز درک بهتری از تأثیرات محدود طرح‌های تحقیقاتی بر شیوه‌های مؤثر آموزشی داریم. ما شاهد محدودیت‌های آشکار بسیاری از برنامه‌های آماده‌سازی معلمان هستیم و نیز دارای درک بهتری از این که چگونه می‌توان این برنامه‌ها را بهبود بخشید. خواننده می‌تواند در کتاب منتشر شده توسط «مطالعه‌ی پانزدهم کنگره» (Even & Ball, 2008)، اطلاعات بیشتری در زمینه‌ی آخرین پیشرفت‌های انجام شده در این موضوع را بیابد.

نکته‌ی سوم، توجه روزافزونی است که به ابعاد نمادگذاری و استدلالی روش‌های ریاضی داده می‌شود (Saenz-Ludlow & Presmeg, 2006). این کاملاً با اولین نکته‌ی مطرح شده در بالا مرتبط است. این توجه روزافزون، ارتباط منطقی موجود بین بازنمایی نمادین و ادراک دانش ریاضی را آشکار می‌سازد. هم‌چنین، ما را نسبت به اهمیت نقش واسطه‌ای نمادگذاری در پیشرفت دانش ریاضی حساس کرده و نیز ما را به سمت توسعه‌ی دستگاه نمادگذاری خارج از دستگاه‌های شناخته شده‌ی پیشین، راهبری نموده است که در آن‌ها، مثلاً حرکت نشانه‌ای[19] (ژست) نیز مورد توجه لازم قرار گیرد. پژوهش در فناوری از کارهای اولیه‌ی **جیم کاپوت** (۱۹۹۲) تا جدیدترین پیشرفت‌ها اثر آمیخته شده در مطالعه‌ی هفدهم ICMI (Hoyles & Lagrange)، در حال انتشار، در این تکامل نقش به‌سزایی داشته است و بالعکس از این تکامل بهره‌مند بوده است. البته بسیاری از ریشه‌های این تکامل جهانی در ۱۵ سال پیش آشکار بودند و بدون شک غیرممکن است نظریه‌ای که امروز مهم تلقی می‌شود، معین کنیم و ادعا کنیم در آن زمان در جایی وجود نداشته است. اما این ریشه‌ها پیشرفت کرده و منتشر شده‌اند و دارای نقش مرکزی‌تر و رضایت‌بخش‌تری شده‌اند. بررسی علمی آن‌ها با تعداد فزاینده‌ای از مطالعات تجربی تغذیه شده است. این احساس در من به وجود می‌آید که امروزه بسیاری از ما به آموزش ریاضی به عنوان یک زمینه‌ی پژوهشی و یک زمینه‌ی اسلوبی نمی‌توانیم چنان بنگریم که ۱۵ سال پیش از این، آن را مشاهده می‌کردیم.

جرمی: همان‌طور که خواهید دید، من با تحلیل میشل بسیار موافقم. اگر پایه‌گذاران این گفت‌وگو انتظار نظرات اساساً متفاوتی را دارند، متأسفانه آن‌ها مأیوس خواهند شد. همان‌طور که میشل بیان کرد، پاسخ هر کسی به این سؤال که ما در حال حاضر چه می‌دانیم، بستگی به مفهوم آموزش ریاضی دارد و این یک رشته‌ی **پژوهشی** و در عین حال یک رشته‌ی **عملی** است. هم پژوهش و هم عمل و شیوه‌ی کار می‌توانند یا به تعلیم ریاضیات یا به تعلیم آموزش ریاضیات مربوط شوند. این رشته در مورد آماده‌سازی کسانی که معلمان را برای آموزش مهیا می‌کنند، دارای یک صفت بازگشتی است.

این سؤال که ما اکنون چه می‌دانیم که قبلاً نمی‌دانستیم، در کنگره‌های بین‌المللی آموزش ریاضی یک سؤال جالب توجه و دائمی است. من این سؤال را بارها شنیده بودم. این سؤال اغلب توسط کسانی مطرح می‌شود که همایش‌های بین‌المللی ریاضیات را دنبال می‌کنند و می‌خواهند بدانند یافته‌های جدید در آن‌جا چگونه اعلام شده است. و یا می‌توان گفت آن‌ها در مورد دارو و روش‌هایی از معالجات جدید و مؤثر که هر از گاهی توسط پژوهشگران بهداشتی اعلام می‌شود، فکر می‌کنند.

در پاسخ به این سؤال که ما در زمینه‌ی آموزش ریاضی چه می‌دانیم که ۱۰ و یا حتی ۱۵ سال پیش نمی‌دانستیم، قطعاً برخی پاسخ خواهند داد: «هیچ»

آموزش ریاضی همواره با خود ریاضی و هم‌چنین شاید حتی اغلب اوقات با علم طب مقایسه می‌شود. در این رشته‌ها، پیشرفت دانش بدیهی به نظر می‌رسد؛ البته اگر از خیلی نزدیک به آن نگاه نکنید. اما این پیشرفت بسیار متفاوت از حالتی است که در آموزش ریاضی اتفاق می‌افتد، چرا که در این رشته همان سؤالات همیشگی مرتباً تکرار می‌شوند و به نظر می‌رسد هرگز پاسخ رضایت‌بخش یا نهایی دریافت نمی‌کنند. به نظر من چنین می‌رسد که سؤالات در زمینه‌ی آموزش ریاضی در منتهای مراتب به‌طور موقت پاسخ داده می‌شوند و با هر نسل نو بایستی دوباره مطرح شوند. همان‌طور که در جایی دیگر نیز گفته‌ام، این مسائل همانند هیولایی است که مرتب شبانگاهان از خواب برمی‌خیزد و ما هیچ‌وقت موفق نمی‌شویم قلب آن را کاملاً، آن‌طور که در سایر رشته‌ها می‌توان، مورد هدف قرار دهیم.

آموزش ریاضی همانند سایر رشته‌های علمی نیست. بهتر است بگوییم که نوعی از علوم اجتماعی است. **فلیکس کلاین**، در سخنرانی افتتاحیه‌ی خود در «ارلانگن» در سال ۱۸۷۲، به یک تفاوت مهم بین ریاضیات و سایر زمینه‌های علمی اشاره کرده است که می‌باید ما را از تلاش در جهت این مقایسه باز دارد. او اظهار داشت: «هر نسل ریاضیات، براساس دستاوردهای نسل‌های ماقبل خود بنیان‌گذاری می‌شود، در حالی که در رشته‌های دیگر غالباً، پیش از آن‌که ساختارهای نو پایه‌ریزی شوند، ساختمان‌های ماقبل آن متلاشی می‌شوند» (ترجمه‌ی انگلیسی از راو، ۱۹۸۵، ص ۱۳۶). قطعاً چنین به نظر می‌رسد که در آموزش ریاضی نیز، ما ساختارهای قبلی را در صورتی که برای اهداف، ارزش‌ها و فعالیت‌هایمان مفید نباشند، از بین می‌بریم. ما همیشه کاملاً از حذف کامل شروع نمی‌کنیم، بلکه به‌طور هم‌زمان، هم تخریب و هم ساختمان‌سازی انجام می‌دهیم.

در هر صورت، من می‌خواهم با افزودن چند نکته و مثال از خودم، عوامل پیشرفتی را که میشل معرفی کرده است تصدیق کنم. در مورد مسئله‌ی رویکردهای مردم‌شناسی و رویکردهای فرهنگی ـ اجتماعی در رشته‌ی خودمان، من به هیچ وجه نمی‌توانم برای همکاری‌های میشل و دیگران که ساختار **پیدایش ابزاری** را توسعه داده‌اند، شرح بیشتری داشته باشم. روشی که توسط آن، کاربران به

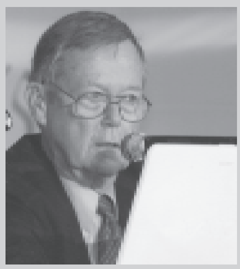
مصنوعاتی که استفاده می‌کنند شکل می‌دهند و مصنوعات به کاربران شکل می‌دهند و ابزار این‌گونه حاصل می‌شود. بلکه من می‌خواهم اذعان کنم که این ساختار به عنوان نمونه‌ای از پیشرفت که براساس درک ما از تعامل بین اشخاص یادگیرنده و ابزارهایشان ساخته شده است، بسیار مفید بوده است. من خواندن گزارشات جدید در آثار ابتکاری که با این اندیشه‌ها صورت می‌گیرند را دنبال می‌کنم و انتظار دارم تأثیر و نفوذ آن‌ها ادامه یابد.

من می‌خواهم این نظر میشل را که در رشته‌ی ما توجه بسیار و احتمالاً بیشترین توجه پژوهشگران، طی ۱۰ تا ۱۵ سال گذشته از اشخاص یادگیرنده به اشخاص یاددهنده تغییر جهت داده است، تأیید کنم. در حال حاضر پژوهش‌های قابل ملاحظه‌ای در زمینه‌ی دانش، طرز نگرش و طرز عمل معلمان انجام می‌شود. من فرصت پرداختن به دو مورد آخر را ندارم، ولی می‌خواهم خاطرنشان کنم که امروزه تعداد بسیار اندکی از آموزشگران ریاضی در جست‌وجوی ساختار «**دانش پداگوژی محتوا**»[۲۰] که چند سال پیش توسط **لی شولمان** (۱۹۸۶ و ۱۹۸۷) معرفی شد، هستند و سعی در فهم آن دارند. برخی سعی دارند چگونگی به کار بردن آن را در آموزش ریاضی به تصویر بکشند. برخی دیگر در جست‌وجوی ساختار آن‌چه که دانش ریاضی برای آموزش[۲۱] (MKT) نامیده می‌شود هستند و سعی در فهمیدن آن دارند. این‌که چگونه به دانش‌های دیگر مربوط می‌شود؟ با دانش پداگوژی محتوا چه ارتباطی دارد؟ با تمامی انواع دانش‌های دیگری که آموزش ریاضی نیازمند آن‌هاست، چه ارتباطی دارد؟ به‌خصوص، من مایل هستم آثار **دبورا بال** و **هایمن باس** (بال و باس، ۲۰۰۰ و ۲۰۰۳) را یادآوری کنم که سعی داشتند به ما در درک این‌که MKT معمولاً به عنوان یک نوع خاص از ریاضیات کاربردی انگاشته می‌شود، کمک کنند و من فکر می‌کنم بهتر است در مورد آن این‌گونه فکر کرد.

رشته‌ی ما در دهه‌ی اخیر به شیوه‌های آموزشی توجه زیادی مبذول داشته است. در این روند، مطالعه‌ی ویدیویی کلاس‌های آموزش، که امکان مطالعه‌ی دقیق و جزء به جزء کلاس‌های متداولی که در آن‌ها ریاضیات تدریس و آموخته می‌شود را فراهم می‌کند، بسیار سودمند بوده است. ما در سطح ملی و بین‌المللی مطالعات ویدیویی گوناگونی داشته‌ایم ـ نه تنها مطالعات ویدیویی TIMSS[۲۲] بلکه مطالعه‌ی LPS[۲۳] و دیگر مطالعاتی که آموزش در کشورهای مختلف را مقایسه کرده‌اند. این مطالعات منجر به نظریاتی شده است مبنی بر این‌که هر کشوری روش آموزشی خاص خود را دارد؛ نظراتی که من فکر می‌کنم در چند سال اخیر به شدت مورد بحث قرار گرفته است. هر دو سوی این سؤال قابل بحث است. این‌که آموزش ویژگی‌های مشترکی ورای مرزهای جغرافیایی دارد و یا محدود به آن است، به نظر من شبیه این سؤال است که بپرسیم: آیا مثلاً یک برنامه‌ی درسی معیار[۲۴] برای ریاضیات مدرسه‌ای در سطح بین‌المللی، مانند آن‌چه TIMSS و PISA فرض کرده‌اند، یا حتی در سطح ملی وجود دارد؟

مطالعه‌ی شیوه‌های آموزشی در کشورهای متفاوت کار بسیار مشکلی است، چرا که ما واژگان لازم برای گفت‌وگو در مورد آموزش را آن‌گونه که برای برنامه‌ی درسی داریم، در اختیار نداریم. هنگامی که ما در مورد برنامه‌ی درسی صحبت می‌کنیم، واژه‌های شناخته شده و پذیرفته شده‌ی ریاضی وجود دارند که از آن‌ها استفاده می‌کنیم. وقتی در مورد آموزش صحبت می‌کنیم، به اجبار وارد دسته‌ای از اصطلاحات خاص می‌شویم که ممکن است در کشورهای دیگر همان مفهوم را نداشته باشد. به عنوان یک مثال، عبارت «آموزش متمرکز بر یادگیرنده» را در نظر بگیرید، که به روش‌های گوناگونی تعبیر شده است و می‌تواند معانی بسیار متفاوتی داشته باشد. نهایتاً، مایل هستم سخن خود را متوجه کاربران فناوری، مزایای آن و برخی مشکلاتی که برای معلمان می‌آفریند، نمایم. مزایای آن به کار گرفته می‌شوند و ما در مورد آن‌ها بیشتر می‌دانیم. ولی از میشل می‌خواهم این موضوع را مورد بحث قرار دهد.

میشل: بسیار خوب، تاکنون سخن من نسبتاً کلی بوده است. اکنون مایل هستم با بررسی دو مثال شخصی آن را ملموس‌تر کنم و توسط این مثال‌ها می‌خواهم بیان کنم که همبستگی‌های حاصل از رویکردهای فرهنگی ـ اجتماعی و مردم‌شناسی، دیدگاه شخصی مرا تحت تأثیر قرار داده است. اولین مثال را «غلبه بر دوئیت‌های کاذب[۲۵]» نام‌گذاری کرده‌ام. شکی نیست که دوگانگی‌ها هنگام سخن گفتن از آموزش ریاضی بیشتر ظاهر می‌شوند. در حالت کلی، آن‌ها ساده و خطرناک هستند.



در رشته‌ی ما در بسیاری از موضوعات به قدر کافی مدارک معتبر وجود ندارد. ما در واقع در زمینه‌ی تعداد اندکی از موضوعات، مجموعه‌ای از تحقیقات انجام شده داریم که می‌توان گفت اجازه‌ی ادعاهای محکمی به ما می‌دهد

یکی از آن‌ها، دوگانگی در مقابل مفاهیم و روش‌هاست. تصور می‌شود عمل آموزش روی اولین یا دومین آن‌ها متمرکز باشد. در حین پژوهش‌های خود، با کمک همکاران فرانسوی **ژان باپتیست لاگرانژ**، **لوک تروش**، و بسیاری دیگر، در زمینه‌ی فناوری دیجیتال، به خصوص سیستم‌های جبری رایانه (CAS; e.g., Artigue, 2002)، من نسبت به آن واقعاً حساس شدم. در اوایل دهه‌ی ۱۹۹۰، پژوهش در آن زمینه، با وانمودکردن این‌که استفاده از CAS، توسط آزادکردن دانش‌آموزان از بار فنی، به آن‌ها اجازه می‌دهد روی مفاهیم و درک آن‌ها تفکر کنند، بر دوگانگی تأکید داشت. ولی مشاهدات کلاسی که من در آن زمان انجام می‌دادم به هیچ وجه بر این مطلب گواهی نمی‌داد. این ما را به فکر فرو داشت و سعی کردیم آن را در چارچوب رویکرد ابزاری که خود ایجاد کرده بودیم، درک کنیم.

برای درک بهتر این دوگانگی، بر آن شدیم به تکنیک‌ها دو ارزش، یکی شناخت‌گرایانه و دیگری عمل‌گرایانه منسوب کنیم. یک ارزش عمل‌گرایانه، چرا که آن‌ها عملی هستند و از آن‌ها نتایج حاصل می‌شود و یک ارزش معرفت‌شناسانه[۲۶] چرا که به درک ما از موضوعات مربوط به آنان کمک می‌کنند. یک نکته‌ی مهم در این دیدگاه این است که اگر تکنیک‌های ریاضی آموزش داده می‌شوند، فقط به علت قدرت عمل گرایانه‌ی آن‌ها نیست، به دلیل قدرت معرفت‌شناسانه‌ی آن‌ها نیز هست. برای یک لحظه به تکنیک یک تقسیم طولانی، که امروزه بین آموزشگران ریاضی و ریاضی‌دانان یک موضوع مورد بحث برنامه‌ی درسی در آموزش ریاضی است فکر کنید.

این حرکت برای من یک نتیجه‌ی روشن گرایانه داشت. برای من دیگر مانند قبل

سؤال در مورد استفاده‌ی آموزشی از فناوری دیجیتال مطرح نبود. مقاومت در برابر فناوری دیجیتال ـ به‌خصوص، بازگشت باور نکردنی مذاکرات در مورد استفاده از ماشین حساب در مقاطع ابتدایی ـ می‌توانست به عنوان یک توازن شکسته شده بین ارزش‌های عمل‌گرایانه و معرفت‌شناسانه در تکنیک‌های معمول تعبیر شود. استفاده‌ی معمول از فناوری دیجیتال نقش قدرت عمل‌گرایانه‌ی فناوری را نمایش می‌دهد؛ انجام کار بیشتر با سرعت بیشتر زیر سایه‌ی قدرت معرفت‌شناسانه‌ی آن. ولی آن‌چه که استفاده از یک تکنیک را در مدرسه مجاز می‌کند، نمی‌تواند تنها قدرت عمل‌گرایانه‌ی آن باشد که یک تفاوت اساسی بین مدرسه و دنیای بیرون است. مجاز کردن فناوری و مفید کردن آن از جنبه‌ی ریاضی، مستلزم وجوه به هم پیوسته‌ی عناصر آن است که یک توازن منطقی بین قدرت عمل‌گرایانه و معرفت‌شناسانه‌ی تکنیک‌های ابزاری شده را فراهم می‌آورد. این توازن، که تحقیقات با شواهد آن را اثبات کرده است، نیازمند وظایف و شرایطی است که نمی‌توان آن را به استفاده‌ی ساده از قلم و کاغذ تقلیل داد. و این وظایف، که تحقیقات آن را نیز اثبات کرده است، هنگامی که مانند بسیاری از معلمان، شما با فرهنگ قلم و کاغذ وارد دنیای فناوری شوید، چندان ساده برنامه‌ریزی نمی‌شوند (لابورد، ۲۰۰۱).

این فقط یک مثال خاص است که خیلی خلاصه بیان شده است. اما با یکی از لحظات نادر در زندگی من، هنگامی که احساس می‌کردم به عنوان یک پژوهشگر یک چیز مهم آموخته‌ام، مربوط است. چیزی که مرا وادار می‌کرد به مقاومت‌های آموزشی، به معلمان به گونه‌ای متفاوت بنگرم و این هم‌چنین مرا وادار کرد که منابعی را که ما به عنوان پژوهشگر، برای آموزگاران و مؤسسات فراهم می‌کنیم، زیر سؤال ببرم. به علاوه، من احساس می‌کردم می‌توانم این دانش را به زبان نسبتاً ساده‌تری بیان کرده و آن را برای جامعه‌ی خارج از جامعه‌ی محققین قابل درک کنم.

مثال دوم مربوط می‌شود به تغییرات سازمانی (شغلی). من نسبت به این واقعیت، زمانی که پایان‌نامه‌ی دکتری خانم **بریژیت ژروگن** (۱۹۹۵) را نظارت می‌کردم، حساس شدم. او مایل بود علت ناتوانی عمومی دانش‌آموزان در درس جبر هنگام ورود به دبیرستان پس از اتمام موفقیت‌آمیز یک برنامه‌ی شغلی را پیدا کند. او می‌خواست تعابیر متداول از این ناتوانی را که براساس این ایده شکل می‌گرفت ـ که این ناتوانی‌ها برای این دسته از دانش‌آموزان نسبتاً عادی است چرا که همه می‌دانند دانش‌آموزان شاغل از استعداد کمتری در ریاضیات بهره‌مند هستند ـ زیر سؤال ببرد. او نشان داد که دانش‌آموزان شاغل و دانش‌آموزان دبیرستان، اگرچه موضوع واحدی را دنبال کرده و از زبان یکسانی استفاده می‌کنند، اما در واقع، دو نوع متفاوت از فرهنگ جبری را انتقال می‌دهند. این تفاوت، دانش‌آموزان را در فهمیدن این‌که در سازمان جدید از آن‌ها چه انتظاراتی می‌رود، و معلمان را در تشخیص دانش جبری دانش‌آموزانشان و بنا کردن بر آن، دچار مشکل می‌کرد. به محض این که ناپیوستگی‌های نامرئی بین دو سازمان ـ دو فرهنگ ـ شناخته شد، تدابیر آموزشی جدید دست‌یافتنی شدند و موفقیت‌آمیز بودن خود را در موقعیت‌های آموزشی و هنگام به کار بردن، اثبات نمودند.

سپس من همین روش را با همکاری **فردریک راسلون** (۲۰۰۰)، در تحقیق در مورد درس آنالیز در گذر از دوره‌ی دبیرستان به دانشگاه، به کار بردم. برای مدتی طولانی، مشکلات دانش‌آموزان در این گذر به تحقیق در مورد ویژگی‌های تفکر ریاضی در سطح پیشرفته، شناسایی موانع معرفت‌شناسانه و مشکلات شناختی در این گذر منجر شده بود (برای نظرات ترکیبی تال را ببینید، ۱۹۹۱ و ۱۹۹۶). پیشرفت دیدگاه‌های مردم‌شناسی و سازمانی (شغلی) این نظریه را مردود نکرد، بلکه ما را وادار نمود که آن را در دامنه‌ی گسترده‌تری قرار دهیم؛ یعنی گذر بین دو سازمان. بنابراین، نقطه‌ی توجه از دانش‌آموز به سازمان انتقال پیدا کرد، بر مبنای این اصل که آگاهی دانش‌آموزان آن چیزی خواهد بود که سازمان‌هایی که تابع آن‌ها هستند به آن‌ها اجازه‌ی یادگرفتن آن را می‌دهند و برای درک مشکلات دانش‌آموز در هر دو سازمان، پیوستگی‌ها و ناپیوستگی‌های آن‌ها و نحوه‌ی برخورد با آن‌ها، در معرض چه نوع تکنیک‌های ریاضی قرار خواهد گرفت. به علاوه، این انتقال بسیار پربار بود و دیدگاه‌های جدیدی را برای بررسی ناپیوستگی‌های این گذر شغلی نه تنها برای ما بلکه برای پژوهشگران دیگر که از آن زمان در همین راستا فعالیت می‌کردند، عرضه داشت. من فکر می‌کنم به عنوان مثال، می‌توان از پایان‌نامه‌ی **آنالیزه برژه** (۲۰۰۸) از آرژانتین و هم‌چنین کارهای همکاران اسپانیایی‌مان (بوش، فونسکا و گاسکن، ۲۰۰۵) نام برد.

حتی زمانی که تمرکز روی مباحث ریاضی است ـ مانند آن‌چه که اشاره کردم ـ پیشرفت زمینه‌ی مورد نظر، کاملاً به تکامل جهانی آن، به ساخت‌ها و دیدگاه‌هایی که تدریجاً معرفی و اصلاح شده‌اند و به تلاش‌های انجام شده در دهه‌ی اخیر وابسته‌اند که به منظور درک این که چرا پژوهش‌های آموزشی ظاهراً این‌قدر غیر مؤثر بوده، و این که چرا در عمل تأثیر چندانی نداشته، صورت پذیرفته‌اند

چه شواهد و مدارکی قابل دست‌رسی است و در آموزش ریاضی بایستی به دنبال چه بود؟

جرمی: من سخن خود را با بیان این‌که در رشته‌ی ما در بسیاری از موضوعات به قدر کافی مدارک معتبر وجود ندارد، آغاز می‌کنم. ما در واقع در زمینه‌ی تعداد اندکی از موضوعات، مجموعه‌ای از تحقیقات انجام شده داریم که می‌توان گفت اجازه‌ی ادعاهای محکمی به ما می‌دهد. هر مدرکی باید از معیارهای زیر تبعیت کند: (۱) باید به سؤالاتی که مطرح می‌کنیم، مربوط باشد؛ (۲) باید صحیح، یعنی معتبر باشد؛ (۳) باید تا اندازه‌ای عمومی باشد، یعنی قابل تعمیم به یک زمینه‌ی وسیع‌تر.

اگر مطالعات چندگانه‌ای در موضوع داده شده‌ای داریم، باید به نوعی «هم‌گرا» باشند. آن‌ها باید در نهایت به سمت موقعیت‌ها، شرایط، پژوهشگران، گروه‌ها و روش‌ها هم‌گرا شوند و حتی مهم‌تر از هر چیز، من فکر می‌کنم آن‌ها باید در یک محدوده‌ی شبکه مانند که مفهومی هم نظری و هم عام داشته باشند، قرار گیرند. این‌ها معیارهایی بودند که ما در تحقیق در یادگیری ریاضیات که کتاب «جمع آموخته‌ها[27]» حاصل آن است (کیل پاتریک، سوافورت، و فیندل، ۲۰۰۱: ۲۴-۲۱)، مورد استفاده قرار دادیم.

اگر معیارها را محدودتر کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟ کوشش‌هایی در دست انجام است که پژوهش پیرامون آموزش ریاضی با معیارهای بسیار محدودی را جهت مطالعه قرار دهد. مثلاً، وقتی که شما اصطلاحاً استاندارد طلایی را در آزمایش‌های کنترل شده‌ی تصادفی به کار می‌برید، وارد مسائل می‌شوید. شما در می‌یابید که ما تقریباً هیچ تحقیقی نداریم که با این استاندارد مطابقت کند و

در نتیجه شما تقریباً هیچ مدرکی برای کار کردن ندارید. سؤالات پژوهشی بسیاری وجود دارد که در مورد آن‌ها، یا آزمایش‌های کنترل شده‌ی تصادفی غیرممکن خواهد بود و یا یک مطالعه‌ی مناسب لازم است که در این کنترل‌ها، مداخلات را، هرچه که هستند، غیرواقعی کند. آزمایش‌های کنترل شده‌ی تصادفی، یا چیزی که آن‌ها را تقریب می‌زنند، صراحتاً بگوییم در صورت استفاده از استنتاج‌های اتفاقی مورد نیاز هستند[۲۸]. در هر صورت، ما در زمینه‌ی خودمان موضوعات بسیاری داریم که به چنین شواهدی نیاز ندارد. هنگامی که معیارهای محدودی به‌کار برده می‌شوند، چیزی که اتفاق می‌اُفتد ـ در مواردی که من دیده‌ام ـ این است که نظرات آزمایش نشده و تجارب فردی بسیاری باقی مانده است. از داوری جامعه‌ی متخصصین و تجارب آن‌ها به اندازه‌ی کافی استفاده نشده است.

ما به مدارکی بیش از آن‌چه داریم نیازمندیم. به نظر من، باید ثابت شود، تنها مداخله کارایی ندارد. ما در بیان این‌که چه زمانی و به چه دلیل این مداخله به ثمر می‌رسد و این‌که منظور از کارایی چیست، به کمک نیازمندیم. ما هم‌چنین به شواهد توصیفی و تحلیلی در مورد روش‌های آموزشی ریاضی حتی اگر این روش‌ها «مداخله» نباشند، اما به‌طور طبیعی در یک محیط ظاهر شوند، نیازمندیم. تشبیه نمودن با علم پزشکی برای ما الزاماً مناسب نیست، اما حتی علم طب آزمایش‌های کنترل شده‌ی تصادفی را که با تعداد زیادی عملکردهای کاوش‌گرایانه قبل از آن آزمایش نشده باشد، بر عهده نمی‌گیرد؛ از جمله مطالعه‌ی حالت‌ها، مطالعات انجام شده توسط همکاران، و آزمایشات بالینی.

میشل: من در مجموع با شما موافق هستم و برای حضار متأسفم. شما در ابتدا به علاقه‌ی خود در زمینه‌ی تاریخ آموزش ریاضی اشاره نمودید. من فکر می‌کنم، در رابطه با این نکته، جالب است اگر یک نگاه بازتابی به تاریخ این موضوع بیندازیم. از دهه‌ی ۱۹۶۰، آموزش ریاضی سعی داشته است خود را به عنوان یک موضوع علمی پایه‌گذاری کند و این البته به همان سند مورد جست‌وجو شکل داده است. در بسیاری از کشورها کوشیدند به این موضوع در مراحل اولیه‌ی خود، توسط استفاده از روش‌های الهام گرفته از علوم تجربی، مثلاً روان‌شناسی تجربی در آن زمان، وضعیت علمی بدهند. تشکیل گروه‌های کنترل و تجربی و گرفتن پیش‌آزمون‌ها و پس آزمون‌ها متداول بود. ما نمی‌توانیم محدودیت‌های این روش‌ها را که در مورد پدیده‌های آموزشی مشاهده می‌شدند، فراموش کنیم. از سویی، متغیرهای مربوطه چندان ساده شناسایی و کنترل نمی‌شدند و از سوی دیگر، حتی اگر این روش‌ها قادر بودند تفاوت‌ها را نشان دهند، آن‌ها دست‌رسی به سازوکار زیربنایی را فراهم نمی‌آوردند. این پدیده‌ها به توسعه‌ی روش‌هایی که امروزه حکمفرماست، هنگامی که مدرک اساساً توسط «مثلث‌سازی»[۲۹] منابع چندگانه‌ای از اطلاعات و تجزیه و تحلیل جست‌وجو می‌شود، منجر شد.

این روش‌ها کارایی خود را برای شناسایی پدیده‌های تعلیم و تربیتی و درک آن‌ها، برای آشکار کردن منطق نهفته در رفتارهای دانش‌آموزان و معلمان و قابل فهم کردن پویایی کلاس درس و مسیرهای یادگیری، به اثبات رساندند. مثلاً در کشور فرانسه، تحقیقات کلاسی همیشه یک نقش اساسی را در این زمینه ایفا کرده است. قطعاً این به علت دیدگاه موقعیتی و نظام‌دار موجود در نظریه‌ی موقعیت‌های تعلیم و تربیتی ابداع شده توسط **گای بروسو** (۱۹۹۷) است که در این زمینه بسیار مؤثر بوده و هست. این نظریه از اوایل دهه‌ی ۱۹۸۰ به توسعه‌ی یک روش خاص برای تحقیق کلاسی موسوم به مهندسی تعلیم و تربیتی منجر شد که شدیداً الگوی گروهی کنترل بر مبنای تجربه را رد می‌کرد و به دنبال مدرک کمیتی و کیفیتی توسط مقایسه‌ی بین آن‌چه ما در موقعیت‌های تعلیم و تربیتی، «آنالیز بر مبنای قیاس یا استقرا» می‌نامیم، بوده است (آرتیگ، ۱۹۹۲). شکی نیست که مهم‌ترین پیشرفت‌ها در نظریه‌ی موقعیت‌های تعلیم و تربیتی از مورد استفاده قرار دادن این روش حاصل شده است. در دهه‌ی ۱۹۹۰، توسعه‌ی پژوهش در زمینه‌ی عملکرد معلمان، به توسعه‌ی روش‌های کمتر تهاجمی نیاز داشت و به استفاده‌ی روز افزون مشاهدات طبیعی هدایت می‌کرد. البته این‌ها منابع دیگری از شواهد را مورد استفاده قرار می‌دهند، ولی همواره از همان فلسفه‌ی کلی تبعیت می‌کنند.

این پژوهش‌ها در اُسلوب شناسی، به دلیل توضیحات روشنگر و گاهی نیروی پیش گویی کننده‌ی دانشی که تولید می‌کنند، پربار بوده و هستند. آن‌ها ابزاری اساسی برای پژوهش‌های بنیادی در آموزش ریاضی محسوب می‌شوند، ولی در ارتباط با نوع شواهدی که فراهم می‌کنند، محدودیت‌هایی نیز دارند. یک مسئله‌ی اساسی در رشته‌ای که به فرهنگ و دیرینه وابستگی زیادی دارد، مسئله‌ی عمومیت است. اغلب اوقات، مستندات در آموزش ریاضی از مطالعات موشکافانه و دقیقاً موضعی نتیجه می‌شود. آن‌چه که این مطالعات به‌طور صریح فراهم می‌آورند، نوعی از قضایای وجودی هستند. می‌توان حدس زد که پدیده‌ی شناسایی شده و نتایج به‌دست آمده، از ارزش عام‌تری برخوردار هستند، اما این ارزش عام‌تر به هیچ‌وجه توسط خود تحقیق تضمین نمی‌شود. همان‌طور که **شونفیلد** (۲۰۰۷) خاطرنشان کرده است، «به‌طور نمونه نویسندگان به عمومیت یک پدیده به‌صورت ضمنی یا صریح، با بیان خاص بودن شرایط مورد بحث در مطالعه اشاره می‌کنند. اما اشاره کردن به عمومیت یک‌چیز، و فراهم نمودن مدرک محکم برای آن، چیز دیگری است» (ص۹۳). این واقعیت باعث شد که او بین عمومیت‌های ادعا شده، ضمنی، بالقوّه و تضمین شده، به عنوان مسیرهایی برای تفکر در حیطه‌ی عمومیت یک مطالعه، تمایز قائل شود. من با او در این نظریه کاملاً موافق هستم.

آیا ما می‌توانیم از پژوهش‌های آموزشی انتظار بیشتری داشته باشیم؟ من امیدوارم چنین باشد، چرا که شکی نیست که حتی اگر پژوهش در نتیجه روش‌هایی که تاکنون ارائه کرده است و نوع مستنداتی که فراهم می‌آورد، به پیشرفت ادامه دهد، این برای تأمین انتظارات اجتماعی و نیز برای توسعه‌ی پیوندهای سودبخش بین پژوهش و عملکرد، برای بالا بردن میزان پیامدهای مثبت در شرایط واقعی در سطح محلی، کافی نیست و این مرا به سؤال بعدی رهنمون می‌کند.

انتظارات اجتماعی از رشته و زمینه‌ی کاری ما چیست و ما با آن‌ها چگونه برخورد می‌کنیم؟

میشل: شکی نیست که امروزه در بسیاری از کشوها آموزش ریاضی از اهمیتی حساس برخوردار است. آموزش ریاضی به کیفیت مناسب، به‌عنوان یک شرط برای پیشرفت علمی و اقتصادی و همچنین برای پیوستن و عضویت در جوامع مدرن و دمکراتیک محسوب می‌شود. جدای از انتقال میراث فرهنگی که از بزرگ‌ترین دستاوردهای جامعه‌ی انسانی است. آن‌چه که جامعه از آموزش ریاضی انتظار دارد، از یک طرف اطمینان از فراهم آوردن یک سطح منطقی از سواد ریاضی برای کلیه‌ی دانش‌آموزان است به‌طوری که آن‌ها را قادر سازد در زمان مقتضی به دانش ریاضی و در صورت نیاز، به تفکر در دنیای واقعی مجهز شوند و از طرف دیگر نیروی کار مورد نیاز و از لحاظ ریاضی واجد شرایط را برای

پاسخ هر کسی به این سؤال که ما در حال حاضر چه می‌دانیم، بستگی به مفهوم آموزش ریاضی دارد و این یک رشته‌ی پژوهشی و در عین حال یک رشته‌ی عملی است. هم پژوهش و هم عمل و شیوه‌ی کار می‌توانند یا به تعلیم ریاضیات یا به تعلیم آموزش ریاضیات مربوط شوند. این رشته در مورد آماده‌سازی کسانی که معلمان را برای آموزش مهیا می‌کنند، دارای یک صفت بازگشتی است

جوامع ما فراهم آورد. در دنیای پیچیده و در حال تغییری که ما در آن زندگی می‌کنیم، آن‌چه که از آموزش ریاضی انتظار می‌رود تغییر می‌کند، اما به هیچ‌وجه کاهش پیدا نمی‌کند. به‌طور کلی تأیید شده است که اغلب نظام‌های آموزشی در تحقق بخشیدن این انتظارات، همانند ۵۰ سال گذشته، هنگامی که دوره‌ی جدید اصلاحات ریاضی شروع شد، ناکام مانده‌اند.

حتی اگر به همان دلیل، پژوهش در آموزش ریاضی توسعه یافته باشد، با سعی در ساختن دانش مورد نیاز برای بهبود بخشیدن شرایط، ما باید تصدیق کنیم که پیشرفت‌های آن هرچه باشد، در جهان تغییری به‌وجود نیاورده است. پژوهش در آموزش ریاضی، نقش محدودی در حمایت از تصمیمات اتخاذ شده در رابطه با محتوای برنامه‌ی درسی و سازمان‌دهی دیدگاه‌های تدریس، روش‌های ارزش‌یابی و آماده‌سازی معلمان ایفا کرده است و اغلب آن را کم فایده و دارای پشتوانه‌ی علمی محدود تلقی می‌کنند. امروزه از پژوهش در زمینه‌ی آموزش انتظار می‌رود که نوع شواهد و مستنداتی که در پزشکی و داروشناسی با آزمایش‌های تصادفی میزان تأثیرات عینی و تجربیات وسیع متداول است، فراهم آورد. به‌خصوص در ایالات متحده وضع چنین است، ولی تنها خاص آن کشور نیست.

تصویر عینیت[۳۰] و اعتبار که توسط مقایسات بین‌المللی مانند PISA (سازمان توسعه و همکاری اقتصادی، ۲۰۰۳) داده می‌شود و صفحه‌ی اول رسانه‌ها را به خود اختصاص داده است، میل دارد تأثیر عظیمی روی جوامع ما اعمال کند. قطعاً ما به عنوان یک انجمن، و با همکاری ICMI، باید یک وضعیت انتقادی در مورد عقاید و ارزش‌هایی که جامعه مایل است به ما تحمیل کند، توسعه بدهیم. ما بهتر از دیگران قادر هستیم دعاوی عینیت را زیر سؤال ببریم. در مقابل نیز، به نقطه‌نظراتی که در آموزش ریاضی فاقد معنی است واکنش نشان دهیم و ابزارهای اندازه‌گیری مورد استفاده را در تعیین این‌که چه چیز دانش محسوب می‌شود و چه چیز نه، مورد سؤال قرار دهیم. هم‌چنین ما باید تأکید کنیم که دانش ریاضی با چندگونگی صوری که داراست، نمی‌تواند به سادگی در یک ساختار تک‌بعدی تصرف شود. اما با تمام این‌ها، ما نمی‌توانیم خواسته‌های اجتماعی و سؤالات آن‌ها را در مورد این‌که چگونه اقدامات پژوهشی را انجام داده‌ایم و این‌که چگونه نتایج آن را خارج از جامعه‌ی محققین این موضوع، پخش و توزیع نموده‌ایم، نادیده بگیریم. من دو چالش اساسی را که نسبتاً به یکدیگر وابسته هستند، برای آینده‌ی نزدیک پیش‌بینی می‌کنم:

- جدی گرفتن مسائل مقیاس‌گذاری یا سنجش و در نظر گرفتن آن‌ها به عنوان سؤالات پژوهشی واقعی که راه‌حل آن‌ها نیازمند دانش به‌خصوصی است، توسعه‌ی ساختارها و اُسلوب‌شناسی‌های ویژه، مشارکت متخصصین موجود در این رشته و معرفی همکاران جدید و انواع جدید طرح‌های تعلیم و تربیتی، قوی‌تر از محصولات تصنعی که معمولاً توسط محققین ساخته می‌شود.
- یافتن روش‌هایی برای قابل درک نمودن نتایج تحقیقات انجام شده در آموزش ریاضی و مفید نمودن آن‌ها برای به کار بردن. به عنوان مثال، ICMI سعی دارد توسط مجموعه مطالعات ICMI برای تحقق بخشیدن به این تلاش همکاری کند. این مطالعات که به‌صورت کتاب در دست‌رس است، به زودی پس از گذشت سه سال از انتشار آن‌ها، از طریق اینترنت برای همگان قابل دست‌رس خواهد بود. اما هنوز کارهای بیشتری پیش‌روی داریم.

جرمی: در مورد سؤال انتظارات اجتماعی در هر جامعه، مردم انتظار دارند که فرزندانشان ریاضیات را در سطح بالایی، در وهله‌ی اول برای استفاده‌ی شخصی خودشان یعنی این‌که هر کودکی لازم است برای عملکرد در جامعه‌ی ریاضی بداند ـ فرا گیرند. اما یک نیاز اجتماعی نیز ایجاب می‌کند که مردم از دانش ریاضی برخوردار باشند. این مجموعه از انتظارات دوگانه، برای ما مسائل زیادی مطرح می‌کند. یکی از مهم‌ترین مسائلی که در تلاش برای تغییر ریاضیات در جامعه با آن روبه‌رو می‌شویم، این است که عامه‌ی مردم مایل‌اند ریاضیات را آن‌گونه که خود در مدرسه آموخته‌اند، تعریف کنند و این اغلب مانعی برای تغییر است. و تجربه به ما می‌گوید، تغییر این‌که ریاضیات چگونه آموخته شود، احتمالاً مشکل‌تر از تغییر موضوعاتی است که تدریس می‌شوند؛ هر چند که هر دو این‌ها اقداماتی دشوار هستند.

جامعه هم‌چنین انتظار دارد که تحقیق در آموزش ریاضی بتواند پاسخ‌هایی قطعی در مورد یادگیری و یاددهی ریاضیات فراهم آورد. تلاش برای آمیختن تحقیقات روی یک موضوع مفروض، تقریباً همواره مأیوس کننده بوده است. سیاست‌گذاران مایل‌اند بتوانند ادعاهایی در مورد علت مؤثر بودن اقدامات آموزشی متفاوت، ابراز کنند، اما دلایل ضعیفی وجود دارد که باور کنیم یک اقدام یگانه می‌تواند به‌طور یکسان در همه‌ی مباحث، همه‌ی معلمان و همه‌ی دانش‌آموزان مؤثر باشد. پژوهشگران و سیاست‌گذاران باید از مقایسه‌ی میانگین میزان عملکرد گروه‌هایی که اقدامات تعلیمی ابتکاری و جایگزین دریافت می‌کنند، دوری کنند. آن‌ها باید به واریانس و نه به میانگین، توجه کنند. این‌که در چه موضوعاتی تفاوت وجود دارد؟ برای کدام معلمان؟ برای کدام گروه از دانش‌آموزان؟

راه‌های متفاوت بسیاری برای دست‌یابی به مسئله‌ی آهسته به جریان انداختن تحقیق هنگام اعمال پیشنهادات مورد نظر وجود دارد. همان‌طور که قبلاً در بحث شواهد اشاره کردم، انجمنی که کتاب «جمع آموخته‌ها» را منتشر کرد و (کیل‌پاتریک، و همکاران، ۲۰۰۱)، نظر سخاوتمندانه و معقولی به آن‌چه که تحقیقات می‌تواند به ما بگوید، انداخته و توانسته است طیف وسیعی از شواهد را بررسی کند. فرهنگستان تعلیم و تربیت ایالات متحده در سال جاری، اصطلاحاً ابتکار برگه‌های سفید را به‌کار گرفته است تا برای سیاست‌گذاران در دولت آینده و مجلس بهترین مدارک و شواهد قابل دست‌رس در مورد مسائل مربوط به خط‌مشی‌های آموزشی انتخاب شده را فراهم آورد. گروهی که روی سیاست آموزش ریاضی و علوم کار می‌کند، مانند کمیته‌ی مطالعه‌ی یادگیری ریاضیات، شبکه‌ی نسبتاً گسترده‌ای برای جمع‌آوری اطلاعات که سیاست‌گذاران را آگاه سازد، دایر کرده است.

در مقابل، یکی از مسائل مطرح شده توسط هیئت ملی مشاوره‌ی ریاضیات (۲۰۰۸) در گزارش اخیر خود، استفاده از معیار بسیار دقیق، برای بررسی کیفیت مدارک بررسی شده بود. این رویکرد خارج از نظریه بر مبنای تجربه‌ی شخصی، هیئت را با دستاورد اندکی در مورد این‌که فرهنگ در موضوعات مختلف چه

می‌گوید، رها کرد. پاسخ‌های قطعی برای اغلب پرسش‌هایی که جامعه انتظار جواب آن را دارد ممکن نیست، اما در هر صورت محققین بر آن‌اند که راه‌های بهتری برای بررسی این پرسش‌ها بیابند. هرگز مدرک کافی وجود ندارد و من با میشل در مورد مقیاس‌گذاری و سنجش تحقیقاتمان و پیدا کردن راه‌هایی برای انتشار آن به‌صورتی روشن و مفید، موافقم.

دیدگاه‌های آموزش و یادگیری ریاضیات و شواهد مربوط به آن تا چه حدی می‌تواند از چندگونگی فرهنگی و مفادهای آموزشی فراتر رود؟

جرمی: چندگونگی، آن‌چه را که ما می‌توانیم به عنوان اعضای آن‌چه که ما یک جامعه‌ی یکسان می‌پنداریم، به یکدیگر بگوییم مشروط می‌کند. هنگامی که ما می‌گوییم «جبر» و یا «برنامه‌ی درسی» و یا همان‌طور که قبلاً گفته‌ام «یادگیرنده محور»، بین فرهنگ‌ها و حتی داخل فرهنگ‌ها، منظورمان چیست؟ به‌علاوه تلاش برای موضعی کردن ریاضیات همواره موفقیت‌آمیز نبوده است.

مثلاً کار با ارزش **اوبی دامبروسیو** در ریاضیات قومی، در برنامه‌ی درسی ریاضیات بسیاری از کشورها به طرز گسترده‌ای نفوذ کرده است، ولی در جاهای دیگر اثر چندانی نداشته است. مردم می‌خواهند به آن‌چه که فکر می‌کنند، عمومیت دهند و در عین حال ما باید به نوعی برای ریاضیات مدرسه راه‌هایی پیدا کنیم که به‌طور جدی به شرایط قومی توجه کند.

برمی‌گردیم به مسئله‌ی مطالعات تطبیقی بین‌المللی مانند TIMSS و PISA. باید توجه کرد که این گونه مطالعات به نوعی به برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه که در آن‌جا متعارف است، وابسته است و می‌تواند به عنوان الگویی برای سنجش و ارزیابی برنامه‌ی درسی کشورهای مختلف، مورد استفاده قرار گیرد. این برنامه درسی متعارف یا ایده‌آل برنامه‌ای نیست که بتوان آن را در کشور خاصی یافت. بلکه، یک ساختار فرضی است که برای ممکن نمودن استفاده از مجموعه‌ای مشترک از پرسش‌های ارزیابی در سراسر مرزهای ملی، طراحی شده است (کایتل و کیل پاتریک، ۱۹۹۹). در نتیجه، بنیان‌گذاران مطالعات تطبیقی بین‌المللی، مسئله‌ی چندگونگی فرهنگ‌ها و متون آموزشی را با کنار زدن سؤالات توصیفی و تنها شرایط موضعی بررسی کردن این پرسش که آیا دانش‌آموزان «فرصت برای یادگیری» محتویات احتمالاً ارزیابی شده توسط پرسش‌های ارزیابی را داشته‌اند، تقلیل می‌دهند.

ما هنوز با این مشکل که مدت‌ها پیش توسط **هانس فرودنتال** (۱۹۷۵) معرفی شده است، یعنی ساختن ابزارهای ارزش‌یابی که از لحاظ بین‌المللی هم‌ارز باشد و در عین حال شرایط محلی را نیز در نظر گرفته باشند، روبه‌رو هستیم. آموزشگران ریاضی مدت‌هاست که اعتراف کرده‌اند، آن‌چه به‌عنوان برنامه‌ی درسی ارائه می‌شود، شباهت اندکی به برنامه‌ی درسی رسمی مصوب وزارت آموزش و پرورش دارد و قطعاً در کلاس درس می‌تواند مانع سهمگینی برای تغییر باشد. هم‌چنین جالب است بدانیم که نظام‌های متمرکز غالباً آن‌چنان که ما فکر می‌کنیم، متمرکز نیستند و نظام‌های غیرمتمرکز آن‌طور که عموماً تصور می‌شود، غیرمتمرکز نیستند (هاوسون، کایتل، و کیل پاتریک، ۲۰۰۸/۱۹۸۱). مدت‌ها قبل، پیش از آن‌که انگلیسی‌ها یک برنامه‌ی درسی ملی داشته باشند، یک بازرس آموزشی فرانسوی یک بار عقیده‌ی زیر را ابراز کرد که من فکر می‌کنم فقط در مورد فرانسه و انگلستان صدق نمی‌کند:

در فرانسه، فرض بر این است که تمام معلمان در زمان یکسان کار یکسانی انجام دهند، اما هیچ‌کس چنین نیست و در انگلستان، که فرض بر این است که هر کسی به روش خود عمل کند، هیچ‌کس این‌طور نیست.

میشل: من با شما موافق هستم. مدت‌ها پیش چنین بود و امروزه هیچ بازرس فرانسوی جرئت گفتن این را ندارد.

من مایل هستم به چندگونگی از زاویه دیگری نگاه کنم. همان‌طور که در مراسم افتتاحیه گفتم، به گوناگونی می‌توان از دید منفی، به عنوان مانعی در راه نوع شواهد کلی که رشته‌ی آموزش ریاضی، اگر یک زمینه‌ی علمی واقعی بود می‌بایست تهیه کند، نگاه کرد. به نظر من، این یک دیدگاه کاملاً نادرست است. من می‌خواهم روی جنبه‌ی مثبت گوناگونی در آموزش ریاضی تأکید کنم. در ۱۵ سال گذشته، زمینه‌ی کاری ما از چندگونگی، واقعیت‌های بسیار زیادی را فرا گرفته است.

یک مثال جالب به طور غیر مستقیم از مقایسات بین‌المللی که چند لحظه پیش مورد انتقاد قرار دادم، نتیجه می‌شود. TIMSS توجه خود را به سمت برخی مناطق ناحیه‌ای مانند آسیا، که در آن‌جا چندین کشور نتایج درخشان‌تری نسبت به بیشتر کشورهای غربی در آزمون‌های پیشرفت TIMSS به‌دست آورده بودند معطوف کرده است. با بررسی‌های تکمیلی، محققین تلاش کرده‌اند دلایل ممکن برای تفاوت‌های مشاهده شده را شناسایی کنند. در این بررسی‌ها ICMI با یک جلد کتاب زیبا (لونگ، گراف و لوپز ـ رییل، ۲۰۰۶)، همراه با مطالعه‌ی سیزدهم ICMI، همکاری کرده است. این کتاب در سال ۲۰۰۶ منتشر شد و آموزش ریاضی رادر سنت‌های فرهنگی متفاوت، مقایسه کرده است. به‌طور دقیق‌تر بگوییم، این کتاب آموزش ریاضی در کشورهای آسیای شرقی وابسته به سنت کنفوسیوس را با آموزش ریاضی در برخی از کشورهای غربی مقایسه کرده است. آن‌چه که ما از این بررسی‌ها آموختیم واقعاً جالب است، چرا که نشان می‌دهد تفاوت اساساً نه از شکل برنامه‌ی درسی نتیجه می‌شود و نه از تعداد ساعاتی که در مدرسه وقف ریاضیات می‌شود و نه از علاقه‌ی دانش‌آموزان به ریاضیات. بلکه تفاوت عمیقاً از آن‌چه که تحصیل کرده‌ی ریاضی در یک فرهنگ کنفوسیوسی معنی می‌دهد، ارتباطی که با دانش و مدرسه ایجاد می‌کند و راه‌هایی که ارتباط دانش‌آموز‌ـ‌معلم و موقعیت‌های آموزشی آنان را شکل می‌دهد، ناشی می‌شود. دانشی که این بررسی‌ها عرضه می‌کنند، هر نوع تلاشی را برای بهبود بخشیدن به وضعیت آموزش ریاضی در هر کشوری، با صرفاً پرداختن به سطح و ویژگی‌های اداری، هرچند هم مهم باشند، فاقد صلاحیت می‌داند و مسیر را به سوی بازتابی پربارتر، با تلاش در درک نقاط قوت و محدودیت‌های انتخاب آموزشی نسبی خود، با قرار دادن آن‌ها در یک ساختار کلی‌تر با مؤلفه‌های فرهنگی قومی و استفاده از این درک برای تفکر در مورد جایگزینی و تغییر، هموار می‌کند. هم‌چنین وظیفه‌ی ماست که سیاست‌گذاران را از این امر آگاه کنیم. چرا که آن‌ها غالباً به خودی خود آگاه نیستند و در انتظار یک معجزه و یا ارزان‌ترین راه‌حل برای مسئله هستند.

آن‌چه که در این پدیدار جالب توجه نیز هست، این واقعیت است که چشم بیگانگان، شناسایی طرح‌های اصیل با ظرفیت تعلیم و تربیتی مهم را که به‌عنوان واقعیت‌های طبیعی در این فرهنگ‌ها موجود بوده، مجاز کرده است. به‌عنوان مثال، نظام بررسی دروس را (که در ژاپن برای پیشرفت تخصصی و حرفه‌ای استفاده می‌شد، توسط این مطالعات تطبیقی آشکار شد و از آن زمان خود یک موضوع تحقیق شده است) می‌توان نام برد.

می‌توانم مثال‌های بسیار دیگری در مورد آن‌چه که از چندگونگی یاد گرفته‌ام نام ببرم. تنها مثال دیگری که بیشتر شخصی است را به‌طور خلاصه ذکر می‌کنم. با مطالعات مقایسه‌ای پیرامون یادگیری و یاددهی جبر که توسط بررسی‌های ICMI روی این موضوع (ستیسی، چیک، و کندال، ۲۰۰۴) انجام شده بود، من نسبت به گوناگونی راهبردهای آموزشی که در سطح جهانی برای آشنا کردن دانش‌آموزان با دنیای جبر به‌کار می‌رود، آگاه شدم. در نتیجه‌ی این بررسی، من الزامات نسبی این راهبردهای متفاوت را در مورد مشکلات حاصل از گذر بین دروس حساب و جبر، بهتر درک می‌کردم. شکی نیست که پایان‌نامه‌ی خانم **بریژیت گروژن** (۱۹۹۵) که در بالا به آن اشاره کردم، مرا نسبت به این الزامات حساس کرده بود. اما بدون این بررسی‌های مقایسه‌ای، من فاقد نوع شواهدی که توسط تجزیه و تحلیل استفاده از راهبردهای آموزشی متفاوت در مقیاس وسیع تهیه می‌شود، بودم.

امروز آموزش ریاضی با چه چالش‌های اساسی روبه‌روست؟

میشل: در فرصت باقی‌مانده، دادن یک پاسخ منطقی به این سؤال مشکل است، اما ما سه چالش اساسی را انتخاب کرده‌ایم:

● **چالش فناوری**

من به مدت بیش از ۲۰ سال در فعالیت‌های پژوهشی و آموزشی در ارتباط با فناوری سروکار داشته‌ام، لذا نسبت به آن خیلی حساس هستم. واضح است که نظام‌های آموزشی هنوز با دستورهایی که هنگام استفاده از محصولات فناوری با آن‌ها برخورد می‌کنند، در ستیزند. این مشکلات نه تنها به تازه‌ترین فناوری‌ها مربوط می‌شود، بلکه حتی آن‌هایی که بیش از دو دهه قبل توسعه یافته‌اند، مانند ماشین حساب‌های گرافیکی و نرم‌افزار هندسه‌ی دینامیک را نیز در برمی‌گیرد. اما امروزه تکامل فناوری ما را وارد دوره‌ی جدیدی کرده است که در آن فناوری نه تنها اشیای ریاضی، بازنمایی آن‌ها و روش‌هایی که توسط آن‌ها می‌توانیم این بازنمایی‌ها را اداره و به یکدیگر مرتبط کنیم را تحت تأثیر قرار داده است، بلکه تعاملات تعلیم و تربیتی، و کلی‌تر بگوییم، راه‌های دست‌رسی به اطلاعات را نیز تحت تأثیر قرار داده است. امروزه فناوری دیجیتال می‌تواند از کارهای مشترک ـ چه از راه دور و چه نزدیک ـ بین دانش‌آموزان، بین معلم و دانش‌آموزان، بین معلمان، و بین معلمان و پژوهشگران، پشتیبانی کرده و آن‌ها را پرورش دهد. نتایجی که این کار می‌تواند بر فرایند یادگیری دانش‌آموزان و تکامل عملکرد معلمان و پیشرفت حرفه‌ای آنان داشته باشد، قطعاً یکی از ابعاد اساسی است که تحقیقات آموزشی باید در آینده، به‌طور نظام‌مند آن را کشف کند. مطالعه‌ی هفدهم ICM در فناوری دیجیتال (هویلس، لاگرانژ، سان و سینکلر، ۲۰۰۶) که به‌صورت کتاب (هویلس و لاگرانژ، در حال چاپ) در سال آینده ظاهر خواهد شد، در بررسی این چالش همکاری خواهد داشت.

جرمی:

● **چالش انسجام**[۳۱]

انسجام چالشی است که ما هر دو آن را مهم تلقی می‌کنیم. هرگونه چالشی که در آموزش ریاضیات در برابر ما قرار می‌گیرد، دارای دو جنبه‌ی داخلی و خارجی است و این در مورد چالش انسجام نیز صادق است. از جنبه‌ی داخلی، حوزه‌ی آموزش ریاضی لازم است بهتر از قبل، با گسترش روزافزون نظریه‌ها و ساختارهایی که راهنمای کار ما هستند، روبه‌رو شود. برخی از این نظریات، مانند نظریه‌ی **بروسو** (۱۹۹۷) در زمینه‌ی موقعیت‌های تعلیم و تربیتی یا نظریه‌ی وان **هیلی** (۱۹۸۴) در مدل تفکر ریاضی، در درون این حوزه گسترش یافته‌اند. نظریه‌های دیگر، مانند آن‌هایی که به کارهای **پیاژه** و **ویگوتسکی** مربوط می‌شوند، از خارج وارد شده و در حوزه‌ی ما اقتباس شده‌اند. ما انسجام بیشتری بین نظریه‌های مورد استفاده‌ی خود نیازمندیم.

ما دارای گسترش ساختارها نیز هستیم. من برخی از آن‌ها، مانند دانش پداگوژی محتوا را در بالا معرفی کرده‌ام، ولی می‌توانستم تعداد بیشتری، مانند «شناخت موقعیت‌مدار»[۳۲] یا «نُرم‌های ریاضی ـ اجتماعی»[۳۳] را نام ببرم. این ساختارها امروزه توسط آموزشگران ریاضی با چندین معنی متفاوت مورد استفاده قرار می‌گیرند و این معانی به تحلیل، انتقاد و توضیح نیاز دارند. از نقطه‌نظر بین‌المللی، ما به عنوان یک جامعه در برقراری ارتباط بین زبان‌های بومی خود هنوز مشکل داریم. هنگامی که ما از یک واژه با معانی متفاوت استفاده می‌کنیم، این مشکل بزرگ‌تر می‌شود.

در بسیاری موارد، نوع دیگر چالش داخلی، از شکاف بین پژوهشگران و معلمان ناشی می‌شود. هر چند من بر این باورم که حرکت به سمت این‌که به معلمان بیش از پژوهشگران بها داده شود، در کاهش دادن این شکاف مؤثر بوده است. با وجود این، هنوز تلاش‌های زیادی هست که همه ـ و به خصوص پژوهشگران ـ بایستی برای توسعه‌ی یک رویکرد منسجم در پژوهش، توسط استماع دقیق و همکاری نزدیک‌تر با یکدیگر انجام دهند.

از نقطه نظر خارجی، آن‌هایی که خارج از رشته ما هستند آن را تکه‌تکه می‌پندارند. آموزشگران ریاضی به ندرت با صدای واحدی از اهمیت دستاورد در آموزش سخن می‌گویند. تحقیقات بنیادی در رشته‌ی ما برخی اوقات به عنوان هدایتگر به نتایج متضاد و حمایت‌کننده از عملکردهای کاملاً متفاوت تعبیر می‌شود. غالباً عامه‌ی مردم، ریاضی‌دان و آموزشگران ریاضی را برای حل مسائل آموزش ریاضی در حال ارائه‌ی پیشنهادات متعارض می‌بینند. در واقع، ممکن است این پیشنهادات با هم ناسازگار باشند، ولی من فکر می‌کنم اگر قبل از آن‌که مردم متوجه این تفاوت‌ها شوند و رأی صادر کنند، این تضادها با مصالحه حل شوند، به نفع رشته خواهد بود.

اگر قرار باشد آموزش ریاضی به‌طور جدی به عنوان یک رشته‌ی علمی و عملی محسوب شود، باید در مباحثاتی که خود توسعه می‌دهد، از هر دو جنبه‌ی درونی و بیرونی منسجم‌تر باشد. میشل خبر می‌دهد که در اروپا آموزشگران ریاضی در سال‌های اخیر در این مسیرها تلاش‌هایی را شروع کرده‌اند.[۳۴] پروژه‌های گوناگونی در دست انجام است که از دیدگاه‌های منسجم و ائتلافی حمایت می‌کنند و روشن کننده‌ی وجوه مشترک و تفاوت‌ها هستند. این نوع پژوهش‌ها نمی‌تواند کار فردی باشد و نیازمند هم‌یاری بین‌المللی و ساختارهای مناسب است. این‌ها مسائلی هستند که سازمانی مانند ICMI می‌تواند در بررسی آن همکاری و کمک کند.

میشل: تجاربی که من در پنج سال اخیر روی برقراری یک نوع ائتلاف نظری یا لااقل شبکه‌سازی بین چارچوب‌های نظری در محدوده‌ی فعالیت‌های گروهی CERME که در بالا به آن اشاره شد یا در پروژه‌های مربوط به جامعه‌ی اروپا با تمرکز بر آموزش بر مبنای استفاده از فناوری در ریاضیات داشته‌ام، نشان دهنده‌ی آن است که این تلاش‌ها قابل ستایش است. اما من با جرمی در این مورد که این

تلاش‌ها برای توسعه و پیشرفت، به سازمان‌دهی و ساختار بین‌المللی نیازمند است موافقم. برای من، اولین گواه که از این تلاش نتیجه می‌شود این واقعیت است که تنها با خواندن نوشته‌های محققان که در یک بافت دیگر و یک فرهنگ دیگر زندگی می‌کنند و رویکردهای دیگری دارند، نمی‌توان دریافت که رویکردهای آنان چگونه عملاً روی کار پژوهشی و ادعاهای آنان در مورد شیوه‌ی عمل تأثیر می‌گذارد. برای این کار باید نوعی شیوه‌ی مشترک را توسعه داد که اجازه می‌دهد بین رویکرد نظری و شیوه‌ی عمل وارد فرایند عملکرد شویم. در چارچوب دو پروژه در اروپا به نام‌های TELMA[۳۵] و ReMath[۳۶]، من این فرصت را یافتم که در چنین شیوه‌ای توسط یک روش‌شناسی مبنی بر آزمایش‌های متقابل[۳۷] که از دستورات سختی پیروی می‌کرد همکاری کنم (Artigue et al., 2007).

اکنون، پس از گذشت پنج سال احساس می‌کنم بهتر می‌توانم برخی مقایسات را انجام دهم، این که شبکه‌سازی در کجا مفید و در کجا غیرمفید است، چه چیز مکمل است و چه چیز سازگار نیست. این تلاش‌ها دیدگاه دیگری نسبت به موضوع به شما می‌دهد، اما این که چگونه می‌توانیم دانشی را که به صورت جمعی در این پروژه‌های مربوط به اروپا با مخاطبین بیشتر به‌دست آورده‌ایم با هم سهیم شویم، برای من هنوز یک مسئله‌ی باز است.

● چالش مساوات

در این جا قطعاً همه‌ی ما عقیده داریم که دست‌رسی به آموزش ریاضیات با کیفیت، یک حق انسانی است و آموزش ریاضی بایستی در خدمت داعی تساوی باشد. اما همه‌ی ما می‌دانیم که امروزه وضع غیر از این است. حتی ایده‌ی ریاضیات برای همه و پرورش استعدادهای ریاضی دو آرزوی مخالف هم هستند و این به هیچ وجه یک موضع‌گیری حاشیه‌ای نیست. آموزش ریاضی در بسیاری از نقاط جهان به تفاوت اجتماعی کمک می‌کند و حتی خود، سرچشمه‌ی تبعیض است. تحقیقات شواهد بسیاری را در این مورد فراهم آورده است، به‌ویژه از زمان پژوهش ابداعی **کاراهر**، **کاراهر** و **شیلدمن** (۱۹۸۵ و ۱۹۸۷) با فروشندگان خیابانی برزیلی، که نشان می‌داد مدرسه نتوانسته است از دانش و تجاربی که این شاگردان از فعالیت‌های خارج از مدرسه به دست آورده بودند، استفاده کند. تجارب و مطالعات انجام شده در دهه‌ی اخیر ـ مثلاً پژوهش توسعه یافته توسط **جوبولر** (۲۰۰۰ و ۲۰۰۸) در انگلستان و سپس در ایالات متحده. البته مثال‌های بسیار دیگری هم وجود دارد که نشان می‌دهد که وضعیت جاری وخیم نیست. نتایج حاصل از کار آن‌ها، امروز قضایای وجودی را برای ما به ارمغان آورده است. من واقعاً امیدوارم که مطالعه‌ی جدید ICMI روی یاد دادن و یاد گرفتن ریاضیات در بافت‌های چندزبانه، اساساً به تفکر و اندیشه در این دامنه کمک کند.

من سخن خود را با جمله‌ای از سرمقاله‌ی خانم **جیل آدلر**، نایب‌رییس ICMI در خبرنامه‌ی ICMI ژوئن (۲۰۰۸) به پایان می‌رسانم. او سؤالی که در ماه مارس در نشست روم به مناسبت سده ICMI مطرح شده بود را تکرار کرده است: «کارهایی که ما انجام می‌دهیم، چگونه به هدف (پروژه) میلینیوم در مورد جهانی کردن آموزش ابتدایی تا سال ۲۰۱۵، کمک می‌کند؟» در این سرمقاله، او اظهار امیدواری کرده است که ICME-11 با فعالیت‌های گوناگون خود و مورد توجه خاص قرار دادن این چالش، به ما کمک خواهد کرد گام‌هایی محکم در این راستا برداریم، به‌طوری که در سال ۲۰۱۲، در کنفرانس بعدی ICME که در سئول برگزار خواهد شد، بتوانیم شواهدی از پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای در این راستا را با خود به ارمغان ببریم. من در این امید با او همراهی می‌کنم و مطمئن هستم جرمی نیز همین احساس را دارد.

پی‌نوشت

* مطلب حاضر، با کسب اجازه از آقای دکتر علی رجایی (مترجم مقاله) و آقای محمود تلگینی (مدیرمسئول نشریه‌ی فرنود) و اندکی ویرایش مجدد، در ویژه‌نامه‌ی شماره‌ی ۱۰۰ چاپ شده است.

1. Michele Artigue
2. University Paris-Diderot-Paris7.
3. ICMI
4. Jeremy Kilpatrik
5. University of Georgia
6. Teacher College, Columbia University
7. University of California at Berkeley
8. Stanford University
9. Gothenburg University
10. Fulbright Awards
11. 2007 Felix Klein Medal
12. Diversity
13. Didactics
14. Determination
15. Yves Chevallard
16. Constructivism
17. Representation
18. The Journal of Mathematics Teacher Education

۱۹. رساله آموزشی معلمان ریاضی که در سال ۲۰۰۸ توسط انتشارات سنن چاپ شده است و حاوی چهار جلد است که به ترتیب توسط پیتر سولیوان و تری وود (ج ۱)، دینا تیروش و تری وود (ج ۲)، کنراد کرینرو تری وود (ج ۳)، باربارا جاورسکی و تری وود (ج ۴) نگارش شده است.

20. Gesture
21. Pedagogical Content Knowledge
22. Mathematical Knowledge for Teaching
23. (Trends in International Mathematics and Science Study), (Hiebert et al., 2003; Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll, & Serrano, 1999)
24. Learner's Perspective Study (Clarke, Emanuelsson, Jablonka, & Mok, 2006; Clarke, Keitel, & Shimizu, 2006)
25. Canonical Curriculum
26. (Programme for International Student Assessment)
27. Overcoming False Dichotomies
28. Epistemic
29. Adding it Up

۳۰. برای یک نظریه‌ی توسعه یافته در مورد استنتاج‌های اتفاقی، به ماکسول مراجعه کنید (۲۰۰۴).

31. Triangulation
32. Objectivity
33. Coherence
34. Situated Cognition
35. Sociomathematical Norms

۳۶. به‌عنوان مثال، این تلاش‌ها توسط یک گروه که به‌طور خاص خود را وقف پاسخ‌گویی به این سؤالات کرده است، در کنفرانس‌های اخیر انجمن اروپایی پژوهش در آموزش ریاضی اثبات شده است (CRME4, CERME5, CERME6). برای اطلاعات بیشتر به مجموعه مقالات ERME که به‌صورت آنلاین در سایت http://eremeweb.free.fr موجود است، مراجعه کنید.

۳۷. TELMA یک تیم پژوهشی در اروپاست که وابسته به یک شبکه‌ی اروپایی کلایدوسکوپ است. فعالیت‌های آن روی آموزش توسعه‌ی فناوری در ریاضیات متمرکز است. انتشارات TELMA از طریق سایت اینترنتی آن قابل دست‌رس است:
http://telma.noe-kaleidoscope.org

38. ReMath (Representing Mathematics with Digital Media)
(نماینده‌ی ریاضیات با دستگاه‌های تبلیغاتی دیجیتال) یک پروژه در کشور اروپا از طرف (Information Society Technologies, Programme IST 4-26751) است.
اطلاعات در مورد پروژه ReMath را می‌توان از طریق سایت http://www.remath.cti به دست آورد.

39. Cross-experiments

جای a چه خالی است!

امیرحسین اصغری، دانشگاه شهید بهشتی

این یادداشت با چند «تجربه‌ی جبری» شروع و با یک «پندِ جبری» خاتمه می‌یابد. از آن‌جایی که به دل (ذهن) نشستنِ یک پند جبری، مانند هر پند دیگری، نیازمند تجربه‌ای آشناست، لطفاً بعد از پر کردنِ «جای خالی» در هر یک از مسائل زیر، کمی مکث کنید و به نقشی که شکلِ جایِ خالی و رنگ آن در مسأله ایفاء می‌کند (یا نمی‌کند) فکر کنید.

ریاضی اول دبستان: $\square + \square = ۳$

(هر دو جای خالی زرد است.)

ریاضی چهارم دبستان: $۷ \times ۴ = \square \times \square$

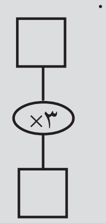
(هر دو جای خالی صورتی است.)

ریاضی دوم راهنمایی: $\square + \triangle = -۱۲$

(مثلث بنفش و مربع زرد است.)

اگر هنوز دلیل سازگاری برای انتخاب شکل و رنگ جاهای خالی پیدا نکرده‌اید ناامید نشوید؟ مثال بعدی نشان می‌دهد که شاید اصولاً چنین دلیلی وجود ندارد.

ریاضی دوم راهنمایی:



(مربع بالایی، زرد و مربع پایینی سبز است.)

تفسیر شکل با مربع‌های غیر هم‌رنگ (مثلِ شکل کتاب): مربع زرد، a و مربع سبز ۳a است.

تفسیر شکل با مربع‌های هم رنگ (مثل شکلِ روی تخته): مربع یک «مکان نگه‌دار» است، بعضی وقت‌ها a را نگه می‌دارد، بعضی وقت‌ها، ۳a را.

هر دو تفسیر از $۳ \times \square$ دورند؛ اما به هر حال تفسیر اول کمی بهتر از تفسیر دوم است. بالاخره رنگ به کار آمد! ولی آیا در میان این همه جای خالیِ رنگی رنگی، رنگ این یکی اهمیت دارد؟

خُب اگر ما مجبوریم به هر دلیلی از این «ترفندهای آموزشی» استفاده کنیم چه بهتر است یک پند جبری را به خاطر بسپاریم:

جای a را با احتیاط خالی کنید!

چون ممکن است دانش‌آموز شما بعداً در جایی بخواند:

«در ریاضی معمولاً به جای استفاده از علامت $\square$ از نمادهای حروف انگلیسی، مانند a، b، c، ... استفاده می‌شود.» (ریاضیات ۱، سال اول دبیرستان)

و ممکن است شما مایل نباشید که او $\square + \square = ۲\square$ را به شکل $a + b = ۲c$ یا $\boxed{۱۱} + \boxed{۱۱} = ۲\boxed{۲}$ تعبیر کند. اما اگر چنین کرد بر او خُرده نگیرید چرا که او به مدت هشت سال همه گونه تعبیر جای خالی را تجربه کرده است.

مروری کوتاه بر یافته‌های

مطالعه‌ی تیمز پیشرفته ۲۰۰۸

ابوالفضل رفیع پور

دانشجوی دکتری ریاضی با گرایش آموزش ریاضی ـ دانشگاه شهید بهشتی

کلیدواژه‌ها: تیمز، تیمز پیشرفته ۲۰۰۸، مطالعات بین المللی.

به جای مقدمه

بالاخره، یافته‌های مطالعه‌ی تیمز پیشرفته ۲۰۰۸، پس از کش و قوس‌های فراوان در نهم دسامبر ۲۰۰۹ بر روی سایت رسمی مطالعه‌ی تیمز منتشر شد. این مطالعه، عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی را در مقایسه با ده کشور دنیا گزارش می‌کند. بر این اساس، رتبه‌ی ایران در بین این ده کشور چهارم است، ولی میانگین نمرات دانش‌آموزان ایرانی در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته در بخش ریاضی، هم‌چنان زیر میانگین بین المللی است! این بخش از یافته‌های مطالعه دور از انتظار بود، چرا که نمونه گیری این مطالعه از بین دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی در رشته‌ی ریاضی انجام شده بود. بنابراین، بهترین دانش‌آموزان ایرانی در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته شرکت کرده بودند، ولی میانگین نمرات دانش‌آموزان ایرانی هم‌چنان پایین‌تر از میانگین بین المللی گزارش شد.

یافته‌های مطالعاتی هم‌چون مطالعه‌ی تیمز پیشرفته، در حکم داده‌های خام هستند که مطالعه‌ی عمیق هر یک از بخش‌های آن، جنبه‌های پنهانی از نظام آموزشی کشور را مشخص می‌کند. در واقع، «ارزش مطالعات بین‌المللی در این است که با وجود مطالعات داخلی، آن‌چه را که باید باشد یا امکان دارد باشد را نشان می‌دهد، نه آن‌چه را که هست یا رخ می‌دهد» (کیامنش، ۱۳۷۷، تک‌نگاشت، ۲۳). علاوه بر این، بنا به گفته‌ی اشمیت و همکاران (۱۹۹۷)، مطالعه‌ی تیمز فرصت مناسبی را ایجاد کرده است تا اجزای ناپیدای برنامه‌ی ریاضیات مدرسه‌ای نیز مورد بررسی قرار گیرند. زیرا تیمز، پاسخ نامه‌ی سؤال‌های متعدد نظام آموزشی نسبت به وضعیت ریاضی و علوم در کشورها نیست، بلکه آینه‌ای است که از طریق آن، می‌توانیم نظام آموزشی خود را از یک منظر بین المللی ببینیم. این داده‌ها به ما کمک می‌کنند تا با نگاه جدیدی به نقایصی از نظام آموزشی خود بنگریم که تا به حال، تصور آن‌ها را هم نمی‌کردیم (گویا، ۱۳۸۱، به نقل از پیک، ۱۹۹۷).

در ادامه‌ی مقاله‌ی حاضر، ابتدا پیشینه‌ی مطالعه‌ی تیمز و انجمن ارزشیابی پیشرفت تحصیلی مورد بررسی قرار گرفته است. سپس نکات برجسته‌ی موجود در یافته‌های مطالعه‌ی تیمز پیشرفته‌ی ۲۰۰۸ بیان خواهد شد. در بخش پایانی نیز، با توجه به پیش‌بینی‌های انجام شده در خصوص عملکرد دانش‌آموزان

ایرانی در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته، چند سؤال در خصوص چرایی مشارکت نظام آموزشی ایران در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته، مطرح شده است. این مقاله، به مناسبت انتشار صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی آماده شده است، به امید آن‌که انتشار صدمین شماره‌ی این مجله، نقطه‌ی عطفی برای شروع بازنگری در نظام آموزشی ریاضی کشور باشد؛ به گونه‌ای که شاهد تغییرات مؤثر و مثبت در آموزش ریاضی کشور باشیم. به‌طور قطع و یقین برای تغییرات مناسب، نیازمند توجه به پژوهش‌های انجام شده در حوزه‌ی آموزش ریاضی و استفاده از آن‌ها هستیم.

پیشینه‌ی مطالعه‌ی تیمز و انجمن ارزشیابی پیشرفت تحصیلی

سومین مطالعه‌ی بین‌المللی ریاضی و علوم که در ادبیات پژوهشی تحت عنوان مطالعه‌ی تیمز[1] از آن یاد می‌شود، از سال ۱۹۹۵ در سه جمعیت دانش‌آموزی شامل پایه‌های سوم و چهارم ابتدایی؛ دوم و سوم راهنمایی و پایه‌ی آخر دبیرستان توسط انجمن بین‌المللی ارزشیابی پیشرفت تحصیلی[2]، طراحی و اجرا شده است. این مطالعه، مهم‌ترین و بزرگ‌ترین مطالعه است که تا کنون انجمن بین‌المللی پیشرفت تحصیلی برگزار کرده است. مطالعه‌ی تیمز، علاوه بر ارزیابی عملکرد دانش‌آموزان در ریاضی و علوم، تفاوت‌های برنامه‌ی درسی کشورهای شرکت‌کننده، روش‌های تدریس، شیوه‌ی ارزشیابی و میزان استفاده از تکنولوژی در کلاس‌های درس را نیز مورد بررسی قرار داده است (کیامنش، ۱۳۷۹).

قرار شد مطالعه‌ی تیمز از سال ۱۹۹۵، هر چهار سال تکرار شود و عملکرد دانش‌آموزان کشورهای شرکت‌کننده در مطالعه را در دو حوزه‌ی ریاضی و علوم مورد بررسی قرار دهد. به این ترتیب که در سال ۱۹۹۹، مطالعه‌ی تیمز فقط برای پایه‌ی سوم راهنمایی تکرار شد و در تکرار مطالعات تیمز در سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۷، پایه‌های چهارم ابتدایی و سوم راهنمایی شرکت داشتند. در سال ۲۰۱۱ نیز دو پایه‌ی چهارم ابتدایی و سوم راهنمایی در مطالعه‌ی تکرار تیمز شرکت خواهند داشت. از مطالعه‌ی تیمز در پایه‌ی آخر دبیرستان، تحت عنوان تیمز پیشرفته[3] نیز یاد می‌شود. نظام آموزشی ایران از سال ۱۹۹۵ در تمام مطالعات انجام شده توسط انجمن ارزشیابی پیشرفت تحصیلی که با عنوانِ مطالعه‌ی تیمز شناخته می‌شوند، شرکت داشته است و تنها در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته ۱۹۹۵ شرکت نداشته است. ایران در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته ۲۰۰۸ شرکت کرده است و این مطالعه، قرار است برای بار سوم در سال ۲۰۱۵ تکرار شود. در جدول شماره‌ی ۱، مطالعات انجام شده با نام اختصاری تیمز، به همراه پایه‌های شرکت‌کننده در این مطالعه و تعداد کشورهای شرکت‌کننده آمده است[4].

جدول شماره‌ی ۱: مطالعاتی که با عنوان تیمز (TIMSS) تاکنون برگزار شده‌اند.

نام مطالعه‌ی تطبیقی	سال برگزاری	پایه‌هایی که مورد آزمون قرار گرفته‌اند	تعداد کشورهای شرکت‌کننده
تیمز	۱۹۹۵	سوم و چهارم ابتدایی دوم و سوم راهنمایی	۴۵ کشور
		سال آخر دبیرستان (تیمز پیشرفته ۱۹۹۵)	سواد ریاضی و سواد علوم: ۲۱ کشور؛ ریاضی و فیزیک پیشرفته: ۱۶ کشور
تیمز (مطالعه روند)	۱۹۹۹	سوم راهنمایی	۳۸ کشور
تیمز (مطالعه روند)	۲۰۰۳	چهارم ابتدایی و سوم راهنمایی	۴۹ کشور
تیمز (مطالعه روند)	۲۰۰۷	چهارم ابتدایی و سوم راهنمایی	۶۷ کشور
تیمز پیشرفته	۲۰۰۸	سال آخر دبیرستان (فقط در حوزه‌های ریاضی و فیزیک پیشرفته)	۱۰ کشور

در مطالعه‌ی تیمز در سال ۱۹۹۵، دانش‌آموزان ایرانی رتبه‌ی خوبی کسب نکردند و عملکرد ریاضی آن‌ها با میانگین جهانی فاصله‌ی زیادی داشت. در تکرار مطالعه‌ی تیمز در سال ۱۹۹۹ نیز، رتبه‌ی دانش‌آموزان ایرانی رضایت‌بخش نبود و میانگین عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی به‌طور معناداری پایین‌تر از میانگین بین‌المللی بود (کیامنش، ۱۳۷۹). در مطالعات تیمز در سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۷ نیز این نتایج به همین صورت تکرار شد و میانگین نمرات دانش‌آموزان ایرانی بدون تغییر باقی ماند (وب‌سایت رسمی مطالعه‌ی تیمز). اکنون با توجه به سوابق نظام آموزشی ایران در مطالعه‌ی تیمز، این سؤال مطرح می‌شود که عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته چگونه خواهد بود؟ آیا عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در سال آخر دبیرستان با عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در پایه‌های چهارم ابتدایی و سوم راهنمایی متفاوت خواهد بود؟ با توجه به این‌که نمونه‌گیری مطالعه‌ی تیمز پیشرفته ۲۰۰۸ در ایران از بین دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی ـ فیزیک در دوره‌ی پیش‌دانشگاهی صورت گرفت، انتظار می‌رفت که نتایج این مطالعه، عملکرد بهترین‌های جمعیت دانش‌آموزی ایران را در رابطه با ریاضی و علوم پیشرفته نشان دهد. در نتیجه، نظام آموزشی ایران با وجود

عدم شرکت در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته‌ی ۱۹۹۵، به‌منظور سنجش عملکرد دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته ۲۰۰۸ شرکت کرد. در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته ۱۹۹۵، شانزده کشور در بخش ریاضی و فیزیک پیشرفته شرکت داشتند که فهرست آن‌ها در جدول شماره‌ی ۲ آمده است.

جدول شماره‌ی ۲: کشورهای شرکت‌کننده در بخش ریاضیات پیشرفته از مطالعه‌ی تیمز پیشرفته ۱۹۹۵.

استرالیا[1]	ایتالیا
اطریش	لیتوانی
کانادا	روسیه
قبرس	اسلوونی
چک	سوئد
دانمارک	سوئیس
آلمان	ایالات متحده آمریکا
یونان	

تیمز پیشرفته‌ی ۱۹۹۵، عملکرد دانش‌آموزان پایه‌ی آخر دبیرستان را در چهار بخش **سواد ریاضی**[6]، **سواد علوم**[7]، ریاضیات و فیزیک پیشرفته مورد سنجش و ارزشیابی قرار داد (مولیس و همکاران، ۱۹۹۸). البته تعداد کشورهای شرکت‌کننده در هر یک از بخش‌های سواد ریاضی، سواد علوم و ریاضی و فیزیک پیشرفته متفاوت بود و عملکرد کشورها و رتبه‌بندی آن‌ها نیز در این بخش‌ها، با یکدیگر فرق داشت. مثلاً روسیه و فرانسه در بخش ریاضی پیشرفته دارای بالاترین نمره بودند، ولی در حوزه‌ی سواد ریاضی، در رتبه‌های پایین‌تری قرار داشتند. این در حالی بود که دانش‌آموزان هلندی در بخش سواد ریاضی حائز بالاترین رتبه شدند (بروشور تیمز، ۱۹۹۸). در مطالعه‌ی اخیر، نمونه‌گیری از دانش‌آموزان در دو بخش سواد ریاضی و سواد علوم از بین همه‌ی دانش‌آموزانی که در پایه‌ی آخر دبیرستان مشغول تحصیل هستند، صورت گرفت. در صورتی که در دو بخش ریاضی پیشرفته و فیزیک پیشرفته، تنها عده‌ی خاصی از دانش‌آموزان در نمونه‌گیری شرکت داشتند، زیرا بسیاری از کشورهای شرکت‌کننده در تیمز پیشرفته به‌طور رسمی دارای رشته‌های تحصیلی مجزا در دوره‌ی متوسطه‌ی نظری نیستند و دانش‌آموزان بر حسب آن رشته‌ها، تقسیم نمی‌شوند[8]. نوع دیگری از تقسیم‌بندی دانش‌آموزان در این کشورها اعمال می‌شود. به این ترتیب که دانش‌آموزان می‌توانند درس‌های اختیاریِ پیشرفته در زمینه‌های ریاضی، فیزیک و نظایر آن را

یافته‌های مطالعاتی هم‌چون مطالعه‌ی تیمز پیشرفته، در حکم داده‌های خام هستند که مطالعه‌ی عمیق هر یک از بخش‌های آن، جنبه‌های پنهانی از نظام آموزشی کشور را مشخص می‌کند

انتخاب کنند و معمولاً، درصد پایینی از دانش‌آموزان توانایی انتخاب این درس‌ها را دارند. بنابراین، در دو بخش ریاضی و فیزیک پیشرفته از دانش‌آموزانی که درس‌های اختیاری ریاضی و فیزیک را در سال آخر انتخاب می‌کنند، نمونه‌گیری شده است.

مطالعه‌ی تیمز پیشرفته در سال ۲۰۰۸ برای بار دوم و تنها در دو بخش ریاضی و فیزیک پیشرفته اجرا شد. به نوعی می‌توان گفت که انجمن ارزشیابی پیشرفت تحصیلی، فرصت تاریخی خود را برای ادامه‌ی ارزشیابی در حوزه‌ی **سواد ریاضی و سواد علوم** از دست داد و این موقعیت در اختیار مطالعه‌ی پیزا[9] قرار گرفت[10]. در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته ۲۰۰۸، تنها ده کشور شرکت داشتند که نظام آموزشی ایران یکی از آن‌ها بود. جدول شماره‌ی ۳، فهرست این کشورها را نشان می‌دهد.

جدول شماره‌ی ۳: کشورهای شرکت‌کننده در تیمز پیشرفته‌ی ۲۰۰۸.

ارمنستان	نروژ
سوئد	ایتالیا
هلند	اسلوونی
ایران	روسیه
فیلیپین	لبنان

چارچوب ارزیابی ریاضیات پیشرفته در تیمز پیشرفته‌ی ۲۰۰۸، دارای دو بعد محتوایی و شناختی بود که بعد محتوایی، شامل ارزیابی موضوعات درسی شامل جبر، حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه بود و بعد شناختی، به دامنه‌ها و فرآیندهای فکری مورد ارزیابی یعنی دانستن، به کار بردن و استدلال پرداخت تا رفتارهای ذهنی‌ای را توصیف کند که انتظار می‌رود دانش‌آموزان هنگام درگیر شدن با محتوای ریاضی، از آن‌ها استفاده کنند.

نگاهی به نکات برجسته‌ی مطالعه‌ی تیمز پیشرفته‌ی ۲۰۰۸

در این بخش، تنها به نکات برجسته‌ای که در نگاه اولیه به

عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی شرکت‌کننده در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته ۲۰۰۸ دیده می‌شوند، اشاره می‌گردد. واضح است که با بررسی دقیق‌تر یافته‌های این مطالعه، می‌توان به جمع‌بندی‌های عمیق‌تری دست یافت که پرداختن به آن، به مجالی دیگر موکول می‌شود.

● عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی شرکت‌کننده در مطالعه‌ی تیمز در بین ده کشور، حائز رتبه‌ی چهارم شد، ولی میانگین نمرات دانش‌آموزان ایرانی، هم‌چنان پایین‌تر از میانگین بین‌المللی است. میانگین عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در این مطالعه ۴۹۷ گزارش شده است و این در حالی است که در آزمون تیمز پیشرفته ۲۰۰۸، سؤال‌های ریاضی با میانگین ۵۰۰ و انحراف معیار ۱۰۰ نمره‌گذاری شده‌اند. بنابراین، میانگین نمرات دانش‌آموزان ایرانی سه نمره کمتر از میانگین بین‌المللی است.

● عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در بخش‌های مختلف محتوایی و شناختی متفاوت بود. به‌طوری که عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در حوزه‌ی جبر و هندسه، بهتر از عملکرد آن‌ها در حوزه‌ی حسابان بود. هم‌چنین، عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در حوزه‌های مختلف شناختی دانش، استدلال و کاربرد به ترتیب ضعیف‌تر شده است. یعنی عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در سؤال‌های مطرح شده در حوزه‌ی دانش بهتر از سؤال‌های مطرح شده در حوزه‌های کاربرد و استدلال است.

● براساس نمودار نشانگر تفاوت جنسیتی در عملکرد ریاضی دانش‌آموزان کشورهای شرکت‌کننده در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته، کشورهای اسلوونی، ایران و فیلیپین، دارای بیشترین تفاوت جنسیتی در پاسخ‌گویی به سؤال‌ها هستند. در این سه کشور، عملکرد ریاضی پسران به‌طور معناداری از عملکرد ریاضی دختران بالاتر است. در حالی که این توازن در مطالعه‌ی تیمز در پایه‌های چهارم ابتدایی و سوم راهنمایی در مورد ایران، به طرف دختران بوده است. یعنی در این دو پایه، دانش‌آموزان دختر ایرانی دارای عملکرد بهتری در مقایسه با پسران ایرانی بودند. وجود تفاوت جنسیتی به نفع پسران یا دختران، یک نکته‌ی منفی در کارنامه‌ی آموزش ریاضی ایران محسوب می‌شود، چرا که مساوات آموزشی که یکی از شش اصل مطرح شده در اصول و استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای (NCTM ـ ۲۰۰۰) است و نظام آموزشی ایران نیز پیوسته بر آن تأکید داشته است، را تهدید می‌کند. بنابراین، به‌نظر می‌رسد مطالعه‌ی تفاوت‌های جنسیتی موجود در مطالعه‌ی تیمز، ضروری است.

بنا به گفته‌ی اشمیت و همکاران (۱۹۹۷)، مطالعه‌ی تیمز فرصت مناسبی را ایجاد کرده است تا اجزای ناپیدای برنامه‌ی ریاضیات مدرسه‌ای نیز مورد بررسی قرار گیرند. زیرا تیمز، پاسخ‌نامه‌ی سؤال‌های متعدد نظام آموزشی نسبت به وضعیت ریاضی و علوم در کشورها نیست، بلکه آینه‌ای است که از طریق آن، می‌توانیم نظام آموزشی خود را از یک منظر بین‌المللی ببینیم

● نمرات دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته‌ی ۲۰۰۸ در سه سطح متوسط، خوب و عالی طبقه‌بندی شده است. تعریف مطالعه‌ی تیمز پیشرفته برای سطح متوسط، خوب و عالی به ترتیب نمرات بالاتر از ۴۷۵، ۵۵۰ و ۶۲۵ هستند. بر این اساس، درصد دانش‌آموزان ایرانی که این سطوح را پشت سر گذاشته‌اند، به ترتیب ۵۶ درصد متوسط، ۲۹ درصد خوب و تنها ۱۱ درصد در سطح عالی می‌باشد[۱۱].

● در این قسمت، عملکرد ریاضی دانش‌آموزان کشورهای شرکت‌کننده در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته‌ی ۲۰۰۸ در ۲ سؤال منتخب مورد بررسی اجمالی قرار می‌گیرد. ویژگی این دو سؤال برای انتخاب شدن این است که در یکی از آن‌ها عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی بالاتر از میانگین بین‌المللی است، ولی در دیگری چنین نیست.

سؤال ۱: حد عبارت زیر را به‌دست آورید. مراحل کار خود را نشان دهید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}+x-۲}{x^{۲}-۱}$$

جدول شماره‌ی ۴: میانگین نمره‌ی دانش‌آموزان ایرانی در مقایسه با میانگین نمره‌ی دانش‌آموزان سایر کشورها در سؤال ۱.

میانگین ایران	میانگین ارمنستان	میانگین ایتالیا	میانگین لبنان	میانگین هلند	میانگین نروژ	میانگین فیلیپین	میانگین روسیه	میانگین اسلوونی	میانگین سوئد	میانگین بین‌المللی
۷۹/۹	۲۱/۷	۵۵/۹	۷۳/۱	۵/۸	۱۶/۲	۳۲/۵	۴۳/۱	۴۱	۸	۳۹/۱

سؤال ۲: یک کاغذ $A_۴$ با ضخامت ۰/۰۱ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده و سپس آن‌ها را روی هم قرار دهید. این دو تکه کاغذ را دوباره به دو قسمت تقسیم کنید تا ۴ تکه کاغذ تولید شود. اگر این فرایند را ۸بار دیگر تکرار کنیم، ضخامت این کاغذها چه‌قدر خواهد بود؟

الف) ۰/۲ سانتی‌متر

ب) ۱۰/۲۴ سانتی‌متر

ج) ۲۰/۴۸ سانتی‌متر

د) ۳۲/۰ سانتی‌متر

جدول شماره‌ی ۵ : میانگین نمره‌ی دانش‌آموزان ایرانی در مقایسه با میانگین نمره‌ی دانش‌آموزان سایر کشورها در سؤال ۲ .

میانگین ایران	میانگین ارمنستان	میانگین ایتالیا	میانگین لبنان	میانگین هلند	میانگین نروژ	میانگین فیلیپین	میانگین روسیه	میانگین اسلوونی	میانگین سوئد	میانگین بین‌المللی
۳۹/۶	۳۲/۴	۳۸/۹	۳۲/۰	۸۲/۰	۵۳/۸	۳۹/۹	۷۱/۱	۵۱/۶	۵۷/۷	۴۹/۹

۴. سخن پایانی

نظام آموزشی ایران به‌طور مکرر، در مطالعه‌ی تیمز شرکت کرده است، ولی نمره‌ی عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در همه‌ی این مطالعات، پایین‌تر از نمره‌ی میانگین بین‌المللی است و نمره‌ی عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در مطالعه‌ی تیمز طی سال‌های ۱۹۹۵ تا ۲۰۰۷، تفاوت معناداری نکرده است. سؤالی که اکنون مطرح می‌شود این است که اگر قرار است هر بار همان نتایج قبلی را مشاهده کنیم و تغییرات مؤثری در نظام آموزشی کشور اعمال نکنیم، پس ضرورت شرکت در این مطالعه چیست؟ شرکت در مطالعه‌ی بین‌المللی بعدی به شرطی می‌تواند مفید باشد که تغییرات کارآمدی را در حوزه‌ی آموزش ریاضی و با پشتوانه‌ی پژوهش‌های انجام شده براساس داده‌های مطالعه‌ی تیمز، داشته باشیم.

سؤال دیگری که ضروری است در خصوص مطالعه‌ی تیمز پیشرفته ۲۰۰۸ مطرح کرد این است که آیا نتایج عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در بخش ریاضیِ مطالعه‌ی تیمز پیشرفته قابل پیش‌بینی بود؟ همان‌طوری که در بخش قبلی دیدیم، عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در پاسخ‌گویی به سؤال‌های معمولی روتین مانند حد گرفتن، بالاتر از میانگین بین‌المللی بود، ولی عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در حل مسایل زمینه‌مدار، پایین‌تر از میانگین بین‌المللی بود و این نتایج، با یافته‌های پژوهشِ انجام شده توسط رفیع‌پور و گویا (۱۳۸۶) هم‌خوانی دارد. بنابراین، می‌توان ادعا کرد که لااقل بخشی از نتایج عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته‌ی ۲۰۰۸ قابل پیش‌بینی بود. حتی می‌توان پا را فراتر گذاشت و ادعا کرد که این نتایج، تا حد زیادی قابل پیش‌بینی بودند، زیرا با بررسی کتاب‌های درسی و روند مطالعه‌ی ریاضی در پایه‌های مختلف دبیرستان، می‌توان نتایج دانش‌آموزان ایرانی را در مقطع پیش‌دانشگاهی پیش‌بینی کرد. اشمیت و همکاران (۱۹۹۹) نیز در مواجهه با پیامدها، اشاره می‌کنند که نتایج دانش‌آموزان آمریکایی در پایه‌ی آخر دبیرستان، با توجه به نتایج دانش‌آموزان آمریکایی در پایه‌های چهارم و هشتم، دور از انتظار نبوده و قابل

براساس نمودارِ نشانگر تفاوت جنسیتی در عملکرد ریاضی دانش‌آموزان کشورهای شرکت‌کننده در مطالعه‌ی تیمز پیشرفته، کشورهای اسلوونی، ایران و فیلیپین، دارای بیشترین تفاوت جنسیتی در پاسخ‌گویی به سؤال‌ها هستند

پیش‌بینی بودند زیرا برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای آمریکا، بر روی موضوعات کلیدی متمرکز نشده‌اند و موضوعات زیادی را پوشش می‌دهد، بدون آن‌که وقت مناسبی را برای هر موضوع اختصاص بدهد. آن‌ها بدین سبب، اصطلاح «اقیانوسی با عمق کم و سطح زیاد» را برای اولین بار، برای توصیف برنامه‌ی درسی ریاضی و علوم در آمریکا به کار بردند. در نتیجه، با توجه به قابل پیش‌بینی بودن نتایج مطالعه‌ی تیمز پیشرفته‌ی ۲۰۰۸ برای دانش‌آموزان ایرانی، چرا می‌بایست در این مطالعه با صرف هزینه‌ی گزاف شرکت کرد؟ در نتیجه لازم است تا در تعیین خط‌مشی‌های کلی نظام آموزشی کشور، بیش از پیش از نتایج پژوهش‌های مرتبط بهره بگیریم. این مقاله را با نقل قولی از اشمیت و همکاران (۱۹۹۹) به پایان می‌رسانم که «ما در آزمون رد شده‌ایم! آیا در آینده نیز رد خواهیم شد؟»

پی‌نوشت

1. Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)

2. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA)

3. TIMSS Advanced

۴. برای دست‌یابی به اطلاعات بیشتر می‌توان به سایت‌های زیر مراجعه کرد: (www.rie.ir و www.iea.nl و http://timss.bc.edu)

۵. کشورها به ترتیب حروف الفبای انگلیسی نوشته شده‌اند.

6. Mathematics Literacy

7. Science Literacy

8. Tracking

9. Program for International Student Assessment (PISA)

۱۰. دولت‌مردان کشورهای عضو سازمان همکاری توسعه‌ی اقتصادی (OECD) تصمیم گرفتند که عملکرد دانش‌آموزان ۱۵ ساله‌ی کشورهای عضو را در حل مسائل دنیای واقعی اندازه بگیرند و به این ترتیب، مطالعه‌ی پیزا در سال ۲۰۰۰، برای اولین بار اجرا شد. گروه متخصصان ریاضیِ مطالعه‌ی پیزا، با ارایه‌ی یک چارچوب نظری مناسب برای سواد ریاضی وَ سواد علوم، گوی سبقت را از مطالعه‌ی تیمزِ پیشرفته ربودند.

۱۱. جمع این درصدها ۱۰۰ نمی‌شود. به این دلیل که در محاسبه‌ی این درصدها، کمی خطای استاندارد وجود دارد.

منابع

۱ . رفیع‌پور، ابوالفضل و گویا، زهرا، (۱۳۸۶) . پیش‌بینی برخی از نتایج دانش‌آموزان ایرانی در تیمز پیشرفته‌ی ۲۰۰۸ . **مجموعه‌ی گزیده‌ی مقالات نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران**. شهریور ۱۳۸۶ . زاهدان . ایران .

۲ . گویا . زهرا، (۱۳۸۱) . ضرورت انجام مطالعات تطبیقی آموزش ریاضی در ایران با سایر کشورها . **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی** . شماره‌ی ۷ و ۶ . صص ۱۱ـ۴ . دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش . سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی .

۳ . کیامنش، علیرضا و خیریه، مریم (۱۳۷۹) . **روند تغییر درون‌داده‌ها و برون‌دادهای آموزش ریاضی براساس یافته‌های تیمز و تیمز ـ آر** . انتشارات پژوهشکده‌ی تعلیم و تربیت، وزارت آموزش‌وپرورش .

۴ . کیامنش، علیرضا و نوری، رحمان (۱۳۷۷) . **سنجش عملکرد در تیمز (چهارم ابتدایی و سوم راهنمایی)** . تک‌نگاشت ۲۳ . انتشارات پژوهشکده‌ی تعلیم‌وتربیت، وزارت آموزش‌وپرورش .

5. Garden, A. R. et al. (2006) *TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks*. By TIMSS & PERLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

6. Mullis et al, (1998). *Mathematics and Science Achievement in the Final Year of Secondary School: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Boston College: Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy.

7. Mullis V. S. I. Martin, M. O. Robitaille, D. F. & Foy, P. (2009). *TIMSS Advanced 2008 International Report: Finding from IEA's Trend in International Mathematics and Science Study at the Twelve Grade*. TIMSS and PIRLS International Study Center. http://tims.bc.edu/timss_advanced/ir.release.html

8. NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Va: The Author.

9. Schmidt, H. W. et al. (1997). *Many Visions, Aims: Vol. Across National Investigation of Curricular Intention in School Mathematics*. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publisher.

10. Schmidt, H. W. et al. (1999). *Facing the Consequences: Using TIMSS for a Closer Look at U.S. Mathematics and Science Education*. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

راه‌حل‌های درست و نادرست مسائل، هردو متنوعند!

عبداله حسام

آموزشگر ریاضی و دبیر ریاضی اصفهان

چکیده

از نشانه‌های یادگیری مؤثر دانش‌آموزان آن است که بتوانند آموخته‌های خویش را در موقعیت حل مسئله، به کار گیرند. لذا، ایجاد توانایی حل مسئله، یکی از چشم‌اندازهای آموزش ریاضی و علوم است.

شونفیلد (۱۹۸۵) در تبیین فرایند حل مسئله‌ی ریاضی، به چهار مورد اساسی منابع، رهیافت‌ها، کنترل و نظام باورها اشاره نموده است.

در این تحقیق، ابتدا اهمیت توجه به فرایند حل مسئله در کلاس‌های درس ریاضی ذکر شده و مدل حل مسئله شونفیلد معرفی می‌گردد. سپس، به نمونه‌هایی از راه‌حل‌های مختلف ـ و همگی درست ـ که افراد برای حل یک مسئله ارائه کرده‌اند، پرداخته می‌شود؛ راه‌حل‌هایی که شاید با آن‌چه که مورد انتظار معلم است، تطابق ندارد. متعاقب آن، به اهمیت این پدیده و انواع نگرش‌هایی که می‌توان نسبت به آن داشت، و تأثیر این نگرش‌ها بر یادگیری دانش‌آموزان پرداخته می‌شود. در نهایت، به این موضوع پرداخته می‌شود که راه‌حل‌های نادرست نیز می‌توانند بسیار متنوع و متفاوت باشند و برای مثال، به ۴۰ راه‌حل نادرست که دانش‌آموزان سال اول متوسطه، برای ساده کردن عبارت $\frac{6x^2}{2x^2+3x}$ ارائه کرده‌اند، اشاره می‌شد.

کلیدواژه‌ها: حل مسئله، مدل حل مسئله، راه‌حل درست، راه‌حل نادرست، نگرش.

مقدمه

ریاضیات، یکی از مؤلفه‌های اساسی برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای است که با اهداف متعددی در این برنامه جای گرفته است. پولیا (۱۹۶۵)، مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را ایجاد توانایی تفکر و درست اندیشیدن می‌داند و معتقد است که این نوع اندیشیدن را می‌توان دست کم در تقریب اول با حل مسئله یکی دانست. وی، حل مسئله را بخش جدانشدنی ریاضیات مدرسه‌ای دانسته و معتقد است که «آموزش هنر حل مسئله در درس‌های ریاضی، امکانی فوق‌العاده برای شکل گرفتن نوعی ذخیره‌ی ذهنی و عقلانی در دانش‌آموزان و در نتیجه بالابردن قوه‌ی درک آن‌هاست». این اعتقاد، در حال حاضر جنبه‌ی همگانی داشته و اکثر ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی بر این باورند که اساسی‌ترین عامل در یادگیری ریاضی، توانایی حل مسئله است (گویا، ۱۳۷۷).

مسئله چیست و حل مسئله کدامست؟

در حالت کلی، نمی‌توان هر سؤال ریاضی را مسئله دانست. به عبارت دقیق‌تر، باید بین **تمرین** و **مسئله** تمایز قایل شویم. تمرین‌ها، سؤالاتی آشنا هستند که یک روش حل معین و مشخص برای هر یک از آن‌ها وجود دارد و شخص می‌تواند با به‌کارگیری این روش‌ها، به حل آن‌ها بپردازد. در حالی که براساس استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی[۱] (NCTM، ۲۰۰۰)، «حل مسئله به معنای دست و پنجه نرم‌کردن با تکلیفی است که روش حل آن در ابتدا ناشناخته باشد» (ص۲۵). ریس، سایدام و لیندکوئیست (۱۹۸۲) هم ابراز می‌دارند که «مسئله به موقعیتی اطلاق می‌شود که در آن، فرد چیزی را طلب می‌کند، ولی نمی‌داند که چگونه به طور مستقیم به آن دست یابد» (ص۴۳). بنابراین، اگر یک سؤال ریاضی چنان آسان باشد که دانش‌آموز چگونگی یافتن پاسخ را دانسته یا بی‌درنگ آن را بیابد، در واقع نمی‌توان آن‌را مسئله نامید. براساس توضیح فوق، مسئله بودن یا نبودن یک سؤال، به موقعیت شخص حل‌کننده‌ی آن بستگی داشته و امری نسبی است. برای مثال، ممکن است سؤالی برای دانش‌آموزی مسئله و برای دیگری تمرین باشد، یا ممکن است سؤالی که امروز برای یک دانش‌آموز مسئله است، در هفته‌ی آینده برای او حکم تمرین را داشته باشد.

اهمیت حل مسئله در آموزش و یادگیری ریاضی

به گفته‌ی گویا (۱۳۷۵)، نزدیک به سه دهه از سال ۱۹۸۰ میلادی می‌گذرد؛ همان سالی که انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا، در چاره‌جویی برای رفع ضعف ریاضی دانش‌آموزان آن جامعه، توصیه‌هایی را در قالب یک دستور کار منتشر ساخت و نخستین بند از آن این بود که «در سال ۱۹۸۰، باید در ریاضیات مدارس بر حل مسئله تأکید شود». البته، سه سال قبل از آن نیز در گزارش مطالعاتی بنیاد ملی بازرسان ریاضی (NCSM)[۲]، اولین بند از ده زمینه‌ی مهارتی این گزارش به «حل مسئله» ـ به عنوان دلیل اصلی مطالعه‌ی ریاضی ـ اختصاص یافته بود (نقل شده در گویا، ۱۳۷۵).

از آن زمان به بعد، نوک پیکان تحقیقات متعدد دیگری نیز به سوی این مهم نشانه رفت. مثلاً هنری پولاک (۱۹۸۷، نقل‌شده در گویا، ۱۳۷۵) در تحقیقی به این جمع‌بندی رسید که «صنایع انتظار دارند که فارغ‌التحصیلانی که وارد بازار کار می‌شوند، توانایی وضع مسائل با عملیات مناسب را داشته و... از دانش تکنیک‌های گوناگون برای نزدیک شدن و کارکردن با مسائل بهره‌مند باشند». به همین دلیل، روند مسلط بر آموزش ریاضی در دهه‌ی ۸۰ میلادی، حل مسئله بود (شونفیلد، ۱۹۹۱).

امروزه، شاید نقش محوری حل مسئله بر کسی پوشیده نباشد. به‌ویژه این‌که نسل دانش‌آموزان پویا و کنجکاو کنونی، از برنامه‌ی ریاضی و معلم توقع دارند تا آن‌ها را از چرایی لزوم فراگیری آن آگاه سازند. لذا، معلمان به دفعات با سؤال آشنای «یادگرفتن این مطلب چه فایده‌ای دارد؟» از جانب دانش‌آموزان و حتی دانشجویان مواجه بوده، و متعاقب آن تلاش می‌کنند تا پاسخ‌های قانع‌کننده‌ای داشته باشند. به نظر می‌رسد تا زمانی که نگرش و عملکرد ما نسبت به مفاهیم، قواعد و رویه‌های ریاضی، به صورت مطالب مجزا و تنها در قالب کار با نمادهای ریاضی باشد ـ که برای بسیاری از دانش‌آموزان هم بی‌معناست! ـ نمی‌توان این نسل هوشمند و دقیق را به سودمندی آن‌ها متقاعد نمود. لذا، باید پذیرفت همان‌طور که NCTM در دوباره‌نگری در استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای خود در سال ۲۰۰۰ تأکید نموده، «حل مسئله، سنگ بنای ریاضیات مدرسه‌ای است و بدون توانایی حل مسائل، سودمندی و توان ایده‌ها، دانش و مهارت ریاضی به طور جدی محدود می‌شود» (ص۱۸۲).

به علاوه، رابطه‌ی متقابل «درک و فهم عمیق مفاهیم ریاضی» و «حل مسئله ریاضی» باعث شده است که برخی از پژوهشگران، پیشنهاد کنند تا اساساً «تدریس مفاهیم ریاضی از طریق حل مسئله» انجام گیرد (گویا، ۱۳۷۷). مثلاً ریس، سایدام و لیندکوئیست (۱۳۸۲) معتقدند که باید از موفقیت‌های حل مسئله‌ای، به‌عنوان زنجیره‌ی پیوسته‌ای در امر آموزش و برای معرفی مباحث جدید استفاده کنیم.

موفقیت در رویکردی که اهمیت آن بیان شد، مستلزم داشتن آگاهی کافی و بینشی روشن در مواجهه با پدیده‌های متعددی است که حول محور حل مسئله ظاهر می‌گردند و به مواردی از آن‌ها اشاره می‌شود:

- روش ورود به آموزش حل مسئله؛
- انتخاب مسائل مناسب و کارامد؛
- انتخاب روش‌های حل درست؛
- زمان اختصاص یافته به حل مسئله؛
- ارزشیابی حل مسئله؛
- آموزش مستقیم یا غیرمستقیم راهبردها؛
- تنوع راه‌حل‌های یک مسئله‌ی واحد.

مورد اخیر، موضوع بحث این مقاله است که برای ورود به آن، ابتدا باید نگاهی به فرایند حل مسئله‌ی ریاضی داشته باشیم.

عوامل مؤثر در فرایند حل مسئله

شونفیلد (۱۹۸۵) پس از جمع‌بندی تحقیقات خود در زمینه‌ی حل مسئله، مدلی را ارائه کرد و در آن چهار عامل اساسی زیر را به عنوان عوامل مؤثر در فرایند حل مسئله معرفی نمود:

الف) منابع: شامل دانش ریاضی، دانسته‌ها و ابزارهایی هستند که حل‌کننده‌ی مسئله در اختیار داشته و می‌توانند به عنوان اطلاعات و امکانات اولیه مورد استفاده قرار گیرند. به- عبارتی، می‌توان آن‌ها را شامل طرح‌واره‌های ذهنی افراد دانست.

ب) رهیافت‌ها: شامل فنون، راهبردها، قوانین سرانگشتی و پیشنهادهای عمومی هستند که به فرد در درک و فهم بهتر و به‌کارگیری مؤثر منابع برای رسیدن به جواب کمک می‌کنند. مانند رسم شکل، رسم جدول، حدس و آزمایش، امتحان حالت‌های خاص، انتخاب نمادهای مناسب و بررسی مسائل مرتبط. این رهیافت‌ها، استراتژی‌ها و تکنیک‌هایی برای ایجاد پیشرفت در حل مسائل ناآشنا هستند و پولیا (۱۹۴۵) فهرستی طولانی از آن‌ها را در کتاب «چگونه مسئله را حل کنیم» ارائه نموده است. براساس مدل شونفیلد، زمانی که شخص می‌خواهد مسئله‌ای را حل کند، ابتدا منابع مرتبط را از دانسته‌های خویش بازخوانی کرده و آن‌ها را در قالب رهیافت برای نیل به حل مسئله، به‌کار می‌برد. بنابراین، هم در اختیار داشتن دانش مورد نیاز، و هم توانایی بازخوانی مناسب آن، شرایط لازم برای موفقیت در حل مسئله هستند. البته باید توجه داشت که مرز میان منابع و رهیافت‌ها، واضح و مشخص نیست.

پ) کنترل: توانایی‌های کنترلی، به چگونگی استفاده از اطلاعات بالقوه‌ای که فرد در اختیار دارد مربوط می‌شود؛ به ویژه فراخوانی منابع، انتخاب رهیافت مناسب و سایر تصمیم‌گیری‌های کلیدی و استراتژیک در حین حل مسئله. این توانایی‌ها باعث می‌شود که فرد - علاوه بر پرمنبع بودن - کارایی لازم را جهت استفاده‌ی مناسب و به موقع از منابع، اتخاذ استراتژی‌های مورد نیاز، دوری از گزینه‌های نامناسب، تعقیب رویکرد صحیح و مدیریت زمان داشته باشد.

> **پولیا (۱۹۶۵)، مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را ایجاد توانایی تفکر و درست اندیشیدن می‌داند و معتقد است که این نوع اندیشیدن را می‌توان دست کم در تقریب اول با حل مسئله یکی دانست**

ت) نظام باورها: به معنای نوع نگرش ریاضی فرد و در واقع، جهان‌بینی ریاضی او و دیدگاهی است که از منظر آن، تکالیف ریاضی خود را انجام می‌دهد که از جمله، می‌توان به باور فرد نسبت به خود به عنوان حل‌کننده‌ی مسئله، نسبت به موضوع و ماهیت ریاضی، نسبت به محیط و شرایط اطراف خود و نسبت به یک موضوع ریاضی خاص اشاره نمود.

چرایی بروز راه‌حل‌های مختلف برای حل یک مسئله

با توجه به مدل حل مسئله‌ی شونفیلد، می‌توان چهار عامل مذکور را به عنوان متغیرهایی درنظر گرفت که هر حل مسئله‌ای، تابعی از آن‌هاست. بنابراین، تنوع راه‌حل‌های یک مسئله‌ی واحد نیز، ناشی از تغییر این متغیرهاست. یعنی، وجود تفاوت در منابع دانشی افراد، رهیافت‌های موجود در ذهن آن‌ها، توانایی‌های کنترلی و فراشناختی و در نهایت، نگرش و باور ریاضی آن‌ها منجر به تولید راه‌حل‌های متنوع می‌شد.

برای نمونه، سؤال زیر را که یکی از دوستان در دوره‌ی کارشناسی برایم مطرح کرد، درنظر بگیرید:

۸ کارگر، $\frac{۲}{۳}$ کاری را در ۶ روز انجام می‌دهند. ۶ کارگر،

بقیه کار را در چند روز تمام می‌کنند؟

از آن‌جا که جواب سؤال را بدون درنگ تشخیص ندادم، برای من حکم مسئله را داشت. پس از چند دقیقه آن را به روش زیر حل کردم:

$\frac{۱}{۳}$ باقی کار را ۸ کارگر در سه روز انجام می‌دهند. اگر ۸ کارگر سه روز کار کنند برابر با این است که ۶ کارگر چند روز کار کنند؟

$$۸\times۳=۶\times x \Rightarrow x=۴ \text{ روز}$$

یکی دو سال بعد، متوجه شدم که این مسائل، به «تناسب معکوس» مشهورند و در کتاب ریاضی سوم راهنمایی بحث شده‌اند. روش حل من، اتفاقاً مطابق با روش شناخته شده‌ی کتاب بود. این سؤال را برای چند نفر دیگر نیز مطرح کردم. انتظارم این بود که یا آن را با انتخاب نادرست روش تناسب مستقیم، اشتباه حل کنند ـ که این اشتباه حتی توسط یک دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی نیز انجام گرفت! ـ یا پاسخ صحیح را با همان روش من به دست آورند. با این وجود، راه‌حل‌های فراوان دیگری برای آن به دست آمد که برخی از آن‌ها را ارائه می‌دهم:

راه حل (۱): از یک دانشجوی رشته‌ی ریاضی:

۸ کارگر در یک روز $\frac{۲}{۱۸}$ کار

۱ کارگر در یک روز $\frac{۲}{۱۸\times۸}$ کار

۶ کارگر $\frac{۱}{۳}$ کار را در چند روز؟

۶ کارگر در یک روز $\frac{۲\times۶}{۱۸\times۸}=\frac{۱}{۱۲}$ کار

$$\frac{۱}{۱۲}\times۴=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \text{جواب}=۴$$

راه‌حل (۲): از یک دانشجوی رشته‌ی ریاضی:

با توجه به این که تعداد روزها با تعداد کارگرها نسبت عکس دارد؛

$\frac{۱}{۳}$ روز   ۸ کارگر : $\frac{۱}{۳}$ کار

$\frac{۱}{n}$ روز   ۶ کارگر : $\frac{۱}{۳}$ کار

$$\Rightarrow \frac{۱}{n}=\frac{۶\times\frac{۱}{۳}}{۸}=\frac{۱}{۴} \qquad \Rightarrow n=۴$$

راه‌حل (۳): از یک دانشجوی رشته‌ی آمار:

یک کارگر $\frac{۲}{۳}$ کار را در ۴۸ روز انجام می‌دهد، لذا $\frac{۱}{۳}$ کار را در ۲۴ روز انجام می‌دهد. یعنی $۲۴\div۶=۴$

راه‌حل (۴): از یک دانشجوی رشته‌ی فیزیک:

$$۸y\times۶=\frac{۲}{۳}x$$

$$۶y\times w=\frac{۱}{۳}x \quad \Rightarrow w=\frac{۱}{۳\times۶}\times\frac{۶\times۸}{\frac{۲}{۳}}=۴$$

راه‌حل (۵): از یک دانشجوی رشته‌ی فیزیک:

[ابتدا توضیح داد که فقط می‌تواند مسئله را با راه‌حل فیزیکی حل کند!] فرض کنیم توانِ کار یک کارگر P باشد، (توان = نسبت کار انجام شده به زمان) پس:

$$\frac{\frac{۲}{۳}}{۶}=۸P$$

$$\frac{۲}{۱۸}=۸P\Rightarrow p=\frac{۲}{۱۸\times۸}$$

$$۶P=\frac{\frac{۱}{۳}}{t}\Rightarrow t=\frac{\frac{۱}{۳}}{۶\times p}=\frac{۱}{۱۸p}=\frac{۱}{۱۸\times\frac{۲}{۱۸\times۸}}=۴$$

راه‌حل (۶): از یک دانش‌آموز پیش‌دانشگاهی:

[وی ابتدا پرسید که این چه مسئله‌ای است؟ گسسته است؟! ولی پس از شنیدن این جواب که «خودت فکر کن و ببین چیست»، ابتدا روش‌های نافرجام زیادی را با متغیرگیری x و y امتحان کرد. سپس، از طریق روش زیر به پاسخ رسید.]

۸ نفر که روزی ۶ ساعت کار می‌کنند، یعنی $\frac{۲}{۳}$ کار ۴۸ نفر روز کار می‌خواهد. پس نصف آن ۲۴ نفر روز می‌خواهد و چون ۶ نفر هستند، هر نفر باید ۴ روز کار کند.

راه‌حل (۷): از یک دانش‌آموز اول دبیرستان:

[اگرچه می‌گفت مشابه این مسئله را برای امتحان ورودی مدرسه حل کرده و می‌دانست فرمولی دارد، ولی آن را به خاطر نیاورده و مجبور شد که خودش فکر کند!]

۶ نفر $\frac{۳}{۴}$ از ۸ نفر هستند. پس تعداد روزهایی که کار می‌کنند

باید $\frac{۴}{۳}$ تعداد روزهای ۸ نفر باشد. سپس کار ۸ نفر یعنی ۶ را در $\frac{۴}{۳}$ ضرب می‌کنیم و بعد آن‌را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$۶\times\frac{۴}{۳}\times\frac{۱}{۲}=۴ \, .$$

راه‌حل (۸): از یک دانش‌آموز دوم راهنمایی:

[البته، او روش را ابداع کرد ولی در نهایت مسئله را با کمک من حل کرد.]

میزان کار هر کارگر در هر روز:

$$\frac{۲}{۳}\div ۸=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۸}=\frac{۲}{۲۴}=\frac{۱}{۱۲}\rightarrow\frac{۱}{۱۲}\div ۶=\frac{۱}{۷۲}$$

$$۶\times x\times\frac{۱}{۷۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=۴$$

راه‌حل (۹): از یک دانش‌آموز دوم راهنمایی:

اگر آن ۸ کارگر، ۶ تا بودند $\frac{۲}{۳}$ کار را در ۸ روز انجام می‌دادند. (جابه‌جایی ۸ و ۶)، پس نصف آن کار را در ۴ روز انجام می‌دادند.

راه‌حل (۱۰): از یک دانش‌آموز اول راهنمایی:

کار یک کارگر در ۶ روز:

$$\frac{۲}{۳}\div\frac{۸}{۱}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۱۲}$$

یک کارگر باید انجام دهد: $\frac{۱}{۳}\div\frac{۶}{۱}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۸}$

سپس تناسب:

۶ روز $\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۳۶}$ کار

$x=۴$ $\frac{۱}{۱۸}=\frac{۲}{۳۶}$ کار

مثال‌های فوق، بحث را روشن‌تر می‌کند. در واقع، اولین عامل در بروز این پدیده، تفاوت در نوع **منابع** یعنی دانش به کار رفته برای حل مسئله است. البته، با توجه به این‌که دانش مورد نیاز برای حل این مسئله در اختیار اکثر طیف حل کنندگان وجود داشت، تفاوت راه‌حل‌ها بیشتر به همراه نوع رهیافت انتخابی نمایان شده است. گواه بر ادعای فوق این است که هرگاه راه‌حل موسوم به تناسب معکوس ـ روش خودم ـ را برای کسانی که موفق به حل مسئله شده یا نشده بودند توضیح می‌دادم، برای آن‌ها مطلب جدیدی به نظر نمی‌رسید. لذا، به نظر می‌رسد آن‌چه که باعث شده بود نتوانند آن‌را انتخاب کنند یا رویکرد دیگری را برگزینند، تغییر در تصمیم‌گیری‌های حل مسئله و به عبارتی، **توانایی‌های کنترلی** افراد بود. به علاوه، ضعف این توانایی‌ها باعث شده بود تا برخی از افرادی که مسئله برای آن‌ها مطرح شد، علی‌رغم دارا بودن تحصیلات سطح بالا، موفق به جل آن نشده یا جواب نادرست به دست آورند. عده‌ای نیز، ابتدا راه‌حل‌های بی‌نتیجه‌ی دیگری را امتحان کرده و در آخر، با اتلاف میزان زیادی وقت، رویکرد کارآمدی انتخاب کردند.

در نهایت، **باور** افراد نسبت به موضوع نیز در نوع روش حل، تأثیر عمده‌ای داشت. برای مثال، می‌توان به دانش‌آموز پیش‌دانشگاهی (راه‌حل (۶)) اشاره کرد که در آغاز باور داشت که چون مسئله برای شخصی در دوره‌ی تحصیلی او مطرح شده است، پس باید مانند مسئله‌های ریاضی گسسته باشد. از این‌رو، وی ابتدا روش متغیرگیری بدون نتیجه‌ای را امتحان کرد که مقدار زیادی وقت گرفت. مورد جالب توجه دیگر، راه‌حل دانشجوی رشته‌ی فیزیک بود که باور داشت این مسئله به دلیل ارتباط با مفهوم کار و فیزیکی بودن آن، برای وی مطرح گشته است. از طرفی، آن‌گونه که ملاحظه شد، اگرچه مسئله‌ی مذکور جزو مباحث کتاب سوم راهنمایی بود، ولی چند دانش‌آموز پایه‌های اول و دوم راهنمایی، آن را با روش‌های جالبی حل کردند. شاید اگر آن‌ها مسئله را در کتاب سوم دیده بودند، تحت تأثیر این باور قرار می‌گرفتند که توانایی حل آن را ندارند و لذا به آن نزدیک هم نمی‌شدند!

شباهت‌های تاریخی

در تاریخ ریاضی، مسائل فراوانی وجود دارند که اگرچه با یک راه درست حل شده‌اند، ولی روش‌های حل متعددی برای آن‌ها ارائه شده است. برای نمونه، در مورد قضیه‌ی فیثاغورس، بیش از ۳۰۰ اثبات مختلف در درست است (جمعی از اساتید ریاضی آلمان). هم‌چنین، مؤلفان کتب ریاضی دانشگاهی، برای بسیاری از قضایا و مسائل، راه‌حل‌های مختلفی ارائه داده‌اند. ریاضی‌دانان نیز همواره در پی یافتن روش‌های مختصر و ساده‌تری برای اثبات قضایا و حل مسائل معروف هستند. برای مثال، اگرچه شاید اثبات معروف واگرایی سری توافقی یعنی

نوشتن آن به صورت مجموع‌های بزرگ‌تر از $\frac{1}{2}$ ، یکی از زیباترین اثبات‌ها برای یک قضیه‌ی ریاضی است، اثبات جالب زیر نیز برای آن بیان شده است (روئین، ۱۳۸۰)

اگر این سری به L همگرا باشد؛

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)>\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

بنابراین، ملاحظه می‌شود که روش‌های اثبات و حل متنوع، پدیده‌ای جالب توجه در ریاضیات است و در غیر این صورت، بسیاری از اثبات‌های زیبای قضایای ریاضی، اکنون وجود نداشت. این مطلب، باعث شده است که موضوع برخی مقالات، اساساً ارائه‌ی روش‌های مختلف برای حل یک مسئله باشد که برای نمونه، می‌توان تا نتوان (۱۹۹۹)، ذوالفقاری (۱۳۷۹) و قربانی (۱۳۸۳) را ملاحظه کرد.

چگونگی برخورد با تنوع راه‌حل‌ها برای یک مسئله

ارائه‌ی راه‌حل‌های متنوع برای یک مسئله توسط دانش‌آموزان، یک واقعیت مهم در فرایند آموزش ریاضی است. به‌خصوص، راه‌حل‌هایی که ممکن است با روش معلم یا روش مورد انتظار وی متفاوت باشند. در مواجهه با این واقعیت، نگرش‌های مختلفی می‌توان داشت و متناظر با آن‌ها، رویکردهایی را انتخاب کرد. به عنوان مثال، ممکن است برخی از معلمان صرفاً راه‌حل مورد نظر خود را مطرح کرده یا قابل قبول بدانند و از به رسمیت شناختن روش‌های دیگر یا اعتنا به آن‌ها، اجتناب نمایند. شاید هم بعضی معلمان، اگرچه راه‌حل‌های دیگر را قبول داشته و معتبر بدانند، ولی به دلایلی مانند کمبود وقت و عدم حوصله و صبر دانش‌آموزان، مجالی را برای طرح و بررسی آن‌ها فراهم نکنند. از طرفی، می‌توان کلاس درسی را تصور کرد که در آن، از ارائه‌ی راه‌حل‌های متنوع استقبال و برای آن‌ها ارزش قائل شده و فرصتی برای طرح ایده‌ها و تبادل نظر پیرامون آن‌ها فراهم شود و حتی دانش‌آموزان در راستای این هدف، مورد تشویق قرار گیرند.

با توجه به این که نوع برخورد معلم با این پدیده می‌تواند اثرات ماندگاری را بر تجارب یادگیری دانش‌آموزان به جای گذارد، رویکرد سوم بنابر دلایل زیر، توصیه می‌شود:

- فراموش نکنیم که یکی از مهم‌ترین هدف‌های آموزش ریاضی، ایجاد توانایی حل مسئله است. بنابراین، توقف بر روی راه‌حل‌های مختلف و بررسی آن‌ها ـ به جای بیان قواعد زیاد و تمرین‌های تکراری ـ می‌تواند به ایجاد و **تقویت نگرش اصالت و اهمیت حل مسئله** در دانش‌آموزان کمک کند.
- ما علاقه‌مندیم که دانش‌آموزان، ریاضیات را به‌جای قسمت‌ها و بخش‌های مجزای از هم، به صورت یک کلِ از درون مرتبط ببینند. به گفته‌ی جهانی‌پور (۱۳۷۵)، ایجاد اینِ بینش و توانایی در دانش‌آموزان که از دیدگاه‌های مختلف به حل یک مسئله بپردازند، می‌تواند سرآغازی برای **محو تصور جدایی ایده‌های ریاضی** باشد.
- استقبال از راه‌حل‌های مختلف دانش‌آموزان، باعث ایجاد انگیزه و ارتقای خودباوری آن‌ها در یادگیری ریاضی می‌شود. چه بسا، یک‌بار تأیید روش حل و تشویق تلاش دانش‌آموز از جانب معلم، تحولی شگرف را در تحصیل و آینده‌ی وی در پی داشته باشد. متقابلاً، به رسمیت نشناختن و بی‌اعتنایی نسبت به راه‌حل درست یک دانش‌آموز، خط بطلان کشیدن بر تلاش وی تعبیر شده و احساس دلسردی و سرخوردگی نسبت به ریاضی در وی ایجاد نماید.
- در آخرین مرحله‌ی مدل حل مسئله‌ی پولیا (۱۹۴۵) یعنی **بازنگری** یا به عقب نگریستن، تأکید شده است که «در صورت حل کردن یک مسئله، سعی کنید تا بتوانید آن‌را از روش‌های دیگری نیز حل کنید. این امر، باعث ایجاد توانایی مضاعف در حال مسائل می‌شود.»
- شخصاً به کرات شاهد این بوده‌ام که دانش‌آموزی مستعد، یک روش حل را برای مسئله‌ای انتخاب می‌کند و اگرچه بارها آن‌را امتحان کرده و به هدف نمی‌رسد، اما مجدداً این عمل را تکرار می‌کند و در نهایت به جواب مطلوب نمی‌رسد. چنین فردی، توانایی جدا ساختن ذهن خویش از مسیر ناکارآمد و اتخاذ راهبرد دیگر را ندارد، زیرا نگاه کردن به یک مسئله را از زوایای مختلف، نیاموخته و تمرین نکرده است.
- یکی از استانداردهای ریاضی NCTM ، تعامل و گفتمان[۳] است. از طرح و بررسی ایده‌های متنوع حل یک مسئله در کلاس درس، می‌توان به عنوان بستری برای بحث همگانی و گفتمان کلاسی استفاده کرد. به گفته‌ی گویا (۱۳۷۷)، بحث همگانی کمک می‌کند تا دانش‌آموزان، تنوع روش‌های حل مسئله را تجربه

کرده، با فهم و بدفهمی های دیگران آشنا گردند و در نهایت، با تجزیه و تحلیل و مقایسه ی راه های پیشنهادی، یکی را برای خود انتخاب کنند.

● طرح کردن و تحلیل راه حل های مختلف باعث می شود که دانش آموزان در **مقام ارزیابی** کننده ی آن ها قرار گیرند و به کارگیری تفکر آن ها در چنین مقامی، به یادگیری عمیق مفاهیم ریاضی کمک می کند. به علاوه، این امر تأثیر مثبت و عمیقی بر باورهای نادرست دانش آموزان نظیر خشک و بی روح بودن ریاضی و جزمیت افراطی آن دارد (گویا، ۱۳۷۷).

● به گفته ی بیشاپ (۲۰۰۰)، معلمان ریاضی در حال **تدریس ارزش ها** در کلاس درس هستند؛ ارزش هایی که، نسبت به دانش رویه ای یا حتی دانش مفهومی ریاضی ماندگاری بیش تری در ذهن دارند. دادن فرصت به دانش آموزان برای طرح ایده های متنوع ایشان، می تواند در راستای نهادینه کردن ارزش هایی مانند «تحمل شنیدن نظرات موافق و مخالف»، «دفاع مستدل از نظرات خود»، «پذیرش تنوع و تکثر به جای خود ـ محوری و یکسان سازی»، «فرصت دادن به دیگران برای قضاوت در مورد ایده های طرح شده» و «احترام به تصمیم و قضاوت جمع»، مفید واقع شود.

مسئله بودن یا نبودن یک سؤال، به موقعیت شخص حل کننده ی آن بستگی داشته و امری نسبی است

راه حل های متنوع نادرست!

جالب است که راه حل های نادرست دانش آموزان نیز که اکثراً در اثر بدفهمی های آنان ارائه می شود، بسیار متنوع است. البته، ریشه یابی و تشریح علل این اشتباهات، بحثی مستقل را می طلبد که برای نمونه می توان به بدفهمی مراجعه کرد. در این جا، تنها به ذکر این نکته بسنده می شود که بسیاری دیگر به دلیل استفاده از برخی منابع و رهیافت ها در موقعیتی نادرست، اتفاق می افتند. برای بسط بیشتر این بحث، تنوع راه حل های نادرست برای پرسش زیر را که به دانش آموزان پایه ی اول دبیرستان داده شده بود، ملاحظه کنید.

کسر $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}$ را در صورت امکان، ساده کنید:

۱) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=\frac{۳}{۳x}=\frac{۱}{x}$

۲) $\frac{\cancel{۶}x^۲}{\cancel{۲}x^۲+۳x}=\frac{۳x^۲}{۳x}=x$

۳) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=\frac{۳}{۳x}=\frac{۱}{x}=x$

۴) $\frac{۶\cancel{x^۲}}{۲\cancel{x^۲}+۳x}=\frac{۶}{۲+۳x}=\frac{۶}{۵x}$

۵) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=۳x^۲+۲x=۵x^۲$

۶) $\frac{\cancel{۶}x^۲}{\cancel{۲}x^۲+۳x}=\frac{۳x^۲}{x^۲+۳x}$

۷) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=۲x^۲+۳x-۶x^۲$

۸) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=\frac{۶x^۲}{۵x^۳}=\frac{۶}{۵x}=\frac{۶}{۵}x$

۹) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=۳x^۲+۲x^۲$

۱۰) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=\frac{۶x\times\cancel{x}}{۳x\times۲x\times\cancel{x}}=\frac{۶x}{۳x+۲x}$

۱۱) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=\frac{۳x}{۲x^۲}$

۱۲) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=\frac{x}{x^۲}$

۱۳) $\frac{\cancel{۶}x^۲}{\cancel{۲}x^۲+\cancel{۳}x}=\frac{x^۲}{x^۲+x}=\frac{x^۲}{x^۳}=\frac{x}{x^۲}$

۱۴) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=۶x^۲-۲x^۲+۳x=۴x^۲+۳x$

۱۵) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=\frac{۶x^۲-۲x^۲}{۳x}=\frac{۴x^۲}{۳x}$

۱۶) $\frac{۶\cancel{x}^۲}{۲x^۲+۳\cancel{x}}=\frac{۶x}{۲x^۲+۳}$

۱۷) $\frac{۶x^{\cancel{۲}}}{۲x^{\cancel{۲}}+۳x}=\frac{۶x}{۲x+۳x}=۱x$

۱۸) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=\frac{۶\cancel{x}^۲}{\cancel{x}(۲x+۳x)}=\frac{۶x}{۵x}=\frac{۶}{۵}$

۱۹) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=\frac{۶\cancel{x}^۲}{۵\cancel{x}}=\frac{۶x}{۵}$

۲۰) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=x\times\frac{۶x}{۲x+۳}$

۲۱) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=\frac{۳x+\cancel{۳x}}{۲x^۲+\cancel{۳x}}=\frac{۳x}{۳x^۲}$

۲۲) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}=\frac{۶\cancel{x}^۲}{\cancel{x}(۳+۲x)}=۶x(۳+۲x)$

۲۳) $\dfrac{6x^2}{2x^2+3x}=6x^5$

۲۴) $\dfrac{6x^2}{2x^2+3x}=\dfrac{3x^2\times\cancel{2x^2}}{\cancel{2x^2}+3x}=\dfrac{3x^2}{2x^2+3x}=\dfrac{x}{6x^3}$

۲۵) $\dfrac{6x^2}{2x^2+3x}=\dfrac{6x^2}{6x^3}$

۲۶) $\dfrac{6x^2}{2x^2+3x}=\dfrac{6x^2}{6x^3}$

۲۷) $\dfrac{6x^2}{2x^2+3x}=\dfrac{6x^2}{x^2(2+3)}$

۲۸) $\dfrac{\cancel{6}x^2}{\cancel{2}x^2+\cancel{3}x}=\dfrac{x^2}{x^3}$

۲۹) $\dfrac{6x^2}{2x^2+3x}=\dfrac{6x^2}{x(2^2+3)}=\dfrac{2}{2^2+3}$

۳۰) $\dfrac{6x^2}{2x^2+3x}=(x)\times\dfrac{6x}{2x+3}$

۳۱) $\dfrac{\cancel{6x^2}}{\cancel{2x^2}+3x}=\dfrac{3}{1+3x}=\dfrac{3}{4x}$

۳۲) $\dfrac{6x^2}{2x^2+3x}=6x^2-2x^2+3x=4x^2+3x$

۳۳) $\dfrac{6x^2}{2x^2+3x}=\dfrac{6x^2}{6x^2}=1$

جمع بندی

حل مسئله ، سنگ بنای ریاضیات مدرسه‌ای و مهم‌ترین هدف آموزش آن است و باید جهت آموزش را به سمت آن متحول کرد . در این راستا ، ارائه‌ی راه‌حل‌های مختلف حل مسئله توسط دانش‌آموزان ، پدیده‌ای نیک و فرصتی مغتنم است تا از طریق برخورد مناسب با آن و ایجاد فضای طرح و تبادل ایده‌ها ، بتوانند مطالب زیادی را با عمق خوب یاد بگیرند . بنابراین ، باید قدردان این پدیده بود و از آن ، برای تشویق دانش‌آموزان به تفکر و تلاش برای حل مسائل استفاده کرد . به علاوه ، در کلاس درس ریاضی ، با طرح و بررسی ایده‌های نادرست در کنار روش‌های درست ، می‌توان با ریشه‌یابی علت‌های ایده‌های نادرست برای حل مسئله ، به رفع یا تکرار کم‌تر آن‌ها کمک نمود .

پی نوشت

1. National Council of Teachers of Mathematics
2. National Council of Supervisors of Mathematics
3. Communication

منابع

1. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Boston, MA. The Author.

2. Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

۳ . بیشاب ، آلن . (۲۰۰۰) . غلبه بر موانع دموکراتیزه کردن آموزش ریاضی . ترجمه‌ی سهیلا غلام‌آزاد (۱۳۸۰) . **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی** . شماره‌ی ۶۶ ، صص ۴ تا ۱۳ . دفتر انتشارات کمک‌آموزشی ، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی ، وزارت آموزش و پرورش .

۴ . پولیا ، جورج . (۱۹۴۵) . **چگونه مسئله را حل کنیم** . ترجمه‌ی احمد آرام . سازمان انتشارات کیهان . چاپ پنجم . ۱۳۷۹ .

۵ . پولیا ، جورج . (۱۹۴۵) . **خلاقیت ریاضی** . ترجمه‌ی پرویز شهریاری . انتشارات فاطمی . چاپ ششم . ۱۳۸۰ .

۶ . تانتون ، جیمز . (۱۹۹۹) . ۱=۲ ؛ ارائه ۱۲ اثبات مختلف . ترجمه‌ی امیرپاشا شیرازی‌نیا . **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی** . شماره‌ی ۵۸ . صص ۴۰- ۴۳ . دفتر انتشارات کمک‌آموزشی ، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی ، وزارت آموزش‌وپرورش .

۷ . جمعی از اساتید ریاضی آلمان . (؟) . **دایرةالمعارف ریاضیات ج (۱)** . ترجمه‌ی غلامرضا یاسی‌پور . نشر مهاجر . ۱۳۷۸ .

۸ . جهانی‌پور . روح‌اله . (۱۳۷۵) . انتخاب استراتژی در فرایند حل مسئله‌ی ریاضی . **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی** . شماره‌های ۴۶ و ۴۷ . دفتر انتشارات کمک‌آموزشی ، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی ، وزارت آموزش‌وپرورش .

۹ . ذوالفقاری . پروانه . (۱۳۷۹) . ارائه‌ی ۱۰ نوع اثبات مختلف برای فرمول $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ از دیدگاه ریاضی گسسته . مجموعه مقالات پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران . صص ۸۶- ۹۴ . مشهد .

۱۰ . روبین . جمال . (۱۳۸۰) . یک اثبات بسیار کوتاه برای واگرایی سری توافقی . **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی** . شماره‌ی ۶۴ . ص ۱۴ .

۱۱ . ریس . ر . ا ؛ سایدام . م . ن . لیندکویست . م . م . (۱۹۸۲) . **کمک به کودکان در یادگیری ریاضی** . ترجمه‌ی مسعود نوروزیان . انتشارات مدرسه . چاپ دوم . ۱۳۷۹ .

۱۲ . شونفلید ، آلن . اچ . (۱۹۹۹) . فراشناخت و ریاضیات . ترجمه‌ی فرهاد کریمی (۱۳۷۸) . **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی** . شماره‌ی ۵۵ ، صص ۴- ۸ . دفتر انتشارات کمک‌آموزشی ، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی ، وزارت آموزش‌وپرورش .

۱۳ . گویا ، زهرا ؛ حسام ، عبداله . (۱۳۸۴) . نقش طرحواره‌ها در شکل‌گیری بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان ، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی** . شماره‌ی ۸۲ ، صص ۴ تا ۱۶ . دفتر انتشارات کمک‌آموزشی ، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی ، وزارت آموزش و پرورش .

۱۴ . گویا ، زهرا . (۱۳۷۷) نقش فراشناخت در یادگیری حل مسئله‌ی ریاضی . **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی** . شماره‌ی ۵۵ . صص ۱۳-۱۹ . دفتر انتشارات کمک‌آموزشی ، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی ، وزارت آموزش‌وپرورش .

۱۵ . گویا ، زهرا . (۱۳۷۵) . روند تغییر محتوای برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه . **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی** . شماره‌ی ۴۶ ، صص ۸ تا ۱۳ . دفتر انتشارات کمک‌آموزشی ، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی ، وزارت آموزش‌وپرورش .

۱۶ . قربانی . مهدی . (۱۳۸۳) . یک مسئله و چند راه‌حل . **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی** . شماره‌ی ۷۸ . صص ۴۸ ـ ۵۱ . دفتر انتشارات کمک‌آموزشی ، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی ، وزارت آموزش‌وپرورش .

بازنمایی‌های چندگانه در آموزش ریاضی

حمید دافعی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی ـ آموزش‌وپرورش زنجان

چکیده

استفاده از بازنمایی‌های چندگانه‌ی ریاضی و تلفیق آن‌ها با یکدیگر، فهم و درک دانش‌آموزان را از مفاهیم و ایده‌های ریاضی ارتقاء می‌دهد. تحقیقات در زمینه‌ی آموزش ریاضی نشان می‌دهد که فهم موضوعات ریاضی زمانی رخ می‌دهد که این بازنمایی‌ها به‌طور ثمربخشی مورد استفاده قرار گیرند. شکل‌های گوناگون بازنمایی، فرایند گذر از اشیای فیزیکی و دست‌ورزی ملموس[1] به تفکر انتزاعی[2] را توسعه می‌دهد و پایه‌ای برای یادگیری منسجم ایجاد می‌کند. در این مقاله، ضمن معرفی «بازنمایی» از دیدگاه شورای ملی معلمان ریاضی، به نقش بازنمایی‌های چندگانه در فرآیند یاددهی و یادگیری ریاضیات، پرداخته شده است. در ادامه، راهکارهایی که می‌توانند در ایجاد یا تلفیق بازنمایی‌های چندگانه در آموزش ریاضی مفید باشند با تکیه بر رویکردهای نوین آموزشی ـ به ویژه استفاده از فناوری اطلاعات و ارتباطات ارائه شده است.

کلیدواژه‌ها: مفهوم ریاضی، دانش رویه‌ای، تفکر انتزاعی، NCTM، ICT.

مقدمه

گویا و سرشتی (۱۳۸۵)، ریاضی را دارای ماهیت دوگانه می‌دانند و معتقدند که ریاضی در حالی که به شدت انتزاعی است، به شدت ملموس و محسوس است و این دوگانگی، آموزش ریاضی را با چالش‌های جدی مواجه کرده است. این محسوس و ملموس بودن شامل بسیاری چیزها از جمله نظم موجود در طبیعت و قانون‌مندی پدیده‌های مختلف است. علاوه بر این، از دوران طفولیت، کودکان با تلاش خود برای درک دنیای اطرافشان، ریاضی را تجربه می‌کنند، مفهوم بزرگ‌تری و کوچک‌تری و تساوی را حس می‌کنند، با انواع دسته‌بندی‌ها آشنا می‌شوند و خصیصه‌های هر پدیده را به تدریج فرامی‌گیرند. سپس در انجام انواع بازی‌های کودکانه، با ریاضی زندگی می‌کنند؛ تقریب و تخمین زدن، استدلال کردن، مقایسه کردن، تناظر برقرار کردن، شمارش کردن و ده‌ها و ده‌ها فعالیت دیگر انجام می‌دهند که همگی ماهیت ریاضی دارند. اما به محض این‌که کودکان وارد نظام آموزش رسمی می‌شوند، معمولاً این همه مهارت آشکار و پنهان کسب‌شده‌ی ریاضی نادیده گرفته می‌شود و طوری با آن‌ها برخورد می‌شود که انگار یک صفحه‌ی خالی و لوح سفید وارد مدرسه شده است. در نتیجه، کودکی که با مفاهیم مختلف ریاضی بازی که و زندگی کرده است، اغلب در مواجهه با شکل رسمی آن مفاهیم، دچار سردرگمی می‌شود و در یادگیری ریاضی خود با مشکل مواجه می‌گردد.»

یکی از روش‌هایی که می‌توان با آن، بین تجربیات و دانش غیررسمی کودکان با دانش رسمی ریاضی آن‌ها در آموزش ریاضی ارتباط برقرار نمود، استفاده از **بازنمایی‌های چندگانه**‌ی مفاهیم و ایده‌های ریاضی است. بازنمایی‌های چندگانه[3] به معنای نشان دادن یا معرفی یک ایده [یا یک مفهوم] به شکل‌های مختلف است (کیل پاتریک و سوافورد). به عنوان مثال در ریاضیات دبیرستانی، تابع نمایی $y = f(x) = 2^x$ می‌تواند به شکل‌های نمادین، عددی، گرافیکی و هندسی، به صورت‌های زیر

بازنمایی شود (مک کی).

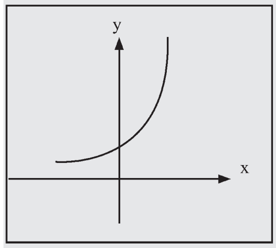
بازنمایی عددی

x	$y = 2^x$
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸

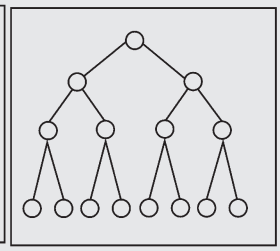
بازنمایی نمادین

$y = 2^x$

بازنمایی گرافیکی



بازنمایی هندسی



در خصوص انتخاب و استفاده از بازنمایی های مختلف، تحقیقات نشان داده است که دانش آموزانی در ریاضیات موفق تر هستند که بتوانند به طور منعطف تری از رویکردهای مختلف بازنمایی مانند نمادین، گرافیکی، عددی و غیره استفاده کنند، زیرا توانایی حرکت بین بازنمایی های مختلف از اشیای ذهنی، از نشانه های یادگیری عمیق و مفهومی است (گویا و سرشتی، ۱۳۸۵). از مهم ترین اهداف نگارش مقاله ی حاضر، می توان به موارد ذیل اشاره کرد:

✓ بررسی تأثیر بازنمایی های چندگانه در یادگیری و درک دانش آموزان از مفاهیم و ایده های ریاضی؛

✓ بررسی نقش معلمان در آموزش، ارتباط و انتقال بازنمایی های چندگانه به دانش آموزان؛

✓ آشنایی با برخی امکانات و ابزارهایی که می توانند در نمایش و ارتباط دادن بازنمایی های چندگانه به دانش آموزان مفید و تأثیرگذار باشند.

بازنمایی

یکی از پنج استاندارد فرآیندی که در سند شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM, ۲۰۰۰) به آن اشاره شده، استاندارد «بازنمایی» است. استانداردهای مربوط به فرایند در این سند، به معنای فرایندهای کسب مهارت و نحوه ی کاربرد دانش مربوط به محتوای ریاضی است. در واقع، می توان چنین تعبیر کرد که اگر

گویا و سرشتی (۱۳۸۵)، ریاضی را دارای ماهیت دوگانه می دانند و معتقدند که ریاضی در حالی که به شدت انتزاعی است، به شدت ملموس و محسوس است و این دوگانگی، آموزش ریاضی را با چالش های جدی مواجه کرده است

استانداردهای محتوایی[5] جسم و پیکر ریاضیات باشند، استانداردهای فرایندی[6] به منزله ی روح ریاضیات هستند. در این سند، برای استاندارد بازنمایی چنین عنوان شده است:

«برنامه های آموزشی در تمام پایه های تحصیلی (از پیش دبستانی تا پیش دانشگاهی) باید همه ی دانش آموزان را قادر کند به:

✓ خلق و استفاده از بازنمایی ها برای سازمان دهی، ثبت و انتقال ایده های ریاضی؛

✓ انتخاب، کاربرد و تفسیر بازنمایی های ریاضی در حل مسائل؛

✓ استفاده از بازنمایی ها برای مدل سازی و تفسیر پدیده های ریاضی، اجتماعی و فیزیکی.»

به گفته ی این شورا، اهمیت استفاده از بازنمایی های چندگانه بایستی در طول دوران آموزش ریاضی به دانش آموزان، مورد توجه قرار گیرد. دانش آموزان بایستی درک کنند که بازنمایی های مختلف ایده های ریاضی، بخش مهمی از فرایند یادگیری و فعالیت ریاضی شان می باشد. بسیار مهم است که دانش آموزان تشویق شوند تا ایده های ریاضی را با روش های مختلفی که برایشان با معنی است، بازنمایی کنند. هم چنین، مهم است که دانش آموزان یاد بگیرند که شکل های مرسوم بازنمایی، یادگیری ریاضیات را آسان کرده و باعث می شود تا آن ها بتوانند به راحتی، با دیگران درباره ی ایده های ریاضی گفت وگو کرده و به طور ریاضی وار، ارتباط برقرار نمایند.

هم چنین، در این سند آمده است که بازنمایی های چندگانه می توانند به سازمان دهی تفکرات دانش آموزان کمک نمایند. استفاده از بازنمایی ها به دانش آموزان کمک می کند تا آن ها، ایده های ریاضی را به صورت ملموس تر و قابل دسترس تری برای تفکر، در اختیار داشته باشند. دانش آموزان دبیرستانی بایستی از بازنمایی ها بیشتر برای حل مسائل یا توصیف، توضیح و توسعه ی یک ایده ی ریاضی استفاده نمایند. هنگامی که دانش آموزان موضوع جدیدی را مطالعه می کنند، آن ها با بسیاری از بازنمایی های جدید برای مفاهیم ریاضی مواجه خواهند شد. آن ها نیاز خواهند داشت تا به طور منعطف، بین بازنمایی ها ارتباط

برقرار نمایند و این در حالی است که بخش عظیمی از توانایی ریاضی دانش‌آموزان، با مشاهده و کار کردن روی موضوعات از دیدگاه‌های متفاوت به‌وجود می‌آید.

نقش بازنمایی‌های چندگانه در یادگیری ریاضی

به اعتقاد اُزل (۲۰۰۸) توانایی نشان دادن یک مفهوم با شیوه‌های گوناگون، درک عمیقی از آن مفهوم را در ذهن ایجاد می‌کند. در یافته‌های تحقیقی آموزش ریاضی، دلایل قوی وجود دارد که دانش‌آموزان می‌توانند مفاهیم ریاضی را از طریق تجربه‌ی بازنمایی‌های مختلف درک کنند و بین بازنمایی‌های مختلف، ارتباط برقرار نمایند.

تال[۱۷] (۱۹۹۱، نقل شده در گویا و سرشتی، ۱۳۸۵)، چهار مرحله را برای فرایند یادگیری ریاضی به‌صورت زیر معرفی می‌کند:

- استفاده از یک نوع بازنمایی؛
- استفاده از بیش از یک نوع بازنمایی به‌صورت موازی؛
- ایجاد ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌های مختلف؛
- تلفیق بازنمایی‌ها و حرکت منعطف بین آن‌ها.

آن‌ها از قول تال (۱۹۹۱) نقل کرده‌اند که تشخیص ارتباط بین بازنمایی‌های معادل و تشخیص خواص مشترک آن‌ها، منجر به تشکیل مفهوم مجرد اشیاء و فرایندهای ریاضی می‌شود. هم‌چنین، گویا و سرشتی (۱۳۸۵) با ارجاع به دریفوس (۱۹۹۴)، بیان می‌دارند که ایده‌ی استفاده از چندین بازنمایی یک مفهوم، باید در روشی باشد که جنبه‌های متفاوت مفهوم، مورد تأکید واقع شوند و به دانش‌آموزان و دانشجویان کمک شود تا به‌طور مفهومی، جنبه‌های متناظر را در بازنمایی‌های معادل، به هم متصل کنند.» گویا و سرشتی (۱۳۸۵) در ادامه، اظهار می‌کنند که «ناتوانی در استفاده از بازنمایی‌های مختلف و مرتبط کردن آن‌ها، باعث به وجود آمدن مشکلاتی در فهم اشیای ریاضی می‌شود. مثال‌هایی وجود دارند که در آن‌ها، با استفاده از یک بازنمایی گرافیکی، مسئله به سادگی می‌توانسته حل شود، ولی دانش‌آموزان از بازنمایی‌های عددی یا نمادین استفاده کرده‌اند زیرا در تجربه‌های قبلی آن‌ها، بازنمایی‌های عددی و نمادین استفاده کرده‌اند بیشتر جای داشته و به میزان بیشتری مورد تأکید قرار گرفته بودند».

نقش معلمان در ایجاد و استفاده از بازنمایی‌های چندگانه

شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM, ۲۰۰۰)، بخش مهمی از فرایند یادگیری ریاضی را چگونگی استفاده از بازنمایی‌های ریاضی می‌داند. به اعتقاد این شورا، معلمان باید بازنمایی‌های مرسوم و معمول ریاضی را به دانش‌آموزان نشان داده و به آن‌ها کمک کنند تا به‌طور مؤثری از بازنمایی‌ها در مواقع لزوم استفاده کنند.

به‌طور کلی، در یک رویکرد مناسب برای آموزش مفاهیم و معرفی ایده‌های ریاضی به دانش‌آموزان، لازم است ویژگی‌های کلی زیر مورد توجه قرار گیرند:

✓ تکیه بر دانش قبلی دانش‌آموزان؛
✓ حرکت از شهود به تجرید؛
✓ ایجاد یک جریان استقرایی و فراهم کردن فرصت کشف؛
✓ توانایی برقراری ارتباط و سازگاری بین بازنمایی‌های مختلف (نقل شده در ریحانی، ۱۳۸۴).

مثال‌های زیر می‌توانند برای تدریس ریاضی مدرسه‌ای، مورد استفاده قرار گیرند.

۱. استفاده از بازنمایی‌های هندسی برای اثبات‌های جبری

یکی از مشکلاتی که دانش‌آموزان و دانشجویان در فهم اثبات‌های ریاضی دارند، مجرد بودن مفاهیمی است که در این اثبات‌ها به‌کار می‌رود. برای رفع این مشکل، می‌توان در بعضی موارد از بازنمایی‌های هندسی به‌عنوان تمثیلی برای درک و فهم اثبات‌ها استفاده کرد. لذا اگر معلم ریاضی بتواند در کنار استدلال‌های صوری ریاضی، بازنمایی و نمایش‌های دیگر آن‌ها را نیز نشان دهد (مانند بازنمایی‌های هندسی، فیزیکی و نظایر آن)، نقش مؤثری در درک و تفهیم این استدلال‌ها ایفا خواهد کرد (جهانشاهی، ۱۳۸۰).

مثال ۱. اگر a و b دو عدد حقیقی و نامنفی باشند، میانگین حسابی آن‌ها $\frac{a+b}{2}$ و میانگین هندسی آن‌ها $\sqrt{a.b}$ می‌باشد. ثابت کنید

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$$

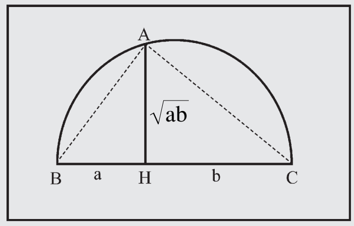
اثبات به روش جبری (بازنمایی جبری)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{a.b} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{a.b} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

به این ترتیب که چون مربع هر عدد حقیقی، بزرگ‌تر یا برابر صفر است، در نتیجه‌ی نابرابری (۱) درست است.

اثبات به روش هندسی (بازنمایی هندسی)



شکل ۱

در شکل ۱، پاره‌خط BC را به طول $a+b$ در نظر می‌گیریم، نیم‌دایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم. نقطه‌ی H را روی BC طوری انتخاب می‌کنیم که BH=a و CH=b. از H عمودی بر BC رسم می‌کنیم تا نیم‌دایره را در نقطه‌ی A قطع کند. از تشابه دو مثلث ABH و ACH نتیجه می‌شود

$$\frac{a}{AH}=\frac{AH}{b}\Rightarrow AH^{2}=a.b\Rightarrow \qquad AH=\sqrt{a.b} \qquad (۲)$$

ولی AH حداکثر برابر با شعاع نیم‌دایره یعنی $\frac{a+b}{2}$ است.

پس

$$AH\leq\frac{a+b}{2} \qquad (۳)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۳) داریم

$$\sqrt{a.b}\leq\frac{a+b}{2}$$

و اثبات به پایان می‌رسد.

***

مثال ۲. اثبات اتحاد مربع دو جمله‌ای به روش جبری و هندسی

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$$

اثبات به کمک بازنمایی جبری

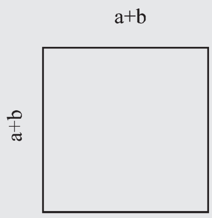
می‌توان با استفاده از خاصیت پخشیِ عمل ضرب نسبت به عمل جمع و ساده کردن یک جمله‌ای‌های مشابه، اتحاد فوق را ثابت کرد.

یکی از روش‌هایی که می‌توان با آن، بین تجربیات و دانش غیررسمی کودکان با دانش رسمی ریاضی آن‌ها در آموزش ریاضی ارتباط برقرار کرد، استفاده از بازنمایی‌های چندگانه‌ی مفاهیم و ایده‌های ریاضی است

$$\begin{aligned}(a+b)^{2}&=(a+b)(a+b)\\&=a^{2}+ab+ab+b^{2}\\&=a^{2}+2ab+b^{2}\end{aligned}$$

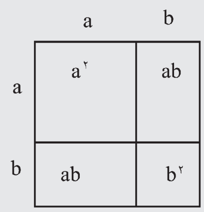
اثبات به کمک بازنمایی هندسی

می‌توان مربعی به طول ضلع $a+b$ در نظر گرفت و مساحت آن را مطابق شکل‌های (۲) و (۳) به‌دست آورد:



شکل ۲. مربع به طول ضلع (a+b)

(۴) مساحت مربع در شکل (۲) = $(a+b)^{2}$



شکل ۳. مربع به طول ضلع (a+b)

مساحت مربع در شکل (۳) برابر است با مجموع مساحت‌های شکل‌های مجزای درون آن. بنابراین داریم:

(۵) مساحت مربع در شکل (۳) = $a^{2}+2ab+b^{2}$

مساحت مربع در شکل (۳) = مساحت مربع در شکل (۲)

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2} \quad (۶)$$

به گفته‌ی جهانشاهی (۱۳۸۰)، «در کنار نقش مثبت بازنمایی هندسی، نباید از تأثیر منفی آن در افکار دانش‌آموزان غافل شد، زیرا یک روش هندسی (بازنمایی هندسی) ممکن است مطالب را برای بعضی از دانش‌آموزان آسان کند، در حالی که می‌تواند بقیه را تنها مبهوت کند. در واقع، دانش‌آموزانی وجود دارند که هنگام سروکار داشتن با تجرید خالص، در بهترین وضع خود هستند و استفاده از شکل یا مثال‌های عددی، تنها آن‌ها را آشفته می‌کند. بنابراین، معلم ریاضی باید به تناسب مطلب و ویژگی‌ها و سطح استعدادهای دانش‌آموزان، در تدبیر آموزشی خود از بازنمایی هندسی استفاده کند. گاهی نیز باید برای گریز از نقش منفی آن در اذهان دانش‌آموزان، از به‌کارگیری بازنمایی هندسی خودداری نماید».

۲. استفاده از بازنمایی‌های چندگانه در تدریس مفاهیم و معرفی ایده‌های ریاضی

یک بخش از تحقیق درباره‌ی چگونگی یادگیری انسان، بر مفید بودن ساختن بازنمایی‌های چندگانه برای یک ایده‌ی مشابه و انتقال از یک بازنمایی به بازنمایی دیگر تأکید دارد. زمانی می‌توان مطمئن شد که دانش‌آموز معنای واقعی رابطه‌ای را درک کرده است که او بتواند آن رابطه را به صورت جدول‌ها، نمودارها، نمادها و در کلمات نشان دهد و به استناد این نظر، راهی که دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که این بازنمایی‌ها و انتقال‌ها را ایجاد کنند، دیدن و کار کردن با آن‌ها در زمینه و متنی است که یافتن جواب در آن‌ها اهمیت پیدا می‌کند. دانش‌آموزان درگیر با این نوع فعالیت‌ها، در نهایت به ایده‌ی اتصال و ارتباط[۱۸] در ریاضی می‌رسند. اگرچه ممکن است که آن‌ها گاهی نیاز داشته باشند که یک دوباره‌نگری به کارشان داشته باشند و اتصالات و ارتباطات بسیاری که ایجاد کرده‌اند، تشخیص دهند (ماهیت ریاضی، ۱۹۹۷). با استفاده‌ی مناسب از اشیای فیزیکی و دست‌ورزی‌های ملموس ـ به‌عنوان ساده‌ترین نوع بازنمایی ـ می‌توان تجربه و دانش غیررسمی دانش‌آموزان را با ریاضیات مدرسه‌ای پیوند زد و به توسعه‌ی فهم و درک ریاضی آن‌ها کمک کرد (کیل پاتریک و سوافورد، ۲۰۰۱).

نقش ICT در مرتبط کردن بازنمایی‌های چندگانه

شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM, ۲۰۰۰) تأکید دارد که فناوری اطلاعات و ارتباطات[۱۹] فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان فراهم می‌کنند تا آن‌ها بنا به سند تجربیات مختلف و بیشتری را با استفاده از بازنمایی‌های چندگانه کسب کنند. به‌عنوان نمونه، انواعی از نرم‌افزارهای آموزشی وجود دارند (مانند نرم‌افزار cabri در هندسه یا نرم‌افزارهای crocodile و geup3 در ریاضیات عمومی) که اجازه می‌دهند تا دانش‌آموزان، یک مفهوم ریاضی مثل تابع را به صورت هم‌زمان به شکل‌های گوناگونی مانند جدول اعداد، نماد و نمودار مشاهده کنند. چنین نرم‌افزارهایی این قابلیت را دارند تا دانش‌آموزان خودشان امتحان کنند که تغییرات در یک بازنمایی چگونه به صورت هم‌زمان در سایر بازنمایی‌ها تأثیرگذار است.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

یاددهی و یادگیری مفاهیم و ایده‌های ریاضی همواره با مشکلاتی مواجه بوده است. فرایند یاددهی و یادگیری ریاضیات در مدارس باید به گونه‌ای باشد تا دانش‌آموزان بدانند اغلب ایده‌های ریاضی می‌توانند به صورت ملموس، نموداری و نمادین معرفی شوند. باید تلاش کرد تا با فراهم کردن یک دیدگاه شهودی برای دانش‌آموزان و حرکت تدریجی از تجربه‌های عینی و ملموس به سمت ایده‌های مجردتر و استفاده‌ی مناسب از بازنمایی‌های چندگانه به ساخته شدن مفاهیم و ایده‌های ریاضی به آن‌ها کمک شود. آن‌چه که مهم است این است که در استفاده از بازنمایی‌های چندگانه در آموزش مفاهیم و ایده‌های ریاضی، باید طراحی مراحل به گونه‌ای باشد که در یک روند استقرایی و با تکیه بر دانش قبلی دانش‌آموزان، فرصت کشف برای دانش‌آموزان فراهم شود و تنها بر مهارت‌ها و دانش رویه‌ای تأکید نشود و ارتباط و سازگاری منطقی بین نمایش‌های متفاوت (بازنمایی‌های جداگانه) از مفاهیم و ایده‌ها نیز نشان داده شود. معلمان باید برای دانش‌آموزان فرصت‌هایی ایجاد کنند تا بتوانند ارتباط صریحی بین آن‌چه که با اشیای فیزیکی و دست‌ورزی‌های ملموس انجام می‌دهند و مفاهیم و ایده‌های ریاضی (که هدف به‌کار گرفتن این اشیای فیزیکی و دست‌ورزی‌های ملموس، کمک به تدریس بهتر آن‌هاست) برقرار سازند. ریاضی در این ارتباط‌ها تجلی می‌یابد نه در اشیای فیزیکی و دست‌ورزی‌های ملموس که تسهیل‌کننده‌ی یادگیری ریاضی است. هم‌چنین، یکی از روش‌های مفید برای نشان دادن ارتباط درون یک حوزه

معلمان باید بازنمایی‌های مرسوم و معمول ریاضی را به دانش‌آموزان نشان داده و به آن‌ها کمک کنند تا به‌طور مؤثری از بازنمایی‌ها در مواقع لزوم استفاده کنند

و یا بین حوزه‌های گوناگون ریاضی و برقراری ارتباط بین بازنمایی‌های چندگانه‌ی یک مفهوم ریاضی، استفاده از کامپیوتر و نرم‌افزارهای آموزشی مناسبی است که دانش‌آموزان می‌توانند به‌صورت هم‌زمان و با بیشترین سرعت و دقت، ارتباط بین فرمول‌ها، جدول‌ها و نمودارها را به سادگی مشاهده کرده و با تغییر یکی از بازنمایی‌ها، تغییر حاصل در سایر بازنمایی‌ها را ببینند و ارتباط بین آن‌ها را درک کنند. آموزش مفهوم تابع توسط پژوهشگر مقاله‌ی حاضر در یکی از دبیرستان‌ها به دانش‌آموزان دو کلاس دوم ریاضی (یکی از کلاس‌ها با استفاده از نرم‌افزار آموزشی geup3 و تلفیق بازنمایی‌های عددی، نموداری و نمادی توابع مختلف به‌صورت فرایند انتزاعی و کلاس دیگر به طریق سنتی و روش کتاب) نشان داد که دانش‌آموزان کلاسی که آموزش آن‌ها از طریق نرم‌افزار بوده است نسبت به دانش‌آموزان کلاس دیگر، درک بهتر و کامل‌تری نسبت به مفهوم تابع داشته‌اند.

پی‌نوشت

1. Concrete Manipulation
2. Abstract Thinking
3. Multiple Representation
4. National Council of Teachers of Mathematics - 2000
شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا

۵. استانداردهای محتوایی سند (NCTM-۲۰۰۰) عبارتند از: عدد و عملیات، جبر، هندسه، اندازه‌گیری، تحلیل داده‌ها و احتمال.

۶. استانداردهای فرایندی سند (NCTM-۲۰۰۰) عبارتند از: حل مسئله، اثبات و استدلال، ارتباطات، اتصالات و بازنمایی.

7. Fennal
8. Rowan
9. Goldin
10. Stingold
11. Perry
12. Atkins
13. Suh
14. Moyer
15. Heo
16. Cramer
17. Tall
18. Mathematical Connection

۱۹. فناوری اطلاعات و ارتباطات

منابع

۱. الدنو، ادرین و تیلور، راین. **آموزش ریاضیات به کمک ICT**. ترجمه‌ی شهرناز بخشعلی‌زاده (۱۳۸۷). چاپ اول، انتشارات مدرسه، تهران. صص ۷ و ۸۴ ـ ۸۳.

۲. جهانشاهی، محمد (۱۳۸۰). **اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی**. چاپ دوم، تهران، انتشارات مدرسه. صص ۱۹۶ـ۱۹۵.

۳. ریحانی، ابراهیم. (۱۳۸۴). **آموزش تابع، برخی رویکردها و چالش‌ها**. گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجائی تهران. صص ۷ و ۱۴ـ۱۰.

۴. کیل پاتریک، جرمی و سوافورد، جین (۲۰۰۱). **کمک کنیم کودکان ریاضی یاد بگیرند**. ترجمه مهدی بهزاد و زهرا گویا. (۱۳۸۷) چاپ اول، انتشارات فاطمی، تهران. صص ۳۲ و ۳۸.

۵. گویا، زهرا و سرشتی، حمیده (۱۳۸۵). آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۴. صص ۲ و ۳۱ـ۳۰. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۶. گویا، زهرا و مرتاضی مهربانی، نرگس (۱۳۸۳). ماهیت ریاضی. سند ۲۰۶۱ (۱۹۹۷) **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۷۶. صص ۱۱ـ۴. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

7. Mackie, Diana(). *Using Computer Algebra to Encourage a Deep Learning Approach to Calculus*. Napier University School of Mathematics & Statistics, Sighthill Court. Edinburgh. EH114 BN Scotland, UK. p.4.

8. National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics (NCTM-2000) .pp :6 7-70, 360-363.*

9. Ozel, Serkan(2008). *Using Multiple Representations in Teaching and Learning Mathematics*. North Texas STEM Center, Texas A&M University. p: 1

در صفحه‌ی ۶۳ شماره‌ی ۹۸ این مجله، نام آقای حمید دافعی اشتباهاً حمیدرضا دافعی نوشته شده است که بدین وسیله آن را اصلاح کرده و از ایشان پوزش می طلبیم.

نقش آشنایی با تاریخ ریاضیات در یادگیری بهتر ریاضی

ندا مهدوی غروی
کارشناس ارشد ریاضی محض و دبیر ریاضی شهرستان محمودآباد

چکیده

آموزش ریاضی به عنوان تخصصی میان رشته‌ای، عرصه‌ی بررسی و پاسخ گویی به پرسش‌هایی است که برای نیل به آن‌ها، نیازمند به سایر علوم از جمله ریاضیات و تاریخ آن، روان‌شناسی، آمار، علوم تربیتی می‌باشد (علم‌الهدایی، ۱۳۸۱).

در این تحقیق، به نقش تاریخ ریاضی در یادگیری بهتر ریاضی پرداخته شده و نشان داده شده که وقوف دانش‌آموزان به تاریخ ریاضیات، موجب ایجاد نگرش مثبت در آنان به درس ریاضی می‌شود، زیرا تاریخ ریاضی سرگذشت دانشی است که فراز و نشیب‌های در خور تأملی را از سر گذرانده و هم‌چنین، داستان انسان‌هایی است که صفت بارز همگی آنان، تلاش خستگی ناپذیر و همت بلند بوده است.

کلیدواژه‌ها: تاریخ ریاضی، یادگیری، نگرش مثبت، دستگاه شمار، حساب مقدماتی.

این گمان که برتری و داناتری انسان امروزی نسبت به نیاکانش ناشی از برتری هوش و استعداد اوست اشتباهی بزرگ است. نیوتن گفته بود که «اگر می‌توانم دورتر را ببینم به این دلیل است که بر شانه‌های غول‌ها ایستاده‌ام».

این جمله‌ی معروف نیوتن، توجه انسان را به تاریخ جلب می‌کند و در رابطه با ریاضی، بررسی نقش تاریخ ریاضی در فرآیند یاددهی - یادگیری ریاضی از این منظر، مورد توجه است. فرض این نوشته بر این است که اطلاع دانش‌آموزان از تاریخ ریاضی، به بهبود نظر آن‌ها نسبت به ریاضی و افزایش انگیزه و تلاش برای یادگیری ریاضی کمک می‌کند.

آموزش ریاضی شاخه‌ای از علوم و معرفت بشری است که در سال‌های اخیر مورد توجه محافل علمی، به‌ویژه در کشورهای توسعه یافته بوده است (علم‌الهدایی، ۱۳۸۱). شرط لازم برای یادگیری ریاضیات این است که ابتدا دانش‌آموزان به فهم دقیق مطالب درسی علاقه‌مند گردند و برای این کار، ایجاد انگیزه و نگرش مثبت نسبت به ریاضی در دانش‌آموزان، از اهمیت خاصی برخوردار است. یکی از بهترین چیزهایی که برای یادگیری و علاقه به ریاضی ایجاد انگیزه می‌کند، بیان ریشه‌های تاریخی آن می‌باشد.

در زیر به تعدادی از مزایای آشنایی دانش‌آموزان با تاریخ ریاضی می‌پردازیم:

۱- با بیان چگونگی پیدایش یک مطلب، آمادگی بیشتری برای فهم مطالب بعدی فراهم می‌شود و اشتیاق بیشتری در شنونده ایجاد می‌کند که فهم و یادگیری را آسان‌تر می‌سازد. به عنوان مثال، مطالعه‌ی مطلب زیر پیش از شروع مبحث اعداد و نماها

در ریاضیات (۱)، راهگشاست: «مفهوم عدد و فرآیند شمارش به قدری پیش از تاریخِ مضبوط تکوین یافته که کیفیت این تکوین تا حدود زیادی حدسی است. می‌توان گفت که بشر حتی از قدیمی‌ترین اعصار، درکی از عدد داشته یعنی دست‌کم مفهوم بیشی و کمی را وقتی که اشیایی به گروه کوچکی اضافه یا از آن برداشته می‌شدند درک می‌کرده است، زیرا مطالعات نشان داده‌اند که برخی حیوانات از این درک برخوردارند. با تکامل تدریجی جامعه، شمارش‌های ساده ضروری شد. برای مثال، رئیس قبیله می‌بایست بداند که چند متحد و چند دشمن دارد. شاید قدیمی‌ترین راه نگه داشتن حساب، نوعی چوب خط بود. وقتی انجام شمارش‌های وسیع‌تر لازم شد، عمل شمارش به تدریج به صورت منسجم‌تری درآمد و مفهوم پایه‌ی عدد نویسی به‌طور طبیعی شکل گرفت. شاید قدیمی‌ترین دستگاه شماری که تکوین یافت، دستگاه گروه‌بندی ساده بود (ایوز).

۲- مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات ما را با مسائل و چالش‌های مردمان گذشته آشنا می‌سازد و در می‌یابیم که گذشتگان ریاضی‌دان ما، چه راه پرفراز و نشیبی را برای تولید و انتقال این میراث به ما پیموده‌اند. به عنوان مثال، بسیاری از الگوهای محاسبه که امروزه در حساب مقدماتی به‌کار می‌روند، در حوالی قرن پانزدهم ابداع شدند. یکی از دلایلی که برای توضیح این پیدایش دیررس اقامه می‌شود مشکلات مادی است که در چنین کاری موجود بود. نبودن ذخیره‌ای فراوان و مناسب از ماده‌ی مطلوبی که بتوان بر آن نوشت، مانع از هر گونه پیشرفت روند حساب می‌شد. باید به‌خاطر داشت که کاغذ امروزی ساخته شده از خمیر که توسط ماشین ساخته می‌شد، کمی بیش از یک صد سال عمر دارد. کاغذ قدیمی‌تر ساخته شده از پارچه‌ی کهنه، با دست ساخته می‌شد و در نتیجه گران و کمیاب بود و حتی این نوع کاغذ هم تا قرن دوازدهم به اروپا آورده نشد. یک ماده‌ی قدیمی کاغذ مانند، پاپیروس بود که در آن ساقه‌های نی به صورت نوارهای بلند و نازکی بریده و کنار هم گذاشته می‌شدند تا به شکل ورقه‌ای در آیند، لایه‌ی دیگری از این نوارها را به روی آن گذاشته و همه را در آب خیس می‌کردند، سپس ورقه‌ها را فشرده در آفتاب خشک می‌کردند. بعد از خشک کردن ورقه‌ها، آن‌ها را با زحمت بسیار به کمک جسم سخت و گردی هموار می‌کردند تا آماده‌ی نوشتن شود. وسیله‌ی دیگر کاغذ، پوستی بود که (آن را بارها) می‌شستند و دوباره استفاده می‌کردند. قبل از دوران امپراطوری روم، سینی‌های شن برای شمارش‌های ساده و رسم اشکال هندسی به کار می‌رفت (ایوز).

۳- از مطالعه و بیان تاریخ ریاضی در کلاس می‌توان نقش ملل یا مذاهب مختلف و سهم آن‌ها را در پیدایش و ترویج دانش ریاضی بیان کرد. مثلاً دریافت که نقش مسلمانان در پیشرفت ریاضیات، هم از نظر توسعه و هم از نظر ترویج آن چگونه بوده و به ویژه خدمات ایرانیان به علم ریاضی از چه جایگاه معرفتی و فرهنگی ای برخوردار بوده است. بررسی زندگی دانشمندان هر ملت موجب تشویق و ترغیب وارثان آن می‌شود. مثلاً وقتی بدانیم نخستین کتاب جبر و مثلثات به وسیله‌ی ریاضی‌دانان ایرانی به رشته‌ی تحریر درآمدند و ریاضی‌دانانی هم‌چون بیرونی و بوزجانی، همه‌ی دستورات مثلثاتی را به‌وجود آوردند یا حتی در حدود پنج‌هزار سال پیش در این خطّه، گام‌های اساسی در جهت عددنویسی برداشته شده است و هزار سال است که روش‌هایی برای آموزش جدول ضرب و تقسیم و جذر و کعب با وسایل هندسی ابداع شده است (حکمت، ۱۳۵۰)، اعتماد به نفس بیشتری یافته و خود را در مقابل سختی ریاضیات نمی‌بازیم.

۴- با مطالعه‌ی تاریخ ریاضی یاد می‌گیریم تا مثل ابونصر فارابی، ابوریحان بیرونی، جمشید کاشانی، و غیره و غیره، تمامی وقت خویش را صرف یاد گرفتن و یاد دادن کنیم (شهریاری، ۱۳۸۷).

۵- در جای جای تاریخ ریاضیات، شاهکارهایی از ریاضی و کاربردهای آن مشاهده می‌شود. این آثار، خلاقیت عظیم، مهارت در محاسبه و دقت استدلال را به نمایش می‌گذارد. به عنوان مثال، «ابوریحان بیرونی با دقت خوبی مساحت کره‌ی زمین را محاسبه کرده بود. وی ۵ قرن قبل از این که کریستف کلمب آمریکا را کشف کند، از روی قواعد علمی حدس زده بود که در نیم‌کره‌ی جنوبی مقابل بخش شمالی از کره‌ی زمین که آباد است، خشکی دیگری نیز وجود دارد. او نتیجه‌ی فکر خود را در کتابی به نام «الهند» در سال ۴۴۲ هجری قمری، حدود ۴۷۵ سال قبل از این که آمریکا کشف شده باشد، بیان کرده است (نقل شده در آبادی باویل، ۱۳۸۱).

۶- در تاریخ ریاضی، با زندگی و شرح تلاش‌های بانوان ریاضی‌دان آشنا می‌شویم که با همت والا در اعتلای ریاضیات

کوشیدند و حتی بر مردان عصر خویش پیشی گرفتند. دانستن این مطلب، موجب تقویت اعتماد به نفس در ریاضی در دختران دانش‌آموز می‌شود چرا که هنوز کم نیستند افرادی که ریاضیات را یک علم مردانه می‌دانند و بر این باورند که مردان ذاتاً در ریاضی موفق‌ترند. از جمله بانوان ریاضی‌دان می‌توان به هیپاتیای اسکندرانی یاامی نوتر آلمانی اشاره کرد.

۷- تاریخ ریاضی به ما می‌آموزد که مطالعه‌ی ریاضیات، موجب آزاد کردن روان انسان از اندیشه‌های غیر انسانی می‌شود. تاریخ ریاضی نشان می‌دهد که مردم ساده ولی اندیشمند و صد البته پرتلاش در سراسر سیاره‌ی زمین، در ساختن بنای شوق‌انگیز و پرشکوه ریاضیات امروزی دست داشته‌اند (شهریاری،).

در تاریخ ریاضی، با زندگی و شرح تلاش‌های بانوان ریاضی‌دان آشنا می‌شویم که با همت والا در اعتلای ریاضیات کوشیدند و حتی بر مردان عصر خویش پیشی گرفتند. دانستن این مطلب، موجب تقویت اعتماد به نفس در ریاضی در دختران دانش‌آموز می‌شود

مثلاً در مطالعه‌ی زندگی‌نامه‌ی ارشمیدس می‌خوانیم: «ارشمیدس در آن هنگام که اجل وی فرا رسید سرگرم حل مسئله‌ای در باب یک شکل هندسی بود و اندیشه و نگاه خود را یک‌سره بدان معطوف ساخته بود. او نه به ورود سربازان رومی و نه به سقوط شهر توجهی داشت. در بحبوحه‌ی این مطالعه و تفکر، ناگهان سربازی بر او وارد شد و از او خواست که نزد مارکلوس برود ولی او حاضر نشد پیش از اتمام مسئله این کار را انجام دهد. سرباز خشمگین تیغ بر کشید و او را از پای درآورد. (نقل شده در آبادی باویل، ۱۳۸۱)

۸- می‌توان از جملات قصاری که در جای جای تاریخ ریاضی از قول بزرگان این علم بیان شده برای ایجاد انگیزه استفاده کرد. مثلاً موریس کلاین ریاضی‌دان آلمانی می‌گفت که «ریاضیات علمی‌ترین دستاورد اندیشه و اصیل‌ترین زاده‌ی ذهن آدمی است. موسیقی، روح را نوازش می‌دهد؛ نقاشی، چشم را می‌نوازد؛ شعر؛ موجب برانگیختن عاطفه می‌شود؛ فلسفه، ذهن را قانع می‌کند و مهندسی، زندگی را بهتر می‌سازد. ولی ریاضی، دارای مجموعه‌ی همه‌ی این ارزش‌هاست.» (شهریاری، ۱۳۸۷).

جمع بندی

با بررسی تاریخ ریاضیات، به بنیان‌های این علم دسترسی می‌یابیم و دید وسیع‌تری درباره‌ی این دانش پیدا می‌کنیم. در مجموع، آگاهی از نکات تاریخی موجب درک بهتر و برقراری ارتباط سهل‌تر با مفاهیم ریاضی می‌شود. به‌طور کلی، آگاهی از تاریخ ریاضیات به دلایل زیر می‌تواند نقش مؤثری در یادگیری ریاضی داشته باشد.

– آشنایی با بنیان‌های تاریخی موجب ایجاد انگیزه می‌شود؛

– درک تلاش پیشینیان با وجود امکانات اندک و دریافت این موضوع که کمبود امکانات دلیل موجهی برای عدم فعالیت نیست؛

– دانستن جایگاه رفیع مسلمانان و ایرانیان در تاریخ ریاضی، که موجب تقویت اعتماد به نفس می‌شود؛

– آشنایی با کاربردهای ریاضی؛

– گفته‌های ریاضی‌دانان می‌تواند درانگیزش دانش‌آموزان نقش داشته باشد.

و در پایان، پیشنهاد می‌شود:

– برای کتاب‌خانه‌های مدارس، کتاب‌هایی مربوط به تاریخ ریاضیات خریداری شود؛

– در کتاب‌های درسی ریاضی، به تاریخ ریاضیات با عنوان خواندنی‌ها پرداخته شود؛

– پروژه‌های تحقیقی تاریخ ریاضی برای دانش‌آموزان در نظر گرفته شود.

منابع

۱. آبادی باویل، جمشید (۱۳۸۱). **تاریخ علم ریاضیات**. تهران. دانشگاه آزاد اسلامی (قائم‌شهر). انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی – واحد قائم شهر.

۲. ایوز، هاوارد دبلیو. **آشنایی با تاریخ ریاضیات**. ترجمه‌ی محمدقاسم وحیدی اصل. تهران، مرکز نشر دانشگاهی.

۳. بخشعلی‌زاده و همکاران. (۱۳۸۷). **ریاضیات (۱) سال اول دبیرستان**. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

۴. حکمت، علیرضا (۱۳۵۰). **آموزش و پرورش در ایران باستان**. تهران، انتشارات کیهان.

۵. علم‌الهدایی، حسن (۱۳۸۱). **راهبردهای نوین در آموزش ریاضی**. تهران، نشر شیوه.

۶. شهریاری، پرویز (۱۳۸۷). ریاضیات در ایران. **مجله‌ی رشد برهان متوسطه**، شماره‌ی ۵۹، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۷. شهریاری، پرویز (۱۳۷۸). **سرگذشت ریاضیات**، نشر مهاجر.

سخن گفتن با صداهای متفاوت

کدهایی که ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی در اختیار دارند تا به دانش، مشروعیت بخشند

استو تورنتون
دانشگاه کانبرا، استرالیا
ترجمه: نرگس مرتاضی مهربانی
آموزشگر و دبیر ریاضی

کلیدواژه‌ها: معرفت‌شناسی، ماهیت دانش، برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای.

چکیده

این مقاله، از تجزیه و تحلیل متنی[1] دو سند آماده شده توسط جامعه‌ی ریاضی و جامعه‌ی تحقیقات آموزش ریاضی برای بازنگری سواد عددی ملی[2] در سال ۲۰۰۷ استفاده می کند تا [روش] مشروعیت بخشیدن به دانش را در این دو حوزه، بازگشایی و مقایسه نماید. این مقاله، نشان می‌دهد که دانش در این دو نظام، مبتنی بر ابزارهای[3] معرفتی متفاوتی است و از همین رو، بحث‌های موجود پیرامون آموزش ریاضی، حداقل تا حدودی، ناشی از تفاوت دیدگاه‌های مختلف نسبت به دانش است.

مقدمه

در ایالات متحده‌ی آمریکا، بحث بین حامیان برنامه درسی «اصلاحی» و طرفداران برنامه درسی «از نظر ریاضی، درست» به شدت ادامه دارد. اصلاح طلبان، حامیانِ [برنامه‌ی درسی] از نظر ریاضی درست را به تجزیه‌گرا بودن[4]، متهم می‌کنند که به رویکرد اصول، بازگشت کرده‌اند و فرایند یادگیری ریاضی را به مجموعه‌ای از رویه‌های خوش تعریف، محدود نموده‌اند. از سوی دیگر، افرادی که به [برنامه‌ی درسی] از نظر ریاضی درست باور دارند، اصلاح طلبان را به «فازی بودن»[5] متهم می‌سازند. آن‌ها مدعی هستند که اصلاح طلبان به هر روش، بیش از بازدهی واقعی آن، ارج می‌نهند و به دانش‌آموزان اجازه می‌دهند که به آن‌چه که می‌خواهند، عمل نمایند (کلین[6], ۲۰۰۷).

چنین بحث‌هایی در استرالیا نیز شروع شده است. از یک سو، آموزشگران معلمان دانشگاهی مدار و محققان آموزش ریاضی ــ یک برنامه درسی ریاضی را ضروری می‌دانند که پذیرای تغییرات اجتماع باشد و به استفاده از تکنولوژی ارج نهاده و آن‌را در برنامه بگنجاند و به روش غیرمطمئنی[7] که در آن دانش‌آموزان، دانش خود را می‌سازند، توجه نماید. از سوی دیگر، دونلی[8] (۲۰۰۷، ص ۵۵) تحت تأثیر ریاضی‌دانان و معلمان ریاضی، وجود یک برنامه درسی جدی‌تر را ضروری می‌داند. او با رویکرد ساخت و سازگرایی و آموزش «نتیجه‌مدار و به‌طور سیاسی درست» و «ریاضی فازی» مخالف است. [چنین برنامه‌درسی]، ریاضیات را به صورتِ یک نظام دقیق، به تصویر می‌کشد و بر تعاریف روشن و رویه‌های استاندارد ارج می‌نهد.

این مقاله از چارچوبی استفاده می‌کند که به واسطه‌ی آن، بتواند چگونگی تولید دانش و مشروعیت بخشیدن به آن توسط یک نظام را بررسی نماید (هاتون[9]، ۲۰۰۰).

این مقاله، نشان می‌دهد که دانش در این دو نظام، مبتنی بر ابزارهای معرفتی متفاوتی است و از همین رو، بحث‌های موجود پیرامون آموزش ریاضی، حداقل تا حدودی، از تفاوت در روش‌های نگاه به دانش، ناشی می‌شود. من از تجزیه و تحلیل متنی دو سند آماده شده توسط جامعه‌ی ریاضی و جامعه‌ی تحقیقات آموزشی ریاضی برای بازنگری سواد ؟ ملی در سال ۲۰۰۷ استفاده کردم تا [روش] مشروعیت بخشیدن به دانش را در این دو حوزه، مقایسه و کشف نمایم. هدف این نیست که دیدگاهی را بر دیگری ترجیح دهیم، بلکه هدف، عمیق‌تر کردن درک و به دنبال آن کمک به توافق بیش‌تر در مورد تفاوت دیدگاه‌ها و به پیش بردن بحث‌ها است.

بیان مسئله[10]

ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی در استرالیا به طور طبیعی،

علاقه‌ی زیادی به برنامه درسی ریاضیات مدرسه‌ای دارند. این علاقه به طور خاص در اوایل دهه‌ی ۱۹۹۰ با توسعه و معرفی یک **بیانیه‌ی ملی در مورد ریاضیات برای مدارس استرالیا**[11] (شورای آموزش استرالیا[12]، ۱۹۹۱) و سند مرتبط با آن، **ریاضیات ـ یک پروفایل برنامه درسی برای مدارس استرالیایی** (شورای آموزش استرالیا، ۱۹۹۴) به وجود آمد. جامعه‌ی آموزش ریاضی و جامعه‌ی ریاضی هر دو در مورد فدایند تولید سندها، دغدغه‌هایی داشتند. هر دو گروه معتقد بودند که در توسعه‌ی سندها، مشورت‌های لازم صورت نگرفته است و به قاطعیت آشکار، تیم نویسندگان [سند] به دنبال کردن یک برنامه‌ی کاری خاص اشاره می‌کنند. هر دو گروه، در مورد محتوای سندها، صحبت‌هایی دارند. به هر حال، این دغدغه‌ها، مبتنی بر پایه و اساس متفاوتی هستند (الرتون و کلمنتس، ۱۹۹۴).

آموزشگران ریاضی نگران بودند که «[اتخاذ] رویکردهای رفتارگرایی تجزیه‌گرا در تدریس و یادگیری ریاضیات... منجر به رویکردهای جزء‌نگری[14] به برنامه درسی می‌شود و روش‌های تدریس و یادگیری را در اتخاذ یک دیدگاه کل‌نگرانه به ریاضیات با شکست مواجه می‌سازد» (الرتون و کلمنتس، ۱۹۹۴، ص ۱۰).

رویکرد رفتارگرایی ـ که توضیح داده شد ـ با دیدگاه آموزشگران پیش‌تاز ملی و بین‌المللی در تناقض بود. این آموزشگران، طی دهه‌ی ۱۹۸۰، برای تولید یک برنامه‌درسی که ارتقادهنده‌ی درک و فهم باشد، بسیار بحث کرده بودند (اسکمپ[15]، ۱۹۷۶).

علاوه بر نگرانی در مورد رویکردهای جزءنگر به برنامه‌درسی، ریاضی‌دانان، بیانیه و پروفایل را به دلیل بی‌کیفیت بودن تفکر ریاضی مورد نکوهش قرار دادند. «اگر سندها، تاریخ ریاضیات را با دقت، بازتاب ندهند و کیفیت تفکر ریاضی معاصر را به نمایش نگذارند، در این صورت برنامه‌های ریاضیات مدرسه‌ای که محصول این سندها هستند، به طور اجتناب‌ناپذیری، رضایت‌مند نخواهد بود» (الرتون و کلمنتس، ۱۹۹۴، ص ۱۰). ریاضی‌دانان در مورد حذف موضوعات مهم ریاضی، نگران بودند. هم‌چنین، بیان می‌داشتند که توصیه‌های موجود در پروفایل، از دانش‌آموزان و معلمان، انتظاراتی جدی ندارند.

توسعه‌های صورت گرفته در بیانیه‌های ملی یادگیری برای ریاضیات[16] (انجمن برنامه درسی[17]، ۲۰۰۶) و تأسیس متعاقب کمیته‌ی برنامه‌درسی ملی[18] توسط دولت کارگر راد[19] به منظور توسعه‌ی برنامه درسی ملی در زبان انگلیسی، تاریخ، علوم و ریاضی، فرصت مناسبی است تا از آن طریق، پایه‌های فلسفی دیدگاه‌های افراد علاقه‌مند به ریاضی مدرسه‌ای، مورد بررسی قرار گیرد.

چارچوب نظری

این مقاله، نشان می‌دهد که بحث بر سر این که چه چیزی باید در آموزش ریاضی و برنامه‌درسی مدرسه‌ای به‌حساب آید ـ در واقع نبردی برای کنترل ابزار معرفتی ـ (مور و ماتون، ۲۰۰۱) ـ از تعارض باورها در مورد تولید و اعتبار بخشیدن به دانش سرچشمه می‌گیرد. این ابزار معرفتی، مواردی مانند «چه کسی می‌تواند دانش مشروع را تولید کند؛ روش‌های انتخاب دانش از قبل موجود و تغییر شکل آن در جریان تولید دانش جدید؛ محکی برای قضاوت ادعاهای مربوط به دانش جدید» را کنترل می‌کند (مور، ماتون، ۲۰۰۱، ص ۳۰).

بنابراین، ابزار معرفتی که رابطه‌ی بین دانش و داننده[20] [یادگیرنده‌ی ریاضی] را شرح می‌دهد، پرتویی تازه بر این می‌تاباند که چرا مردم، دنیا را چنان‌که می‌گویند، می‌بینند و به تبع آن، راه‌هایی که نسبت به ایده‌های جدید عکس‌العمل نشان می‌دهند، تحت تأثیر آن قرار می‌گیرد. ریاضیات[21] و آموزش ریاضی[22]، گفتمان‌های هم‌ترازی هستند که با مجموعه‌ای از «زبان‌های تخصصی با شیوه‌های[23] تخصصی توضیح خواستن و محک برای ساختن و انتشار متون» (برنشتاین[24]، ۱۹۹۹، ص ۱۶۲) مشخص می‌شوند.

در ریاضیات، این زبان‌های تخصصی شامل حوزه‌های مطالعاتی مانند هندسه، نظریه اعداد و جبر هستند. در آموزش ریاضی، این زبان‌ها ممکن است شامل پارادایم‌های تحقیقاتی یا لنزهای متفاوتی باشند. لنزهایی که به‌وسیله‌ی آن‌ها، نظریه و عمل، در تدریس و یادگیری ریاضی دیده می‌شوند. در هر کدام از این نظام‌ها، دانش توسط افراد درگیر در رشته‌ی خاص، تولید می‌شود و به‌وسیله‌ی افراد دیگر در جامعه‌ی دانشگاهی درون نظام، اعتبار بخشیده می‌شود. به هر حال، فرایند این اعتباربخشی، مبتنی بر اصول متفاوتی است. در مورد ریاضیات اعتبار ایده‌های جدید به دانشی است که تولید می‌کنند در حالی که در آموزش ریاضی، این یادگیرنده است که به ایده‌های جدید اعتبار می‌بخشد.

ریاضیات، دستور زبان درونی قدرتمندی دارد (برنشتاین، ۱۹۹۹) که شامل اصول توافق شده‌ی منطق، سازگاری درونی و بیرونی و عدم وجود خلأهایی در استدلال است. اثبات اندرو وایلز[25] برای آخرین قضیه‌ی فرما، نمونه‌ای کلاسیک از دستور زبان قدرتمند ریاضی است. اگرچه عده‌ی اندکی می‌توانند اثبات وایلز را در کلیت آن بفهمند، اما همین دستور زبان ریاضی بود که توانست خلأیی در اثبات آن پیدا کند. بعد از آن، وایلز توانست روی آن خلأ کار کرده و اثبات را کامل نماید؛ اثباتی که در مدّاقه‌های جدی منطق ریاضی، تاب آورد. اگرچه اثبات وایلز، توسط همکارانش در جامعه‌ی ریاضی، مورد ارزیابی قرار گرفت اما در نهایت، حاصل کار مهم بود نه شخص.

از سوی دیگر، آموزش ریاضی، دستور زبان درونی ضعیفی دارد (برنشتاین، ۱۹۹۹). مجله و مقالات کنفرانس‌ها در ادبیات تحقیقات آموزش ریاضی مطابق با محک‌های قابل انعطاف نسبی، مورد بازنگری قرار می‌گیرند. از جمله این محک‌ها می‌توان به مواردی چون آیا مقاله بر تحقیقات منتشر شده مبتنی است و آیا آن‌ها را زیر سؤال می‌برد، باز پایان بودن[26] و جدی بودن سؤالات تحقیق، توصیف واضح روش‌شناسی، اصول اخلاقی تحقیق و انسجام

بحث‌ها اشاره نمود (گوردن[۲۷] , ۲۰۰۲). «در یک پارادایم تفسیری[۲۸]، خود افراد معنا را می‌سازند و یک محقق نمی‌تواند با بحث‌های منطقی، شرکت کنندگان را مجاب کند که دیدگاه او نسبت به جهان بهتر است و باید مورد استفاده قرار گیرد» (گوردن، ۲۰۰۲، ص۲). در حالی که منتقدان، بسیار تلاش می‌کنند تا منصف باشند، در نهایت این شخص است که اهمیت دارد نه حاصل کار.

این تفاوت در مشروعیت بخشیدن به دانش توسط مالتون (۲۰۰۰) به ترتیب به عنوان کدهای دانش و داننده توضیح داده می‌شود. او ادعا می‌کند که زبان‌های مشروعیت بخشیدن، چیزی بیش از لفاظی است؛ آن‌ها «نشان دهنده‌ی مبنایی برای رقابت کردن ادعاها به منظور محدود کردن موقعیت‌ها و منابع مادی است» (ماتون، ۲۰۰۰، ص ۱۴۹). کدهای مشروعیت بخشیدن دانش و داننده مبتنی بر اصول زیربنایی با توجه به رابطه‌ی معرفتی است. این رابطه‌ی معرفتی، رابطه‌ی بین دانش آموزشی و موضوع مورد مطالعه‌اش را مدنظر دارد و رابطه‌ی اجتماعی، به رابطه‌ی بین دانش آموزشی و مؤلف آن توجه دارد. این اصول، مشخص می‌کنند که در یک حوزه‌ی معین، چه چیزی را می‌توان به طور مشروع، دانش نامید و چه کسی می‌تواند به طور مشروع ادعا کند یا به دانش اعتبار بخشد. ماتون (۲۰۰۰)، از مفهوم طبقه‌بندی[۲۹] و قالب‌بندی[۳۰] برنشتاین (۲۰۰۰)، برای بحث در مورد ماهیت این اصول استفاده می‌کند. طبقه‌بندی، به استحکام مرزهای بین مقوله‌ها یا زمینه‌ها اشاره دارد. در حالی که قالب‌بندی به جایگاه کنترل درون یک مقوله یا زمینه اشاره می‌کند. روابط معرفتی و اجتماعی که شیوه‌ی مشروعیت بخشیدن به دانش را مشخص می‌کنند مطابق با استحکام نسبی طبقه‌بندی و قالب‌بندی در هر بُعد تغییر می‌کند.

در مورد ریاضیات، رابطه‌ی معرفتی، هم به شدت طبقه‌بندی و هم قالب‌بندی شده است. به همین دلیل، واضح است که چه چیزی به عنوان ریاضیات مشروع به حساب می‌آید، کنترل زیادی در مورد این که چه چیزی به عنوان ریاضیات مشروع قابل قبول است وجود دارد. از سوی دیگر، رابطه‌ی اجتماعی، به طور ضعیفی طبقه‌بندی و قالب‌بندی شده است. علیرغم اختلاف‌های فرهنگی و وضعیت نامساعد اجتماعی، در نهایت، توسعه‌دهنده‌ی دانش ریاضی نسبت به خود دانش از اهمیت کم‌تری برخوردار است. وقتی جایزه‌ی صدهزار مارکی ولفسکل[۳۱] برای اثبات موفق آخرین قضیه‌ی فرما اعلام شد، سیلی از اثبات‌ها به دانشگاه گوتینگن[۳۲] رسید. «بدون درنظر گرفتن این که چه کسی اثبات خاصی را فرستاده است، هر کدام از آن اثبات‌ها با دقت زیاد مورد بررسی قرار گرفت تا یک تازه‌کار ناشناخته یک اثبات پرطرفدار رادر ریاضیات ارایه داد (سینگ[۳۳] , ۱۹۹۸، ص ۱۴۳). پس ریاضیات، یک شیوه‌ی دانشی برای مشروعیت بخشیدن دارد.

در آموزش ریاضی، استحکام طبقه‌بندی و قالب‌بندی روابط معرفتی و اجتماعی، برعکس است. آموزش ریاضی، ذاتاً بین رشته‌ای است و دانش را از حوزه‌های متنوع وسیعی مانند روان‌شناسی، جامعه‌شناسی و فلسفه و نیز خود ریاضی به عاریت می‌گیرد (پرسمگ[۳۴] , ۱۹۹۸). بنابراین رابطه‌ی معرفتی به طور ضعیفی طبقه‌بندی شده است زیرا پذیرش دامنه‌ی وسیعی ازپارادایم‌های دانش را به عنوان دانش مشروع، مجاز دانسته و حتی ترغیب می‌کند. به علاوه، این پارادایم‌های متفاوت در «سنت‌های فرهنگی متفاوت در آموزش ریاضی، از جامعه‌ها و زیر جامعه‌های متفاوتی ناشی می‌شوند» (سیرپینسکا و کیل پاتریک، ۱۹۹۸، ص ۳۱). پس رابطه‌ی معرفتی، هم‌چنین به طور ضعیفی قالب‌بندی شده است زیرا جایگاه کنترل، توسط یک گروه خاص مشخص نشده است. به هر حال، رابطه‌ی اجتماعی به طورمحکمی قالب‌بندی شده است. تحقیقات آموزش ریاضی، خصوصاً از نوع ماهیت تفسیری، اغلب فرهنگ مدار است. پس محقق «لازم است تا قسمتی از این جهان شود و پیشامدهای آن را برای یک دوره‌ی بلندمدت تفسیر نماید» (پرسمگ، ۱۹۹۸، ص ۵۹). از بین سیزده مسئله‌ی حادی که آموزش ریاضی با آن مواجه است و توسط فرودتال تنظیم شده، اولین و ضروری‌ترین آن‌ها «چرا جنیفر نمی‌تواند حساب کند؟» بود. او این سؤال را از سؤالات انتزاعی‌تر مانند «چرا جانی نمی‌تواند حساب کند؟» و «چرا ماری نمی‌تواند حساب کند؟» جدا کرد. برای [توجیه] این افتراق، فرودنتال توضیح داد که جنیفر یک کودک زنده است که می‌توان او را با جزئیات توضیح داد. تجربه‌ی ریاضی او در مدرسه وابسته به زمینه بود و می‌توان آن تجارب را با بودن در آن زمینه درک کرد. بنابراین، آموزش ریاضی با در نظر گرفتن روابط اجتماعی، به شدت قالب‌بندی شده است. این امر مهم است که چه کسی تحقیق می‌کند. هم‌چنین، مهم است که منتقد تحقیق، بتواند خودش را در زمینه قرار دهد و این بستگی به این دارد که به طور شخصی، موقعیت‌های مشابهی را تجربه کرده باشد. همان‌طور که سوت‌ول[۳۵] (۲۰۰۴ و ص ۵۴۰) در بحث در مورد فرایند نقد مقاله‌های ارایه شده به مجله‌ی تحقیقات آموزشی ریاضی[۳۶] بیان می‌دارد «مهارت افراد منتقد است که در نهایت، کیفیت مجله را تعیین می‌کند.»

من فکر می‌کنم که این ادعاها با درنظر گرفتن تفاوت‌های معرفت‌شناختی، قلب بحث‌های مربوط به برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای محسوب می‌شوند. یک شیوه‌ی مشروعیت بخشیدن، در مقایسه با شیوه‌ی دیگر، مناسب‌تر یا قابل قبول‌تر نیست. هنوز این شیوه‌ها برای اعتبار بخشیدن، در جامعه‌ی آموزش ریاضی در حال رقابت هستند. هر کدام از آن‌ها می‌خواهند با جامعه‌ی تدریس ریاضی با صدای خاص خود بحث کنند و هر کدام چیز منحصر به فردی برای ارائه دارند. صداهای متفاوت ریاضی‌دانان، محققان آموزش ریاضی و معلمان ریاضی در بقیه‌ی این مقاله مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

روش‌شناسی و تجزیه و تحلیل داده‌ها

این مقاله، برای بررسی کدهای مشروعیت بخشیدن به دانش

در دو سند، از تجزیه و تحلیل متنی استفاده می‌کند. سندهایی را انتخاب کردم که دیدگاه‌های جامعه‌ی ریاضیات و جامعه‌ی تحقیقات آموزش ریاضی را با درنظر گرفتن سواد عددی در مدارس استرالیایی گزارش کرده بود.

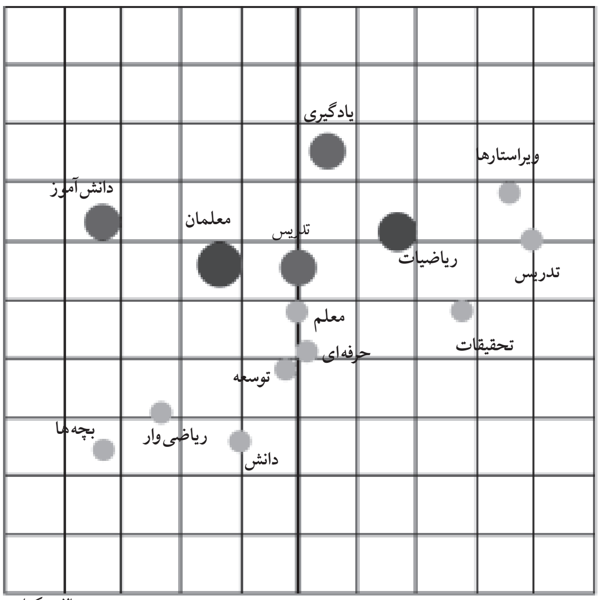
مقاله‌ها توسط **مؤسسه‌ی علوم ریاضی استرالیا**[۳۷] (AMSI) (مؤسسه‌ی علوم ریاضی استرالیا، ۲۰۰۷) و **گروه تحقیقات آموزش ریاضی اقیانوسیه**[۳۸] (MERGA) (گروه تحقیقات آموزش ریاضی اقیانوسیه، ۲۰۰۷) به ترتیب در جواب به **بازنگری سواد عددی ملی دولت استرالیا** در سال ۲۰۰۷ آماده شده بودند.

هدف بازنگری، تجزیه و تحلیل تحقیقات در مورد عمل‌های تدریس، یادگیری و ارزشیابی، بررسی دانش پداگوژیکی محتوایی معلمان شاغل و قبل از خدمت، تعیین رابطه‌ی بین دانش محتوایی معلمان، دانش پداگوژیکی محتوا و عمل تدریس و تعیین روش‌های ارزشیابی کارا بود (دانشگاه موناش[۳۸]، ۲۰۰۷). برای تجزیه و تحلیل محتوای مفهومی سندها از نرم‌افزار لکسی منسر[۳۹] استفاده شد. این نرم‌افزار به محققان اجازه می‌دهد تا تعداد زیادی متن را با تشخیص اتوماتیک مفاهیم اصلی متن با درنظر گرفتن قدرت نسبی آن‌ها، رابطه‌ی بین آن‌ها و تشابه زمینه‌ای مورد بررسی قرار دهند. نتایج تجزیه و تحلیل به صورت یک نقشه‌ی تصویری به نمایش درآمد که محقق را قادر می‌سازد تا ساختار مفهومی سند را تجزیه و تحلیل نماید و جست‌وجوی مفاهیم و رابطه‌ی بین آن‌ها را آسان‌تر کند. لکسی منسر برای مدل‌سازی مفهومی متن در حوزه‌های متنوعی مانند مدیریت بحران (مارتین و رایس، ۲۰۰۷) و تجزیه و تحلیل قوانین بیس‌بال و کریکت (اسمیت و هومفریس، ۲۰۰۶) مورد استفاده قرار گرفته است. نقشه‌ی مفهومی جواب‌ها به بازنگری سواد عددی ملی می‌تواند سطح اهمیت داده شده به مفاهیم مختلف و رابطه‌ی بین مفاهیم را در هر کدام از پیشنهادات مقایسه کند.

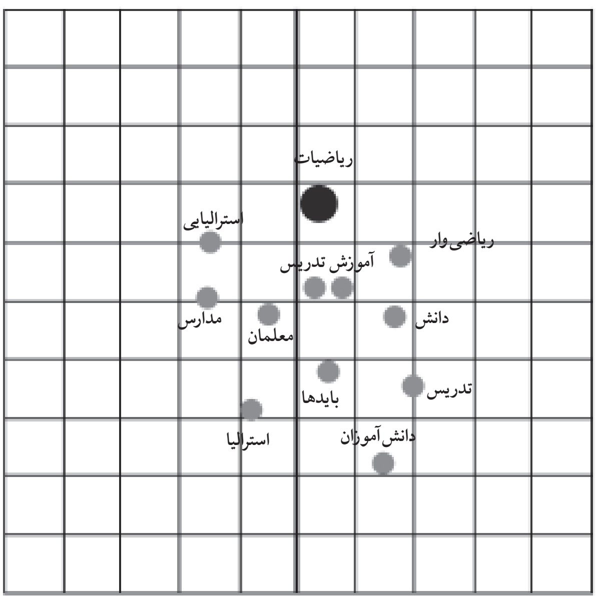
نتایج و مباحثه

هر کدام از سندها با استفاده از لکسی منسر تجزیه و تحلیل شد. این نرم‌افزار، هر متن را هزار بار تکرار کرد تا یک نقشه‌ی تصویری از فراوان‌ترین مفاهیم را تولید کند. اگرچه ممکن است که درون نرم‌افزار، مفاهیمی حذف، ترکیب یا اضافه شوند، اما تصمیم گرفته شد که آن‌هایی حذف، ترکیب یا اضافه شوند که توسط نرم‌افزار مشخص شده بودند. بعد از آن دو هزار تکرار دیگر انجام شد تا نقشه‌ی مفهومی هر سند تقریباً ثابت ماند. این نکته قابل ذکر است که نتایج گزارش شده، حاصل یک تجزیه و تحلیل کامل و همه‌جانبه‌ی سندها نیست، هم‌چنین، یک تجزیه و تحلیل جزئی متن برای مثال، تجزیه و تحلیل زبان‌شناسانه‌ی کارکردی نظام‌مند یا مباحثه‌ی انتقادی نیز نبود. این موارد می‌توانند در تحقیقات بعدی مورد توجه قرار گیرند.

نقشه‌های تصویری AMSI و MERGA در شکل ۱ نشان داده شده است. فراوانی نسبی مفاهیمی که بیش‌ترین تکرار را در سندها داشته‌اند، در جدول ۱ نشان داده شده است.



۳۰۰۰= تکرار



۳۰۰۰= تکرار

با بررسی نقشه‌های مفهومی و جدول فراوانی‌های نسبی می‌توان به شباهت‌ها و تفاوت‌های قابل ملاحظه‌ای پی برد. واضح‌ترین شباهت این است که در هر سند، مفهوم ریاضیات، متداول‌ترین مفهوم است. در حقیقت، هر کدام از سندها بر اهمیت ریاضیات تأکید می‌کنند و به اصطلاح سواد عددی توجه چندانی نکرده‌اند.

در هر کدام از سندها، مفاهیم **دانش‌آموزان** و **معلمان** به طور قابل ملاحظه‌ای دیده می‌شوند. اما در جواب MERGA با فراوانی

جدول ۱

فراوانی نسبی مفاهیم در جواب‌های AMSI و MERGA

فراوانی	فراوانی نسبی مفهوم در مقایسه با متداول‌ترین مفهوم	
	AMSI	MERGA
ریاضیات	٪۱۰۰	٪۱۰۰
دانش‌آموزان	٪۳۶	٪۶۰
معلمان	٪۲۶	٪۸۲
ریاضی‌وار	٪۲۸	٪۳۸
دانش	٪۲۰	٪۲۴
استرالیا	٪۲۰	< ۱۰٪
تدریس	٪۱۹	٪۴۴
آموزش	٪۱۹	٪۲۴
زمان	٪۱۷	< ۱۰٪
برنامه درسی	٪۱۶	< ۱۰٪
مدارس	٪۱۵	< ۱۰٪
باید	٪۱۵	< ۱۰٪
یادگیری	< ۱۰٪	٪۵۰
ویراستارها	< ۱۰٪	٪۴۹
تحقیقات	< ۱۰٪	٪۴۹
عمل	< ۱۰٪	٪۳۷
بچه‌ها	< ۱۰٪	٪۳۵
توسعه	< ۱۰٪	٪۳۲
حرفه‌ای	< ۱۰٪	٪۲۸

نسبی بیش‌تری نسبت به AMSI ظاهر شده است. با توجه به ماهیت دو انجمن، جای تعجب نیست که بر شخص (شیوه‌ی داننده) تأکید بیش‌تری شود تا بر محتوا (شیوه‌ی دانشی). تفاوت تأکیدها بر مفاهیمی مانند **تدریس**، **توسعه** و **حرفه‌ای** تأکیدی مشابه به شخص به جای محتوا را بازتاب می‌دهد. نقشه‌ی مفهومی سند MERGA به‌وضوح نشان می‌دهد که مجاورت مفهومی اصطلاحات حرفه‌ای و توسعه حاکی از این است که این مفاهیم می‌توانند در حقیقت به عنوان یک مفهوم پیچیده‌ی واحد مورد ملاحظه قرار گیرند.

مفهوم **برنامه درسی** با فراوانی نسبی بیش از ۱۵ درصد در سند AMSI ظاهر شده است. اما در سند MERGA کم‌تر از ۱۰ درصد است. در حقیقت، سند AMSI به‌عنوان اولین گام توصیه می‌کند که «انتظارات ریاضی برای هر سطح در آموزش اجباری در مدارس به‌طور واضح مشخص شود.» این عبارت و فراوانی نسبی بالای اصطلاح برنامه درسی، مؤید تأکید بر محتوا (شیوه‌ی دانشی) است تا شخص (شیوه‌ی داننده).

مفهوم **ویراستارها**[40] که در نتیجه‌گیری سندها، به مقالات ارایه شده در کنفرانس‌ها ارجاع می‌دهند و [مفهوم] **تحقیقات** اغلب در سند MERGA دیده می‌شود تا در سند AMSI. در واقع، سند MERGA شامل ۱۹۰ ارجاع به مقاله‌های کنفرانس یا مقاله‌های مجلات در ادبیات تحقیقات آموزش ریاضی است. پیشنهاد AMSI شامل ۳۲ پانویس است که یکی از آن‌ها به مقالات منتشر شده در کنفرانس ارجاع می‌دهد. تأکید بر تحقیقات نشان می‌دهد که توصیه‌های MERGA، نسبت به سند AMSI بیش‌تر بر شواهد جمع‌آوری شده از اعضای آن و دیگر محققان متکی است.

مفهوم **یادگیری**، اغلب در سند MERGA ظاهر می‌شود تا در سند AMSI و مجدداً بر افراد تأکید می‌کند زیرا یادگیری لزوماً به تعامل بین معلمان و دانش‌آموزان وابسته است. این بدین معنا نیست که سند AMSI مفاهیمی مانند **یادگیری** یا **افراد درگیر در فرایند یادگیری** را نادیده می‌گیرند. این سند، صرفاً بر دانش به‌عنوان یک اولویت تأکید می‌کند.

تجزیه و تحلیل ذکر شده در بالا، تجزیه و تحلیلی کامل از سندها نیست. مفاهیم دیگری نیز وجود دارند که باید مورد بحث قرار گیرند؛ کارهای آتی می‌توانند در جهت تعیین جنبه‌های دیگر متن مانند کارکردهای ذهنی و میان فردی و متنی انجام شوند (مورگان، ۲۰۰۶). هم‌چنان که تجزیه و تحلیل فوق، هدفش ارائه‌ی تمایلات مؤلفان سند هم نیست که این کار، مستلزم تحقیقاتی مانند مصاحبه یا در واقع، توجه به دیدگاه‌های ریاضی‌دان‌ها و آموزشگران ریاضی به صورت عمومی‌تری است.

به هر حال، تجزیه و تحلیل نشان می‌دهد که گروه‌ها برای مشروعیت بخشیدن به دانش، شیوه‌های متفاوتی دارند. با توجه به این تفاوت‌ها برای بررسی‌های آتی ارزشمند هستند.

جمع‌بندی

تجزیه و تحلیل این سندها، تفاوت‌های بارزی را در ساختن ابزار معرفتی در جامعه‌ی تحقیقات آموزش ریاضی و جامعه‌ی ریاضی نشان داده است. این تفاوت‌ها برای [ساختن] آینده‌ی آموزش ریاضی مدرسه‌ای نقش به‌سزایی دارند. به همین دلیل، هر گروه برای بازنمایی و ورود به توسعه‌ی برنامه‌درسی و تنظیم برنامه کاری برای ریاضیات مدرسه ادعایی مشروع دارند.

بحث‌ها بر معرفی چارچوب برنامه‌درسی ملی در استرالیا در اوایل دهه‌ی ۱۹۹۰ به‌خوبی مستندسازی شده است (الرتون، کلمنتس، ۱۹۹۴) و این بحث‌ها به‌طور رسمی در جنگ‌های ریاضی ایالات متحده‌ی آمریکا[41] اعلام شده‌اند (کلین، ۲۰۰۷). چارچوب برنامه‌درسی ملی در استرالیا ترکیب معرفی شده توسط شورای علوم ریاضی استرالیا[42] (AMSC) را که تلاشی برای صحبت با یک صدا بود، رد کرد. به هر حال، AMSC که با تقسیمات داخلی به ستوه آمده بود ــ از انجمن ملی معلمان ریاضی[43] استرالیا انصراف داد. اگرچه تمایل به صحبت با یک صدا، قابل ستایش است اما به نظر می‌رسد که کدهای مشروعیت به دانش در ریاضی و تحقیقات آموزش ریاضی نه تنها رسیدن به این هدف را مشکل سازند بلکه از نظر معرفت شناختی نیز غیرممکن است. زمانی که بحث در مورد

برنامه درسی ملی اوج می‌گیرد، سازنده‌تر است که این [کدها] به‌صورت صداهایی متفاوت اما مکمل یکدیگر در نظر گرفته شوند.

مرجع اصلی که ترجمه شده است

Thornton, S. (2008). Speaking With Different Voices: Knowledge Legitimation Codes of Mathematicians and Mathematics Educators. In M. Goos; R. Brown & K. Makat (Eds.):
Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia. Merga Inc. 2008.

پی‌نوشت

1. Textual Analysis
2. National Numeracy Review
3. Devices
4. Reductionist
5. Fuzzy
6. Klein
7. Hesitant
8. Donnelly
9. Maton
10. Locating the Issue
11. A National Statement on Mathematics for Australian Schools
12. Australian Education Council
13. Ellerton & Clements
14. Atomistic
15. Skemp
16. National Statement of Learning for Mathematics
17. Curriculum Corporation
18. National Curriculm Board
19. Rudd Labor Government
20. Knower

۲۱. این‌که کلمه‌ی ریاضیات، کلمه‌ای بحث‌برانگیز است، مورد تصدیق قرار می‌گیرد. در این مقاله، هیچ تلاشی برای توجه به ریاضیات قومی صورت نمی‌گیرد، همان‌طور که برنامه درسی مدارس با یک دیدگاه غربی از ریاضیات و به صورت ساختارهای دانش سلسله مراتبی مشخص می‌شود.

۲۲. به همین ترتیب تصدیق می‌شود که کلمه‌ی آموزش ریاضی، کلمه‌ای بحث‌انگیز است. دوباره، در این مقاله، آموزش ریاضی به تحقیقات در مورد تدریس و یادگیری ریاضی با در نظر گرفتن فرهنگ جامعه‌ی استرالیا و به‌طور خاص مدارس، اشاره دارد.

23. Modes
24. Bernstein
25. Andrew Wiles
26. Open - endedness
27. Gordon
28. Interpretive
29. Classification
30. Framing
31. Wolfskehl
32. Gottingen
33. Singh
34. Presmeg
35. Sothwell
36. Mathematics Education Research Journal
37. Australian Mathematics Science Institute (AMSI)
38. Mathematics Education Group of Australian (MERGA)
38. Monash
39. Leximanser
40. Editors
41. US math Wars
42. Australian
43. Australian Association of Mathematics Teachers

منابع

1. Australin Education Council (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools.* Carlton, VIC: Curriculum Corporation.
2. Australian Education Council (1994). *Mathematics - A curriculum profile for Australian schools.* Carlton, VIC: Curriculum Corporation.
3. Australian Mathematical Sciences Institute (2007). *National numeracy review submission.* Retrieved 15 April 2008 from the World Wide Web: http://www.dest.gov.au/NR/rdonlyres/DF8384DA-2F85-43A8-BA53-4BA617A49D72/18650/Sub_49_AMSI_FINAl.pdf
4. Bernstein, B. (1999). Vertical and horizontal discourse: An essay. *British Journal of Sociology of Education,* 20(2), 157-173.
5. Bernstein, B. (2000). *Pedagogy. symbolic control, and identity: Theory, research, critique.* London: Taylor & Francis.
6. Curriculum Corporation (2006). *Statements of Learning for mathematics.* Carlton, VIC: Curriculum Corporation.
7. Donnelly, K. (2007). *Dumbing down: Outcomes-based education and politically correst - the impact of culture wars on our schools.* Prahran, VIC: Hardie Grant Books.
8. Ellerton, N. F., & Clements, M. A. K. (1994). *The national curriculum debacle.* West Perth, WA: Meridian Press.
9. Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 12(2)*, 133-150.
10. Gordon, S. (2002). Reviewing research manuscripts-something like jury duty? *Mathematics Education Research Journal 14(1)*, 1-3.
11. Klein, D. (2007). A quarter century of "math wars" and political partisanship. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 22(1),* 22-33.
12. Martin, N. J., & Rice, J. L. (2007). Profiling enterprise risks in large computer companies using the Leximancer software tool. *Risk Management, 9,* 188-206.
13. Mathematics Education Research Group of Australasia (2007). *Submission to the national mumeracy review.* Retrieved

15 April 2008 the World Wide Web: http://www.dest.gov.au/NR/rdonlyres/D6A72F04-2420-45F7-99B6-819BE588AB07/18625/Sub_38_MERGA_FINAL.pdf.

14. Maton, K. (2000). Languages of legitimation: The structuring significance for intellectual fields of strategic knowledge claims. *Britich Journal of Sociology of Education, 21(2),* 147-167.

15. Monash University. (2007). *Background paper of the national numeracy review.* Retrieved 15 April 2008 from the World Wide Web: http://www.dest.gov.au/NR/rdonlyres/A668754-F732-44CF-B39F-16511ADF3BE2/18249/NumeracyReviewBackgroundPaper.pdf

16. Moore, R., & Maton, K. (2001). Founding the sociology of knowledge: Basil Bernstein, intellectual fields and the epistemic device. In A. Morais, I. Neves, B. Davies, & H. Daniels (Eds.), *Towards a sociology of pedagogy: The contribution of Basil Bernstein to resarch* (pp.153-182). New York: Peter Lang.

17. Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to affer mathematics education research? *Education Studies in Mathematics, 61*(1-2), 219-245.

18. Presmeg, N. (1998). Balancing complex human worlds: Mathematics education as an emergent discipline in its own right. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity: an ICMI study* (pp. 57-70). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

19. Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (1998). *Mathematics education as a research domain: A search for identity: An ICMI study.* Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Pubishers.

20. Singh, S. (1998). *Fermat's last theorem.* London.

21. Skemp, R. (1976), Relational understanding and instrumenta understanding. *Mathematics Teaching, 77,* 20-26.

22. Smith, A. E., & Humphreys, M. S. (2006). Evaluation of unsuprevised semantic mapping of natural language with Leximancer concept mapping. *Behavior Research Mathods, 38(2),* 262-279.

23. Southwell, B. (2004). MERJ: Reviewing the reviews. In I. Putt. R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010* (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Resarch Group of Australasia, Townsville QLD, pp. 533-540). Sydney: MERGA.

تفکر ریاضیاتی

کازیویوشی اکوبا، دانشگاه هوکایدو، ژاپن

ترجمه: **لیلا قربانلو**، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی زنجان

کلیدواژه‌ها: مدل حل مسئله، طرح مسئله، حوزه‌ی یادگیری ریاضی.

آموزش ریاضی و تفکر ریاضیاتی

آموزش ریاضی دو هدف را دنبال می‌کند، یکی این که دانش‌آموزان را قادر می‌سازد از آنچه که در مطالعه‌ی ریاضی یاد می‌گیرند استفاده کنند و پدیده‌های زندگی روزمره‌ی خود را با دیدگاه ریاضیاتی درک کنند و از طریق تفکر منطقی، این پدیده‌ها را مورد آزمایش و بررسی قرار دهند. برای رسیدن به این هدف، نه تنها دانش پایه و مهارت‌های ریاضی مورد نیاز است، بلکه باید تفکر منطقی داشت و از شیوه‌های قیاسی[1]، استقرایی و استنتاجی استفاده کرد.

هدف دوم این است که دانش‌آموزان را قادر می‌سازد با یادگیری خلاقانه‌ی ریاضی، لذت ذهنی ببرند. امروزه در کلاس‌های ریاضی، معلم یک مسئله به دانش‌آموزان می‌دهد و از آن‌ها می‌خواهد که آن را تکرار کنند. از نظر دانش‌آموزان، این شیوه‌ی یادگیری یک شیوه‌ی انقلابی است. البته ممکن است از نظر آموزش، اثراتی هم داشته باشد. طبق گزارش سازمان‌هایی مثل انجمن بین‌المللی ارزیابی موفقیت‌های آموزشی (IEA)[2] و برنامه‌ی سنجش بین‌المللی دانش‌آموزان (PISA)، دانش‌آموزان

آموزش ریاضی دو هدف را دنبال می‌کند، یکی این‌که دانش‌آموزان را قادر می‌سازد از آنچه که در مطالعه‌ی ریاضی یاد می‌گیرند استفاده کنند و پدیده‌های زندگی روزمره‌ی خود را با دیدگاه ریاضیاتی درک کنند و از طریق تفکر منطقی، این پدیده‌ها را مورد آزمایش و بررسی قرار دهند. هدف دوم این است که دانش‌آموزان را قادر می‌سازد با یادگیری خلاقانه‌ی ریاضی، لذت ذهنی ببرند

ژاپنی نیز مانند سایر کشورها از کلاس‌های جذاب بی‌بهره هستند.

حالا برای تحقق این هدف، باید شیوه‌های آموزشی خود را طوری تغییر دهیم که دانش‌آموزان بتوانند خلاقانه عمل کرده و لذت ذهنی ببرند و احساس نمایند که ریاضی را «خلق می‌کنند.»

کودکان زمانی می‌توانند در فرایندهای یادگیری خلاقانه شرکت نمایند و از آن‌چه یاد گرفته‌اند استفاده کنند که تفکر ریاضیاتی[2] پیدا کرده باشند. برای رسیدن به این منظور، در ادامه به بررسی دو شیوه‌ی استفاده از تفکر ریاضیاتی خواهیم پرداخت که یکی به استفاده از حل مسئله و دیگری به حیطه‌ی یادگیری مفاهیم می‌پردازد.

از دیدگاه حل مسئله

«برنامه‌ی درسی»[3] حاضر (راهنمای برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای) تلاش دارد به پرورش افرادی بپردازد که در قرن ۲۱، در زندگی خود دست به کارهای خلاقانه و نو بزنند. در گزارشی که توسط شورای مرکزی آموزش‌وپرورش [ژاپن] آمده است، به «آموزش با فشار کمتر از طریق انتخاب مفاهیم» و «یادگیری ذهنی» تأکید شده است. در اصلاحیه‌ی این گزارش به «ایجاد توانایی یادگیری داوطلبانه و تفکر مستقل در دانش‌آموزان» اشاره شده است. اگر هدف اصلی آموزش، کسب چنین قابلیت‌هایی باشد، آن‌گاه ریاضی در دست‌یابی به آن، نقش مهمی خواهد داشت.

امروزه یکی از مهم‌ترین اهداف آموزش ریاضی، حل مسائل می‌باشد. وزارت آموزش‌وپرورش، فرهنگ، ورزش و علوم و فناوری تلاش دارند تا با استفاده از راهکارهای آموزشی به این هدف دست یابند. بدین منظور، بر مبنای روش چهار مرحله‌ای «جورج پولیا»، راهکار زیر پیشنهاد می‌شود که در آن، برای حل مسئله، پنج مرحله‌ی زیر وجود دارد:

۱. مرحله‌ی طرح مسئله؛
۲. مرحله‌ی درک مسئله؛
۳. مرحله‌ی طراحی شیوه‌ای برای حل مسئله؛
۴. مرحله‌ی اجرای برنامه‌ی طراحی شده؛
۵. مرحله‌ی آزمایش راه‌حل.

به نظر می‌رسد شیوه‌ی چهار مرحله‌ای پولیا، روی حل مسئله به عنوان فعالیت فردی تمرکز می‌کند، در حالی‌که در شیوه‌ی پنج مرحله‌ای بالا، ما روش تدریس حل مسئله را ارائه داده‌ایم. بر این مبنا به توضیح تفکر ریاضیاتی کسب شده در هر مرحله می‌پردازم.

● طرح مسئله

همان‌طور که گفتیم، یکی از اهداف آموزش ریاضی این است که دانش‌آموزان، دانش ریاضی را کسب کرده و بتوانند آن را به کار گیرند. برای همین منظور، باید دانش‌آموزان را در شرایطی قرار دهیم که از ریاضی، به صورت کاربردی در زندگی استفاده کنند. البته توانایی حل کردن و شرایط گوناگونی که دانش‌آموزان برای حل یک مسئله به آن برخورد می‌کنند نیز، حائز اهمیت است.

برای مثال، وقتی می‌خواهیم مفهوم یک **واحد** را آموزش دهیم، به دانش‌آموزان یاد می‌دهیم که می‌توان کسرها را جمع یا تفریق کرد و در ضمن مفهوم یک واحد کامل را به آن‌ها یاد می‌دهیم. در کلاسی، به دانش‌آموزان پایه‌ی چهارم کسرها را یاد می‌دادم و از آن‌ها خواستم در اطراف و محیط پیرامون خود، چیزی را که معادل $\frac{۱}{۴}$ چیز دیگری است پیدا کنند. یکی از کودکان پرسید؛ «آیا $\frac{۱}{۴}$ ضربدر ۴ یعنی $\frac{۴}{۴}$ که برابر ۱ است؟» و «آیا ۵ ضربدر $\frac{۱}{۴}$ مساوی $\frac{۵}{۴}$ می‌شود؟» در کلاس دیگری در پایه‌ی پنجم پس از آن‌که مفهوم مقادیر میانگین را درس دادم، یکی از دانش‌آموزان پرسید؛ «من می‌دانم جواب $\frac{۵+۶+۴}{۳}$ می‌شود ۵، چون اگر یکی از ۶ برداریم و بگذاریم روی ۴، سه تا ۵ خواهیم داشت. اما وقتی نشود از یکی کم کرد و روی دیگری گذاشت، مثلاً $\frac{۵+۵+۷}{۳}$، چه‌کار باید کرد؟»

از دیدگاه گسترش تفکر ریاضی بسیار مهم است که با

پدیده‌هایی که مواجه می‌شویم، بتوانیم آن را به صورت ریاضی بسط و گسترش دهیم یا از طریق طرح پرسش در کلاس و استفاده از آن، به عنوان بخشی از محتوای درسی که باید در کلاس بعدی یاد گرفته شود، آن پدیده را تعمیم دهیم.

در اینجا، طرز استفاده از پرسش زیر را به عنوان یکی از موضوعات اصلی کلاس شرح می‌دهم:

سؤال: یک قطعه‌ی فلزی $\frac{۲}{۵}$ متری، $\frac{۳}{۴}$ کیلوگرم وزن دارد، یک متر از این فلز، چقدر وزن خواهد داشت؟

● درک مسئله

برای درک این سؤال، دانش‌آموز باید پدیده را به صورت مدل ریاضی مدنظر قرار دهد. در این فعالیت، دانش‌آموزان به اعداد، مقادیر و ارقام دخیل در این پدیده دقت می‌کنند. برای این‌که دانش‌آموزان بتوانند برای حل مسئله یک راه‌حل مناسب پیدا کنند، اول بایستی نکات زیر را درک کرده باشند:

۱. شرایط ریاضی وابسته به سؤال (رابطه‌ی بین طول و وزن قطعه‌ی فلزی)؛

۲. آنچه که باید پیدا شود (وزن یک متر از قطعه‌ی فلزی)؛

۳. به یادآور دادن مسئله‌های مرتبط از قبل آموخته شده (بازخوانی مسئله‌هایی که در آن‌ها، باید مقدار **به ازای هر واحد** را پیدا می‌کردیم)

۴. صورت‌بندی یک فرمول با انتخاب تقسیم به عنوان یک رویّه (مقدار کل تقسیم بر تعداد واحدها برابر است با مقدار به ازای هر واحد).

توانایی‌های ذکر شده‌ی لحاظ شده، مربوط به هدف اول آموزش ریاضی هستند. برای این‌که دانش‌آموزان یاد بگیرند تا پدیده‌های روزمره را مثل یک عدد در نظر بیاورند، مهم است که این‌گونه فعالیت‌ها ا انجام بدهند. وقتی دانش‌آموزان برای حل مسئله ای نیاز به پرسش داشته باشند، معلم باید به آن‌ها کمک نموده و راهنمایی‌شان کند تا توانایی تفکر ریاضیاتی را آن‌گونه که در بالا ذکر شد، پیدا کنند. در ضمن معلم باید از خلاقیت خود برای نشان دادن پدیده یا موقعیتی ملموس برای مسئله، استفاده کند.

● طراحی شیوه‌ای برای حل مسئله

از دیدگاه تدریس، این مسئله به دو منظور ارائه شده است. اول این‌که به دانش‌آموزان نشان دهیم که می‌توان از تقسیم استفاده کرد و با تقسیم $\frac{۳}{۴}$ بر $\frac{۲}{۵}$، جواب را پیدا نمود. دوم این‌که شیوه‌ی تقسیم $\frac{۳}{۴}$ بر $\frac{۲}{۵}$ را به آن‌ها یاد می‌دهیم. توانایی ترجمه‌ی این مسئله به صورت فرمول تقسیم، بستگی به این دارد که چقدر دانش‌آموز از قبل، مفهوم تقسیم را خوب یاد گرفته است.

دانش‌آموزان ژاپنی نیز مانند سایر کشورها از کلاس‌های جذاب بی‌بهره هستند

وقتی دانش‌آموزان تلاش می‌کنند تا محاسبات تقسیم را انجام دهند، مهم است که در ذهنشان، به طور تقریبی عدد موردنظر را تخمین بزنند (اندازه‌ی جواب) و حدس بزنند چه شیوه‌ای می‌تواند آن‌ها را به جواب برساند. تخمین جواب از این جهت مهم است که نشان می‌دهد دانش‌آموزان، دیدگاه خود را دارند و برای پاسخ به مسئله، از نوع تفکر خود استفاده می‌کنند. در مثال زیر، اهمیت این‌گونه تخمین زدن نشان داده شده است.

در مسئله‌ی حاضر، برای درک تقسیم، دانش‌آموز باید وزن را به ازای هر متر به دست آورد. چون $\frac{۲}{۵}$ متر، وزنی معادل $\frac{۳}{۴}$ کیلوگرم دارد، دانش‌آموز باید تشخیص دهد که ۱ متر از آن باید بیشتر از $\frac{۳}{۴}$ کیلوگرم وزن داشته باشد. علاوه بر این، انتظار می‌رود دانش‌آموز تشخیص دهد $\frac{۳}{۴}$ کیلوگرم کمتر یا بیشتر از ۱ کیلوگرم است و برای پاسخ خود، دلیل بیاورد. برای پاسخ خود، دلیل بیاورد. برای مثال، $\frac{۲}{۵}$ متر، از نیم متر کمتر است اما $\frac{۳}{۴}$ کیلوگرم بیشتر از نیم کیلو می‌باشد. بنابراین، یک قطعه فلز ۱ متری، سنگین‌تر از ۱ کیلوگرم است.

از این گذشته، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان با درک این‌که ۱ متر فلز چقدر از $\frac{۳}{۴}$ کیلوگرم سنگین‌تر است، بتوانند روش محاسبه‌ی درست را حدس بزنند. یعنی حدس بزنند که کدام روش، آن‌ها را به جواب می‌رساند. اگر فرد تشخیص دهد که از کدام روش باید استفاده کند، به خوبی و درستی می‌تواند به راه‌حل دست یابد.

در موردی که مطرح شد، برای مشخص شدن روش، باید به مراحل زیر توجه شود:

۱. استفاده از چیزهای ملموس به عنوان ابزار، مانند نوار کاغذی؛

۲. شرح موقعیت با استفاده از یک محور اعداد یا یک پاره‌خط؛

۳. فکر کردن به این موقعیت درست به همان روشی که یک عدد حسابی را به یک کسر تقسیم می‌کند؛

۴. محاسبه از طریق تبدیل کسر متعارفی به کسر اعشاری؛

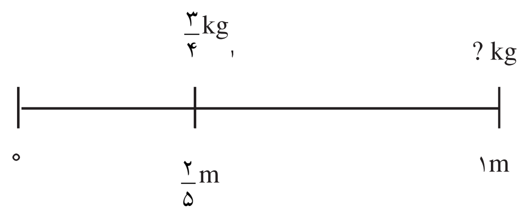
۵. فکر کردن به مسئله برحسب رسم یک نمودار پیوسته؛

۶. ارتباط دادن مسئله با محاسبه‌ی اعداد حسابی.

انتظار می‌رود که این موارد، به تازگی آموخته نشده باشند، بلکه دانش‌آموزان از قبل با آن‌ها آشنایی پیدا کرده باشند.

● اجرای برنامه‌ی طراحی شده

وقتی دانش‌آموزان در ذهنشان یک راه‌حل را تخمین می‌زنند، شروع به پیدا کردن راه‌حل می‌کنند. وقتی دانش‌آموزان «$\frac{۳}{۴}$ بر $\frac{۲}{۵}$ تقسیم کنید» را محاسبه می‌کنند، انتظار می‌رود که از مورد (۲) گفته شده، استفاده کنند.



طبق این شکل، دانش‌آموزان با استفاده از منطق زیر فکر می‌کنند:

الف) چون ۱ متر دو تا $\frac{۲}{۵}$ متر و $\frac{۱}{۵}$ متر است، پس وزن نهایی را می‌توان با جمع $\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۸}$ به دست آورد. ($\frac{۳}{۸}$ نصف $\frac{۳}{۴}$ است زیرا $\frac{۱}{۵}$ متر، نصف $\frac{۲}{۵}$ متر وزن دارد).

ب) چون وزن $\frac{۱}{۵}$ متر $\frac{۳}{۸}$ کیلوگرم است و ۱ متر پنج برابر آن است، پس داریم: «$\frac{۳}{۸}\times ۵$ یا $\frac{۳}{۴}\div ۲\times ۵$».

پ) چون وزن ۲ متر $\frac{۳}{۴}\times ۵$ است، و ۱ متر نصف آن است، داریم: «$\frac{۳}{۴}\times ۵\div ۲$».

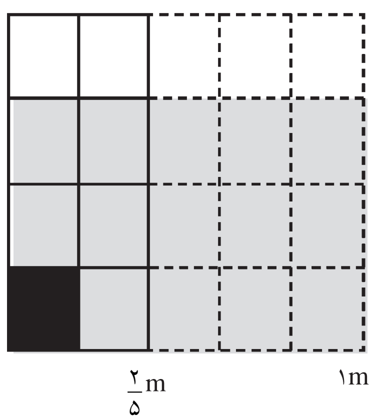
ت) چون $\frac{۵}{۲}\times\frac{۲}{۵}$ می‌شود ۱، می‌توانیم وزن ۱ کیلوگرم را با ضرب «$\frac{۳}{۴}\times\frac{۵}{۲}$» به دست آوریم.

دانش‌آموزان طبق مرحله‌ی ۳ یاد گرفته‌اند که «حاصل تقسیم یک عدد حسابی بر یک کسر» برابر است با «حاصلضرب آن عدد در معکوس آن کسر».

چون بخش «تقسیم بر یک کسر» در اینجا صادق است، می‌توان از آن برای «تقسیم یک کسر بر کسر دیگر» استفاده کرد.

روش ارایه شده در مرحله‌ی ۴، رویه‌ای است که از آن، برای یافتن راه‌حل «$\frac{۳}{۴}\div\frac{۲}{۵}$» به صورت «۰/۷۵ ÷ ۰/۴» استفاده می‌شود.

روش داده شده در مرحله‌ی ۵، رویه‌ای برای یافتن وزن ۱ متر با استفاده از نمودار پیوسته‌ی زیر است:



(الف) طبق مرحله‌ی ۲، پس از دانستن وزن $\frac{۱}{۵}$ متر، وزن ۱ متر به دست می‌آید.

(ب) چون وزن هر مربع کوچک برابر است با $\frac{۳}{۴}\div ۶$، و در مجموع ۳×۵ تا از این مربع‌های هاشورخورده در این نمودار (۱

متر) داریم، پس وزن یک متر را می‌توان از طریق «$5\times6\div\frac{3}{4}$» به دست آورد.

به‌طور کلی، آنچه در مرحله‌ی ۶ ذکر شد، با شیوه‌ی فکری (ب) و (ت) در مرحله‌ی ۲ متناظر است.

● آزمایش راه‌حل

همان‌طور که در «اجرای برنامه‌ی طراحی شده» گفته شد، هر کودک می‌تواند به شیوه‌ی مخصوص خودش فکر کند. راه‌های مختلفی برای فکر کردن و یافتن راه‌حل وجود دارد. دانش‌آموزان می‌توانند نظرات خود را با هم مبادله کنند، شباهت‌ها و تفاوت‌ها را بیابند، رابطه را پیدا کنند و از آن طریق، تفکر ریاضیاتی خود را عمیق‌تر کنند. به جای این‌که فقط از نظرات همدیگر با خبر شوند، بهتر است از آن‌ها بخواهیم که امتحان کنند و ببینند که کدام یک از روش‌ها معقول‌تر و آسان‌تر است. یا اگر لازم بود، از آن‌ها بخواهیم روش‌های کلی و قابل تعمیم‌تری بیابند (کدام رویه برای توسعه‌ی بعدی، مناسب‌تر به‌نظر می‌رسد؟)

وقتی کسی تصریح می‌کند که روش او صحیح است، یا کسی درستی روشش را نشان داده و به دیگران منتقل کرده است، تفکر منطقی بالایی دارد.

از نقطه نظر حوزه‌ی یادگیری مفاهیم

راهنمای «برنامه‌ی درسی»، چهار حوزه را برای دوره‌ی ابتدایی معین کرده است که عبارتند از «اعداد و محاسبات»، «شکل‌های نموداری»، «کمیت و اندازه‌گیری» و «روابط کمّی». برای دوره‌ی اول دبیرستان (دوره‌ی راهنمایی) نیز چهار حوزه را معرفی کرده که عبارتند از «اعداد و فرمول‌ها»، «شکل‌های نموداری»، «تابع‌ها» و «روابط کمّی».

مشخصه‌ی ریاضیات مدرسه‌ای این است که آنچه در هر مرحله یاد گرفته می‌شود، بر مبنای مفاهیم یاد گرفته شده در سال‌های گذشته یا همان سال باشد که مرحله‌ی جدیدی از یادگیری می‌شود. در نتیجه، درک کافی محتوا و رویه‌ی یک موضوع، برای فعالیت حل مسئله‌ی دانش‌آموزان، حیاتی است.

مشخصه‌ی ریاضیات مدرسه‌ای این است که آنچه در هر مرحله یاد گرفته می‌شود، بر مبنای مفاهیم یاد گرفته شده در سال‌های گذشته یا همان سال باشد که مرحله‌ی جدیدی از یادگیری می‌شود

مثال ۱. حوزه‌ی «اعداد و محاسبات

فرض کنید که دانش‌آموزان، قرار است مسئله‌ای که به آن در بخش قبل اشاره شد و در حوزه‌ی اعداد و محاسبات است، حل کنند، چه توانایی‌های ریاضی برای حل این مسئله لازم است؟ نیاز به گفتن نیست که توانایی خواندن و فهمیدن مسئله‌ی کلامی، لازم است و به همین دلیل، از ذکر آن خودداری می‌کنیم.

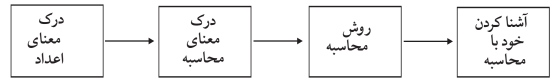
اول، دانش‌آموزان باید قادر به درک مفهوم کسر و روش ارایه‌ی کسرهایی مانند $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{5}$ باشند. دوم، این است که دانش‌آموز درک کند که برای حل این مسئله، باید از تقسیم استفاده کند «$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}$». به عبارت دیگر، دانش‌آموز باید معنی محاسبه را بداند و نیز باید بداند که در یک موقعیت خاص، از کدام روش محاسباتی استفاده کند. با توجه به یادگیری روش محاسبه، این امر حیاتی است که دانش‌آموز، حتماً معنای رویه‌های قبلی را درک کند. هم‌چنین، چگونگی این درک نیز مهم است. در این میان، معلمان نیز باید به وضوح بدانند که دانش‌آموزان نیازمند یادگیری چه چیزی هستند و در آینده چگونه ممکن است از آن استفاده کنند. برای مثال، وقتی معلم می‌خواهد معنای تقسیم را تدریس کند، معمولاً مفهوم کم‌شدن را در ارتباط با آنچه دانش‌آموز از قبل یاد گرفته است بیان می‌کند. به تدریج، مفهوم مقسوم‌علیه به سمت اعداد اعشاری و کسری توسعه می‌یابد. در چنین موقعیتی، نمی‌توان برای توضیح دادن مفهوم تقسیم فقط گفت که تقسیم همان تفریق‌های متوالی است و نیاز به توسعه‌ی مفهوم، بیش‌تر حس می‌شود. معلم باید راهکاری پیدا کند که آینده را نیز در نظر داشته باشد تا دانش‌آموزان هم متوجه شوند که این موضوع در آینده، موارد مشابهی خواهد داشت.

مثلاً ضرب به صورت زیر فهمیده می‌شود:

(مقدار کل)= (نسبت)×(مقدار پایه)

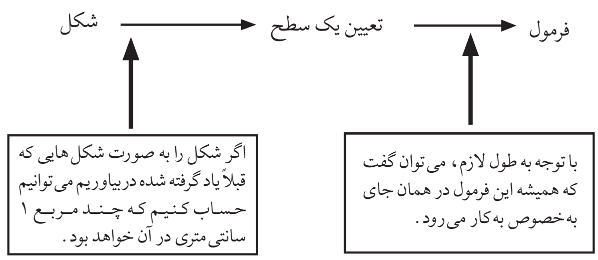
اگر به دانش‌آموزان اندازه‌ی کافی آموزش داده شده باشد که از تقسیم برای پیداکردن یک مقدار پایه یا نسبت استفاده کنند، یعنی دانش‌آموزان فهمیده باشند که تقسیم برعکس ضرب است،

پیدا کردن «$\frac{۳}{۴}$ تقسیم بر $\frac{۲}{۵}$» مشکل نخواهد بود. مسئله با استفاده از مراحل یادگیری زیر حل می‌شود:



مثال ۲. «حوزه‌ی شمارش و اندازه‌گیری»

وقتی کودکان می‌خواهند فرمول تعیین مساحت را در حوزه‌ی شمارش و اندازه‌گیری جست‌وجو کنند، از فرایند زیر برای پیدا کردن مساحت اشکال دو بعدی مانند مستطیل، متوازی‌الاضلاع و مثلث استفاده می‌کنند. از این شیوه، می‌توان برای ایجاد یک فرمول برای ذوزنقه استفاده کرد.



با توجه به مثال‌های ۱ و ۲، راه‌های عجیب و غریبی برای یادگیری وجود دارند که مکرراً در مطالعه‌ی ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر دانش‌آموزان این راه‌ها را به صورت دانش پایه یاد بگیرند، برای حرکت به سمت مراحل بعدی، قوت زیادی خواهند داشت. راه‌های مطالعه‌ی ریاضی، یکی از مهم‌ترین بخش‌های تفکر ریاضیاتی می‌باشد.

مثال ۳. «حوزه‌ی شکل‌های نموداری»

مثلاً فرض کنیم که دانش‌آموزان در حال مطالعه‌ی متوازی‌الاضلاع هستند. در اینجا، معلم باید توجه دانش‌آموزان را به مؤلفه‌های شکل (اضلاع، رئوس، زاویه در شکل‌های دو بعدی)، تعداد مؤلفه‌ها، ارتباط بین اضلاع و زاویه‌ها و موازی و متساوی بودن اضلاع جلب کند تا درک آن‌ها را از مفهوم این شکل‌ها بالا ببرد.

هنگام تدریس متوازی‌الاضلاع، معلم باید به دانش‌آموزان کمک کند تا بتوانند متوازی‌الاضلاع را با سایر اشکال مقایسه کنند و توضیح دهند که اضلاع مقابل آن با هم موازیند (مرحله‌ی شکل‌گیری یک مفهوم) و از آن‌ها بخواهد یک متوازی‌الاضلاع بکشند (مرحله‌ی رسم یک شکل). این کار باعث می‌شود که آن‌ها، خواص یک متوازی‌الاضلاع را درک کنند.

تخمین جواب از این جهت مهم است که نشان می‌دهد دانش‌آموزان، دیدگاه خود را دارند و برای پاسخ به مسئله، از نوع تفکر خود استفاده می‌کنند

با یک جمع‌بندی اجمالی، یادگیری در حوزه‌ی شکل‌ها، با پیمودن این گام‌ها انجام می‌گیرد:

۱. شکل‌گیری مفهوم شکل موردنظر؛
۲. کشیدن شکل؛
۳. تجزیه و تحلیل خواص آن شکل؛
۴. مقایسه‌ی شکل با سایر اشکال.

همان‌طور که اشاره شد، درک کافی از مفاهیم و مراحل یک موضوع، برای شرکت دانش‌آموزان در فعالیت حل مسئله ضروری است.

پی‌نوشت

1. Analogical
2. Matheatical Thinking
3. The "Course of Study"

نشانی مقاله‌ی ترجمه شده:

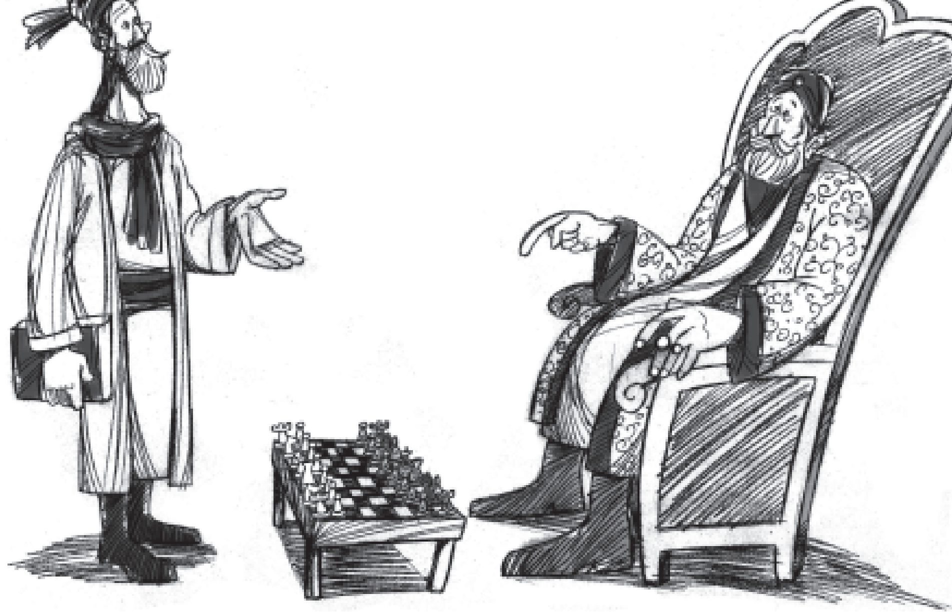
Mathematical Thinking From the Perspectives of Problem Solving & Area of Learning Contents, Kazuyoshi Okubo, http://www.criced.tsukuba.ac.ip/math/apec/apec2007/progress report/ specialists session/ Kazuyoshi Okubo.pdf

منابع

1. G.Polya (1957). *How to solve it,* 2nd ed., Princetion University Press.
2. Shigeo Katagiri (2004). *Sugakutekina Kangaekata to Sono Shido 1; Sugakutekina Kangaekata to Sono Shido (Mathematical Thinking and How to Teach it 1; Mathematical Thinking and How to Teach it)*, new edition, Meiji Tosho Shuppan K.K.
3. Kazuyoshi Okubo (2001). *Sugakutekina Kangeakata wo Do Toraetara Yoika (How to Comprehend Mathematical Thinking),* Elementary Mathematics Teaching Today, vol. 365, pp 4-7, Toyokan Publishing Co., Ltd.

دنباله‌ی هندسی، حدّ مجموع

نرگس عصارزادگان
دبیر ریاضی اصفهان



مقدمه

از آن‌جا که دانش‌آموزان رشته‌های علوم انسانی علایقی در ادبیات و تاریخ دارند، می‌توان در تدریس موضوع‌های درسی به آن‌ها، از داستان‌ها و مسائلی که در متون تاریخی آمده است بهره جست. برای نمونه، داستان تضاعف یا دو برابر شدن خانه‌های شطرنج و نیز پارادوکس (یا تناقض نمای) زنون درباره‌ی آشیل را می‌توان به ترتیب، برای تدریس دنباله‌ی هندسی و حد مجموع، در پایه‌ی پیش‌دانشگاهی علوم انسانی، استفاده کرد.

الف. داستان مخترع شطرنج و دنباله‌ی هندسی

درباره‌ی صفحه‌ی شطرنج داستانی بر سر زبان‌هاست. می‌گویند وقتی مخترع شطرنج کشف خود را به شاه عرضه کرد، شاه، بازی را پسندید و به مخترع شطرنج گفت که از او پاداشی درخواست کند. مخترع شطرنج که ریاضی‌دان ماهری بود، مسئله‌ی پیچیده‌ای را مطرح کرد. گفت: «پادشاها! شما دستور دهید به ازای خانه‌ی اول شطرنج یک دانه گندم، به ازای خانه‌ی دوم دو دانه، و به ازای خانه‌ی سوم چهار دانه و به همین ترتیب به ازای هر خانه دوبرابر خانه‌ی پیش از آن گندم به من بدهند تا به خانه‌ی شصت وچهارم! البته پادشاه نه حوصله‌ی انجام این محاسبه را داشت و نه دانش ریاضی لازم را. به همین دلیل دستور داد یک کیسه گندم به او بدهند. اما مخترع شطرنج نپذیرفت و تقاضا کرد پس از محاسبه، گندم‌ها را به تعداد دقیق به او بدهند. آیا شما می‌توانید تعداد دقیق گندم‌ها را محاسبه کنید؟ با طرح این داستان، پیش‌زمینه‌ی ذهنی مناسبی جهت تدریس دنباله‌ی هندسی ایجاد می‌شود و شما می‌توانید بر این اساس از دانش‌آموزان بخواهید فعالیت‌های زیر را انجام دهند.

فعالیت ۱. از دانش‌آموزان بخواهید دنباله‌ی مربوط به تعداد گندم‌های هر خانه‌ی شطرنج را بنویسند:

۱و۲و۴و۸و۱۶و۳۲و ...

و سپس جدولی برای تعیین جمله‌ها و مجموع کل گندم‌های موجود در ۶۴ خانه‌ی شطرنج تشکیل دهند. (جدول ۱)

در ادامه، شما می‌توانید جدول ۱ را به صورت یک قاعده‌ی

جدول (۱)

شماره‌ی خانه‌های شطرنج	تعداد گندم‌ها	جمع تعداد گندم‌ها
۱	۱	۱
۲	۲	۳
۳	۴	۷
۴	۸	۱۵
۵	۱۶	۳۱
۶	۳۲	۶۳
۷	۶۴	۱۲۷
...	...	...
۶۴	2^{63}	$2^{64}-1$

جدول (۲)

شماره‌ی جمله	جمله
۱	a
۲	ar
۳	ar^2
۴	ar^3
۵	ar^4
۶	ar^5
۷	ar^6
...	...
n	ar^{n-1}

ریاضی تعمیم دهید و دستورهای مربوط را به کمک دانش‌آموزان و مطابق با فعالیت‌های مربوط در کتاب درسی، به دست آورید. (جدول۲)

فعالیت۲. دانش‌آموزان به عنوان تمرین، با استفاده از دستورهای دنباله‌ی هندسی فوق، مسئله‌ی شطرنج را حل می‌کنند.

$$a=1, r=2, n=64 \Rightarrow a_{64}=2^{63},$$

$$S_{64}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1-2^{64}}{1-2}=2^{64}-1$$

از دانش‌آموزان بخواهید مقدار عددی جمله‌ی شصت‌وچهارم و نیز مجموع شصت وچهار جمله را بیابند. آن‌ها ابتدا تصور می‌کنند که با اعداد کوچکی سروکار دارند، اما به هنگام محاسبه متوجه بزرگی اعداد می‌شوند. این مسئله در متون تاریخی با عنوان «تضاعف بیوت شطرنج» شناخته شده است. برای مثال، در یکی از متون متعلق به سده‌ی پنجم و ششم هجری، با عنوان **لُبّ الحساب**، تألیف علی بن یوسف‌بن علی منشی چنین آمده است: «تضاعف بیوت شطرنج که خانه‌های او ۶۴ است، چون در خانه‌ی اول واحدی بنهی و مضاعف کنی در هر خانه‌ای تا آن زمان که منتهی شود، چند واقع بود در خانه‌ی ۶۴ و چند جمع بود در سایر بیوت؟» چون عدد مربوط به خانه‌ی شصت وچهارم و مجموع دانه‌های گندم در همه‌ی خانه‌ها عدد بسیار بزرگی می‌شود، در کتاب‌های حساب کهن، شعرهایی به حساب جُمل آورده‌اند تا به خاطر سپردن آن آسان‌تر شود. (حساب جمل را در انتهای همین بخش آورده‌ایم).

برای مثال در لب الحساب، شعر زیر بیانگر جمع کل خانه‌های شصت وچهارگانه از اول تا آخر است:

قد قلت قولا عجبا اذ لاح لی و الفتحا،

ها واه هطع جز مد زوددحا؛

هم‌چنین: هاواه هط عجز مد زوددحا؛

(این زمان عین هفت است و قبل او صفر است و میم چهار است و قبل او صفر است)

شعر در عددی که واقع است در خانه شصت وچهارم:

فهفن زعد نحول هکز جل کبط

هم‌چنین: فهفنز عد نحو لهکزج لک بط؛

(ها دو گانه در این جایگاه از بهر صفر است).

با توجه به اشعار فوق، می‌توان عدد موجود در خانه‌ی ۶۴ و نیز مجموع اعداد ۶۴ خانه را به دست آورد، برای مثال، از ابیات اول برای مجموع دانه‌های شصت وچهار خانه داریم: (با توجه به شرحی که داده ع ۷ است و قبل او صفر است و م ۴ است و قبل او صفر است)

جدول (۳)

ه	ا	و	ا	ه	ه	ط	ع	ج	ز	م	د	ز	و	د	د	ح	ا
۵	۱	۶	۱	۵	۵	۹	۷۰	۳	۷	۴۰	۴	۷	۶	۴	۴	۸	۱

جدول (۴)

ف	ه	ن	ف	ن	ز	ع	د	ن	ح	و	ل	ه	ک	ز	ج	ل	ک	ب	ط
۸۰	۰	۵۰	۸۰	۵۰	۷	۷۰	۴	۵۰	۸	۶	۳۰	۰	۲۰	۷	۳	۳۰	۲۰	۲	۹

و با توجه به شعری که برای خانه‌ی شصت وچهارم بیان کرده، داریم: (تذکر داده که به جای ۰ صفر در نظر بگیریم، صفرهای اعداد دو رقمی هم در نظر گرفته نمی‌شود.)

۹۲۲۳۳۷۲۰۳۶۸۵۴۷۷۵۸۵۰۸

فهنفن ز عد نحول هکز جل کبط

ابوریحان بیرونی، تضاعیف خانه‌های شطرنج را که مبتنی بر تصاعد هندسی است، در صورتی که خانه‌ی اول از یک آغاز شود، به‌طور دقیق حساب کرده و عدد ۱۸۴۴۶۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ را به دست آورده است. (نگر: التفهیم، ص ۱۲۷) در آثارالباقیه نیز مجموع دانه‌های خانه‌های شصت‌وچهارگانه چنین است: ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ (نگر: آثارالباقیه، ترجمه‌ی زاخائو، ۱۳۴ و ۱۳۵)

حساب جُمل: در حساب جمل، اعداد را به‌وسیله‌ی حروف ابجد، هوز، حطّی، کلمن، سعفص، قرشت، ثخذ، ضظغ، که بیست‌وهشت حرف هستند نشان می‌دهند، به این ترتیب که مطابق جدول زیر، نُه حرف از الف تا طاء را برای یکان و از یاء تا صاد را برای دهگان و از قاف تا ظاء را برای صدگان و غین را به جای هزارگان می‌گیرند. (جدول ۵)

جدول (۵)

یکان	ا ۱	ب ۲	ج ۳	د ۴	ه ۵	و ۶	ز ۷	ح ۸	ط ۹
دهگان	ی ۱۰	ک ۲۰	ل ۳۰	م ۴۰	ن ۵۰	س ۶۰	ع ۷۰	ف ۸۰	ص ۹۰
صدگان	ق ۱۰۰	ر ۲۰۰	ش ۳۰۰	ت ۴۰۰	ث ۵۰۰	خ ۶۰۰	ذ ۷۰۰	ض ۸۰۰	ظ ۹۰۰
هزارگان	غ ۱۰۰۰								

ب) پارادوکس زنون و حدّ مجموع

زنون، فیلسوف یونان باستان که پیش از ارسطو و افلاطون می‌زیست حدود چهل پارادوکس دارد که برخی از آن‌ها تأثیر عمیقی در گسترش ریاضیات داشته‌اند. یکی از آن‌ها پارادوکس آشیل و لاک‌پشت است.

آشیل خیلی سریع‌تر از لاک‌پشت می‌دود، بنابراین روشن است که اگر مسابقه بین آن‌ها برگزار شود، لاک‌پشت شکست می‌خورد. اما زنون استدلال می‌کند که آشیل هیچ‌وقت نمی‌تواند لاک‌پشت را بگیرد. هر قدر هم سریع بدود و هرچه قدر طول بکشد فرقی ندارد. چرا؟ زیرا برای نخستین قدم آشیل باید به جایی برسد که لاک‌پشت از آن‌جا شروع کرده است. حال قدم بعدی، رسیدن به جای کنونی لاک‌پشت است، وقتی او این کار را انجام می‌دهد، لاک‌پشت کمی جلوتر خواهد رفت. هرچه قدر هم فاصله‌ی کمی بین آن‌ها مانده باشد، زمانی صرف می‌شود که آشیل آن را طی کند و در آن زمان، لاک‌پشت فاصله‌ی دیگری را به‌وجود خواهد آورد. پس آشیل هرچه قدر هم که سریع بدود، مهم نیست؛ تنها وظیفه‌ی لاک‌پشت برای این که شکار نشود این است که هرگز توقف نکند!

شکل ۱. A نقطه‌ی شروع آشیل و T نقطه‌ی شروع لاک‌پشت است.

این فرایند به‌طور نامتناهی ادامه می‌یابد به‌طوری که آشیل هرگز نمی‌تواند لاک‌پشت را بگیرد. یا می‌تواند؟! اکنون، پس از بیان این تناقض‌نما، مثال زیر را در قالب یک فعالیت مطرح کنید تا دانش‌آموزان بهتر با مفهوم حد مجموع آشنا شوند.

فعالیت ۳: پاره‌خط AB را به طول ۱ واحد رسم کنید. نقطه C را در وسط آن انتخاب و سپس نیمه‌ی راست را به دو نیمه تقسیم کنید و این کار نصف کردن را ادامه دهید، سپس این قسمت‌ها را با هم جمع کنید

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\dots$$

حداکثر اندازه‌ی این پاره‌خط چه قدر است؟ آیا می‌تواند از ۱ بیشتر شود؟ این مجموع هرگز از ۱ بیشتر نمی‌شود، چرا که طول پاره‌خط یک است. در واقع ما می‌گوییم: «مجموع جمله‌ها تا بی‌نهایت یک است.» با استفاده از تعریف دقیق حد می‌توان نشان داد مجموع این حد به یک نزدیک می‌شود اما از آن تجاوز نمی‌کند.

اکنون شما می‌توانید دستور مربوط به حد مجموع را بیان کنید و از دانش‌آموزان بخواهید که فعالیت ۳ را با آن دستور حل کنند.

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱$$

منابع:

۱. **چاپ عکسی لب الحساب**، مقدمه و فهرست جمال‌الدین شیرازیان. بنیاد دایره‌المعارف اسلامی. مرکز انتشارات نسخ خطی. ۱۳۶۸.

۲. **ریاضی پایه دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم انسانی**. زهرا گویا. مریم گویا. بیژن ظهوری زنگنه، جواد حاجی بابایی و روح‌الله جهانی‌پور. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۸۶.

۳. گشت‌هایی در ریاضیات و حساب پیشرفته. استانلی اگیلوی، ترجمه نرگس عصارزادگان. **نشریه‌ی دانش و مردم**. سال هفتم، شماره‌ی ۵، مهر ۸۵.

۴. ریاضیات، زنون، بی‌نهایت. محمدرضا داروغه. **نشریه‌ی دانش و مردم**. سال هفتم، شماره‌ی ۵، مهر ۸۵.

یک مسئله و چند راه‌حل

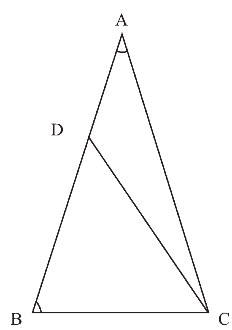
محمدکریم نائل
دانشگاه آزاد اسلامی واحد آبادان

مقدمه

یکی از ابزارهای یادگیری ریاضی حل مسئله است، در ریاضیات، مسئله و حل آن از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. به کمک مسئله می‌توان فکر خود را تنظیم کرده و موضوع مشخصی را مدنظر قرار داد. این کار باعث می‌شود ریزه‌کاری‌های ریاضی را به‌طور عمیق‌تر درک کنیم. اگر فقط به خواندن ریاضی مبادرت کنیم و مسئله‌ای حل نکنیم، یافته‌های ما به‌طور سطحی باقی خواهد ماند و در طول زمان فراموش خواهد شد. تجربه نشان داده است که اگر دانش‌آموزی سعی کند چند مسئله در رابطه با یک موضوع حل کند، آن موضوع برای او درونی شده و سال‌ها در ذهنش باقی خواهد ماند. بعضی از ریاضی‌دان‌ها مانند هالموس، مسئله را قلب ریاضیات می‌دانند، عده‌ای نیز مانند پولیاوزگو، مبادرت به چاپ کتاب حل مسئله کرده‌اند (صدیقی و خانی رباط، ۱۳۷۵)، در ادامه، مسئله‌ای می‌آید که با روش‌ها و ابزارهای مختلف قابل حل است و چند راه‌حل آن نیز ارائه شده است.

کلید واژه‌ها: راه‌حل، مسئله‌ی ریاضی.

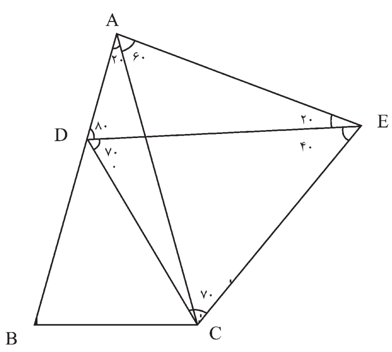
مسئله: مثلث متساوی‌الساقین ABC را در نظر بگیرید که در آن، زاویه‌ی تارک ۲۰ درجه است. روی ضلع AB به اندازه ضلع BC جدا کرده تا نقطه D به دست آید. سپس از D به C وصل می‌کنیم. نشان دهید که زاویه BDC برابر با ۳۰ درجه است (شکل۱). (این مسئله به مسئله‌ی اویلر مشهور است)



شکل (۱)

راه‌حل اول:

در این روش، مطابق شکل ۲ خطوط کمکی مورد نیاز را رسم کرده‌ایم. روی ضلع AC، مثلث متساوی‌الاضلاع AEC را بنا می‌کنیم و سپس از نقطه E، به نقطه D وصل می‌کنیم.



شکل (۲)

دو مثلث AED و ABC به حالت (ض ز ض) با یکدیگر برابرند.

$$AE = AB, \quad \angle EAD = \angle ABC = ۸۰^\circ, \quad AD = BC$$

از برابری دو مثلث بالا نتایج زیر به‌دست می‌آید:

$$\angle AED = ۲۰^\circ \;,\; \angle EDA = ۸۰^\circ \;,\; \angle EAD = ۸۰^\circ$$

$$AE = ED = AB = EC \;,\; \hat{DEC} = ۴۰^\circ$$

$$\angle EDC = \angle ECD = ۷۰^\circ$$

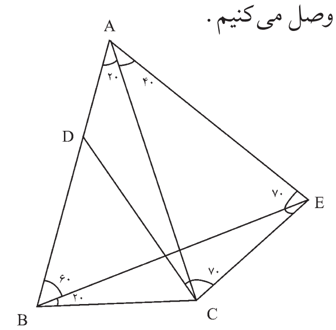
بنابراین، حکم ثابت شده و $\angle BDC$ برابر با ۳۰ درجه است.

$$\angle BDC = ۱۸۰^\circ - (۸۰^\circ + ۷۰^\circ) = ۳۰^\circ$$

راه‌حل دوم:

در این روش، مطابق شکل ۳ خطوط کمکی مورد نیاز را رسم

کرده‌ایم. روی ضلع AB مثلث متساوی‌الاضلاع AEB را بنا می‌کنیم و سپس از نقطه E به نقطه B وصل می‌کنیم.



شکل (۳)

مثلث AEB متساوی‌الاضلاع است. پس داریم:

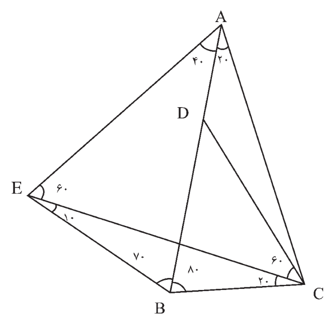
$$AE=EB=AB$$

در نتیجه، مثلث AEC یک مثلث متساوی‌الساقین (AC=AE) با زاویه‌ی تارک $\angle CAE = 40^\circ$ است. لذا زاویه‌ی $\angle ECA = 70^\circ$ و دو مثلث ACD و BEC به حالت (ض ز ض) (BC=AD) و $\angle DAC = \angle CBE = 20^\circ$ و BE=AC) برابرند. پس زاویه‌های $\angle BCE = \angle ADC = 80^\circ + 70^\circ = 150^\circ$. بنابراین، حکم ثابت شده و زاویه‌ی BDC برابر با ۳۰ درجه است.

$$\angle BDC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

راه‌حل سوم:

در این روش، مطابق شکل ۴ خطوط کمکی مورد نیاز را رسم کرده‌ایم. روی ضلع AC مثلث متساوی‌الاضلاع AEC را بنا می‌کنیم و بعد، از نقطه E به نقطه C وصل می‌کنیم.



شکل (۴)

دو مثلث CDA و EBC به حالت (ض ز ض) با یکدیگر برابرند.

$$EC = CA \ , \ \angle DAC = \angle BCE = 20^\circ \ , \ DA = BC$$

مثلث ABE یک مثلث متساوی‌الساقین است (AE=AB) لذا $\angle ABE = 70^\circ$ و با توجه به برابری دو مثلث بالا داریم:

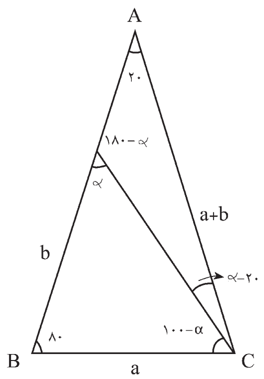
$$\angle EBC = 80^\circ + 70^\circ = 150^\circ = \angle ADC$$

بنابراین، حکم ثابت شده و زاویه $\angle BDC$ برابر با ۳۰ درجه است.

$$\angle BDC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

راه‌حل چهارم:

در این راه‌حل، از تکنیک‌ها و فرمول‌های مثلثاتی کمک می‌گیریم. در ابتدا زوایا و اضلاع مثلث را مانند شکل ۵ نام‌گذاری می‌کنیم



شکل (۵)

آن‌گاه با توجه به قانون سینوس‌ها (در هر مثلث ABC با اضلاع a و b و c و زوایای A و B و C؛ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$) در مثلث ABC داریم:

$$\frac{a}{\sin 20} = \frac{a+b}{\sin 80} \qquad (1)$$

و در مثلث ADC رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{a}{\sin(\alpha - 20)} = \frac{a+b}{\sin(180 - \alpha)} \qquad (2)$$

از رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{a.\sin 80}{\sin 20} = \frac{a.\sin(180 - \alpha)}{\sin(\alpha - 20)} \qquad (3)$$

با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\frac{a.\cos 10}{2\sin 10.\cos 10} = \frac{a.\sin\alpha}{\sin(\alpha - 20)}$$

با ساده کردن رابطه‌ی بالا داریم:

$$\sin 10.\sin\alpha = \frac{1}{2}.\sin(\alpha - 20)$$

$$\text{Sin}10\,\text{Sin}\alpha = \text{Sin}30\,\text{Sin}(\alpha - 20)$$

$$\text{Cos}(10 - \alpha) - \text{Cos}(10 + \alpha) = \text{Cos}(\alpha - 50) - \text{Cos}(\alpha + 10)$$

$$\text{Cos}(10 - \alpha) = \text{Cos}(\alpha - 50)$$

در نتیجه داریم:

$$10 - \alpha = \alpha - 50 \to 60 = 2\alpha \to \alpha = 30$$

منبع:

صدیقی، کریم و خانی رباط، بهرام (۱۳۷۵). **مسائلی از آنالیز**. انتشارات دانشگاه شیراز.

تجربه‌ی زیسته‌ی زندگی‌ام!

حسِ غریب معلمی

● مریم گویا
دبیر بازنشسته‌ی ریاضی

کلیدواژه‌ها: تجربه‌ی زیسته‌ی علمی، تجربه‌ی زندگی، تجربه‌ی تدریس

چشمانم را می‌بندم و به دنیای کوچک و زیبای کودکی برمی‌گردم، دنیایی که همه چیز در آن پاک و روشن و باصفا بود. در دنیای کودکانه‌ی خود، همراه خواهر و گاهی دوستان و خاله‌زاده‌هایم همیشه در حال ایفای نقش بودیم و در بازی‌های کودکانه‌ی خود، همیشه مدرسه‌ای می‌ساختیم با چند کلاس درس و مدیر و ناظم و چند معلم. و چون همه می‌خواستیم معلم باشیم، گاهی هیچ‌کس را پیدا نمی‌کردیم که بشود شاگرد، و به ناچار اشیایی را به جای دانش‌آموزان قرار می‌دادیم و خود در نقش معلم ظاهر می‌شدیم! درس می‌دادیم، تشویق می‌کردیم، داد می‌کشیدیم، تنبیه می‌کردیم و آن‌چنان در نقش خود فرو می‌رفتیم که گاهی اوقات، ساعت‌ها سرگرم می‌شدیم و حتی پس از غذا خوردن، مجدداً دنباله‌ی بازی را از سر می‌گرفتیم.

نقش معلمی، پررنگ‌ترین و قوی‌ترین نقشی بود که به یاد دارم. به ندرت اتفاق می‌افتاد که دوست داشته باشم نقش دیگری را انتخاب کنم. به تدریج که بزرگ‌تر می‌شدم و حرف‌های دیگران را درباره‌ی سختی کار معلمان می‌شنیدم، تردید به سراغم می‌آمد و با سماجت می‌خواستم که از غلبه‌ی فکر «معلم شدن» بر ذهن و مغزم جلوگیری کنم. به همین جهت، رشته‌ی معلمی را انتخاب نکردم و قصد داشتم شغل و حرفه‌ی دیگری را انتخاب کنم، شغلی که مهم جلوه کند و دهن پر کن باشد! اما آن حس کودکی، آن اشتیاق دیرینه به معلمی، هنوز در وجودم زنده بود و خودنمایی می‌کرد. در دوران دانشجویی، هم‌چون دوره‌ی کودکی معلم می‌شدم، منتها این بار به اشیاء درس نمی‌دادم! دوستان و همکلاسی‌هایم بودند که در ایام امتحانات به دورم حلقه می‌زدند و من برایشان درس‌ها را توضیح می‌دادم و مسئله حل می‌کردم و... بعد از فراغت از تحصیل، با وجود این‌که حتی یک واحد از درس‌هایی مثل فنون تدریس و اصول آموزش‌وپرورش و نظایر آن‌ها را نخوانده بودم، نتوانستم بر آن حس غریبی

> **نقش معلمی، پررنگ‌ترین و قوی‌ترین نقشی بود که به یاد دارم. به ندرت اتفاق می‌افتاد که دوست داشته باشم نقش دیگری را انتخاب کنم.**

که همواره سرک می‌کشید و خود را نشانم می‌داد غلبه کنم و سرانجام تسلیم دلم شدم. به وزارت آموزش و پرورش در خیابان اکباتان رفتم و تقاضانامه را پر کرده و داوطلب معلمی شدم. این در حالی بود که در مؤسسه‌ی تحقیقات و برنامه‌ریزی علمی و آموزشی وزارت علوم به عنوان کارشناس آموزش کار می‌کردم و امکانات خیلی خوبی هم داشتم.

کار تدریس را رسماً از ۵۴/۸/۱ شروع کردم. اشتیاق زایدالوصفی داشتم؛ شبی را که قرار بود فردایش سر کلاس بروم از یاد نمی‌برم. افکار گوناگونی ذهنم را احاطه کرده بود، با خود فکر می‌کردم وارد کلاس که شدم چه باید بگویم و چه باید بکنم؟ چگونه درس را شروع کنم؟ چه برخوردی با دانش‌آموزان داشته باشم؟

می‌ترسیدم اشتباه کنم و موفق نشوم. اگر نتوانم کلاس را اداره کنم چه اتفاقی می‌افتد؟ من که دوره‌ی تربیت دبیر و دوره‌های مشابه را ندیده بودم و روان‌شناسی تربیتی نخوانده بودم. دبیران دوره‌ی تحصیلم را از نظر می‌گذراندم! کدام یک از آن‌ها روششان بهتر بود؟ اگر مثل خانم یا آقای الف باشم بهتر است یا مثل خانم یا آقای ب؟ و همین طور افکار گوناگونی بود که مرا مشغول می‌کرد. به هر حال، ساعت اول تدریس فرا رسید و معاون دبیرستان مرا به کلاس معرفی کرد و خود رفت. من ماندم و ۴۰ـ۵۰ جفت چشم که به من خیره شده بودند. دست و پای خودم را برای لحظه‌ای

گم کردم. کلاس بزرگ بود و تعداد دانش‌آموزان زیاد. به خود آمدم و سلام کردم. خودم را معرفی کردم و از آن‌ها خواستم خودشان را معرفی کنند. برایشان صحبت کردم از این‌که در چنین اجتماعی با چنین نابسامانی‌هایی چه وظایفی دارند و چگونه می‌توانند باشند. ساعت اول خیلی دیر گذشت، زنگ تفریح زده شد. بعدها مدیر مدرسه به من هشدار داد که فقط راجع به درس حرف بزنم و از پرداختن به موضوعات دیگر خودداری کنم! روزها یکی پس از دیگری می‌گذشت. هر روز کلاس و مدرسه برایم تجربه‌ای بود و من که از الگوی خاصی پیروی نمی‌کردم، می‌خواستم لااقل با درک شرایط کلاس و تجزیه و تحلیل آن‌چه در عمل رخ می‌دهد، بهترین راه را برگزینم و معلم خوبی باشم. من از بد حادثه به این شغل روی نیاورده بودم. اصلاً برایم معلمی شغل نبود؛ یک خواسته‌ی دیرینه بود، یک عشق کودکی بود، یک ذوق و... نمی‌دانم، یک هیجان دائمی بود. درست بود که من برای معلمی تربیت نشده بودم ـ فارغ‌التحصیل مراکز تربیت معلم نبودم و هیچ دوره‌ای در این رابطه ندیده بودم ـ اما همه‌ی کودکی من و ما ـ خواهرها و برادرم ـ با درس و کلاس و معلم و مدرسه عجین شده بود. بارها از مادر درباره‌ی معلم‌های خوب و بد، درباره‌ی دوست داشتن دانش‌آموزان و عشق به کار شنیده بودیم. مادر را می‌دیدیم همیشه صبح زود به مدرسه می‌رفت و تا دیروقت برنمی‌گشت. همیشه از دانش‌آموزان حمایت می‌کرد و آن‌ها را دوست داشت. برایشان اردوهای آموزشی ـ تفریحی ترتیب می‌داد، آن‌ها را به مسافرت می‌برد، عصرها در مدرسه برای دانش‌آموزان کلاس‌های مختلفی تحت عنوان کلوپ‌های نقاشی، کارتوگرافی، خیاطی، خطاطی، شعرخوانی، روزنامه‌نگاری و امثال این‌ها، با حضور معلمان علاقمند، به صورت رایگان برگزار می‌شد. به همین جهت می‌دانستم در صورتی موفق خواهم شد که به معلمی تنها به عنوان یک شغل نگاه نکنم، به عنوان یک منبع درآمد هم نگاه نکنم چرا که در آن زمان، آموزش‌وپرورش نسبت به سایر وزارت‌خانه‌ها تقریباً کمترین حقوق پایه را داشت و بازار تدریس خصوصی و آموزشگاه و کلاس‌های تقویتی هم خیلی داغ نبود. معلمی برایم یک حرفه بود، یک انگیزه‌ی دائمی، یک عشق همیشگی که روز به روز دوست‌داشتنی‌تر می‌شد. به یاد ندارم هیچ‌گاه سرکلاس، فکر و حواسم جای دیگری بوده باشد. وقتی به کلاس می‌رفتم، همه‌ی گرفتاری‌ها، دردسرها، مشکلات خانوادگی و حتی وضعیت بچه‌هایم ـ که گاهی مریض و تبدار بودند و هیچ‌کس پیششان نبود ـ فراموشم می‌شد و این حالت تا زمانی که مدرسه را ترک می‌کردم با من بود. بارها تصمیم گرفتم از معلم‌های پر ابهت خودم یا معلم‌های سخت‌گیر و انعطاف‌ناپذیر مدرسه که همه از ایشان حساب می‌بردند، تبعیت کنم ولی نمی‌توانستم!

به تدریج دریافتم که نمی‌توانم در نقش فرد دیگری ظاهر شوم. من باید خودم می‌بودم و برای بهبود کارم، نقاط قوت و ضعف خودم را پیدا می‌کردم. این بود که نسبت به خودم، دید نقادانه‌ای پیدا کردم و هر روز کارم را ارزیابی می‌کردم. روش‌های متعددی را در تدریس به کار گرفتم؛ روش‌هایی نوشته و نانوشته، روش‌هایی که معلم‌های باتجربه توصیه می‌کردند، روش‌هایی که بعضی صلب و غیرمنعطف و برخی منعطف‌تر و سیال‌تر بودند. این روش‌ها، هم شامل نحوه‌ی اداره‌ی کلاس می‌شد و هم تدریس. اما مرور آن‌ها نشان می‌داد که هیچ‌کدام از نظر من، چندان اثربخش نیست. از ملغمه‌ای که به نام روش تدریس و تلفیق روش‌های مختلف به صورت گزینه‌ای به خورد معلم‌ها داده می‌شد، نتیجه‌ای عاید نمی‌شد. کم‌کم پی بردم اگر موفقیتی وجود داشته، ایامی بوده است که خودم شده‌ام و رفتاری واقعی داشته‌ام، به دانش‌آموزان اهمیت داده و آن‌ها را به حساب آورده‌ام. این بود که تصمیم گرفتم پیروی کردن از معلم‌های دیگر و روش‌های خلق‌الساعه را کنار بگذارم و اگر روشی را در پیش می‌گیرم، روشی باشد که از پشتوانه‌ی علمی و پژوهشی برخوردار بوده و موفقیتش تأیید شده باشد و بدین گونه بود که به آرزویم که اثربخشی و ایجاد ارتباط با دانش‌آموزان بود، نزدیک می‌شدم و قدرشناسی آن‌ها، شادیم را افزون می‌کرد:

... تقدیم به آن که مهتاب خضوع را بر دیوار غرور کلاس کشاند و ماه تواضع را از پشت ابرهای کدورت بیرون آورد. تو با کلید تبسم قفل زنجیر دل‌ها را گشودی و بر بوم ضمیرمان خورشیدی از امید، بارانی از سعادت و رنگین کمانی از موفقیت نقاشی کردی (البته با قلم‌موی صمیمیت) ...[۱]

دانش‌آموز سال سوم دبیرستان رشته‌ی ریاضی ـ فیزیک

به هر حال، سال‌ها یکی پس از دیگری سپری می‌شد و من روز به روز به معلمی، علاقه‌مندتر و مصمم‌تر می‌شدم. هیچ‌گاه از تدریس، احساس خستگی و ملال نکردم و همواره درصدد رفع مشکلات و ایجاد جوی آرام و با نشاط در کلاس بودم؛ محیطی که در آن یادگیرنده و یاددهنده در تعاملی دائمی باشند و از بودن در کلاس درس خسته نشوند. دوست داشتم دانش‌آموزان از با هم بودن و با هم کار کردن لذت ببرند و وقتی از کلاس بیرون می‌روند، احساس کنند مطلبی هر چند ناچیز یاد گرفته‌اند و این را از نوشته‌هایشان درمی‌یافتم: «... این کلاس یکی از بهترین کلاس‌هایی بود که داشتم. من در مکتب درس شما چیزهای بسیاری آموختم که در این وادی، از کسی نیاموخته بودم. من عاشق ریاضی شدم...».

ابتدای هر سال از دانش‌آموزان می‌خواستم نقطه نظرات و پیشنهاداتشان را در مورد نحوه‌ی درس دادن، درس پرسیدن، امتحان، حضور و غیاب، اداره‌ی کلاس و سایر موارد مرتبط با تدریس و یادگیری برایم بنویسند. سعی می‌کردم از نظراتشان استفاده کنم و اگر به مشکلی برمی‌خوردیم که ناشی از یک روش پیشنهادی بود، خودشان متوجه می‌شدند و دیگر اصراری برای انجام خواسته‌شان نداشتند. در طی سال‌های تدریس، از بزرگانی که با

من از بد حادثه به این شغل روی نیاورده بودم. اصلاً برایم معلمی شغل نبود؛ یک خواسته‌ی دیرینه بود، یک عشق کودکی بود، یک ذوق و... نمی‌دانم، یک هیجان دائمی بود

تحقیق و تلاش پیگیر، راه‌هایی پیش روی معلمان قرار می‌دادند، بسیار آموختم، هم‌چنان که از دانش‌آموزان آموختم و آموختند؛

«... هر ساعت کلاس برای من درسی بود از درس‌های زندگیم. در حقیقت کلاس‌های شما برایم فقط کلاس ریاضی نبود...»

هیچ‌گاه از تدریس احساس خستگی و ملال نکردم و همواره درصدد رفع مشکلات و ایجاد جوی آرام و با نشاط در کلاس بودم؛ محیطی که در آن یادگیرنده و یاددهنده در تعاملی دائمی باشند و از بودن در کلاس درس خسته نشوند.

حرف‌های جورج پولیا که از آناتول فرانس نقل کرده بود، راهنمای معلمی‌ام بود و چه راهنمای شفیقی! او به ما نهیب می‌زد که «سعی نکنید با زیاد یاد دادن به دانش‌آموزان، غرور و تکبر خود را ارضا کنید. فقط کنجکاوی آن‌ها را بیدار کنید. چشم شنوندگان خود را باز کنید ولی از سنگین کردن بار مغز آن‌ها بپرهیزید. کافی است جرقه‌ای در آن‌ها به وجود آورید. هرجا که خوراکی برای آتش وجود داشته باشد، شعله‌ی آن به خودی خود فروزان می‌شود» و من فهمیده بودم که گفتن مطالب زائد و دادن حجم زیاد اطلاعات، دانش‌آموزان را خسته و گاهی زده می‌کند و بهتر است که در عوض، آن‌ها را نسبت به یادگیری حساس کنم. می‌دانستم باید چشمِ دلِ آن‌ها را باز کنم، باید به آن‌ها یاد بدهم تا هر چیزی را دقیق ببینند و هر مطلبی را عمیق یاد بگیرند و در یادگیری خود سهیم باشند تا آنچه تدریس می‌شود، برایشان درونی شود. باور معلمی‌ام این بود که این مهم زمانی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان خوب ببینند، درست فکر کنند، برداشت‌های خود را با دیگران در میان بگذارند و در تعامل دائم با معلم و همکلاسی‌های خود باشند. در حین تبادل و تقابل نظر و گفت‌وگو و گاهی مباحثه و مجادله است که ابهامات کنار می‌رود و مسائل درک می‌شوند و در ذهن و روان دانش‌آموز می‌نشینند. به همین جهت، فرصت بحث و گفت‌وگو در کلاس به وجود می‌آوردم، زیرا به ایجاد انگیزه در بین دانش‌آموزان برای شروع درس اعتقاد داشتم. هم‌چنین، پرسیدن سؤال‌هایی پیرامون درس و پاسخ‌های متفاوتی که داده می‌شد، دانش‌آموزان را درگیر مسئله می‌کرد و ذهنشان متوجه کلاس و درس می‌شد. پس از جمع‌بندی صحبت‌ها، تدریس بهتر صورت می‌گرفت زیرا دانش‌آموزان خالی از ذهن نبودند و تا حدودی با مبحث جدید آشنا شده بودند و بهتر مطالب را دنبال می‌کردند. پس از توضیح و تدریس، از آن‌ها می‌خواستم از روی مطالب کتاب بخوانند، به‌خصوص در مورد قضایای هندسه و ریاضیات گسسته. تجربه‌ام نشان می‌داد که این موضوع، در درک و یادگیری مطلب بسیار کمک می‌کرد. بسیاری اوقات مطلب را درست نمی‌خواندند. واضح است که نمی‌توانستند درک درستی هم از مطالب داشته باشند. بر اثر تجربه دریافته بودم که خواندن صحیح به دانش‌آموز کمک می‌کند تا بهتر بفهمد، زیرا می‌داند دنبالِ چه چیزی باید باشد. مثال‌ها در این باره بسیار است که تنها به یک مورد اشاره می‌کنم. صورت قضیه‌ی زیر را در نظر بگیرید: «همه اعداد صحیح به جز ± 1، حداقل یک مقسوم علیه اول دارند». اکثریت دانش‌آموزان در حین خواندن و توضیح صورت قضیه ـ با آن‌که اول درس توضیح داده شده بود ـ ± 1 را جزو مقسوم عَلیه‌های عدد به حساب می‌آوردند.

به همین جهت، بر خواندن درست آن تأکید می‌کردم و همین امر، در درک و فهم مطلب به دانش‌آموزان کمک زیادی می‌کرد.

مورد دیگری که در طول تدریس متوجه تأثیر مثبت آن در یادگیری دانش‌آموزان شده بودم، عشق به کار و علاقه به موضوع مورد تدریس بود که در آن‌ها هم انگیزه ایجاد می‌کرد. اگر دانش‌آموزان بفهمند که معلمشان ریاضی را دوست دارد، از آن لذت می‌برد و با اشتیاق و بدون احساس خستگی درس می‌دهد، آن‌ها نیز توجه بیشتری نشان می‌دهند. من بی‌آن‌که متوجه تأثیر مثبت این مسئله باشم، چنین احساسی در تدریس داشتم اما صداقت کودکانه‌ی دانش‌آموزان، مرا نسبت به این تأثیر هشیار کرد.

«... ریاضی چه واژه‌ای بود و چه شد؟ چه قدر برایم بی‌مفهوم بود و حالا چه قدر پرمعناست. چرا؟! شاید اگر عشق تو را در هنگام درس دادن نمی‌دیدم، مانند دیگران حرکت نمی‌کردم، ولی صبوری تو مرا واداشت که تفکر کنم...»

دانش‌آموز سال دوم دبیرستان ـ سال ۷۶

در طی سال‌ها تدریس در شهرها و مناطق مختلف دریافته بودم که دانش‌آموزان، از این‌که معلمشان مطالب دیگری به غیر از موضوع درسی را بداند و از ادبیات رایج آن‌ها و علائق و سلیقه‌هایشان آگاه باشد، خشنود می‌شوند و رابطه‌ی بهتری با معلم برقرار می‌کنند و این مسئله، در یادگیری آن‌ها هم تأثیر می‌گذارد. به همین جهت، سایر کتاب‌های درسی آن‌ها را مطالعه می‌کردم تا از موضوعاتی که در طول سال می‌خواندند با خبر باشم. هم‌چنین، نسبت به مسائل اجتماعی، اخبار روز و... حساس بودم و سعی می‌کردم درس را با چاشنی شعر، تمثیل و نظایر آن درهم آمیزم. این موضوع، در پویایی و نشاط کلاس تأثیر نیکویی داشت. در بیشتر مواقع، هنگامی که به کلاس وارد می‌شدم ـ نه یک کلاسِ مشخص بلکه همه‌ی کلاس‌ها ـ با خط خوش عبارت **درس شیرین ریاضی** روی تابلو خودنمایی می‌کرد و کودک درونم با دیدن چنین جمله‌هایی شاد می‌شد!! می‌دیدم که وجود نشاط و تحرک در کلاس، به آرامش دانش‌آموزان می‌انجامد و به‌خصوص، در یادگیری ریاضی آن‌ها نقش مهمی دارد، زیرا به زبان‌های مختلف، لحظات شیرین یادگیری خود را ابراز می‌کردند:

«... افسوس از این که کلاس‌های ریاضی تمام شد. تنها کلاسی که با فهمیدن مسئله‌ای چشم‌هایم برق می‌زد و در پوست خود نمی‌گنجیدم... و این هم اضافه شود که قسمتی از علاقه‌ی از دست رفته‌ی مرا شما به من باز گرداندید؛ با صبوری و عشق و محبت و به من این امید را دادید که در کنار ریاضی، علاقه داشتن به شعر و ادبیات هم جالب و ممکن و حتی لازم است...»

دانش‌آموز سال سوم دبیرستان ـ سال ۷۷

باور دارم که یکی از هدف‌های مهم ریاضی، پرورش قوه‌ی تفکر، توان تصمیم‌گیری و انتخاب بهترین گزینه از بین راه‌حل‌های مختلف است و معلم ریاضی در صورتی می‌تواند دانش‌آموزان را به تفکر وا دارد و به توسعه‌ی تفکر خلاق در آن‌ها بپردازد که در ایشان، آمادگی لازم ایجاد شده باشد و آرامش روحی و روانی به این آمادگی کمک می‌کند. اگر تدریس ریاضی به گونه‌ای نباشد که به توسعه‌ی فکر منجر شود و زمینه‌ی استدلال و درک منطقی را ایجاد کند، به هدف خود نرسیده است، اما شادم از این‌که به این هدف رسیدم که نمونه‌ی زیر، مصداقی از آن است:

«... **من زنگ ریاضی را خیلی دوست دارم و از این که می‌توانم فکر خود را مشغول ریاضی کنم خوشحالم ...**».

به تدریج دریافتم که در تدریس ریاضی، نمی‌توان تنها به ارائه‌ی درس در قالب فرمول‌ها و الگوریتم‌ها و سپس حل چند مثال و نمونه بسنده کرد و در پایان کلاس، با تعیین تکالیفی به صورت تمرین، امیدوار بود که یادگیری رخ داده است! بسیار دیده و می‌بینم که دانش‌آموز، تمرین‌ها و مسائل کتاب درسی و کتاب‌های کمک آموزشی یا جزوه‌های معلمان را آن‌قدر حل کرده و تکرار می‌کند تا به زعم خود، کاملاً بر مطلب تسلط پیدا کند. اما متأسفانه با کوچک‌ترین تغییری در صورت مسئله یا حتی تغییر اعداد و ارقام، آن‌چه را رشته بوده پنبه می‌شود و دانش‌آموز، دیگر قادر به پاسخ‌گویی نیست. شاید این طنز دردناک را شنیده باشید که معلم در امتحان به دانش‌آموزان مسئله‌ای می‌دهد با این عنوان که «تاجری...» و هنوز ادامه نداده، فریاد اعتراض بچه‌ها بلند می‌شود که «خانم معلم، ما بقالی خوانده‌ایم نه تاجری!!!» و این طنز، مصداق همان است که ذکر شد. البته هستند کسانی که با حفظ کردن همه‌ی مطالب و مسائل و راه‌حل‌ها در صورتی که از همان‌ها در امتحان بیاید، نمره‌ی بسیار خوب هم می‌گیرند. اما پس از پایان امتحان و کلاس، همه به فراموشی سپرده می‌شود و زحماتشان به باد می‌رود، زیرا طوطی‌وار حفظ کرده‌اند بی‌آن‌که یاد بگیرند و بفهمند. البته این مسئله فقط در گذشته نبوده و هنوز هم کم و بیش وجود دارد. طبق باور همیشگی‌ام، وظیفه‌ی یک معلم ریاضی را بیدار کردن و آگاهی دادن به دانش‌آموزان می‌دانم تا بتوانند فکر کنند، استدلال نمایند برای مسائل واقعی زندگی شخصی و اجتماعی و شهروندی خود در حال و آینده، راه‌حل‌های مناسب پیدا کنند و با شنیدن بازخوردهای دانش‌آموزان که می‌نوشتند «... **من با لالایی تلاش‌های تو خوابم نمی‌برد. من با لالایی‌های تو بیدارتر می‌شوم...**»، احساس می‌کردم که به وظایف معلمی ریاضی خود، عمل کرده‌ام.

به گفته‌ی جورج پولیا، «یک معلم ریاضی از فرصت بزرگی در کلاس برخوردار است. اگر زمان تدریس خود را صرف حل تمرین‌هایی با راه‌حل‌های معمولی نماید، علاقه و اشتیاق را در دانش‌آموزان می‌کشد، رشد هوشی آن‌ها را سد می‌کند و از فرصت خود به شکل نامطلوبی استفاده می‌کند. اما اگر با ارائه‌ی مسائل متناسب با اطلاعات آن‌ها، حس کنجکاوی دانش‌آموزان را به مبارزه بطلبد و به آن‌ها کمک کند تا با طرح پرسش‌های انگیزه‌دار، خود این مسائل را حل کنند، ممکن است طعم و معنایی از تفکر مستقل ریاضی را به آن‌ها آموزش دهد».

هنگامی که دانش‌آموز دریابد که تفکر، کلید اصلی حل مسئله است و با فکر کردن، امکان پیدا کردن راه‌حل مناسب وجود خواهد داشت، تشویق می‌شود تا به جای حفظ کردن قواعد و رویه‌ها و فرمول‌ها و فراموش کردن سریع آن‌ها، در تولید دانش خود نقش داشته باشد، مطالب را عمیقاً یاد بگیرد و از آن‌ها در حل مسائل واقعی استفاده کند.

«... **ساعاتی را که با شما در کلاس اول گذراندم، برایم فراموش نشدنی بودند و نه تنها در این ساعات درس ریاضی و هندسه را آموختم، بلکه شما به همه‌ی ما درس زندگی آموختید. کلاس‌های شما اصلاً برایم خسته کننده نبود ...**» و با چنین بازخوردهای مثبتی که از بیشتر دانش‌آموزان می‌گرفتم، سی سال معلمی برایم مثل سه سال گذشت!

تدریس با تکیه بر توسعه‌ی تفکر، کار در گروه‌های کوچک، بهره‌گیری از آموخته‌های پیشین و اطلاعات دانش‌آموزان، سهیم کردن آن‌ها در فرایند یاددهی ـ یادگیری و درگیر کردنشان در آموزش و تولید دانش جدید، بحث همگانی در کلاس و نوشتن نقادانه (بازتابی) درباره‌ی موضوعات بحث شده در کلاس؛ همه و همه می‌توانند ذهن آن‌ها را فعال کرده و فکرشان را باز کنند. تجربه‌ام نشان داده است که دانش‌آموزان، با کار در گروه‌های کوچک و در تعامل با یکدیگر است که به کشف و شهود جدید می‌رسند و راه‌حل‌هایی پیدا می‌کنند که در تنهایی، برایشان ممکن نیست و به تدریج، «یادگیری» را یاد می‌گیرند.

به تجربه دریافتم که اگر چنین اتفاقی بیفتد، دیگر نیازی نیست که هر مسئله و تمرین و تستی که برای هر درس تهیه شده، توسط دانش‌آموز انجام شود تا مطمئن گردد که موفقیتش حتمی است! ایجاد فرصت‌های مناسب یادگیری در کلاس درس، با ایجاد جوی آرام و پرتحرک و از طریق اعتماد کردن به دانش‌آموزان و باورکردن حس اعتماد به نفس در آن‌ها برای مشارکت در فعالیت‌های کلاسی و نترسیدن از اظهارنظرهای نادرست، پرورش قوه‌ی تفکر و استدلال و استنتاج، آزادی تصمیم‌گیری و انتخاب‌گری و پذیرش تبعات ناشی از هر تصمیم و انتخابی از طرف دانش‌آموزان؛ اقدام شایسته‌ای است که معلمان ریاضی با انجام آن‌ها، به موفقیت دست خواهند یافت. اظهارنظرهای دانش‌آموزان نشان می‌داد که موقعیت کلاس و تدریس چگونه می‌تواند در علاقه‌مندی یا بی‌علاقگی آن‌ها تأثیر بگذارد.

«... **من در قبل، عاشق ریاضی بودم و واقعاً ریاضی را دوست داشتم. پارسال معلمی داشتم که مرا از ریاضی زده کرد، از ریاضی وحشت داشتم و ریاضی برای من غولی بود. امسال خیلی ریاضی برایم شیرین شده ...**»

در چنین جوی، دانش‌آموز به تدریج درمی‌یابد که می‌تواند در گروه، راه‌حل مسائل را بیابد و در برابر راه‌حل‌های انتخابی، پاسخ‌گو باشد و بتواند از راه‌حل خود دفاع کرده و دلایل قانع کننده ارایه نماید. در غیر این صورت، باید به دنبال راه‌حل مناسب دیگری بگردد که قابل دفاع باشد.

در حال حاضر، معلمان ریاضی بیش از هر زمان، نیازمند خلاقیت و ابتکار و نوآوری هستند زیرا با دانش‌آموزانی مواجه‌اند که اطلاعات بسیار وسیع‌تری نسبت به هم‌سالان خود در گذشته دارند، با دیده‌ها و شنیده‌های

متنوع‌تری به کلاس می‌آیند و از قدرت نقادی و تجزیه و تحلیل و استدلال بیشتری برخوردارند. هر شنیده‌ای را به آسانی نمی‌پذیرند و برای هر گفته‌ای دلیل می‌خواهند. به حقوق اجتماعی خود واقفند و می‌دانند لباس پدربزرگ‌هایشان به تن آن‌ها زار می‌زند و مناسب زمان حال نیست. آن‌ها به خوبی می‌دانند که نیازهایشان چیست و چگونه آموزشی روح نقاد آن‌ها را قانع می‌کند. معلم‌ها در چنین شرایطی باید بپذیرند که نمی‌توان بر قامت همه‌ی دانش‌آموزان، لباس‌های یکنواخت پوشاند. زیرا آن‌ها با یکدیگر تفاوت‌های ماهوی دارند، استعداد و توان یادگیری‌شان با هم فرق می‌کند و رفتارها، خواسته‌ها، انتظارات و دیدگاه‌هایشان با هم متفاوت است.

معلمانی که با چنین تنوعی از علائق و ذائقه‌ها مواجه هستند، در صورتی موفق خواهند شد که خوراک‌های مناسب برای ذائقه‌های متفاوت فراهم کنند. اما چگونه می‌توان همه‌ی توقعات را برآورده ساخت و پاسخ‌گوی انتظارات دانش‌آموزان بود؟ در گذشته شاید یک معلم می‌توانست ۳۰ سال بی‌وقفه و بدون آن‌که نیاز به دانسته‌های جدید احساس کند،

بی‌دغدغه و هراس، سر کلاس حاضر شود. اما امروز با توجه به حجم وسیع اطلاعات و سرعتِ ارتباطات، چنین امکانی وجود ندارد و هیچ معلمی ـ هر چند هم که متخصص و عالم و دانا باشد ـ باز هم همه‌ی مطالب را نمی‌داند. در نتیجه مفیدترین کار همان **یاد دادن یادگیری** است؛ یادگیری نه به معنای حفظ کردن و دریافت و پس دادن مطالب بلکه به معنای درگیر شدن، ساختن، اشتباه کردن، دوباره ساختن و تولید دانش جدید. بالاخره تدریس مؤثر ریاضی نیازمند درک چیزهایی است که دانش‌آموزان می‌دانند و چیزهایی که نیاز به یادگیری آن‌ها دارند. پس از اطمینان از درک دانسته‌ها و نیازهای دانش‌آموزان، بایستی کوشید تا با به چالش انداختن و حمایت آنان، ایشان را در فرآیند یادگیری سهیم نمود و برای ورود به دنیای پرتلاطم آینده آماده ساخت. در چنین صورتی، معلمان ریاضی بهتر می‌توانند در برابر دانش‌آموزان این عصر و نسل فعال، پاسخ‌گو، باانگیزه و متکی به نفس باشند و از تدریس ریاضی خود لذت ببرند.

دانش‌آموزان هم در عوض، قدر تمام عشق و علاقه‌ی معلم ریاضی خود را می‌دانند و با لطافت و معصومیت، آن را بیان می‌کنند:

«... هنگامی که در کنار تخته سیاهی که حتی نمی‌دانست گل نیز گریه می‌کند می‌ایستادی، احساس می‌کردم با هر عددی که بر روی تن سرد تخته حک می‌کنی، اشتیاقی ناپیدا در سلول‌های مرده‌ی آن هویدا می‌شود ...».

به هر حال، معلمیِ من زمانی خاتمه یافت که چنین تنوع دانش‌آموزی وجود نداشت و دسترسیِ دانش‌آموزان به تکنولوژی تا به این درجه نبود. با خود می‌اندیشم «آیا روش‌های تدریسی که من استفاده می‌کردم در این زمان نیز می‌توانست راهگشا باشد؟» آیا می‌توانستم با دانش‌آموزان در تعامل دائم باشم؟ آیا هم چنان از بودن سر کلاس و تدریس ریاضی لذت می‌بردم و قادر بودم هم خود را راضی نگهدارم و هم دانش‌آموزان از معلمی من راضی باشند؟ سؤال‌های بسیاری در ذهنم به وجود می‌آید که جواب قطعی هیچ‌کدامشان را نمی‌دانم. اما باور دارم در دنیای پیشرفته و پر مسئله‌ی امروز و با توجه به نیازهای رو به رشد افراد، هر کسی به صرف داشتن شغل، حق ندارد قدم به وادی تدریس بگذارد و معلم شود. امروزه برای ورود به این حرفه، باید ضوابط خاصی تعریف شود و معلمان ریاضی از بین آگاه‌ترین، علاقه‌مندترین و زبده‌ترین فارغ‌التحصیلان این رشته انتخاب شوند.

اگرچه اکنون یک معلم بازنشسته هستم، اما هنوز خود را عضوی از این جامعه‌ی شریف و بزرگوار می‌دانم و معتقدم که رشد و پویایی جامعه، در گرو سلامت فکر و روح آن‌هاست. هنوز هم احساس می‌کنم معلم هستم و دلم می‌خواهد به جای هر کار دیگری، سر کلاس درس باشم و اوقاتم را با دانش‌آموزان بگذرانم. آرزو می‌کنم همه‌ی معلم‌های گرامی به ویژه معلمان ریاضی، به نقش مهم خود در تربیت انسان‌هایی فکور، مستدل، تصمیم‌ساز و انتخاب‌گر واقف باشند و چنین افرادی را پرورش دهند و بدانند که هر قدم اثربخشی که در راه یادگیری ریاضی دانش‌آموزان خود برمی‌دارند، تا همیشه در خاطر آن‌ها باقی می‌ماند:

«... هیچ گاه افق بی‌کران محبتت را از زیر رادیکال وجودم بیرون نخواهم کشید...».

دانش‌آموز سال دوم دبیرستان ـ سال ۷۷

و کلام آخر آن‌که، **شاهد رشد و بالندگی بودن همیشه زیبا و شوق‌آفرین است**.

پی‌نوشت

۱. معمولاً دانش‌آموزان نظراتشان را در پایان سال برایم می‌نوشتند. در نوشته‌های دانش‌آموزان مواردی بود که مرا به ماندن و عاشقانه‌تر کارکردن تشویق می‌کرد.

انتظارم از
معلم خوب ریاضی!

● **الهه ابراهیم پور**، دانش‌آموز فارغ‌التحصیل رشته‌ی ریاضی ـ فیزیک شهرستان بروجن
(در حال حاضر، دانشجوی رشته‌ی مهندسی صنایع دانشگاه یزد)

آنگاه آموزگاری گفت با ما از **آموزش** سخن بگو.

و او گفت:

هیچ‌کس نمی‌تواند چیزی را بر شما آشکار کند، مگر آنچه را در سحرگاه دانشِ شما نیم خفته بوده باشد.

آموزگاری که در سایه‌ی معبد در میان شاگردانش راه می‌رود، از دانشِ خود چیزی به آن‌ها نمی‌دهد؛ از ایمانِ خود و از مهرِ خود می‌دهد.

اگر به راستی دانا باشد، از شما نمی‌خواهد که به خانه‌ی دانشِ او درآیید؛ شما را به آستانه‌ی ذهن شما راهبری می‌کند.

ستاره‌شناس می‌تواند از دریافت خود درباره‌ی افلاک با شما سخن بگوید، اما نمی‌تواند دریافت خود را به شما بدهد.

آوازخوان می‌تواند از آهنگی که در سراسر فضا مترنم است ترانه‌ای برای شما بخواند، اما نمی‌تواند گوشی بدهد که آن آهنگ را می‌گیرد، یا صدایی که آن را باز می‌سازد.

و آن که در دانش اعداد استاد است، می‌تواند برای شما از جهان وزن‌ها و اندازه‌ها سخن بگوید، ولی نمی‌تواند شما را به آن جهان ببرد.

زیرا که بینش یک فرد، بال‌های خود را به فرد دیگری نمی‌دهد.

و همان‌گونه که یکایک شما در دانش خداوند تنها هستید، یکایک شما در دانش خود از خداوند و در دریافت خود از زمین تنها خواهید بود.

برگرفته از کتاب «پیامبر»،
نوشته‌ی جبران خلیل جبران؛ ترجمه‌ی نجف دریا بندری

برای من، خواندن این که شن ساحل‌ها نرم است، کافی نیست؛ می‌خواهم پای برهنه‌ام این نرمی را حس کند. معرفتی که قبل از آن احساسی نباشد برای من بیهوده است.

چقدر این جمله‌ی کوتاه، زیبا و پرمفهوم است و چه زیبا پاسخ می‌دهد تمام سؤالاتی که سعی دارم در این مقاله‌ی کوچک، در حد فهم خود به آن پاسخ گویم. به راستی از معلم خوب ریاضی چه انتظاری دارم؟

معلمی که بداند من مشتاق راه رفتن روی شن‌های نرم تفکرم، بداند می‌خواهم با پای برهنه‌ی ذهنم در کوچه پس کوچه‌ی دانش قدم بزنم و با تمام وجود به این گفته‌ی گالیله اعتقاد پیدا کنم که «کتاب عظیم هستی که جلوی چشمانم گشوده شده و زبانی دارد که بدون دانستن آن، فهم حتی یک واژه‌ی هستی غیرممکن است. آن زبان، زبان ریاضی است».

معلم خوب من معلمی است که به من بفهماند ریاضی تنها محدود به یک فرمول و یک امتحان و یک بیست نیست. به من بفهماند ریاضی دنیایی وسیع دارد که غرق شدن در آن، عین رسیدن به ساحل نجات است. دوست دارم این گونه بیندیشم اما تنها نمی‌توانم! راهنمایی می‌خواهم مسلط و عمیق که در یک حد از دانش و آگاهی توقف نکند و فانوس هدایتش هر روز پرنورتر از دیروز گردد؛ هنرمندی که به جای پاسخ دادن پی‌درپی به سؤالاتم، به من یاد دهد چگونه استدلال کردن و چگونه آفریدن را؛ و این گونه مرا به سرچشمه‌ی بودن برگرداند.

مادری می‌خواهم دلسوز که هرگاه قادر نبود در موردی ذهن کنجکاوم را مهار کند، بی‌ادعا و زیبا بگوید نمی‌دانم! و این گونه به من بفهماند که ندانستن عیب نیست.

قاضی‌ای می‌خواهم عادل که هیچگاه با پیش‌داوری خود، عدم موفقیت من را پیش‌بینی نکند و در اولین برخورد و اولین سؤال، به یاد نگرفتن محکومم نکند و به من بیاموزد شکست‌هایم را به عدم تلاشم نسبت دهم نه به عدم توانایی‌ام.

معلم خوب من معلمی است که احساس کنم از آموختن من لذت می‌برد. از برق چشمانش و از لبخند رضایت‌بخشی که گوشه‌ی لبانش می‌نشیند این حس در من القا شود که او قلبش برای کارش و شاگردانش می‌تپد و این ارزشی که برای من قایل است، باعث می‌شود تلاشی مضاعف کنم تا دوباره لبخندی حاصل از احساس رضایت را در گوشه‌ی لبان او بنشانم.

معلمی که به من بفهماند آن‌چه در برخورد با یک سؤال مهم است، تلاش برای پاسخ گویی به آن است و این که آیا می‌توانم پاسخ گویم یا خیر. **ارزش چندانی ندارد**. به من یاد دهد خودِ سؤال را دوست بدارم و

از من نخواهد به هر قیمتی شـده جـواب سؤالاتی را که مشخص کـرده پیدا کنم که اگر این گونه باشد، دلهره‌ی پیداکردن جواب آن‌چنان وجودم را فرا می‌گیـرد که دیگر قادر نخـواهـم بـود برای رسیدن به آن، بال‌هـای اندیشه‌ام را بگشایم و خود را غرق در تفکر کنم، بلکه ناخودآگاه متوسل به اندیشه‌ی دیگـران می‌شوم و این‌گونه، کم‌کم قدرت اندیشیـدن را از دست می‌دهم و به یـک طـوطـی تبدیل مـی‌شـوم که بی‌نقـص و زیـبـا، گفته‌ی دیگران را تکرار می‌کند و مورد تحسین قرار می‌گیرد!

دوسـت دارم معلـمـم نـگـرشـم را نسبت به امـتـحـان تـغـییـر دهـد و سؤال‌هایش به گونه‌ای باشد که فرایندهای عالی ذهنم مانند درک و فهم و نحوه‌ی تجزیه و تحلیل کردن سؤال من مورد ارزیابی او قرار گیرد و تنها مرا محدود به حفظ کردن طوطی‌وار قسمت‌هایی از کتاب یا جزوه نکند.

دوست دارم معلمم از صمیم قلب درک کند این گفته‌ام را که «اگر بشنوم فراموش می‌کنم، اگر ببینم به خاطر می‌سپارم و اگر انجام دهـم یاد می‌گیرم»؛ معلمی که «از من نخواهد که به خانه‌ی دانش او درآیم، بلکه من را به آستانه‌ی ذهنم راهبری کند.»

معلم خـوب من معلمی است که زیبایی‌های نـامـرئی استدلالـم و شیوه‌های ابتکـاری‌ام را در بـرخورد با مسائل ببیند و با تحسینـم، مـرا نسبت بـه تـوانایی‌هایم مطمئن کنـد؛ بی‌شـک بـا ایـن ارزش‌گـذاری، انگیزه‌ام را برای کار و تلاش بی‌دغدغه مضاعف می‌گرداند.

معلمم به من این امکان را می‌دهد که اشتباهات درسی و علمی‌ام را خـودم کشف کنم و او تـنـهـا بـا طـرح سؤال‌های زیـبـا، مـرا وادار به اندیشیدن در مورد اشتباهاتم کند و بدین طریق، این حس را در من القا کند که من، خود مسئول پیشرفت خودم هستم، مسئول اندیشه‌ام و باید قادر باشم با خوداتکایی و خودباوری به اشتباهاتم پی ببرم و با این کار، بهترین پاداش که همان احساس رضایت و شعف بعد از کشف اشتباه است، در وجودم رخنه کند و بیش از پیش، مرا شیفته‌ی ریاضی گرداند.

معلم خوبم به من این اجازه را می‌دهد که با او روی مسائل بحث و جدل کنم و به من اجـازه‌ی دفاع از نظراتم را خواهد داد (هر چند اشتبـاه باشد) و هرگز با تحکم نمی‌گوید «گفتم اشتباه است»! بلکه همیشـه بـا اشارات خود، هدایتم می‌کند ولی عقیده‌ی خود را به من تحمیل نمی‌کند.

معلم خـوب من به چهـره‌ام که می‌نـگـرد، دشواری‌هایـم را کشف می‌کند، انتظارات و دلهره‌ام را می‌فهمد و توانایی این را دارد که خودش را به جای من بگذارد.

معلم خـوب من هیچ‌گاه بـه آگاهی‌های خشک و عریان قنـاعـت نمی‌کند، بلکه مـی‌کـوشد مهـارت و عادت به کار منظـم را در وجـودم تقویت کند. معلم خوب من چراهای من را ناشنیده نمی‌گیرد و همیشه سعی می‌کند قوانین را برایم اثبات کند و بعد از چندی این مهارت را به من هم می‌آموزد، طوری که دیگر قادر باشم قبل از پذیرفتن هر قانونی بگویم چرا؟ و بعد از رسیدن به پاسخ، آن را برای خود اثبات کنم و هیچ قانونی را بدون دلیل نپذیرم.

او هیچ‌گاه یک مطلب ریاضی را آن‌قدر کامل و آماده برایم تشریح نمی‌کند که دیگر جایی برای تفکر خودم باقی نماند زیرا به این گفتـه‌ی ولتر اعتقاد دارد که «اگر می‌خـواهید همه را کسل کنید، همه چیـز را تا آخر بگـویید!»

معلم خوب من با علاقه و اشتیاقی که در من ایجاد می‌کند، به من می‌فهماند که آنچه از ریاضی مـی‌خـواهم، تنها کاربـرد نیست. لذت روح، پاکی ذهن و امید به دانش قلبی هم هست. پس کمکم می‌کند تا گنجینه‌های درونم را که همان نبوغ و استعدادهای خدادادی‌ام است، بشناسم و بستر مناسب برای به فعلیت درآوردن آن‌ها را ایجاد می‌کند و موجب طرح سؤالاتی عمیق و معنادار در ذهنم می‌گردد که اگر به جواب برسم، بی‌شک پاداشی روحی خواهم گرفت.

او وقتی نسبت به حل مسئله‌ای هـر چـنـد سـاده عـاجـزم می‌بینـد، هیچ‌گاه با نگاهش یا کلامش مرا تحقیر نمی‌کند و می‌داند که این عاجز شدنم که حتی گاهی به جایی می‌رسد که بدیهیات را هم فراموش می‌کنم، ناشی از اضطراب است! اضطرابی ناخودآگاه که در وجودم نفوذ می‌کند و تنها داروی شفابخش آن، اطمینانی است که معلم با نگاه و کلام خود در وجودم ایجاد می‌کند. او می‌داند که تک‌تک کلمه‌های سخنـانـش، چه نقش تعیین‌کننـده‌ای در سـرنوشت من خـواهد داشت. او به راحتی می‌تواند مرا به قله‌های پیـروزی برساند، در حالی که قادر است به چـاه ذلتم بکشاند.

برای همین، حتی در اوج عصبانیت خـود را کنترل می‌کند و چیـزی نمی‌گوید که من تمام وجودم را پوچ و بیهوده بدانم و ناامیدی و افسردگی وجودم را فرا گیرد. همین صبر زیباست که او را شایسته‌ی ستایش می‌کند.

معلم خوب من می‌داند که صادقانه‌ترین علاقه‌مندی‌ها و پربارترین حیله‌های تدریس نمـی‌تـواند به او کمک کند کـه چـیـزی را که خودش نمی‌داند و یا اشتباه می‌داند به من یاد دهـد. بـرای همین، همیشـه در تلاش است که تسلط علـمـی خـود را تا جایی که مـی‌تـواند بالا ببـرد و مفاهیم را عمیق یاد بگیرد تا عمیق بیاموزد.

او معیار دانش من را، تنها یک بار امتحان رسمی خشک نمی‌داند و همیشه به من فـرصـت جبـران می‌دهد. او با نگاه محبت آمیـزش هـر آنچه در وجودم گم شده اسـت را به من نشان می‌دهد و با لبخندش بـه من می‌گوید که تلاشم بی‌ثمر نمی‌ماند. عشقی که در وجودش شعله‌ور است، آن‌چنان پاک و صادق است کـه حـتـی در مـواقع عصبانـیـت، چهره‌اش زیبا و دوست‌داشتنی جلوه می‌کند. جوش و خروشی کـه او این‌گونه در من برمی‌انگیزد، آن‌چنان پرتلاطم و پرحرارت است که هیچ حادثه‌ای قادر نیست شکـوه آن را به سخـره بگیرد، زیرا این اطمینـان را معلمی در قلب من گنجانده که برایم ارزشی والا دارد؛ معلمی که بودن را برایم معنا کرد و تفکر خاموش شده در ذهنم را دوباره روشن گرداند و می‌دانم دیگر هیچ‌گاه و با هیچ بهـانـه‌ای آن را خاموش نخـواهم کرد. معلمِ شاعری که زندگی را از دید ریاضی برایم معنا کـرد و پیـوسته در گوشم زمزمه کرد:

زندگی ضرب زمین در ضربان دل‌هاست
زندگی هندسه‌ی ساده و یکسان نفس‌هاست

نامه‌های رسیده

بالاخره صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی چاپ شده و مجله، صد شماره‌ای شد!

به عنوان مدیر داخلی این مجله و یکی از اعضای هیئت تحریریه‌ی آن، ناباوری و در عین حال شادی خودم را از این رخداد ابراز می کنم و امیدوارم انتشار آن، صدها شماره‌ی دیگر نیز تداوم یابد. این رخداد ممکن نبود مگر به پشتیبانی مخاطبین و خوانندگان مجله که با دریافت «فراخوان ارسال مقاله برای ویژه‌نامه‌ی صدمین شماره‌ی مجله» مقالات زیادی را از ایشان دریافت کردیم و متأسفانه به دلیل محدودیت حجم صفحه‌های این شماره ـ با وجود ۱۰۴ صفحه‌ای شدن آن ـ نتوانستیم همه را در این شماره چاپ کنیم. تعدادی از مطالب نیز پس از مهلت تعیین شده به دستمان رسید که در دست بررسی است و در صورت تأیید داوران، در «صده»ی دوم مجله به چاپ خواهند رسید! ضمن تشکر از همگی آنان اسامی این افراد را در زیر می‌آوریم :

ـ آقای محمود محمدآبادی، از شهرستان جوین ؛
ـ آقای احمد سعیدی، از قم ؛
ـ خانم نجمه سلطانی پورشیخ، از کرمان ؛
ـ آقای عبدالساده نفیسی، از اهواز ؛
ـ خانم‌ها پگاه و پونه پیروانی‌نیا، از شیراز ؛
ـ آقای طاهر جهدی، از تکاب ؛
ـ آقای قاسم حسین قنبری، از سمنان ؛
ـ خانم سیمین افروزان، از تهران ؛
ـ خانم نسرین رضائی، از آبادان ؛
ـ خانم طیبه السادات تجلی‌بخش، از تهران ؛
ـ آقای علی اکبر محمدی، از مشهد ؛
ـ آقای یوسف احمدی، از بابل ؛
ـ خانم زهرا کلاتی، از تهران ؛
ـ خانم فریده مسجدی، از طریق ایمیل ؛
ـ آقای محمدرضا خودنما، از همدان ؛
ـ آقای مسعود سلیمی، از اصفهان ؛
ـ خانم بهناز ساویزی، از تهران ؛
و خانم شکوفه صیاد و آقای مهرزاد قربانی، از طریق ایمیل .

Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Roshd Mathematics Education Journal 100

Vol. 27 No. 3 2010 ISSN: 1606 - 9188

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585 **E-mail:** riazi@roshdmag.ir

رشد آموزش ریاضی ۱۰۰ شماره‌ای شد!