

- تابع حسابی اویلر و قضیه اویلر
- مفهوم حد تابع در یک نقطه
- ریاضیات را چگونه یاد بگیریم
- استدلال‌های ریاضی

$$\overline{TC}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{HT}^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \lambda x$$

$$f(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lambda x + f(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \lambda x$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \lambda$$



ابوالحسن علی بن احمد نسوی ریاضی دان و منجم مسلمان ایرانی (۳۹۳- در حدود ۴۷۳)

نسوی ریاضی دان و منجم بود و به خصوص به هندسه می پرداخت و در منطق و فلسفه و پزشکی نیز دست داشت. اصل وی از نسای خراسان بود و به سال ۳۷۱ یزدگردی مطابق با ۳۹۳ هجری قمری در شهر ری متولد شد و بخش مهمی از عمر خویش را در آن شهر گذراند. بنا به قول بیهقی مدت عمر وی نزدیک به صد سال رسید و تا اواخر عمر قوای او در حال اعتدال بود. تاریخ درگذشت او معلوم نیست و آن چه مسلم است این است که وی تا سال ۴۴۹ یزدگردی مطابق با ۴۷۳ هجری قمری که سال تألیف کتاب بازنامه توسط اوست زنده بوده و در آن تاریخ تقریباً هفتاد و نه سال داشته و از ده سال پیش از آن تاریخ خانه نشینی اختیار کرده بوده است. در هر صورت نسوی از ریاضی دانان قرن پنجم است.

ظاهراً به سبب مهارتی که نسوی در ریاضیات و نجوم داشته دانشمندان وی را استاد مختص نامیده اند. مثلاً نصیرالدین طوسی در آغاز تحریر تفسیر نسوی بر کتاب مأخوذات ارشمیدس می نویسد: «قال الاستاد المختص» و نیز هر جا در آن کتاب می خواهد از نسوی یاد کند او را «استاد مختص» یا «استاد می نامد». همچنین شهسردان رازی که از شاگردان نسوی بوده در کتاب نزهت نامه ی علایی نوشته است: «در حوادث سن مشغوف (= شیفته) بودم بر خواندن علوم ریاضیات و کتاب اقلیدس و حل اعمال زیج و فصول فرغانی در هیأت اخلاک بر استاد مختص علی نسوی همی خواندم.»

نسوی خود در مقدمه ی کتاب بازنامه نوشته است که به شغل سپاهگیری و خدمت پادشاهان اشتغال داشته و از هشت سالگی به نگاهداری مرغان شکاری می پرداخته است. وی کتاب المقنع فی الحساب الهندی را ابتدا به زبان فارسی برای مجدالدوله (ابوطالب رستم بن فخرالدوله) نوشت و سپس آن را به خواهش شخص دیگر به زبان عربی برگردانید. وی، چنان که خواهیم دید، چند جلد از تألیفات خود را به نام ابوالحسن مظهر بن ابوالقاسم از نقبای علویان ری نوشت.

بروکلیمان به پیروی از بیهقی نوشته است که کوشیارگیلی استاد نسوی بوده است ولی این به نظر درست نمی آید چه تاریخ تولد نسوی سال ۳۹۳ و تاریخ وفات کوشیار به احتمال قوی در حدود ۴۰۰ بوده و بنابراین نسوی در موقع درگذشت کوشیار فقط هشت سال داشته است. صدیقی در مقاله ی مذکور نوشته است: «نسوی چنان که از تألیفاتش، و از آن چه دیگران درباره ی وی نوشته اند، برمی آید سیرت نیکو داشت و به علم و هنر عشق می ورزید و مردی کریم و مهمان نواز و خوان گشاده و عالم دوست و دانش گستر بود و به گفته ی یکی از شاگردانش که به ابوالحسن بیهقی حکایت کرده می گفت: «مرد با همت بلند و عزیمت راست به مطلوب تواند رسید نه با رنج و تعب» وی طرفدار تخصص در علوم بود و به هر که برای استفاده به محضر وی حاضر می شد می گفت: «بکوش تا در صناعت خویش کامل شوی و متذوق مباش چه متذوق را سیری نیست.» ناصر خسرو در سفرنامه ی خود نوشته است که در سال ۴۳۷ نسوی را در سمتان دیده که جوان بوده و گروهی نزد وی اقلیدس و گروهی طب و گروهی حساب می خوانده اند و در اثنای سخن می گفته که «من بر استاد ابوعلی سینا رحمه الله علیه چنین خواندم و از وی چنین شنیدم.» و نیز می گفته که «من سیاق ندانم و هوس دارم که چیزی از حساب سیاق بخوانم.»

آثار ریاضی موجود نسوی

۱. المقنع فی الحساب الهندی

این کتاب را نسوی ابتدا به زبان فارسی برای مجدالدوله دیلمی نوشته و بعداً آن را برای شخصی ملقب به شرف الملوک با تغییراتی به زبان عربی



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

یادداشت سردبیر (مثبت یا منفی) / ۲
یادداشت آموزشی ۱۰ (از گذشته های دور) / پرویز شهریاری / ۳
مفهوم حد تابع در یک نقطه / احمد قندهاری / ۵
تفریح و اندیشه / ۹
حل هندسی چند معادله / دکتر احمد شرف الدین / ۱۰

ادب ریاضی / شهین بهنیا / ۱۳
کاربردهایی از قضیه ی لاگرانژ / ۱ / ابراهیم دارابی / ۱۴
تابع حسابی اویلر و قضیه اویلر و نتایج حاصل از آن ها / حمید رضا امیری / ۱۸
مسابقه های ریاضی در کشورهای دنیا / ۹ / هوشنگ شرقی / ۲۳
رویکرد هندسی - رویکرد جبری در آموزش هندسه - ۲ / محمد هاشم رستمی / ۲۵
سرگرمی به منظور فرش کردن زمین با موزاییک / محمد علی شیخان / ۲۹
استدلال های ریاضی / ۳ / میر شهرام صدر / ۳۴
با راهیان المپیادهای ریاضی / ۹ / غلامرضا یاسی پور / ۳۸
اتحاد و معادله ۱۵ (معادله هایی از درجه ی بالاتر، بحث تاریخی) / پرویز شهریاری / ۴۳
هم نهشتی و کاربردهای آن / ۱ / سید محمد رضا هاشمی موسوی / ۴۷
ریاضیات را چگونه یاد بگیریم / داریوش عابد / ۵۲
مسائلی برای حل / ۵۴
پاسخ تشریحی مسائل / ۵۷

- مدیر مسئول: علیرضا حاجیان زاده
- سردبیر: حمیدرضا امیری
- مدیر داخلی: میر شهرام صدر
- طراح گرافیک: آریانا کوثری
- ویراستار ادبی: کبری محمودی
- اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری
- محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،
- میر شهرام صدر، هوشنگ شرقی،
- سید محمد رضا هاشمی موسوی،
- غلامرضا یاسی پور
- و با تشکر از همکاری ارزنده ی
- استاد پرویز شهریاری
- صندوق الکترونیکی سردبیر:

Borhanm@roshdmag.ir

پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۲۸۲-۸۸۸۳۹۲۲۲

چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله: ۸۸۸۳۱۱۶۰۰۹ داخلی ۳۹۷

تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۷۷۳۳۵۱۱۰

www.roshdmag.ir

ISSN 1735 - 4951

رشد چنان ۵۷

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
دوره ی هفدهم / شماره ی ۳ / بهار ۱۳۸۷ / شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه

رشد چنان متوسطه، تمامی دبیران محترم و

دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات بحث درسی)
- کتاب های ریاضی دوره ی متوسطه و پیش دانشگاهی
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه ی مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد چنان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.
مجله در حکم، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

مثبت یا منفی

وقتی دانش آموز دبیرستان بودم، با بستن
پیچ رادیو یا تلویزیون، ارتباط ما با دنیای خارج از منزل قطع
می شد. تلویزیون هم فقط دو کانال داشت. نه این همه کانال های تلویزیونی
وجود داشت، نه ماهواره ای در کار بود، نه از اینترنت خبری بود، و نه تلفن همراه و
Bluetooth و sms و ...

این موضوع از یک طرف می توانست باعث عقب افتادگی و دور بودن از اطلاعات به روز و مفید
شود که مسئولان رژیم ستم شاهی نهایت سوء استفاده را از آن می کردند. مردم و به خصوص جوان ها را در
بی خبری و خاموشی نگه می داشتند و اجازه نمی دادند، به راحتی به اطلاعات و اخبار دست پیدا کنند. از طرف
دیگر، این شرایط به پدران و مادران و مربیان امکان می داد، جوانان خود را در جهتی که به صلاح آن ها می دیدند،
هدایت و راهنمایی کنند (این جهت می توانست مثبت یا منفی باشد).

اما در حال حاضر، اگر شما دانش آموزان عزیز از محیط اطراف خود شناخت کافی نداشته باشید و از شدت و حجم
بالای خطراتی که شما را تهدید می کنند، آگاه نباشید، به راحتی حتی در کنار پدر و مادر یا در محیط آموزشی مورد حمله قرار
می گیرید و ممکن است از جنبه های گوناگون، آینده ی شما تباه شده و از نظر روحی و روانی آسیب ببینید.
عزیزان دانش آموز، راه های ورودی اطلاعاتی که می توانند به وجود ما انسان ها نفوذ کنند و ما را مورد تهاجم قرار دهند،
دوراه است: اول عقل و دوم دل. درست است. فقط از همین دوراه است که دیگران می توانند در ما نفوذ کنند و ما را به بیراهه
بکشانند.

باید زنگ باشیم. به هر چیزی نمی توان و نباید نگاه کرد. هر عکسی یا فیلمی یا حتی نوشته ای را نمی توان دید. کتاب هایی
خریده ام که پس از دو سال نگه داری در کتابخانه ام و پس از آن که مطمئن شدم، درباره ی موضوع مورد بحث آن ها اطلاعات
کافی و وافی پیدا کرده ام، به مطالعه ی آن ها مبادرت کردم.

به هر چیزی نمی توان و نباید گوش داد و در هر بحثی نباید شرکت کرد. اگر مطلبی را شنیدیم، تا درباره ی آن اطلاعات
خودمان را کامل نکرده ایم، نباید نتیجه گیری کنیم یا نتیجه گیری دیگران را درست بپذیریم.

و آخر آن که به هر چیزی نمی توان و نباید دل بدهیم. دل که عرض و طول آن به بی نهایت میل می کند، و دل که
عرش خداوند تبارک و تعالی است، جای هر کس و هر چیزی نیست.

با شناخت دقیق و اصولی اسلام عزیز، خودتان را بیمه کنید و در مقابل همه ی تهاجم هایی که از هر طرف
شما را تهدید می کنند، در امان بمانید. بیایید از همه ی امکانات و پیشرفت های علمی، در جهت بالا
بردن معرفت و شناخت خودمان از اسلام استفاده کنیم.

ان شاء الله.

یادداشت سردبیر

H66Amiri@yahoo.com

از گذشته‌ها دور

پروین پیرپاری

فیزیک نوشت و سر آخر به دست یک سرباز رومی کشته شد.

هم چنین می‌توانیم از اقلیدس نام ببریم که کار مزبوط به هندسه و حساب را، که البته ناتمام ماند، بررسی و در آن اصل موضوع‌ها و قضیه‌ها را تنظیم کرد. جواب بطلمیوس که فرمانده مصر بود و پرسیده بود: آیا راه ساده‌تری برای بیان هندسه نیست، پاسخ داده بود: «هیچ راه دیگری وجود ندارد.» هندسه‌ی اقلیدسی تا زمان گوس، بویوی لباچوفسکی که هندسه‌ی تازه‌ای را بنیان گذاشتند، به صورت خود باقی بود.



به دبیرستان فیروزبهرام برگردیم و آن‌چه را که در کلاس انجام دادم، پی بگیریم. کلاس هشتم گوشه‌ی حیاط قرار داشت. روزها برق نداشت و گرما هم با یک بخاری چوبی بود. این بخاری دود می‌کرد و تمام هوای اتاق را دود می‌گرفت. بچه‌ها هم که تعدادشان زیاد بود نمی‌توانستند مطالب روی

میلادی، تا چه اندازه روی هندسه کار کرده بودند. یونان با نظام بردگی اداره می‌شد و همه‌ی کارهای عملی و کاربردی به عهده‌ی برده‌ها بود که چندان اطلاعی از آن‌ها نداریم. ولی هندسه را که شامل همه‌ی انواع ریاضی می‌شد، به خوبی پیش می‌بردند. افلاطون، بر سر درآکادمی خود نوشته بود: «هرکس هندسه نمی‌داند وارد نشود.» یونانیان باستان هندسه را تا درون هندسه‌ی عالی پیش برده بودند.

ارشمیدس که در حدود ۳ سده پیش از میلاد زندگی می‌کرد، یکی از استثناها به شمار می‌رود. او هم برده‌ای آزاد شده بود، ولی به جز ریاضیات، به کارهای دیگر هم می‌پرداخت. از او یاد می‌کنند که می‌گفت: «یک جایی به من بدهید که از آن جا بتوانم زمین را تکان بدهم.» ارشمیدس خیلی کارها انجام داد. او قایق‌ها و کشتی‌های رومی را با هدایت سنگ‌ها به سمت آن‌ها فراری داد. کتاب‌های زیادی هم درباره‌ی ریاضیات و

۱. به یاد دارم، در دبیرستان فیروزبهرام هندسه درس می‌دادم. مدیر مدرسه، در کار مدیریت آدم کارکشته‌ای بود. گمانم آخرهای سال‌های ۳۰ یا نخستین سال‌های ۱۳۴۰ خورشیدی، برادر کوچکم سهراب هم شاگرد همان دبیرستان بود. برادر دیگرم هرمز، در دانشکده‌ی افسری در رشته‌ی مهندسی دانشکده‌ی فنی را به پایان رسانده بود و اینک افسر ارتش بود و در آذربایجان خدمت می‌کرد. من که برادر بزرگ‌تر بودم، در دبیرستان‌ها و از جمله در دبیرستان فیروزبهرام درس می‌دادم. کلاس‌های متعددی داشتیم؛ از جمله هندسه‌ی کلاس هشتم و کلاس دهم.

نیمی از وقت خود یا بیشتر را به درس هندسه می‌پرداختم و بقیه را با دانش‌آموزان صحبت می‌کردم. بدون این‌که از قبل تصمیمی گرفته باشم، صحبت‌های من در این باره بودند: ریشه‌های هندسه و این‌که یونانی‌های قبل از میلاد تا سال چهارم

تخته سیاه را ببینند، من تلاش می‌کردم با صحبت‌های خود و یاری گرفتن از سایر شاگردان، آن‌چه را که لازم بود، به آن‌ها بفهمانم که ناگهان در اتاق باز شد و شاگردی به داخل آمد. کتش را روی دوش انداخته بود و پاهایش را به زمین می‌کشید. من به جلوی او رفتم و گفتم: آفازاده حالا تشریف می‌آورند؟ او بی‌معطلی رویش را برگرداند و گفت: اگر نمی‌خواهید برمی‌گردم. از کلاس بیرون رفت و ما را هم چنان به حال خود گذاشت.

زنگ تفریح یک ربع ساعت بود. من از کلاس بیرون آمدم. در حیاط مدرسه، مدتی این طرف و آن طرف گشتم تا سرانجام پیدایش کردم پیش او رفتم و گفتم: نمره‌ی اخلاقت که صفر است. البته من به نمره‌ی اخلاقت کار ندارم، چون دست من نیست، ولی تلاش کن هندسه را یاد بگیری، نمره‌ی هندسه‌ات را می‌دهم. این شاگرد به طور کلی درس خوان نبود. من هم امید نداشتم او به درس خواندن رو آورد.

امتحان آخر سال رسید. چون کلاس هشتم داشتم، طرح پرسش‌های امتحان را به دیگران وا گذاشتم تا تحت تأثیر آن‌چه در کلاس گفته‌ام، قرار نگیرم. امتحان تمام شد و من ورقه‌ها را جمع کردم و به منزل رفتم. بعد از تصحیح ورقه‌ها، آن‌ها را به مدرسه سپردم. بعد از امتحان، شورای معلم‌ها بود. من در شورا شرکت کردم. بحث بر سر کسانی بود که نمره کم داشتند. جلسه تمام شد، ولی هیچ صحبتی درباره‌ی فرد مورد نظر من نشد. وضع او را پرسیدم، گفتند رفوزه شده است. خواستم نمره‌هایش را به من نشان دهند. معلوم شد هم معدلش از ۱۰ کم‌تر و هم تعداد تجدیدی‌هایش از حد معمول بیش‌تر شده است. یکی از دزس‌ها را با نیم نمره کم‌تر، تجدید شده بود و نمره‌ی هندسه‌اش هم ۳/۵ بود. از معلم مربوط به آن درس خواستم، این ۵/۰ نمره را به او بدهد تا تعداد تجدیدی‌هایش به روال مطلوب برسد. ولی او هم قبول نکرد و گفت: شاگرد خوبی نیست و من هیچ کمکی به او نمی‌کنم. من ورقه هندسه‌ی او را خواستم. ورقه

را آوردند. نمره‌اش ۳/۵ بود. حساب کردم چه قدر می‌خواهد تا هم یک تجدیدی او کم شود و هم معدلش از ۱۰ بالاتر برود. نمره را به حد لازم رساندم و بالای نمره هم نوشتم: با مسئولیت خودم. معلم‌ها در آن زمان این اختیار را داشتند و این در بسیاری موارد می‌توانست به شاگردان کمک برساند. می‌خواستم به خانه برگردم، دیدم این جوان در راهروی پشت دفتر، ایستاده و نگران سرنوشت خود است. با من کاری نداشت. گمان می‌کرد اگر من ضرری به او نرسانده باشم، بی‌تردید هوادارش هم نیستم.

من به منزل رفتم منزل ما در خیابان ویلا و اجاره‌ای بود. همان جایی که مأموران شهربانی آمدند با به هم ریختن وسیله‌ها، مرا هم بردند... نهار را که مادرم آماده کرده بود، خوردم و با تکیه به رخت‌خوابی که مادرم جمع کرده بود، به استراحت پرداختم. ناگهان زنگ در به صدا درآمد. مادرم رفت در را باز کند. برگشت و به من گفت: پسری در حال گریه منتظر توست. گفتم می‌تواند بیاید تو. اتاق مهمان‌خانه را باز کردم و منتظر او ماندم. دیدم همان پسر است. در حال گریه، تنها یک جمله به من گفت: آقا، من حاضرم همه‌ی درس‌های تجدیدی‌ام را بخوانم. حتی هندسه را. به او پاسخ دادم من یاری‌ات می‌کنم، بیا این‌جا و پیش من درس بخوان.

معلوم شد دفتردار مدرسه همه‌ی آن‌چه را که پیش آمده بود، برایش تعریف کرده است. این پسر فهمیده بود، تنها من توانسته‌ام او را از وضع ناهنجاری که گرفتار شده بود، نجات دهم هفته‌ای ۳ روز و بعد از ظهرها با او کار می‌کردم هم هندسه و هم همه‌ی درس‌های تجدیدی او را. راستش این است که در بعضی درس‌ها مثل ادبیات و زبان عربی، خودم هم چیزهایی یاد گرفتم. این جوان در امتحان شهریور قبول شد و به کلاس بالاتر رفت. من تا کلاس دهم مراقب او بودم که هر سال قبول شود. از آن به بعد، دیگر نمی‌دانم چه شد و به کجارت. تا امروز از او خبری ندارم.



۲. در همان دوران که از برادرانم هرمز و سهراب هم صحبت کردم، حادثه‌هایی پیش آمد که مرا نسبت به این دو برادرم شرمند کرد. ممکن است اندکی تفاوت زمانی باشد، ولی به هر حال مایلیم این دو حادثه را بیان کنم.

هرمز نزدیک ۳ سال از من کوچک‌تر است. آدمی بسیار فهیم همیشه یار و یاور من بوده است. گمانم وقتی که در ارومیه بود، چند نفر از خانواده و از جمله من را به آن‌جا دعوت کرد. او تنها زندگی می‌کرد. از ما خواسته بود چند روزی به دیدارش برویم. پول رفت و برگشت را هم برایمان فرستاده بود. آن روزها هواپیمای نبود، یعنی برای رفتن به ارومیه، ناچار باید با اتوبوس می‌رفتیم. من نمی‌دانم چه پیش آمده بود که ناچار شدم رفتن خود را لغو کنم و پسرخواهرم را که در آن زمان کوچک بود، به جای خود بفرستم. گمانم آن روزها پنج شش سال داشت. اسمش داریوش بود. این‌ها به ارومیه رفتند و نزد برادرم بودند. برادرم در آن زمان و بعدها، بارها از من گله کرد که چرا خودم نرفتم و من خجالت زده شدم.

هرمز در همان‌جا بود که بازداشت شد. گمان می‌کنم در سال ۱۳۴۴ او را به تهران آوردند و در زندان قزل‌قلعه، در انتهای خیابان امیرآباد که امروز خراب شده است، زندانی‌اش کردند. تمام خانواده به دیدار او رفتیم، ولی مسئول زندان به من اجازه نداد و گفت، تو خودت در این‌جا زندانی بوده‌ای و حالا نمی‌توانی برادرت را ببینی. بقیه رفتند و برگشتند. آن روز هم گذشت.

بعدها برادرم به چهار سال زندان محکوم شد و از وقتی که بیرون آمد، مدتی این‌جا و آن‌جا کار می‌کرد، بدون سابقه یا نیاز به داشتن وسیله‌های کاری. او از دست‌مزد خود به طور دائم به ما یعنی خانواده‌اش کمک می‌کرد، بی‌آن‌که یادداشت کند و یا حساب نگه دارد.

اکنون هم که تنها زندگی می‌کند، همان روحیه‌ی بخشندگی را نگه داشته است و همیشه به برادر دیگرمان سهراب و پسرخواهرمان داریوش یاری می‌رساند.

$$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

$$0 < 1-x < 0/0001 \Rightarrow |f(x)-3| < 0/0002$$

$$x = 1, \dots, 1/4, \dots, 1/7, \dots, 1/9, 1/99, 1/999, 1/9999, 1/99999, \dots, 9 \dots 9 \dots 9$$

مفهوم حد تابع در یک نقطه

احمد قندهاری

برای دانش آموزان سال سوم

۱. میل کردن x به سمت یک عدد

فرض کنید می خواهیم x را از سمت چپ عدد ۲ به ۲ نزدیک کنیم، ولی به ۲ نرسد؛ به این شکل:

$$x = 1, \dots, 1/4, \dots, 1/7, \dots, 1/9, 1/99, 1/999, 1/9999, 1/99999, \dots, 9 \dots 9 \dots 9$$

ملاحظه می کنید که هر چه تعداد ۹های سمت راست ممیز را زیاد کنیم؛ عدد حاصل مرتباً به عدد ۲ نزدیک تر می شود، ولی به آن نمی رسد. چون x از طرف اعداد کمتر از ۲ به ۲ نزدیک شده است، می نویسیم:

$$x \rightarrow 2^-$$

حال x را از طرف اعداد بزرگ تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می کنیم؛ به این شکل:

$$x = 3, \dots, 2/7, \dots, 2/3, \dots, 2/1, 2/0.1, 2/0.01, 2/0.001, 2/0.0001, \dots$$

باز هم ملاحظه می کنیم، هر چه تعداد ۰های بین ممیز و عدد ۱ را

زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک تر می شود، ولی به آن نمی رسد. چون x از طرف اعداد بزرگ تر از ۲ به ۲ نزدیک شده است، می نویسیم:

$$x \rightarrow 2^+$$

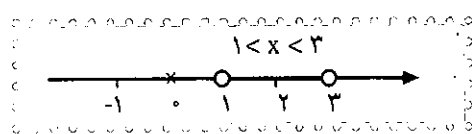
همسایگی

نامساوی $|x-2| < 1$ را در نظر می گیریم و آن را حل می کنیم؛ به

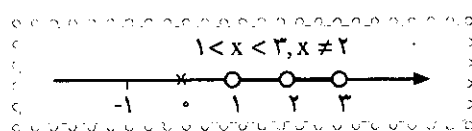
این صورت:

$$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

عدد میانی، بازه‌ی (۱ و ۳)، عدد (۲) است. فرض می‌کنیم $x = 2$ ، اگر x را مرکز قرار دهیم، آن‌گاه بازه‌ی (۱ و ۳) را یک همسایگی متقارن به مرکز $x = 2$ به شعاع ۱ گوئیم. چنان‌چه از بازه‌ی (۱ و ۳)، مرکز همسایگی را برداریم، یعنی $\{2\} - (1, 3)$ ، آن‌گاه این همسایگی را یک همسایگی متقارن محذوف (مرکز حذف شده) عدد ۲ به شعاع ۱ می‌گوئیم



همسایگی متقارن عدد ۲ به شعاع ۱



همسایگی متقارن محذوف عدد ۲ به شعاع ۱

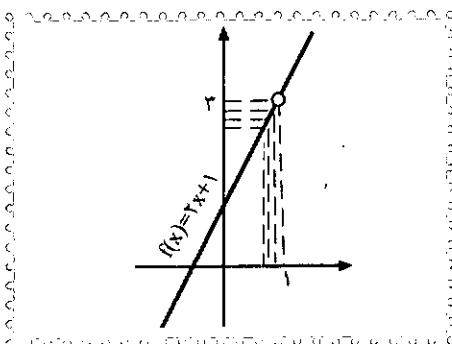
توجه: در حالت کلی، نامساوی $|x - a| < r$ یا $a - r < x < a + r$ را یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r می‌گوئیم.

حد چپ

بررسی حد چپ تابع را با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + 1$ باشد. می‌خواهیم در این تابع x را از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک و رفتار تابع f را در این فرایند بررسی کنیم. برای درک بهتر، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹
$f(x)$	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	۲/۹۹۹۸	۲/۹۹۹۹۸

ملاحظه می‌کنیم، وقتی x از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به نظر می‌رسد، وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه حد $f(x)$ برابر ۳ است. از جدول بالا، این نتایج به دست می‌آید:



$$\begin{aligned} 0 < 1 - x < 0/1 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/2 \\ 0 < 1 - x < 0/0.1 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0.2 \\ 0 < 1 - x < 0/0.01 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0.02 \\ 0 < 1 - x < 0/0.001 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0.002 \\ 0 < 1 - x < 0/0.0001 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0.0002 \end{aligned}$$

این نتایج را به صورت زیر هم می‌توان نشان داد:

$$\begin{aligned} 0 < 1 - x < 0/1 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/2 \text{ باید} \\ 0 < 1 - x < 0/0.1 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0.2 \text{ باید} \\ 0 < 1 - x < 0/0.01 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0.02 \text{ باید} \\ 0 < 1 - x < 0/0.001 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0.002 \text{ باید} \\ 0 < 1 - x < 0/0.0001 &\Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0.0002 \text{ باید} \end{aligned}$$

می‌توان گفت، $f(x)$ را به حد خودش به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به عدد ۱ نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم و $x \rightarrow 1^-$ می‌خواهیم $|f(x) - 3| < \frac{1}{250}$ تعیین کنید x را چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل: چنین عمل می‌کنیم:

$$|f(x) - 3| < \frac{1}{250} \Rightarrow |(2x + 1) - 3| < \frac{1}{250} \Rightarrow |2x - 2| < \frac{1}{250}$$

$$\Rightarrow 2|x - 1| < \frac{1}{250} \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{500} \Rightarrow 0 < 1 - x < \frac{1}{500}$$

یعنی x باید از سمت چپ عدد ۱ به عدد ۱ آن قدر نزدیک شود تا فاصله‌اش با آن، کمتر از $\frac{1}{500}$ شود.

پس اگر بخواهیم $f(x)$ به عدد ۳ به حدی نزدیک شود که فاصله‌ی $f(x)$ از عدد ۳ کمتر از $\frac{1}{250}$ باشد، باید x را از سمت چپ به عدد ۱

آن قدر نزدیک کنیم تا فاصله‌ی ۱ تا عدد x ، کمتر از $\frac{1}{500}$ شود.

تمرین: اگر در مثال بالا بخواهیم $|f(x) - 3| < \frac{1}{720}$ باشد، تعیین کنید x را از سمت چپ چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

$$\text{جواب: } 0 < 1 - x < \frac{1}{1440}$$

تعریف حد چپ تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (a, x_0) تعریف شده باشد. می‌گوییم حد چپ تابع f وقتی $x \rightarrow x_0^-$ ، عدد حقیقی L است، اگر بتوانیم $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که $x < x_0$ را به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

تمرین: می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 3^-} (4x + 3) = 11$. می‌خواهیم

$$\left| (4x + 3) - 11 \right| < \frac{1}{400}$$

به عدد ۲ نزدیک کنیم.

$$\text{جواب: } 0 < 2 - x < \frac{1}{1600}$$

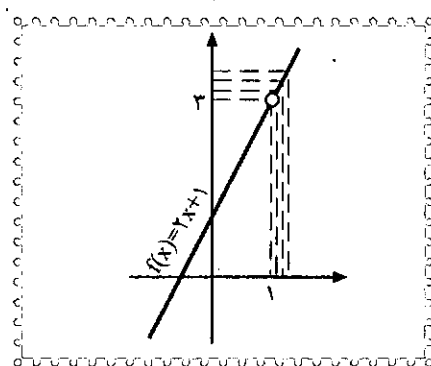
حد راست تابع

دوباره تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ نزدیک شود: یعنی $x \rightarrow 1^+$. می‌خواهیم رفتار تابع f را بررسی کنیم. به همین علت، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۰۱
$f(x)$	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲	۳/۰۰۰۰۲

ملاحظه می‌کنیم، وقتی $x > 1$ و به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که مقدار تابع $(f(x))$ به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به نظر می‌رسد، وقتی $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه حد $f(x)$ برابر ۳ است.

از این جدول، نتایج زیر به دست می‌آیند.



$$0 < x - 1 < 0/1 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0/2$$

$$0 < x - 1 < 0/01 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0/02$$

$$0 < x - 1 < 0/001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0/002$$

$$0 < x - 1 < 0/0001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0/0002$$

$$0 < x - 1 < 0/00001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0/00002$$

این نتایج را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0/2, \text{ باید } 0 < x - 1 < 0/1$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0/02, \text{ باید } 0 < x - 1 < 0/01$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0/002, \text{ باید } 0 < x - 1 < 0/001$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0/0002, \text{ باید } 0 < x - 1 < 0/0001$$

$$0 < x - 1 < 0/00001$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0/00002, \text{ باید } 0 < x - 1 < 0/00001$$

می‌توان گفت، می‌توانیم $|f(x) - 3|$ را به هر اندازه که بخواهیم، کوچک کنیم، به شرطی که x را از سمت راست به عدد ۱ به اندازه‌ی کافی نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم

و $x \rightarrow 1^+$ می‌خواهیم $|f(x) - 3| < \frac{1}{750}$. تعیین کنید x را چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل:

$$|f(x) - 3| < \frac{1}{750} \Rightarrow |2x + 1 - 3| < \frac{1}{750} \Rightarrow |2(x - 1)| < \frac{1}{750}$$

$$\Rightarrow 2|x - 1| < \frac{1}{750} \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{1500} \Rightarrow 0 < x - 1 < \frac{1}{1500}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن قدر باید نزدیک

کنیم تا $x - 1$ کمتر از $\frac{1}{1500}$ شود.

تعریف حد راست تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (x_0, b) تعریف شده باشد.

می‌گوییم حد راست تابع f وقتی $x \rightarrow x_0^+$ ، عدد حقیقی L

است، اگر بتوانیم $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از x_0 به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

مثال: داریم $\lim_{x \rightarrow 1^+} (-4x + 3) = -1$. می‌خواهیم

$$|(-4x + 3) + 1| < \frac{1}{300}$$

آن‌گاه x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ چه قدر باید به عدد ۱

نزدیک کنیم؟

قضایای حد

۱. فرض می‌کنیم a و b اعداد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} b = b \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad (\text{ج})$$

۲. فرض می‌کنیم a و b و L اعداد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$. آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} b f(x) = b L_1 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad L_2 \neq 0 \quad (\text{د})$$

۳. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot 0 = 0$$

۴. اگر $f(x) = m_n x^n + m_{n-1} x^{n-1} + \dots + m_1 x + m_0$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m_n a^n + m_{n-1} a^{n-1} + \dots + m_1 a + m_0$$

۵. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$

۶. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $L \geq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

۷. اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ و f و g در a حد داشته باشند، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

۸. حد یک تابع در $x = a$ ، در صورت وجود، یکتاست.
مثال: به کمک قضیه‌های حد، مقدار حدهای زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 8x}{x^3 + 4x - 1} \quad (\text{الف})$$

حل:

$$|(-4x+3)+1| < \frac{1}{300} \Rightarrow |-4x+4| < \frac{1}{300} \Rightarrow |-4(x-1)| < \frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow 4|x-1| < \frac{1}{300} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{1200} \Rightarrow 0 < x-1 < \frac{1}{1200}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن قدر باید نزدیک کنیم تا $x-1$ کمتر از $\frac{1}{1200}$ باشد.

تعریف حد تابع در x_0

فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد (ممکن است تابع در خود x_0 تعریف نشده باشد).

می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow x_0$ ، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوانیم $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

به عبارت دیگر، حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow x_0$ ، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوانیم $|f(x) - L|$ را هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم، به شرطی که $|x - x_0|$ را به اندازه‌ی کافی کوچک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 3x - 5$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x \rightarrow 1$ ، آن‌گاه حد $f(x)$ برابر (-2) است. می‌خواهیم

$$|f(x) + 2| < \frac{1}{100} \quad \text{آن‌گاه } x \text{ را چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟}$$

حل:

$$|f(x) + 2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x - 5 + 2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x - 3| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow |3(x-1)| < \frac{1}{100} \Rightarrow 3|x-1| < \frac{1}{100} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{300}$$

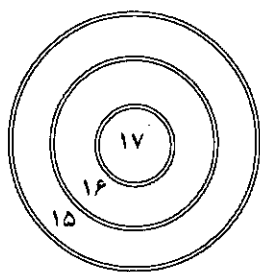
$$\text{یا } 0 < |x-1| < \frac{1}{300}$$

پس x را آن قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم تا $|x-1|$ (که مثبت است) کوچک‌تر از $\frac{1}{300}$ باشد.

توجه: اگر $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ ، آن‌گاه می‌گوییم تابع f در x_0 حد دارد و حد آن برابر عدد حقیقی L است.



۲. چند مرتبه باید به هدف واقع در شکل زیر
تیراندازی کرد و به کدام دایره‌ها اصابت کند، تا
به طور دقیق ۱۰۰ امتیاز به دست آید.



(۴-۵) انجیل - مکتبہ خیریت - لاہور

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 - \Delta x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 + 7x - 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^7 - \lim_{x \rightarrow 1} \Delta x}{\lim_{x \rightarrow 1} x^7 + \lim_{x \rightarrow 1} 7x - \lim_{x \rightarrow 1} 1}$$

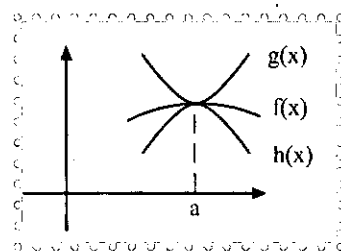
$$= \frac{1-\lambda}{1+\lambda-1} = \frac{-V}{\lambda}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{x^3 - x + 4}{3x^3 + x + 4}} = \sqrt[3]{\frac{\lim_{x \rightarrow 1}(x^3 - x + 4)}{\lim_{x \rightarrow 1}(3x^3 + x + 4)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^3 - \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 5}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3) + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 5}} = \sqrt{\frac{1-1+5}{3+1+5}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{9}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{9}{5}}}$$

فرض می‌کنیم به ازای هر x در یک همسایگی a ، $f(x)$ بین $g(x)$ و $h(x)$ باشد. هرگاه $g(x)$ و $h(x)$ ، وقتی $a \rightarrow x$ دارای حد $L \in \mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



مثال: اگر $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ، می دانیم $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ (ب)

(فرض $x > 0$)

داریم: $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$

آن گاه $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} (x)$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

چنانچه $x < 0$ باشد، داریم $x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq -x$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} \leq 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ : پس}$$

اشاره

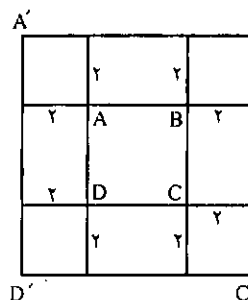
مطالعه‌ی این مقاله می‌تواند سرگرمی آموزنده‌ای برای دانش‌آموزان باشد. در این جا، چند معادله را به کمک هندسه حل می‌کنیم. در بعضی موارد، حل‌های هندسی جذاب‌اند و موضوع را محسوس و ملموس می‌کنند.

حل معادله‌ی درجه دوم به کمک هندسه

الف) حل خوارزمی: بایک مثال، راه حل خوارزمی را بیان می‌کنیم:

می‌خواهیم معادله‌ی درجه دوم زیر را حل کنیم:

$$x^2 + 8x = 33 \quad (1)$$



است با:

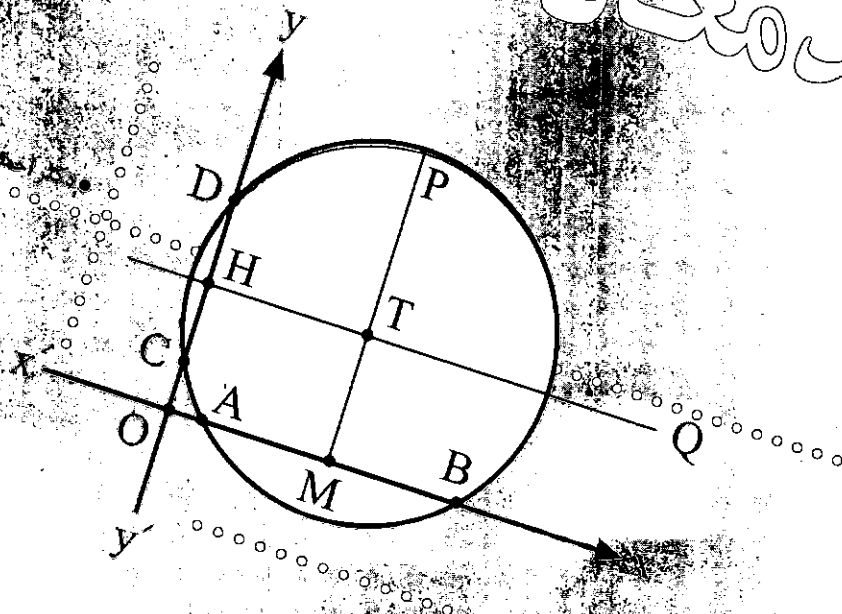
(2)

$$x^2 + 8x + 16$$

با ملاحظه‌ی شکل معلوم می‌شود که مساحت مربع

$A'B'C'D'$ چنین است:

حل هندسی
چند معادله (۱)



است، زیرا در دایره‌ی به مرکز T خط TM بر وتر AB عمود است.
پس:

$$\frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} = \overline{OM} \quad (3)$$

چون $\overline{OC} = 1$ و $\overline{OD} = q$ ، پس:

$$\overline{OC} \cdot \overline{OD} = q \quad (4)$$

بنابر قضیه‌ی «قوت نقطه»، چنین داریم:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC} \cdot \overline{OD} \quad (5)$$

از دو رابطه‌ی ۴ و ۵ نتیجه می‌شود:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = q \quad (6)$$

چون نقطه‌ی M وسط پاره خط AB است، پس:

$$\overline{OA} + \overline{OB} = -\frac{p}{2} \quad (7)$$

از دو رابطه‌ی ۶ و ۷ نتیجه می‌شود که اندازه‌های $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ جواب‌های معادله‌ی درجه دوم ۱ هستند.

بحث: شرط وجود جواب آن است که دایره‌ی به مرکز T و شعاع TC خط $x'x$ را قطع کند یا بر آن مماس باشد. یعنی باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\overline{TC} \geq \overline{TM} \quad (8)$$

چنین داریم:

$$\overline{TC}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{HT}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{OM}^2$$

$$\overline{TC}^2 = \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{p}{2}\right)^2 \quad (9)$$

$$\overline{TM} = \overline{OH} = \frac{\overline{OC} + \overline{OD}}{2}$$

$$\overline{TM} = \frac{1+q}{2} \quad (10)$$

با توجه به تساوی‌های ۹ و ۱۰، رابطه‌ی ۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{q-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{1+q}{2}\right)^2 \quad (11)$$

از رابطه‌ی ۱۱، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود که شرط وجود جواب

$$p^2 - 4q \geq 0$$

مسئله: دستگاه معادلات زیر را با روش هندسی حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b} \end{cases} \quad (b > 0) \quad (1)$$

$$(x+4)^2 \quad (3)$$

و نیز:

$$(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16 \quad (4)$$

برای حل معادله‌ی ۱، معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$$x^2 + 8x + 16 = 33 + 16$$

و یا:

$$x^2 + 8x + 16 = 49 \quad (5)$$

معادله‌ی ۵ با رعایت تساوی ۴ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x+4)^2 = 49 \quad (6)$$

از معادله‌ی ۶ معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$x+4=7 \quad (7)$$

خوارزمی اعداد منفی به کار نمی‌برده است. از معادله‌ی ۷ نتیجه

می‌شود:

$$x=3$$

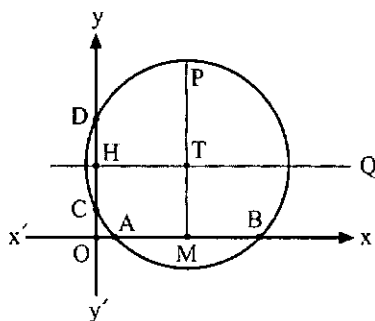
(ب) حل هندسی معادله‌ی درجه دوم با به کارگیری عددهای جبری: معادله‌ی درجه دوم زیر را که ضریب‌های آن اعداد جبری هستند، در نظر می‌گیریم:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله‌ی ۱ باشند، چنین داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{p}{2} \\ x_1 x_2 = q \end{cases} \quad (2)$$

دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ را در نظر می‌گیریم.



روی محور $x'x$ نقطه‌ی M را طوری اختیار می‌کنیم که اندازه‌ی

جبری $\overline{OM}$ برابر $-\frac{p}{2}$ باشد. روی محور $y'y$ نقطه‌های C و D را

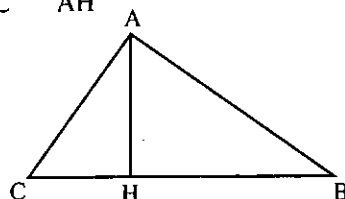
طوری اختیار می‌کنیم که اندازه‌های جبری $\overline{OC}$ و $\overline{OD}$ به ترتیب برابر ۱ و q باشد. خط عمود منصف پاره خط CD را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی M خط MP را بر خط $x'x$ عمود می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد دو خط MP و HQ را T می‌نامیم.

دایره‌ای به مرکز T و شعاع TC رسم می‌کنیم. نقاط برخورد این دایره با خط $x'x$ را A و B می‌نامیم. نقطه‌ی M وسط پاره خط AB

برای حل این دستگاه معادلات، دو حکم هندسی زیر را به کار می گیریم:

حکم ۱. در مثلث قائم الزاویه ی ABC که A رأس زاویه ی قائمه و AH ارتفاع است، رابطه ی زیر برقرار است:

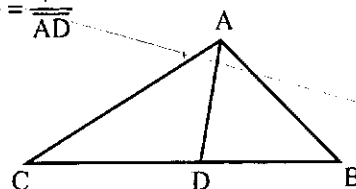
$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$$



حکم ۲.

الف) در مثلث قائم الزاویه ی ABC که A رأس زاویه ی قائمه است و AD نیم ساز زاویه ی A، رابطه ی زیر برقرار است:

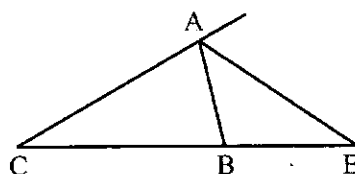
$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$$



ب) در مثلث قائم الزاویه ی ABC که A رأس زاویه ی قائمه و AE نیم ساز خارجی است، رابطه ی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AE}$$

اگر: $\overline{AB} < \overline{AC}$



برهان حکم ۱. در مثلث قائم الزاویه ی ABC دو رابطه ی زیر برقرار است:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \quad (۲)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{BC} \cdot \overline{AH} \quad (۳)$$

دو طرف تساوی ۲ را بر دو طرف تساوی ذیل بخش می کنیم، رابطه ی مطلوب به دست می آید.

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \cdot \overline{AH}^2$$

برهان حکم ۲.

الف) برهان در مورد نیم ساز داخلی مثلث: می خواهیم ثابت کنیم، اگر در مثلث ABC، I طول نیم ساز داخلی باشد، رابطه ی زیر محقق است:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2 \cos \frac{A}{2}}{I} \quad (۴)$$

برای اثبات، حکم زیر را که مساحت مثلث را بر حسب طول دو ضلع و سینوس زاویه ی بین آن دو ضلع به دست می دهد، به کار می گیریم:

$$S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A$$

مساحت های مثلث های ABC، ADB و ADC را به ترتیب

S ، S_1 و S_2 می نامیم و چنین داریم:

$$S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin \frac{A}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \sin \frac{A}{2}$$

و چون $S = S_1 + S_2$ ، پس:

$$\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \sin \frac{A}{2}$$

از رابطه ی اخیر، با توجه به دستور مثلثاتی

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

رابطه ی ۴ حاصل می شود.

حالت خاص: اگر زاویه ی A قائمه باشد، چنین داریم:

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در این صورت رابطه ی ۴ به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{I}$$

ب) برهان حکم ۲ در مورد نیم ساز خارجی مثلث: می خواهیم ثابت کنیم، اگر در مثلث ABC، I طول نیم ساز خارجی باشد، رابطه ی زیر مسلم است:

$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{2 \cos \frac{A}{2}}{I} \quad (\overline{AB} < \overline{AC})$$

ادب ریاضی

● به انتخاب: شهین بهنیا

امیر المؤمنین (علیه السلام) می فرماید: «از نفس خودتان حساب بکشید، پیش از آن که شما را به حساب بکشند و خودتان را بسنجید، پیش از آن که شما را تحت سنجش درآورند.»

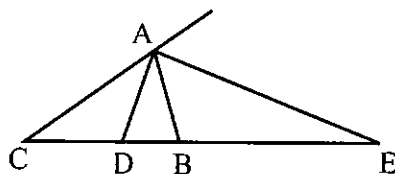
«بعضی گمان می کنند که انسان حتماً به دست دیگری باید تربیت شود، باید شخص دیگری باغبان، مربی و سازنده‌ی او باشد. آری شک نیست که انسان نیاز به معلم، مربی و راهنما دارد، اما مربیان خارجی برای تربیت او کافی نیستند. هر کسی باید در خودش حالت (مربیگری) نسبت به خودش پیدا کند... در نهایت کار، خودش باید درباره‌ی خودش بیندیشد، با خود عهد و پیمان ببندد و از خود مراقبت کند... تا زمانی که خودش به این مراحل نرسد، تصمیم دیگران درباره‌ی او کافی نخواهد بود.»

متفکر شهید استاد مرتضی مطهری - حکمت‌ها و

اندروزها

همه چیز را خودتان بیاموزید. گمان میرید که می‌توانید بدون کار و زحمت، آگاهی‌هایی به دست آورید. کوشش کنید، یاد گرفتنی‌ها را تنها به خاطر نسپارید، بلکه ماهیت آن‌ها را بفهمید. این تنها راهی است که به کمک آن می‌توانید، آن‌چه را که یاد گرفته‌اید، تا مدت‌ها فراموش نکنید. تجربه بیندوزید، با اراده باشید و از دلسردی نترسید. کاری را که آغاز کرده‌اید با سرسختی، منظم و بدون توقف دنبال کنید.

نیکولایف از اعضای آکادمی ریاضیات روسیه



مساحت‌های مثلث‌های ABC، ABE و ACE را به ترتیب به S ، S_1 و S_2 نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AE} \cdot \sin BAE$$

و چون $BAE = \frac{1}{2}(\pi - A)$ پس:

$$S_1 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AE} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

برای محاسبه‌ی S_2 ، توجه می‌کنیم که $DAE = \frac{\pi}{2}$ (نیم‌ساز

داخلی و نیم‌ساز خارجی برهم عمودند). پس $CAE = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$

با رعایت رابطه‌ی اخیر چنین داریم:

$$S_2 = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AE} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AE} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

از طرف دیگر چنین داریم:

$$S = S_2 - S_1$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AE} \cdot \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AE} \cdot \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin A$$

رابطه‌ی اخیر با رعایت رابطه‌ی مسلم

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

$$\frac{1}{\overline{AB}} - \frac{1}{\overline{AC}} = \frac{2 \cos \frac{A}{2}}{1}$$

حالت خاص: اگر $A = \frac{\pi}{2}$ باشد، چنین داریم:

$$\frac{1}{\overline{AB}} - \frac{1}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

ادامه دارد...

کاربردهای

لاگرانژ



اشاره

مشتق و مطالب مربوط به آن، نقش مهمی در ریاضیات، دوره‌ی متوسطه ایفا می‌کند، اما کاربرد قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج آن در حل مسائل ریاضیات مقدماتی، تقریباً نادیده انگاشته شده است. اثبات اتحادها، نامساوی‌ها و فرمول‌های مثلثاتی، هم‌چنین تبدیل عبارت‌های جبری به حاصل ضرب، حل معادله، حل نامعادله، حل دستگاه معادله‌ها، معادله‌های پارامتری و... با استفاده از این قضیه امکان‌پذیر است.

برای این منظور، روش کلی قابل قبولی درباره‌ی حل بعضی مسائل ارائه می‌شود که می‌توان آن‌ها را چه با این روش و چه با روش‌های دیگر حل کرد. در این جا با این گونه مسائل آشنا خواهید شد. ابتدا با قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج آن آشنا می‌شویم:

قضیه‌ی لاگرانژ (میانگین)

اگر تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته و در تمام نقاط بازه‌ی (a, b) مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این بازه نقطه‌ای به طول c وجود دارد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

نتیجه ۱. (شرط ثابت بودن تابع) اگر تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته و مشتق آن در داخل این بازه صفر باشد، آن‌گاه تابع در بازه‌ی $[a, b]$ ثابت است.

نتیجه ۲. اگر دو تابع f و g در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشند و در داخل این بازه مشتق‌های مساوی داشته باشند، اختلاف آن‌ها تنها در مقادیر ثابت خواهد بود.

نتیجه ۳. (شرط یکنوا بودن تابع) اگر تابع f در بازه‌ای مانند I پیوسته و مشتق آن در آن بازه مثبت (منفی) باشد، آن‌گاه تابع f در این بازه صعودی (نزولی) است. با این مقدمه به حل مسائل می‌پردازیم. همان‌طور که گفته شد، قضیه‌ی لاگرانژ در حل معادله‌ها،

نامعادله‌ها، تعیین تعداد ریشه‌ها و... کاربرد دارد. برای این منظور، در روند حل مسائل، تابعی مانند f در نظر گرفته می‌شود که قضیه‌ی لاگرانژ در بازه‌ای مانند $[a, b]$ در آن صدق کند. پس

$$\text{با استفاده از فرمول لاگرانژ: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

که در آن $c \in (a, b)$ مقدار $f'(c)$ محاسبه می‌شود.

مثال ۱. ثابت کنید اگر $x \geq 1$ ، آن‌گاه $e^x \geq ex$.
اثبات: نامساوی به ازای $x = 1$ برقرار است. تابع f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = e^x - ex$$

به ازای هر $b > 1$ بازه‌ی $[1, b]$ ، شرایط قضیه‌ی لاگرانژ در این تابع صدق می‌کند. پس در این بازه نقطه‌ای به طول c وجود دارد؛ طوری که

$$\frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{e^b - eb}{b - 1} = e^c - e$$

چون $c > 1$ پس $e^c > e$ و بنابراین $e^c - e > 0$ و از آن‌جا:

$$\frac{e^b - eb}{b - 1} > 0 \Rightarrow e^b - eb > 0$$

یعنی به ازای $b > 1$ داریم:

قضیه ی لاگرانژ در آن صدق می کند:

$$\frac{f(0/8) - f(0/6)}{0/8 - 0/6} = f'(c), \quad 0/6 < c < 0/8$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Arcsin } 0/8 - \text{Arcsin } 0/6}{0/2} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

مقدار $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$ را در بازه ی $0/6 < c < 0/8$ تعیین می کنیم:

$$0/36 < 1-c^2 < 0/64$$

$$0/6 < \sqrt{1-c^2} < 0/8$$

$$\frac{5}{4} < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{5}{3}$$

از آن جا نتیجه می شود:

$$\frac{1}{4} < \text{Arcsin } 0/8 - \text{Arcsin } 0/6 < \frac{1}{3}$$

مثال ۴. ثابت کنید به ازای هر x_1 و x_2 حقیقی، نامساوی زیر برقرار است:

$$|\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

اثبات: به ازای $x_1 = x_2$ نامساوی بالا برقرار است. فرض کنیم $x_1 \neq x_2$ تابع $f(x) = \cos x$ را به ازای $x_1 < x_2$ در بازه ی $[x_1, x_2]$ و به ازای $x_1 > x_2$ در بازه ی $[x_2, x_1]$ در نظر می گیریم. شرایط قضیه ی لاگرانژ در این تابع صدق می کند؛ بنابراین نقطه ای به طول c در این بازه وجود دارد، طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c)$$

$$\frac{\cos x_1 - \cos x_2}{x_1 - x_2} = -\sin c$$

$$\Rightarrow |\cos x_1 - \cos x_2| = |x_1 - x_2| \cdot |-\sin c|$$

چون $|\sin c| \leq 1$ ، پس:

$$|\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

مثال ۵. ثابت کنید معادله ی $\cos^2 \frac{x}{2} + 2^{\cos x} = 2$ در بازه ی

$(0, 2\pi)$ بیش از دو ریشه ی حقیقی ندارد.

$$e^b > eb$$

و از آن جا نتیجه می شود که به ازای $x \geq 1$ داریم:

$$e^x \geq ex$$

در حالت خاص، به ازای $x = c+1$ داریم:

$$e^{c+1} \geq e(c+1) \Rightarrow e^c \geq c+1$$

که در آن c می تواند هر عدد دلخواه حقیقی باشد.

مثال ۲. ثابت کنید به ازای $x \geq 0$ داریم:

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

اثبات: فرض کنیم b عددی دلخواه و مثبت باشد. در بازه ی $[0, b]$ تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

بنابر قضیه ی لاگرانژ داریم:

$$\frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = f'(c)$$

$$0 < c < b \Rightarrow \frac{e^b - \frac{b^2}{2} - 1}{b} = e^c - c$$

چون به ازای هر c داریم: $e^c \geq c+1$ (مثال ۱ را نگاه کنید)، پس:

$$e^c - c \geq c+1 - c \Rightarrow e^c - c \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^b - \frac{b^2}{2} - 1}{b} \geq 1 \Rightarrow e^b - \frac{b^2}{2} - 1 \geq b$$

یعنی به ازای هر $b > 0$ داریم:

$$e^b \geq 1 + b + \frac{b^2}{2}$$

پس به ازای هر $x > 0$ خواهیم داشت:

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

مثال ۳. ثابت کنید:

$$\frac{1}{4} < \text{Arcsin } 0/8 - \text{Arcsin } 0/6 < \frac{1}{3}$$

اثبات: تابع $f(x) = \text{Arcsin } x$ را در بازه ی $[0/6, 0/8]$ در نظر می گیریم. تابع در این بازه پیوسته و مشتق پذیر است. پس

اثبات: فرض کنیم معادله در این بازه حداقل سه ریشه x_1 و x_2 و x_3 داشته باشد، طوری که $x_1 < x_2 < x_3$ بنابراین، x_1 و x_2 و x_3 صفرهای تابع زیر خواهند بود:

$$f(x) = 2 - \cos^2 \frac{x}{2} - 2^{\cos x}$$

یعنی:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$$

در هر یک از بازه‌های $[x_1, x_2]$ و $[x_2, x_3]$ ، شرایط لاگرانژ درباره‌ی تابع صدق می‌کند. پس c_1 و c_2 هایی به ترتیب از بازه‌های (x_1, x_2) و (x_2, x_3) وجود دارند؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1) \quad \text{و} \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2)$$

چون: $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ پس $f'(c_1) = 0$ و $f'(c_2) = 0$

مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \ln 2$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \sin x \cdot 2^{\cos x} \ln 2 = \sin x \left(\frac{1}{2} + 2^{\cos x} \ln 2 \right)$$

چون $\frac{1}{2} + 2^{\cos x} \ln 2 > 0$ ، پس از معادله‌ی $f'(x) = 0$ نتیجه می‌شود:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi$$

یعنی در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ تنها یک ریشه‌ی منحصر به فرد وجود دارد و این تناقض است، زیرا c_1 و c_2 ، باید ریشه‌های $f'(x) = 0$ باشند.

از آن‌جا نتیجه می‌شود معادله $2 - \cos^2 \frac{x}{2} - 2^{\cos x} = 0$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ بیش از دو ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۶. معادله‌ی $x^5 - 10x^3 + 50x - 41 = 0$ را حل کنید. حل: به آسانی می‌توان دید که $x_1 = 1$ ریشه‌ی معادله است. فرض کنیم معادله یک ریشه‌ی حقیقی دیگر مانند x_2 داشته باشد. در این صورت x_1 و x_2 صفرهای تابع زیر خواهند بود:

$$f(x) = x^5 - 10x^3 + 50x - 41$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

قضیه‌ی لاگرانژ به ازای $x_1 < x_2$ در بازه‌ی $[x_1, x_2]$ و به ازای $x_1 > x_2$ در بازه‌ی $[x_2, x_1]$ صدق می‌کند. پس در این بازه‌ها عددی مانند c موجود است، به طوری که:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

چون $f(x_1) = f(x_2) = 0$ پس: $f'(c) = 0$. یعنی c ریشه‌ی معادله‌ی $f'(x) = 0$ است. اما داریم:

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 50$$

دیده می‌شود که مشتق به ازای هر x ، مثبت است (مبین $f'(x) = 0$ نسبت به x^2 منفی و ضریب x^4 مثبت است $5 > 0$ و $x^2 = y \Rightarrow 5y^2 - 30y + 50 = 0$ و $\Delta = (30)^2 - 10000 < 0$). یعنی $f'(x) = 0$ جواب ندارد و این یک تناقض است. بنابراین $x_1 = 1$ ریشه‌ی منحصر به فرد معادله‌ی مفروض است.

مثال ۷. تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی زیر را پیدا کنید.

$$y = (x^2 - x)(x - 8)(x - 9)$$

حل: چون تابع از درجه‌ی پنجم است، پس مشتق آن کثیرالجهلی از درجه‌ی چهارم خواهد بود و بنابراین بیش از چهار ریشه‌ی حقیقی نخواهد داشت.

قضیه‌ی لاگرانژ را برای تابع:

$$f(x) = (x+1)(x)(x-1)(x-8)(x-9)$$

در بازه‌های $[-1, 0]$ و $[0, 1]$ و $[1, 8]$ و $[8, 9]$ به کار می‌بریم. داریم:

$$f(-1) = f(0) = f(1) = f(8) = f(9) = 0$$

در داخل هر یک از این فواصل، به ترتیب x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 یافت می‌شوند، طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(-1) - f(0)}{-1 - 0} = f'(x_1) \quad \text{و} \quad \frac{f(0) - f(1)}{0 - 1} = f'(x_2)$$

$$\frac{f(1) - f(8)}{1 - 8} = f'(x_3) \quad \text{و} \quad \frac{f(8) - f(9)}{8 - 9} = f'(x_4)$$

دیده می‌شود:

$$f'(x_1) = 0, \quad f'(x_2) = 0, \quad f'(x_3) = 0, \quad f'(x_4) = 0$$

چون x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 ریشه‌های کثیرالجهلی $f'(x) = 0$ هستند که از درجه‌ی چهارم است، پس برای $f'(x)$ ریشه‌های متمایز دیگری وجود ندارد. بنابراین، تابع با ضابطه‌ی

$$y = (x^2 - x)(x - 8)(x - 9)$$

چهار نقطه‌ی بحرانی دارد.

پس به ازای هر x از این بازه داریم: $f(x) = c$
به ازای $x = 0$ داریم:

$$f(0) = c = \text{Arc cos } 0 + \text{Arc cos } 0$$

$$c = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow f(x) = \text{Arc cos}(-x) + \text{Arc cos } x = \pi$$

پس به ازای $-1 \leq x \leq 1$ داریم:

$$\text{Arc cos}(-x) = \pi - \text{Arc cos } x$$

مثال ۱۰. ثابت کنید به ازای $x < 0$ تساوی زیر برقرار است:

$$\text{Arc tan } x = \text{Arc sin } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\pi}{2}$$

اثبات: دو تابع با ضابطه‌ی زیر را در بازه‌ی $[-\infty, 0]$ در نظر می‌گیریم.

$$f(x) = \text{Arctg } x \quad \text{و} \quad g(x) = \text{Arc sin } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

هر دو تابع در بازه‌ی $[b, 0]$ پیوسته هستند. مشتق آن‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{و}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{-x}{|x|(1+x^2)}$$

چون به فرض $x < 0$ ، پس:

$$|x| = -x, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

یعنی در بازه‌ی $[b, 0]$ مشتق این دو تابع مساوی اند:

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم $x = -1$:

$$\text{Arctg}(-1) = \text{Arc sin } \frac{1}{\sqrt{2}} + c \Rightarrow c = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

پس به ازای $x < 0$ داریم:

$$\text{Arctg } x = \text{Arc sin } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\pi}{2}$$

ادامه دارد...

اکنون نتایج ۱ و ۲ قضیه‌ی لاگرانژ را در اثبات این مطالب به کار می‌بریم:

۱. اثبات اتحادها و در حالت خاص استنتاج فرمول‌های ریاضی مقدماتی:

۲. ساده کردن عبارت‌های جبری:

۳. تبدیل عبارت‌های جبری به صورت حاصل ضرب عوامل.

برای این منظور، بازه‌های تابع f را طوری انتخاب می‌کنیم که مشتق تابع در آن بازه‌ها صفر باشد و در نتیجه از تساوی $f'(x) = 0$ ، ثابت بودن تابع را نتیجه می‌گیریم:

$$f(x) = c$$

یا به جای یک تابع، دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$f'(x) = g'(x)$$

$$f(x) = g(x) + c$$

و از آن جا:

که در آن c مقدار ثابتی است و برای تعیین آن به جای x ، مقدار معینی مانند x_1 قرار می‌دهیم و c را به دست می‌آوریم (تساوی بالا به ازای هر x حقیقی برقرار است).

مثال ۸. بدون استفاده از اتحادهای مثلثاتی ثابت کنید:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

اثبات: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \cos 2x - 2\cos^2 x$ را در نظر می‌گیریم. این تابع به ازای همه‌ی مقادیر x پیوسته و مشتق پذیر است. داریم:

$$f'(x) = -2\sin 2x + 4\cos x \sin x$$

$$-2\sin 2x + 4\cos x \sin x = -2\sin 2x + 2\sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c$$

برای تعیین c در تابع $f(x)$ ، به جای x قرار می‌دهیم $x = 0$. از آن جا داریم:

$$f(0) = c = \cos 0 - 2\cos^2 0 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow \cos 2x - 2\cos^2 x = -1$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

مثال ۹. اگر $-1 \leq x \leq 1$ ، آن گاه ثابت کنید:

$$\text{Arc cos}(-x) = \pi - \text{Arc cos } x$$

اثبات: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \text{Arc cos}(-x) + \text{Arc cos } x$ را در بازه‌ی $[-1, 1]$ در نظر می‌گیریم. تابع در این بازه پیوسته و مشتق آن صفر است:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

تابع حسابی اوایلر و قضیه ی اوایلر و نتایج حاصل از آن ها

● جمیدرضا امیری

$$\sum_{i=1}^k \varphi(d_i) = m$$

مثال ۱. مطلوب است محاسبه ی:

الف) $\varphi(120)$

ب) $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(6) + \varphi(9) + \varphi(18)$

حل. الف)

$$\varphi(120) = \varphi(2^3 \times 3 \times 5) = \varphi(2^3) \times \varphi(3) \times \varphi(5) = \varphi(8 \times 3) \times \varphi(5)$$

$$= \varphi(8) \times \varphi(3) \times \varphi(5) = \varphi(2^3) \times 2 \times 4$$

$$= 2^2 \times (1 - \frac{1}{2}) \times 2 \times 4 = 4 \times 2 \times 4 = 32$$

ب)

$$\varphi(1) + \dots + \varphi(9) + \varphi(18) = 18 \quad (\text{طبق قضیه ی ۳})$$

(اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۶ و ۹ و ۱۸ شماره های مثبت عدد ۱۸ هستند.)

تمرین: ثابت کنید:

$$I) \varphi(10^n) = 10^{n-1} \times 4$$

$$II) \varphi(2n) = \begin{cases} 2\varphi(n) & \text{زوج } n \\ \varphi(n) & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$III) \varphi(3n) = 3\varphi(n) \Leftrightarrow 3|n$$

$$IV) \varphi(3n) = 2\varphi(n) \Leftrightarrow 3 \nmid n$$

$$V) \varphi(n) = \frac{n}{2} \Leftrightarrow n = 2^\alpha \quad (\alpha \geq 1)$$

$$VI) \varphi(n^2) = n\varphi(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

اثبات:

$$I) \varphi(10^n) = \varphi(2^n \times 5^n) = 10^{n-1} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 10^{n-1} \times 4$$

$$II) \begin{cases} \text{زوج } n \Rightarrow (n, 2) = 2 \Rightarrow \varphi(2n) = \varphi(2) \times \varphi(n) \times \frac{2}{\varphi(2)} = 2\varphi(n) \\ \text{فرد } n \Rightarrow (n, 2) = 1 \Rightarrow \varphi(2n) = \varphi(2) \times \varphi(n) = 1 \times \varphi(n) = \varphi(n) \end{cases}$$

در کتاب ریاضیات گسسته ی پیش دانشگاهی، در بخش ترکیات، با استفاده از اصل شمول و عدم شمول ثابت شده است که اگر $m = p_1 \times p_2 \times p_3$ به صورت m عددی طبیعی باشد و به صورت حاصل ضرب سه عدد اول تجزیه شود، در این صورت تعداد اعداد طبیعی و کوچک تر از m که نسبت به m اول هستند، از رابطه ی

$$\varphi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})(1 - \frac{1}{p_3})$$

رابطه در حالت کلی و برای هر عدد طبیعی مانند m که به صورت

$$m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

شود و به تابع حسابی اوایلر معروف است؛ یعنی:

$$\varphi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_k})$$

برای مثال، عدد $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ را در نظر می گیریم. در

این صورت:

$$\varphi(60) = 60 \times (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{5}) = 60 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \varphi(60) = 16$$

قبل از هر چیز، برای تسریع در محاسبه ی $\varphi(m)$ در حالت های

گوناگون، برای m چند قضیه را بیان می کنیم:

قضیه ی ۱. اگر p عددی اول و α عددی طبیعی باشد:

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha(1 - \frac{1}{p})$$

نتیجه: اگر p عددی اول باشد، همواره:

$$\varphi(p) = p(1 - \frac{1}{p}) = (p-1)$$

قضیه ی ۲. به ازای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که

$$(m, n) = d$$

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n) \times \frac{d}{\varphi(d)}$$

نتیجه (حالت خاص قضیه ی ۲): اگر m و n دو عدد طبیعی و

$(m, n) = 1$ باشد، در این صورت:

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n)$$

(توجه داریم که: $\varphi(1) = 1$.)

قضیه ی ۳. اگر $d_1, d_2, \dots, d_k$ همه ی شماره های مثبت عدد

m متباین بوده و هر دو تا از آن‌ها به پیمانه‌ی m ، ناهم‌نهشت باشند.

اثبات: با توجه به تعریف، اثبات واضح و بدیهی است.

قضیه: اگر مجموعه‌ی $\varphi(m)$ عدد $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}$ ، یک د.م.م. به پیمانه‌ی m و $(a, m) = 1$ باشد، در این صورت مجموعه‌ی $A = \{ar_1, ar_2, \dots, ar_{\varphi(m)}\}$ نیز یک د.م.م. به پیمانه‌ی m است.

اثبات: تعداد اعضای A برابر است با $\varphi(m)$. از طرف دیگر برای هر r_i که $1 \leq i \leq \varphi(m)$ باشد، همواره: $(r_i, m) = 1$ (طبق تعریف د.م.م.) و طبق فرض: $(a, m) = 1$ و لذا: $(ar_i, m) = 1$ و همواره: $ar_i \not\equiv ar_j \pmod{m}$ زیرا اگر $ar_i \equiv ar_j \pmod{m}$ باشد، چون:

$(a, m) = 1$ ، پس: $r_i \equiv r_j \pmod{m}$ که با تعریف د.م.م. تناقض دارد. بنابراین، مجموعه‌ی A یک د.م.م. به پیمانه‌ی m است. حال به اثبات قضیه‌ی اوایلر می‌پردازیم.

اثبات قضیه‌ی اوایلر: فرض کنیم $k = (\varphi)m$ و $A = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ یک د.م.م. به پیمانه‌ی m باشد. بنابر قضیه‌ی قبل و این‌که: $(a, m) = 1$ ، مجموعه‌ی $B = \{ar_1, ar_2, \dots, ar_k\}$ نیز یک د.م.م. به پیمانه‌ی m است.

بنابراین، هر یک از اعضای A با یکی و فقط یکی از اعضای B به پیمانه‌ی m هم‌نهشت است که اگر طرفین این k هم‌نهشتی را در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$(ar_1)(ar_2)\dots(ar_k) \equiv r_1r_2\dots r_k \pmod{m}$$

$$\Rightarrow (r_1r_2\dots r_k)a^k \equiv r_1r_2\dots r_k \pmod{m}$$

از طرف دیگر: $(r_1, m) = 1$ و $(r_2, m) = 1, \dots, (r_k, m) = 1$ (طبق تعریف د.م.م.)، پس: $(r_1r_2\dots r_k, m) = 1$. یعنی می‌توان طرفین رابطه‌ی (۱) را بر $(r_1r_2\dots r_k)$ تقسیم کرد که پس از تقسیم نتیجه می‌شود: $a^k \equiv 1 \pmod{m}$ یا $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

نتیجه‌ی ۱: (قضیه‌ی فرما) اگر p عددی اول و a عددی صحیح و $p \nmid a$ ، $(p, a) = 1$ باشد، در این صورت:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

اثبات: اگر p اول باشد، $\varphi(p) = p-1$ و طبق قضیه‌ی اوایلر حکم ثابت می‌شود.

تذکر: فرما قضیه‌ی خود را حدود ۸۰ سال قبل از اوایلر بیان کرد! نتیجه‌ی ۲: اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشند، در این صورت:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

اثبات: اگر $p \nmid a$ باشد، پس طبق نتیجه‌ی ۱ داریم: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ و با ضرب طرفین هم‌نهشتی در a حکم به دست می‌آید. و اگر $p \mid a$ ،

$$IV, III) \quad \varphi(\varphi n) = \varphi(\varphi) \times \varphi(n) \times \frac{(\varphi, n)}{\varphi[(\varphi, n)]}$$

حال اگر $\varphi \nmid n$ باشد، پس: $\varphi[(\varphi, n)] = \varphi(\varphi)$ و $\varphi(\varphi) = \varphi$ و تمرین (III) ثابت می‌شود. و اگر $\varphi \mid n$ باشد، پس: $(\varphi, n) = \varphi$ ، $\varphi[(\varphi, n)] = \varphi(1)$ و $\varphi(1) = 1$ ، و تمرین (IV) اثبات می‌شود.

$$V) \quad \varphi(n) = \varphi(\varphi^\alpha) = \varphi^\alpha \times (1 - \frac{1}{\varphi}) = \varphi^\alpha \times \frac{\varphi-1}{\varphi} = \frac{\varphi^\alpha}{\varphi} = \frac{n}{\varphi}$$

$$VI) \quad \varphi(n') = \varphi(n \times n) = \varphi(n) \times \varphi(n) \times \frac{(n, n)}{\varphi[(n, n)]}$$

$$= \varphi(n) \times \varphi(n) \times \frac{(n)}{\varphi(n)} = n\varphi(n)$$

قضیه‌ی ۴: اگر a و b دو عدد طبیعی و $(a, b) = d$ و $[a, b] = c$ باشند، در این صورت داریم:

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(d)\varphi(c)$$

تذکر: در قضیه‌ی (۴)، اگر $d = 1$ باشد، خواهیم داشت: $(c=ab)$:

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \times \varphi(b)$$

که همان نتیجه‌ی قضیه‌ی ۲ است.

تمرین: ثابت کنید:

$$I) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \mid n!$$

$$II) \quad \text{اگر } k, n \in \mathbb{N}, d \mid n \text{ ثابت کنید: } \varphi(nd^k) = d^k \varphi(n)$$

(راه‌حل‌های خود را برای ما ارسال کنید. از بین بهترین‌ها، به دو نفر جایزه می‌دهیم!)

قضیه‌ی اوایلر در هم‌نهشتی‌ها و کاربردهای آن

قضیه‌ی اوایلر: اگر m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد و $(m, a) = 1$ ، در این صورت:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

برای اثبات قضیه‌ی اوایلر، به بیان یک تعریف و دو قضیه‌ی مربوط به آن نیاز داریم که شاید مفید باشد!

تعریف دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانه‌ی m (د.م.د)

مجموعه‌ی شامل $\varphi(m)$ عدد $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}$ را یک د.م.م. به پیمانه‌ی m می‌نامیم، هرگاه هریک از کلاس‌های هم‌ارزی به پیمانه‌ی m متباین با m ، دقیقاً با یک عضو این مجموعه هم‌نهشت باشند:

برای مثال، مجموعه‌ی $\{1, 3, 5, 7\}$ یک د.م.م. به پیمانه‌ی ۸ است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن‌که مجموعه‌ی شامل $\varphi(m)$ عدد صحیح یک د.م.م. به پیمانه‌ی m باشد آن است که هریک از این اعداد با

پس: $p | a(a^{p-1} - 1)$ و لذا: $p | a^p - a$.

در نتیجه: $a^p \equiv a$
 نتیجه ۳. اگر a عددی صحیح و فرد و k عددی طبیعی باشد،
 همواره داریم:

$$a^{2k-1} \cdot 2^k \equiv 1$$

اثبات: چون a فرد است، پس: $(a, 2) = 1$ و لذا طبق قضیه ی اوایلر داریم:

$$a^{\varphi(2^k)} \equiv 1 \xrightarrow{\text{(تمرین V)}} a^{2^{k-1}} \equiv 1 \Rightarrow a^{2^k-1} \equiv 1$$

نتیجه ی ۴. اگر p و q دو عدد اول و متمایز باشند، همواره داریم:

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1$$

اثبات: می دانیم $(p, q) = 1$ ، لذا طبق قضیه ی فرما داریم:

$$p^{q-1} \equiv 1 \Rightarrow p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 + 0 = 1 \quad (1)$$

$$q^{p-1} \equiv 1 \Rightarrow p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 + 0 = 1 \quad (2)$$

$$(p, q) = 1 \xrightarrow{(1), (2)} p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1$$

نتیجه ی ۵. اگر p عددی اول و a و b اعدادی صحیح باشند،
 همواره داریم:

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p$$

اثبات: طبق نتیجه ی ۲ داریم:

$$a^p \equiv a \Rightarrow a^p + b^p \equiv a + b \quad (1)$$

$$b^p \equiv b \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (a + b)^p \equiv a^p + b^p$$

نتیجه ی ۶. اگر p و q دو عدد اول و متمایز باشند و: $a^p \equiv a$ و $a^{pq} \equiv a$ ، در این صورت: $a^{pq} \equiv a$

$$(a^p)^q \equiv a^{pq} \Rightarrow (a^p)^q \equiv a^p, (a^q)^p \equiv a^q$$

از طرف دیگر طبق فرض: $a^p \equiv a$ و $a^q \equiv a$ و بنابه خاصیت تعدی داریم:

$$a^{pq} \equiv a, a^{pq} \equiv a \xrightarrow{(p, q)=1} a^{pq} \equiv a$$

نتیجه ی ۷. مجموعه ی اعداد اولی که به صورت $4k + 1$ هستند، نامتناهی است.

اثبات: ثابت می کنیم به ازای هر عدد طبیعی مانند $n \neq 1$ ، عدد اولی چون p به صورت $p = 4k + 1$ وجود دارد که: $p > n$. برای اثبات، فرض کنیم: $n > 1$ و $a = n!$.

چون $a = n!$ عددی زوج است، پس عدد $a^2 + 1$ فرد است. و چون $a^2 + 1 > 1$ عامل اولی چون p دارد که p به یکی از دو صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ است و واضح است که: $p > n$ (زیرا اگر $p \leq n$ باشد، همواره: $p | n!$ یا $p | a$ پس $p | a^2$ و چون $p | a^2 + 1$ باید $p | 1$ که تناقض است). حال کافی است ثابت کنیم به صورت $(4k + 1)$ است. فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف)، یعنی: $p = 4k + 3$. طبق ویژگی ها و خواص رابطه ی عاد کردن داریم:

$$p | a^2 + 1, a^2 + 1 | (a^2)^{2k+1} + 1 \Rightarrow ((a^2)^{2k+1} + 1) = (a^2 + 1) \times Q \Rightarrow p | (a^2)^{2k+1} + 1 \Rightarrow p | a^{4k+2} + 1 \xrightarrow{p=4k+3} p | a^{p-1} + 1 \Rightarrow p | a(a^{p-1} + 1) \Rightarrow p | a^p + a \quad (1)$$

$$a^p \equiv a \Rightarrow p | a^p - a \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow p | 2a = 2 \times n!$$

و چون p بزرگ تر از n و فرد است، عبارت $p | 2 \times n!$ یک تناقض است و لذا باید $p = 4k + 1$ و حکم به اثبات می رسد.

نتیجه ی ۸ (تعمیم نتیجه ی ۴): اگر m و n اعدادی طبیعی باشند و $(m, n) = 1$ ، در این صورت:

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1$$

(اثبات به عهده ی شما)

کاربرد قضیه های اوایلر و فرما در حل مسائل عددی و غیر عددی و پیدا کردن باقی مانده ی تقسیم

۱. باقی مانده ی تقسیم عدد $A = 3^{256} \times (-5)$ را بر ۱۰۰ بیابید.

$$(3, 100) = 1, \varphi(100) = \varphi(10^2) = 10^2 - 1 \times 4 = 40$$

در نتیجه بنابر قضیه ی اوایلر داریم:

$$3^{40} \equiv 1 \Rightarrow (3^{40})^6 \times 3^{16} \equiv 3^{16}$$

$$3^{16} = (81)^4 \equiv (-19)^4 = (-19^2)^2 = (361)^2 \equiv 61^2 = 3721 \equiv 21$$

$$\Rightarrow 3^{256} \equiv 21 \Rightarrow 3^{256} \times (-5) \equiv -105 \equiv 95$$

پس باقی مانده ی عدد A بر ۱۰۰ عدد ۹۵ است، یا عدد A از سمت راست به ۹۵ ختم می شود.

۲. باقی مانده ی تقسیم عدد $12 \times (12^{24} + 35^4)$ را بر ۴۲۰ بیابید.

می دانیم:

$$(12, 35) = 1, \varphi(12) = 4, \varphi(35) = \varphi(7 \times 5) = \varphi(7) \times \varphi(5)$$

$$\Rightarrow \varphi(35) = 6 \times 4 = 24$$

از طرف دیگر، بنابر یکی از تمرین‌های قبل داریم:

$$(m, n) = 1 \Rightarrow m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1$$

$$\Rightarrow 12^{\varphi(35)} + 35^{\varphi(12)} \equiv 1 \Rightarrow 12^{24} + 35^4 \equiv 1$$

$$\Rightarrow A = (12^{24} + 35^4) \times 12 \equiv 12 \Rightarrow r = 12$$

۳. ثابت کنید، اگر: $(a, v) = (b, v) = 1$ ، آنگاه: $49 | a^{42} - b^{42}$.

اولی

$$(a, v) = 1 \Rightarrow (a, 49) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(49)} \equiv 1, \varphi(49) = 42$$

$$\Rightarrow a^{42} \equiv 1, b^{42} \equiv 1 \Rightarrow a^{42} - b^{42} \equiv 0 \Rightarrow 49 | a^{42} - b^{42}$$

۴. باقی مانده‌ی تقسیم عدد $A = \sum_{k=1}^{40} k^{16}$ را بر ۱۷ بیابید.

از بین اعداد ۱ تا ۴۰ فقط دو عدد ۱۷ و ۳۴ نسبت به ۱۷ اول نیستند و در مورد بقیه‌ی اعداد می‌توان از قضیه‌ی فرما استفاده کرد:

$$A = 1^{16} + 2^{16} + \dots + 17^{16} + 18^{16} + \dots + 34^{16} + 35^{16} + \dots + 40^{16}$$

$$\Rightarrow A \equiv \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{16 \text{ تا}} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{16 \text{ تا}} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{16 \text{ تا}} \pmod{17}$$

$$\Rightarrow A \equiv 16 + 16 + 16 = 48 \equiv 4 \pmod{17} \Rightarrow r = 4$$

۵. باقی مانده‌ی تقسیم عدد $A = \sum_{k=1}^{40} k^{12}$ را بر عدد ۱۳ بیابید.

$$A = 1^{12} + \dots + 12^{12} + 13^{12} + \dots + 40^{12}$$

بنابر نتیجه ۲ داریم:

$$A \equiv 1 + 2 + \dots + 40 = \frac{40 \times 41}{2} = 20 \times 41 \equiv 7 \times 2 = 14 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow r = 1$$

$$(20 \equiv 7, 41 \equiv 2)$$

۶. باقی مانده‌ی تقسیم عدد $A = 35^{2008} \times 50$ را بر ۲۴ بیابید.

$$(35, 24) = 1 \xrightarrow{\text{اولی}} 35^{\varphi(24)} \equiv 1 \Rightarrow 35^{24} \equiv 1$$

$$2008 = 251 \times 8 \Rightarrow (35^8)^{251} \equiv 1 \Rightarrow 35^{2008} \times 50 \equiv 1 \times 50 \equiv 2$$

۷. اگر عدد a نسبت به ۲، ۳، ۱۹ و ۳۷ اول باشد، ثابت کنید

$a^{36} - 1$ بر 33744 بخش پذیر است.

$$33744 = 2^4 \times 3 \times 19 \times 37,$$

$$a^{36} - 1 = (a^{18} + 1)(a^9 + 1)(a^9 - 1)$$

$$(a, 37) = 1 \xrightarrow{\text{فرما}} a^{36} \equiv 1 \Rightarrow 37 | a^{36} - 1 \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون $(a, 2) = 1$ ، پس a فرد است و هر یک از

سه عدد $(a^9 - 1)$ ، $(a^9 + 1)$ و $(a^{18} + 1)$ زوج هستند. و چون

$(a^9 - 1)$ و $(a^9 + 1)$ دو عدد زوج متوالی هستند، پس یکی از آنها

بر ۴ بخش پذیر است. بنابرین:

$$(a^{36} - 1) = (a^{18} + 1)(a^9 + 1)(a^9 - 1) \\ = 2k_1 \times 2k_2 \times 4k_3 = 16k \Rightarrow 2^4 | a^{36} - 1 \quad (2)$$

$$(a, 19) = 1 \xrightarrow{\text{فرما}} a^{18} \equiv 1 \Rightarrow 19 | a^{18} - 1 \Rightarrow 19 | a^{36} - 1 \quad (3)$$

$$(a, 3) = 1 \xrightarrow{\text{فرما}} a^2 \equiv 1 \Rightarrow 3 | a^2 - 1 \Rightarrow 3 | a^{36} - 1 \quad (4)$$

$$[a^{36} - 1 = (a^2)^{18} - 1 = (a^2 - 1)Q]$$

$$(1), (2), (3), (4) \Rightarrow [2^4, 3, 19, 37] | a^{36} - 1$$

$$\Rightarrow 2^4 \times 3 \times 19 \times 37 | a^{36} - 1 \Rightarrow 33744 | a^{36} - 1$$

۸. ثابت کنید: $11 | 5^{28} - 4$.

$$(5, 11) = 1 \xrightarrow{\text{فرما}} 5^{10} \equiv 1 \Rightarrow (5^{10})^2 \times 5^8 \equiv 5^8$$

$$5^8 = 25^4, 25 \equiv 3 \Rightarrow 25^4 \equiv 3^4 = 81 \equiv 4$$

$$\Rightarrow 5^8 \equiv 4 \Rightarrow 5^{28} \equiv 4 \Rightarrow 11 | 5^{28} - 4$$

کاربرد قضیه‌های اوایلر و فرما در حل معادلات سیاله‌ی

خطی و هم‌نهشتی

می‌دانیم، هر معادله‌ی سیاله‌ی خطی و دو مجهولی به صورت

$$a'x + b'y = c' \quad \text{که } (a', b') | c', \text{ دارای بی‌شمار جواب صحیح}$$

است که با تقسیم طرفین تساوی بر (a', b') ، به معادله‌ی سیاله‌ی

$$ax + by = c \quad \text{می‌رسیم و همواره } (a, b) = 1 \text{ است. از طرف}$$

دیگر، شرط لازم و کافی برای آن که زوج مرتب (x, y) یک جواب

معادله‌ی اخیر باشد، آن است که:

$$y = \frac{c - ax}{b} \in \mathbb{Z}, \text{ یا } b | ax - c \text{ یا } ax \equiv c \pmod{b} \text{ به علاوه، بنابر}$$

قضیه‌ی اوایلر: $a^{\varphi(b)} \equiv 1$. بنابرین:

$$aa^{\varphi(b)-1} \equiv 1 \Rightarrow a(ca^{\varphi(b)-1})^b \equiv c$$

یعنی، هر عدد مانند x که $x \equiv ca^{\varphi(b)-1} \pmod{b}$ ، در معادله‌ی

هم‌نهشتی $ax \equiv c \pmod{b}$ و در نتیجه در معادله‌ی سیاله‌ی $ax + by = c$

صدق می‌کند (می‌توان x را مساوی با $ca^{\varphi(b)-1}$ فرض کرد).

برای مثال، معادله‌ی $13x + 12y = 17$ را حل می‌کنیم:

$$\varphi(12) = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 4 \Rightarrow x \equiv 17 \times 13^3$$

$$I) \Delta|a \Rightarrow (\Delta, a) = 1 \Rightarrow (\Delta^r, a) = 1 \Rightarrow a^{100125} \equiv 1$$

$$II) \Delta|a \Rightarrow \Delta^r|a^r \Rightarrow \Delta^r|a^{100} \Rightarrow a^{100125} \equiv 0$$

۱۲. اگر $(a, 10) = 1$ باشد، ثابت کنید سه رقم سمت راست a^{100} و a^{101} با هم برابرند.

برای اثبات می‌باید نشان دهیم: $a^{101} \equiv a$ که چون $\varphi(8) = 4$ و $\varphi(125) = 100$ طبق قضیه‌ی اوایلر: $a^{100} \equiv 1$ و $a^{125} \equiv 1$ پس: $a^{100} \equiv 1$ و چون $(8, 125) = 1$ ، لذا: $a^{100125} \equiv 1$ یا $a^{100} \equiv 1$ یا $a^{101} \equiv a$ با ضرب طرفین در a داریم: $a^{101} \equiv a$

$$۱۳. اگر $(a, 90) = 1$ باشد، ثابت کنید: $a^{12} \equiv 1$
 $\varphi(9) = 6, \varphi(10) = 4$$$

$$\left. \begin{aligned} (a, 10) = 1 &\Rightarrow a^4 \equiv 1 \Rightarrow (a^4)^3 \equiv 1 \Rightarrow a^{12} \equiv 1 \\ (a, 9) = 1 &\Rightarrow a^6 \equiv 1 \Rightarrow (a^6)^2 \equiv 1 \Rightarrow a^{12} \equiv 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^{12} \equiv 1$$

۱۴. به کمک قضیه‌ی اوایلر دو رقم سمت راست $A = 7^{4001} \times 9$ را بیابید.

$$\varphi(100) = 40, (7, 100) = 1 \Rightarrow 7^{\varphi(100)} \equiv 1 \Rightarrow 7^{40} \equiv 1 \Rightarrow (7^{40})^{10} \times 7 \equiv 7 \Rightarrow 7^{401} \times 9 \equiv 7 \times 9$$

دو رقم سمت راست عدد A ، ۶۳ است. $\Rightarrow 7^{401} \times 9 \equiv 63$

۱۵. اگر p و q اعداد اول و متمایز باشند، به طوری که $(p-1)|(q-1)$ ، ثابت کنید:

$$(a, pq) = 1 \Rightarrow a^{q-1} \equiv 1$$

$$((a, pq) = 1 \Rightarrow (a, p) = (a, q) = 1) \quad \text{حل:}$$

$$(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \quad (1)$$

$$(a, q) = 1 \Rightarrow a^{q-1} \equiv 1 \quad (2)$$

$$(p-1)|(q-1) \Rightarrow (q-1) = (p-1) \times k$$

$$(1) \Rightarrow a^{q-1} = (a^{p-1})^k \equiv 1^k \Rightarrow a^{q-1} \equiv 1 \quad (3)$$

$$(2), (3) \xrightarrow{(p,q)=1} a^{q-1} \equiv 1$$

$$17 \equiv 5, 13 \equiv 1 \Rightarrow x \equiv 5 \times 1^4 = 5, y = \frac{17-13x}{12}$$

$$\Rightarrow y = \frac{17-65}{12} \Rightarrow y = \frac{-48}{12} = -4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases}, d = (a, b) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 12k \\ y = -4 - 13k \end{cases}$$

۹. جواب‌های عمومی معادله‌ی هم‌نهشتی $x^7 + x^6 + 5x \equiv 19$ را بیابید.

کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۷ عبارت‌اند از: [۰] و [۱] و ... و [۶]. و چون این کلاس‌های هم‌ارزی یک افراز برای Z هستند، لذا جواب معادله‌ی هم‌نهشتی فوق، یعنی x ، به یکی از این کلاس‌ها تعلق دارد. هم‌چنین، چون $x = 0$ در معادله صدق نمی‌کند، پس x در یکی از کلاس‌های هم‌ارزی [۱] تا [۶] است و همواره $(x, 7) = 1$.

$$(x, 7) = 1 \xrightarrow{\text{فرما}} x^6 \equiv 1, x^7 \equiv x$$

$$\Rightarrow x^7 + x^6 + 5x \equiv x + 1 + 5x \Rightarrow x + 1 + 5x \equiv 19, 19 \equiv -2$$

$$\Rightarrow 6x \equiv -3 \Rightarrow 6x \equiv -3 + 21 \Rightarrow 6x \equiv 18 \Rightarrow x \equiv 3$$

$$\Rightarrow x = 7k + 3$$

(توجه دارید که اگر $a \equiv b$ باشد، آن‌گاه $a \equiv b + mk$ که $k \in Z$ و از این نکته استفاده شد.)

۱۰. جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را بیابید.

$$x^{15} + 18x^4 + 9x^2 + 37x \equiv 17$$

چون $x = 0$ در معادله صدق نمی‌کند، مطابق آنچه در مسئله‌ی قبل بیان شد، باید: $(x, 5) = 1$.

$$(x, 5) = 1 \xrightarrow{\text{فرما}} x^4 \equiv 1, x^5 \equiv x$$

$$\Rightarrow 18x^4 \equiv 18 \equiv 3, (x^5)^3 \equiv x^3 \Rightarrow x^{15} \equiv x^3$$

$$9 \equiv -1 \Rightarrow 9x^2 \equiv -x^2, 37 \equiv 2, 17 \equiv 2$$

$$\Rightarrow x^{15} + 18x^4 + 9x^2 + 37x \equiv x^3 + 3 + (-x^2) + 2x \equiv 2$$

$$\Rightarrow 2x \equiv -1 \Rightarrow 2x \equiv -1 + 5 \Rightarrow 2x \equiv 4$$

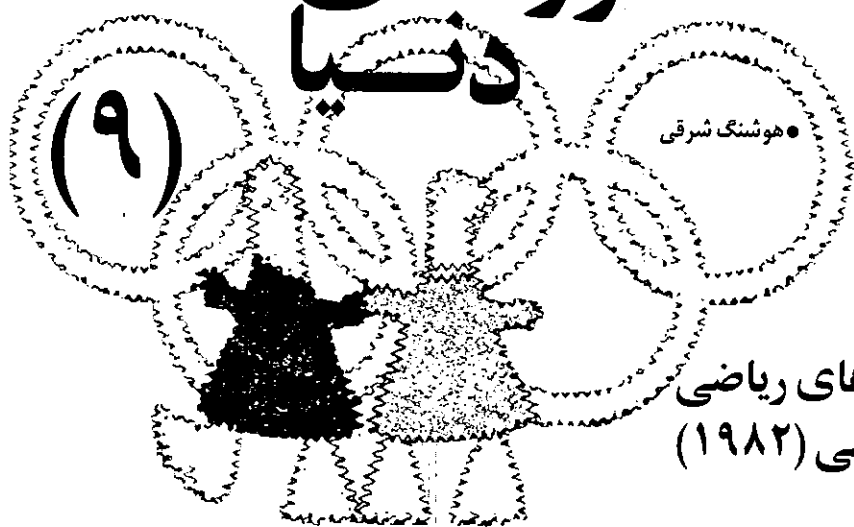
$$(2, 5) = 1 \xrightarrow{5} \Rightarrow x \equiv 2 \Rightarrow x = 5k + 2$$

۱۱. اگر a عددی صحیح و دل‌خواه باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم a^{100} را بر ۱۲۵ بیابید.

$$\varphi(125) = 100$$

۱. برای آشنایی با اثبات رابطه‌ی اوایلر و قضایای بیان شده، به جلد دوم، قسمت اول کتاب تئوری مقدماتی اعداد، نوشته‌ی مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب (انتشارات امیرکبیر) مراجعه فرمایید.

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای دنیا



چند مسئله از المپیادهای ریاضی آلمان غربی (۱۹۸۲)

اشاره

پیش از اتحاد دو آلمان و تشکیل کشور آلمان واحد در سال ۱۹۹۰، دو کشور آلمان غربی و آلمان شرقی وجود داشتند و مسابقات ریاضی در هر دو کشور، با دو سبک جداگانه برگزار می‌شد. می‌توان گفت، سطح سؤالات در کشور آلمان شرقی مانند اکثر کشورهای بلوک شرق آن زمان (یعنی کشورهای متحد شوروی سابق هم‌چون رومانی، لهستان، مجارستان و چک و اسلواکی) بسیار قوی‌تر از سطح مسائل مسابقه‌های آلمان غربی بود و نتایج تیم‌های کشور آلمان شرقی نیز در المپیادهای بین‌المللی از آلمان غربی بهتر بود. در این جا کوشیده‌ایم، تعدادی از مسائل خوب المپیاد ریاضی آلمان غربی را بیاوریم. این مسائل همگی در زمینه‌ی تئوری اعداد (ریاضیات گسسته) هستند و از سطح قابل قبولی نیز برخوردارند.

مسائل

۱. مجموعه‌ای از اعداد را یک مجموعه‌ی «بدون جمع» می‌نامیم، هرگاه مجموع هیچ دو تای آن‌ها (یکسان یا متمایز) مساوی یکی از آن‌ها نباشد (هیچ عضو مجموعه، مساوی مجموع دو عضو دیگر نباشد).
بیشترین تعداد عضوهای یک زیرمجموعه‌ی بدون جمع A از

مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 2n+1\}$ چیست؟

۲. مجموع بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه‌های فرد اعداد

$1, 2, 3, \dots, 2^n$ را بر حسب n به دست آورید.

۳. اگر n عددی طبیعی و $1 + 2^n + 4^n = p$ عددی اول باشد،

ثابت کنید که n باید توانی از ۳ باشد.

حل مسائل

۱. اگر بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی A ، عدد طبیعی و فرد

$2k+1$ باشد، A زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی

$\{1, 2, 3, \dots, 2k+1\}$ است. نخستین $2k$ عضو این مجموعه را

می‌توان به k جفت زیر با مجموع $2k+1$ ، تفکیک کرد.

$(1, 2k), (2, 2k-1), (3, 2k-2), \dots, (k, k+1)$

برای آن که A بدون جمع باشد، باید از هیچ‌یک از جفت‌های بالا

بیش از یک عضو در A نباشد (زیرا در غیر این صورت مجموع آن

دو عضو مساوی $2k+1$ خواهد شد که عضو A است). پس

ماکزیمم تعداد اعضای A از $k+1$ تجاوز نمی‌کند (از هر جفت یک

عضو به اضافه‌ی $2k+1$). چون k بزرگ‌تر از n نیست، پس A

بیشتر از $n+1$ عضو ندارد. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم

بزرگ‌ترین عضو A ، عدد زوج $2k$ باشد، از آن‌جا نتیجه می‌شود

که A زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 2k\}$ است. در نتیجه، چون $k + k = 2k$ ، k نمی‌تواند عضو A باشد و $2k - 2$ عدد صحیح $\{1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, 2k-1\}$ را می‌توان به $k-1$ جفت زیر با مجموع $2k$ تبدیل کرد:

$$(1, 2k-1), (2, 2k-2), \dots, (k-1, k+1)$$

در نتیجه، ماکزیمم تعداد اعضای A از $k-1+1=k$ تجاوز نمی‌کند و این نیز بزرگ‌تر از n نیست. بنابراین در هر دو حالت، تعداد اعضای A از $n+1$ تجاوز نمی‌کند. اما به سادگی می‌توان دید که یک زیر مجموعه‌ی بدون جمع با تعداد $n+1$ عضو وجود دارد: الف) عددهای صحیح فرد $\{1, 3, 5, \dots, 2n+1\}$ را در نظر می‌گیریم. مجموع هر دو عضو این مجموعه عددی زوج است. لذا این مجموعه یک مجموعه‌ی بدون جمع است.

ب) $n+1$ عدد طبیعی متوالی $\{n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$ را در نظر می‌گیریم. مجموع هر دو عضو متمایز یا یکسان از این مجموعه، از $2n+1$ (بزرگ‌ترین عضو آن) بیشتر است. بنابراین، مجموع هیچ دو عضو این مجموعه مساوی عضو دیگری از آن نیست و لذا یک مجموعه‌ی بدون جمع است. بنابراین نتیجه می‌شود که ماکزیمم تعداد اعضای A دقیقاً مساوی $n+1$ است.

۲. ملاحظه می‌شود که چون 2^n عددی زوج و شامل فقط عوامل ۲ است، پس بزرگ‌ترین مقسوم علیه فرد آن، عدد ۱ است. در نتیجه، S برابر است با ۱ به اضافه‌ی مجموع بزرگ‌ترین مقسوم علیه‌های فرد عددهای ۱ و ۲ و ۳ و ... و 2^n .

اکنون توجه می‌کنیم که اگر بزرگ‌ترین مقسوم علیه فرد عدد طبیعی k ، عدد $2^i - 1$ باشد، آن‌گاه $k = (2^i - 1)2^j$ (اگر k عددی فرد باشد، $t=0$ و اگر k زوج باشد، تمام عوامل ۲ آن را جدا می‌کنیم و k به صورت حاصل ضرب توانی از ۲ در عددی فرد خواهد شد).

$$\text{پس باید مجموعه‌ی به صورت } S = 1 + \sum_{k=1}^{2^n-1} (2^i - 1) \text{ را به دست}$$

آوریم. یک ایده‌ی هوش‌مندانه برای تعیین این مجموع آن است که ببینیم: «تا چند جمله از دنباله‌ی زیر را می‌توان نوشت تا اندازه‌ی آن‌ها از $2^n - 1$ تجاوز نکند؟»

$$1 \times 2^1 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^1 + \dots + (2i-1)2^1$$

بدیهی است که t نمی‌تواند به بزرگی n باشد و برای هر $n-1$ و ... و ۱ و ۰ داریم:

$$(2i-1)2^1 \leq 2^n - 1 \Rightarrow 2i-1 \leq 2^{n-1} - \frac{1}{2^1}$$

$$\Rightarrow 2i-1 \leq 2^{n-1} - 1$$

در نتیجه، مجموع بزرگ‌ترین مقسوم علیه‌های فرد مضرب 2^1 برابر است با:

$$S_1 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2^{n-1} - 1) \\ = 1 + 3 + 5 + \dots + (2(2^{n-1-1}) - 1)$$

اما می‌دانیم که مجموع عددهای فرد ۱ و ۲ و ۳ و ... و $(2n-1)$ مساوی n^2 است (به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی و یا مجموع جملات تصاعد حسابی). بنابراین:

$$S_1 = (2^{n-1-1})^2 = 2^{n-1-1}$$

(توجه می‌کنیم که مضرب‌های زوج 2^1 نیز به مضرب‌های فرد آن‌ها تبدیل می‌شوند. به عنوان مثال: $6 \times 2^1 = 3 \times 2^{1+1}$) به این ترتیب، مجموع مورد نظر به دست می‌آید:

$$S = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} S_i = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} = 1 + (2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^0) \\ = 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \frac{2^n + 1}{2}$$

۳. اگر n عدد طبیعی باشد و تمام عوامل ۳ آن را جدا کنیم، نتیجه می‌شود که: $n = 3^k t$ و $k \geq 0$ و $t \geq 1$ و در نتیجه عددی طبیعی چون S داریم که: $t = 3s + r$ و $r = 1$ یا 2 . بنابراین: $P = 2^{(3^k t)} - 2^{(3^k)} + 1 = (2^{(3^k)})^{2t} + (2^{(3^k)})^t + 1$ پس ثابت می‌کنیم که عبارت فوق بر عبارت $F = (2^{(3^k)})^2 + (2^{(3^k)}) + 1$ بخش پذیر است و با پذیرش این موضوع، به راحتی نتیجه می‌شود که چون P عددی اول است و $F > 1$ ، لذا برابری فوق ممکن نیست، مگر این که P برابر F باشد. یعنی:

$$P = (2^{(3^k)})^{2t} + (2^{(3^k)})^t + 1 = F = (2^{(3^k)})^2 + (2^{(3^k)}) + 1$$

و بنابراین: $t=1$ و $2t=2$ و در نتیجه: $t=3^k$ و $n = 3^k$ و حکم ثابت می‌شود. تنها چیزی که باقی می‌ماند، اثبات این است که عبارت $Z = (2^{(3^k)})^{2t} + (2^{(3^k)})^t + 1$ بر عبارت $F = (2^{(3^k)})^2 + (2^{(3^k)}) + 1$ بخش پذیر است و $t = 3s + r$ و $r = 1$ یا 2 . با فرض $x = 2^{(3^k)}$ و در حالت $r=1$ خواهیم داشت:

$$Z = x^{2t} + x^t + 1 = x^{6s+2} + x^{3s+1} + 1 \Rightarrow \\ (x-1)Z = x^{6s+2} + x^{3s+2} + x - x^{6s+2} - x^{3s+1} - 1 \\ = (x^{6s+2} - 1) - (x^{3s+2} - x^{3s+1}) - (x^{3s+1} - x) \\ = [(x^2)^{3s+1} - 1] - x^{3s+2}[(x^2)^s - 1] - x[(x^2)^s - 1]$$

عبارت داخل هر کروشه شامل یک عامل به فرم $(x^2)^m - 1$ است و برای هر عدد طبیعی m داریم:

$$(x^2)^m - 1 = (x^2 - 1)[(x^2)^{m-1} + (x^2)^{m-2} + \dots + x^2 + 1]$$

و در نتیجه، $(x^2 - 1)$ عاملی از $(x-1)Z$ است و چون Z عاملی از $x^2 + x + 1$ ، بنابراین $x^2 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ است و اثبات تمام می‌شود.

رویکرد هندسی - رویکرد جبری در آموزش هندسه

$$MA^2 = \left(-\frac{a}{2} - x\right)^2 + (-y)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - a^2}$$

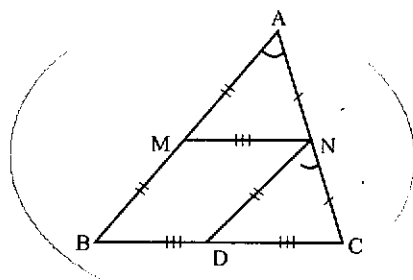
(قسمت ۲)

محمد هاشم رستنی

اشاره

در شماره‌ی قبل راجع به رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه بحث شد و مسائلی با هر دو رویکرد حل شد. اینک در پی به مثال‌های دیگری از حل یک مسئله با دو رویکرد هندسی و جبری توجه کنید.

مثال ۱. ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، با ضلع سوم مثلث موازی و مساوی نصف آن ضلع است.



اثبات

الف) روش هندسی: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و وسط ضلع‌های AB و AC را به ترتیب M و N می‌گیریم. می‌خواهیم

ثابت کنیم که MN موازی BC است و: $MN = \frac{1}{2} BC$

می‌دانیم که: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1$. پس بنابر عکس قضیه‌ی

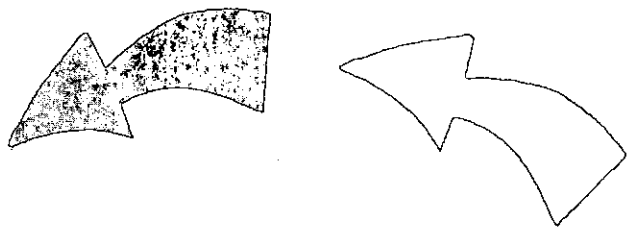
تالس، MN موازی ضلع BC است. برای این که ثابت کنیم:

$MN = \frac{1}{2} BC$ ، از نقطه‌ی N خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم

تا ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند. چهارضلعی MNDB

متوازی الاضلاع است، زیرا ضلع‌هایش دوجه دو موازی‌اند؛ پس:

ND = MB. اما MA = MB (نقطه‌ی M وسط ضلع AB



$$m/MN = \frac{\frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{2}}{\frac{c_1}{2} - \frac{b_1}{2}} = \frac{0}{c_1 - b_1} = 0 = m/BC$$

پس MN موازی ضلع BC است.
از طرف دیگر داریم:

$$BC = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (0 - 0)^2} = |c_1 - b_1|$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{c_1}{2} - \frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{c_1 - b_1}{2}\right)^2} = \left|\frac{c_1 - b_1}{2}\right| = \frac{|c_1 - b_1|}{2}$$

$$MN = \frac{1}{2}|c_1 - b_1| \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC$$

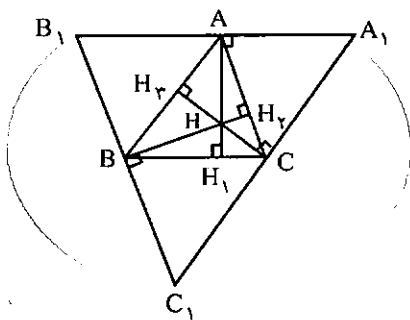
پس حکم مسئله ثابت شد.

نکته: به طوری که دیده می شود، راه حل جبری برای این مسئله، ساده تر از راه حل هندسی است.

مثال ۲. ثابت کنید که سه ارتفاع هر مثلث هم‌رس اند.

اثبات

الف) روش هندسی: مثلث ABC را در نظر می گیریم و ارتفاع های AH_1 ، BH_2 و CH_3 را رسم می کنیم (شکل زیر). می خواهیم ثابت کنیم که این سه ارتفاع هم‌رس اند.



ارتفاع های مثلث ویژگی خاصی ندارند و مانند نیمسازهای زاویه های مثلث و یا عمود منصف ضلع های مثلث، مکان هندسی نیستند. پس به نظر می رسد که برای اثبات این قضیه باید تغییری در شکل مسئله ایجاد کنیم تا ارتفاع های AH_1 ، BH_2 و CH_3 به یکی از مکان های هندسی قبلی، مثلاً ارتفاعات یک مثلث و یا نیمسازهای زاویه های یک مثلث و یا عمود منصف های ضلع های یک مثلث تبدیل شوند. به این منظور، از رأس های A، B و C به ترتیب خط هایی موازی ضلع های BC، AC و AB از مثلث ABC رسم می کنیم تا مثلث $A_1B_1C_1$ حاصل شود. چهار ضلعی $ABCA_1$ متوازی الاضلاع است ($AA_1 \parallel BC$ و $AB \parallel CA_1$)، پس:

$$AA_1 = BC \quad (1)$$

از طرف دیگر، چهار ضلعی $ACBB_1$ نیز متوازی الاضلاع است

است)، بنابراین: $ND = AM$. از طرفی، $AN = NC$ و $\hat{A} = \hat{DNC}$ ، لذا دو مثلث AMN و NDC به حالت برابری دو ضلع و زاویه ی بین، همنهشت هستند. ($AM = ND$ ، $AN = NC$ و $\hat{A} = \hat{DNC}$). در نتیجه: $MN = DC$. از طرف دیگر: $MN = DB$ ($MNDB$ متوازی الاضلاع است)، پس:

$$MN = DC = DB \quad \text{و در نتیجه: } MN = \frac{1}{2}BC$$

نکته: پس از آن که ثابت کردیم MN موازی BC است،

می توانیم برای اثبات این که: $MN = \frac{1}{2}BC$ ، از نتیجه ی ۲

صفحه ی ۷۴ کتاب هندسه ی (۱) استفاده کنیم. این نتیجه می گوید: اگر MN موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، داریم:

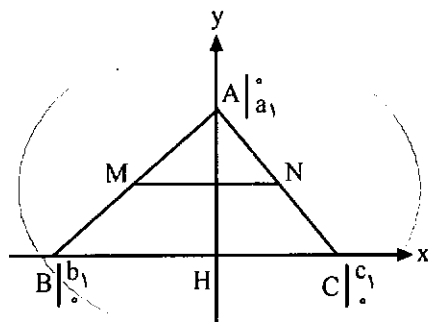
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

اما در این مسئله، چون M وسط ضلع AB و N وسط ضلع

AC است، پس: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$. و بنابراین: $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ یا:

$$MN = \frac{1}{2}BC$$

ب) راه جبری: ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم می کنیم. را مبدأ مختصات، محور x ها را روی BC و محور y ها را روی HA در نظر می گیریم (شکل زیر).



فرض می کنیم: $A = (0, a_1)$ ، $B = (b_1, 0)$ و $C = (c_1, 0)$. در این صورت، مختصات نقطه های M و N که به ترتیب وسط ضلع های AB و AC هستند، برابرند با:

$$M = \left(\frac{b_1}{2}, \frac{a_1}{2}\right) \quad \text{و} \quad N = \left(\frac{c_1}{2}, \frac{a_1}{2}\right)$$

از آن جا داریم:

$$\Rightarrow CH_1: y - 0 = \frac{b_1}{a_1}(x - c_1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{b_1}{a_1}x - \frac{b_1 c_1}{a_1} CH_1 \text{ معادله‌ی ارتفاع}$$

$$x = 0: AH_1 \text{ معادله‌ی ارتفاع}$$

$$\begin{cases} AH_1: x = 0 \\ BH_1: y = \frac{c_1}{a_1}x - \frac{b_1 c_1}{a_1} \\ CH_1: y = \frac{b_1}{a_1}x - \frac{b_1 c_1}{a_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} AH_1: x = 0 \\ BH_1: y = \frac{c_1}{a_1}x - \frac{b_1 c_1}{a_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H = (0, -\frac{b_1 c_1}{a_1}) \text{ مختصات نقطه‌ی برخورد } AH_1 \text{ و } BH_1$$

$$H = (0, -\frac{b_1 c_1}{a_1}) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی } CH_1} -\frac{b_1 c_1}{a_1} = \frac{-b_1}{a_1}(0) - \frac{-b_1 c_1}{a_1}$$

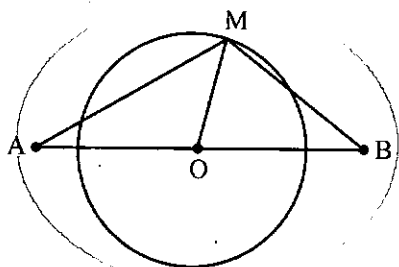
$$\Rightarrow -\frac{b_1 c_1}{a_1} = -\frac{b_1 c_1}{a_1}$$

پس مختصات نقطه‌ی H که محل برخورد دو ارتفاع AH_1 و BH_1 است، در معادله‌ی ارتفاع CH_1 صدق می‌کند. بنابراین، سه ارتفاع AH_1 ، BH_1 و CH_1 از یک نقطه می‌گذرند (هم‌رسانند).

مثال ۳. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه را تعیین کنید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه‌ی ثابت واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد.

اثبات

الف) روش هندسی: دو نقطه‌ی ثابت A و B واقع در یک صفحه را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مکان هندسی نقطه‌ی M از این صفحه را تعیین کنیم به قسمتی که: $MA^2 + MB^2 = K^2$ (مقدار ثابتی است).



از A به B وصل می‌کنیم و وسط پاره خط AB را O می‌نامیم و از

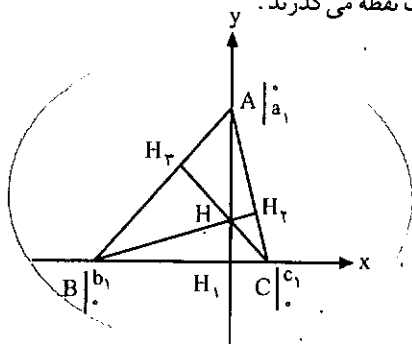
$(AB \parallel BC \text{ و } AB_1 \parallel BC)$. بنابراین:

$$AB_1 = BC \quad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که: $AB_1 = AA_1$ ؛ یعنی ارتفاع AH_1 از وسط A_1B_1 می‌گذرد. از طرفی، چون AH_1 عمود بر BC و A_1B_1 موازی BC است، پس AH_1 بر A_1B_1 عمود نیز هست. در نتیجه ارتفاع AH_1 ، عمود منصف ضلع A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ است. با همین روش ثابت می‌شود که BH_1 عمود منصف ضلع B_1C_1 و CH_1 عمود منصف ضلع A_1C_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ است.

اما می‌دانیم که سه عمود منصف ضلع‌های هر مثلث هم‌رسانند. در نتیجه، ارتفاع‌های AH_1 ، BH_1 و CH_1 از مثلث ABC که عمود منصف‌های ضلع‌های مثلث $A_1B_1C_1$ هستند، هم‌رسان خواهند بود. نقطه‌ی هم‌رسانی ارتفاع‌های هر مثلث را که در شکل H نامیده‌ایم، مرکز ارتفاعی مثلث می‌نامند. این نقطه ویژگی‌هایی دارد که در دایرةالمعارف هندسه به آن‌ها پرداخته‌ایم.

ب) راه حل جبری: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و ارتفاع‌های AH_1 ، BH_1 و CH_1 را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که این سه ارتفاع از یک نقطه می‌گذرند.



برای اثبات، نقطه‌ی H_1 را مبدأ مختصات، محور x ها را روی BC و محور y ها را روی AH_1 اختیار می‌کنیم (شکل بالا). فرض می‌کنیم: $A = (0, a_1)$ ، $B = (b_1, 0)$ و $C = (c_1, 0)$. برای این که ثابت کنیم سه ارتفاع AH_1 ، BH_1 و CH_1 هم‌رسانند، معادله‌ی این سه ارتفاع را می‌نویسیم. آن‌گاه نقطه‌ی برخورد دو ارتفاع از این سه ارتفاع را به دست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم که این نقطه‌ی برخورد روی ارتفاع سومی قرار دارد. داریم:

$$m_{AC} = \frac{0 - a_1}{c_1 - 0} = -\frac{a_1}{c_1} \Rightarrow m_{BH_1} = \frac{c_1}{a_1} \text{ و } B = (b_1, 0)$$

$$\Rightarrow y - 0 = \frac{c_1}{a_1}(x - b_1)$$

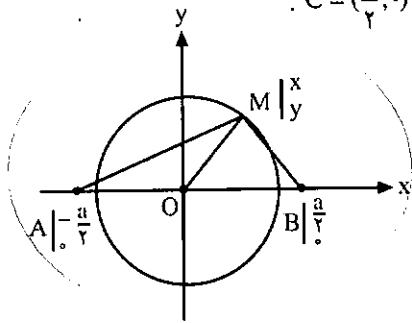
$$\Rightarrow y = \frac{c_1}{a_1}x - \frac{b_1 c_1}{a_1} BH_1 \text{ معادله‌ی ارتفاع}$$

$$m_{AB} = \frac{0 - a_1}{b_1 - 0} = -\frac{a_1}{b_1} \Rightarrow m_{CH_1} = \frac{b_1}{a_1} \text{ و } C = (c_1, 0)$$



عمود منصف پاره خط AB محور y ها و AB روی محور x ها باشد. در این صورت، با فرض $AB = a$ ، خواهیم داشت:

$$B = \left(-\frac{a}{2}, 0\right) \text{ و } C = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$



اکنون برای تعیین مکان هندسی نقطه ی M فرض می کنیم:
 $M = (x, y)$ ، بنابراین فرض مسئله داریم:

$$MA^2 + MB^2 = K^2$$

اما با توجه به این که: $A = \left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ ، $B = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$ و

$M = (x, y)$ داریم:

$$MA^2 = \left(-\frac{a}{2} - x\right)^2 + (0 - y)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2$$

$$MB^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + (0 - y)^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + y^2$$

از آن جا، از رابطه ی $MA^2 + MB^2 = K^2$ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + y^2 = K^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + x^2 + ax + 2y^2 + \frac{a^2}{4} + x^2 - ax = K^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = K^2 - \frac{a^2}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{2K^2 - a^2}{4} = \text{مقدار ثابت}$$

این معادله، معادله ی دایره ای به مرکز O، وسط پاره خط AB

به شعاع مقدار ثابت $\frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$ است. بنابراین، مکان هندسی

نقطه ی M دایره ای است که مرکزش نقطه ی ثابت O، وسط پاره خط

AB و شعاعش $R = \frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$ است.

سؤال: به نظر شما، کدام راه حل برای این مسئله ساده تر است:

راه حل هندسی یا راه حل جبری؟ نظر خود را با دلیل به نشانی مجله ی ریاضی برهان دبیرستان ارسال کنید.

ادامه دارد...

زیرنویس

M به O وصل می کنیم. بنابراین رابطه ی میانه ها در هر مثلث، در مثلث MAB داریم:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \quad (1)$$

اما بنا به فرض: $MA^2 + MB^2 = K^2$. پس از رابطه ی ۱ نتیجه می شود:

$$K^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \Rightarrow MO^2 = \frac{K^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{2K^2 - AB^2}{4}$$

$$AB = a \Rightarrow MO = \frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - AB^2}$$

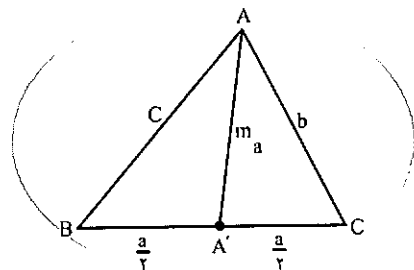
چون پاره خط $AB = a$ مقدار ثابتی است، پس MO نیز مقدار ثابتی است. اما نقطه ی ثابتی می باشد، بنابراین مکان هندسی

نقطه ی M دایره ای به مرکز O و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2}$ است.

سؤال: در چه صورت دایره ی مکان هندسی نقطه ی M، از دو نقطه ی A و B می گذرد؟ در چه صورت این دو نقطه درون دایره اند و در چه صورت بیرون دایره؟ پاسخ خود را به نشانی مجله ی برهان ارسال کنید.

نکته: برای اثبات این مسئله از قضیه ی زیر استفاده کرده ایم.

قضیه: مجموع مربعات دو ضلع هر مثلث، برابر است با دو برابر مربع طول میانه ی وارد بر ضلع سوم، به اضافه ی نصف مربع ضلع سوم. یعنی در مثلث ABC، اگر میانه ی AA' را رسم کنیم، داریم:



$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

یا:

اثبات این قضیه را می توانید در جلد پنجم دایره المعارف هندسه

پیمینید.

(ب) اثبات به روش جبری: دو نقطه ی ثابت A و B را در یک صفحه در نظر می گیریم. می خواهیم مکان هندسی نقطه ی M از این

صفحه را تعیین کنیم، به قسمی که: $MA^2 + MB^2 = K^2$.

برای اثبات، دستگاه مختصات xOy را چنان در نظر می گیریم که O وسط پاره خط AB مبدأ مختصات،

سرگرمی

به منظور فروش کردن زمین با موزاییک

● ترجمه و تنظیم: محمدعلی شیخان

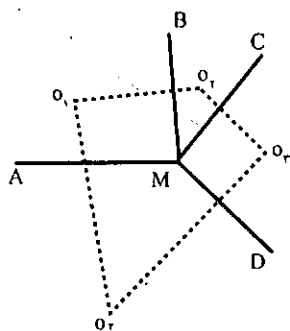
بند ۱. مقدمات

مسئله مربوط است به پوشاندن یک صفحه به وسیله ی چند ضلعی های منتظم محدب، بدون جای خالی و بدون آن که اضلاع دو چند ضلعی بر هم قرار گیرند یا سطحی از یکی روی دیگری بیفتد. در ارتباط با این موضوع می توان دو حالت را در نظر گرفت:

۱. جفت و جور کردن ها و پوشاندن صفحه با چند ضلعی های منتظم هم نوع؛
۲. جفت و جور کردن ها و پوشاندن صفحه با انواع متفاوت چند ضلعی های منتظم.

راه حل حالت اول به وسیله ی فیثاغوریان عنوان شده بود. بنا به روایت پروکلس^۱، فیثاغورث نشان داده است، با جفت و جور کردن شش مثلث متساوی الاضلاع، یا چهار مربع، یا سه ش ضلعی (منتظم)، دقیقاً می توان فضای اطراف یک نقطه را در صفحه پوشاند. این نظریه نزد فیثاغورث شامل شناخت بعضی از خواص

مراکز این چند ضلعی‌ها یعنی



(شکل ۱)

O_1 و O_2 و O_3 ... را به ترتیب متوالی به هم وصل می‌کنیم. چند ضلعی $O_1O_2O_3...$ به دست می‌آید که زوایای رأس‌های آن، دقیقاً زوایای مرکزی چند ضلعی‌های منتظم جفت و جور شده‌ها هستند.

بر حسب آن که این جفت و جور کردن‌ها سه به سه، چهار به چهار، پنج به پنج یا شش به شش صورت گرفته باشد، چند ضلعی $O_1O_2O_3...$ ، مثلث، چهار ضلعی، پنج ضلعی و یا یک شش ضلعی خواهد شد. و مجموع زوایای مرکزی O_1 و O_2 و O_3 ... به حسب حالت ۲، ۴، ۶، و یا ۸ قائمه می‌شود.

بند ۲. جفت و جور کردن‌ها با چند ضلعی‌های منتظم هم‌نوع

اگر n تعداد اضلاع یکی از این چند ضلعی‌ها باشد، بدیهی است زاویه‌ی مرکزی ارزش $\frac{4}{n}$ قائمه را دارد. پس از آن چه در بند ۱ گفته شد، خواهیم داشت:

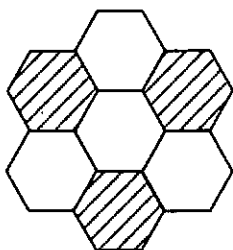
$$\text{برای پوشش سه تایی } 3 \times \frac{4}{n} = 2 \text{ از آن جا } n = 6$$

$$\text{برای پوشش چهار تایی } 4 \times \frac{4}{n} = 4 \text{ از آن جا } n = 4$$

$$\text{برای پوشش شش تایی } 6 \times \frac{4}{n} = 8 \text{ از آن جا } n = 3$$

کاربرد این رابطه برای وقتی که پوشش پنج تایی باشد، مقداری به صورت کسر برای n نتیجه می‌دهد. لذا در این حالت جوابی وجود ندارد.

به طور خلاصه ممکن است، فرش کردن زمین یا پوشش صفحه با چند ضلعی‌های منتظم هم‌نوع، فقط با شش مثلث متساوی‌الاضلاع، چهار مربع و یا سه شش ضلعی منتظم صورت گیرد. اشکال ۲ و ۳ و ۴ را ببینید.



(شکل ۲)

چند ضلعی‌های منتظم بود. حتی بنا به روایت دیگری از یک مؤلف یونانی به نام لوسین^۱ (قرن دوم)، و یک شارح و مفسر کتب قدیم به نام آریستوفان^۲، پنج ضلعی منتظم ستاره‌ای، نشانه‌ی همبستگی فیثاغوریان تلقی می‌شد. چون تعیین ضلع این چند ضلعی، به تقسیم شعاع دایره به نسبت ذات وسط و طرفین مربوط می‌شد، این تقسیم را (قدما) «تقسیم طلایی» می‌نامیدند. از آن نتیجه گرفته‌اند که فیثاغوریان باید مسئله‌ی اخیر را حل کرده باشند (موضوع تقسیم طلایی شعاع دایره را آخر این مقاله می‌توانید مطالعه کنید).

برای مطالعه‌ی حالت دوم، در اثری به جا مانده و جاوید از کپلر^۳ به نام دنیای متوازن و هم‌آهنگ (۱۶۱۹) آشکالی طراحی شده که در این مقاله به اغلب آن‌ها برخورد می‌کنید. مسئله در این حالت به وسیله‌ی م. بادورو^۴ (۱۸۸۱) بررسی و حل شد، با فرض آن که جفت و جور کردن‌ها متساوی‌الساقین باشند و متساوی‌الساقین بودن هم به این معنی است که: زوایای چند ضلعی‌های منتظمی که با آن‌ها صفحه را پوشش می‌دهیم، در همه‌ی نقاطی که رأس‌های مشترک دارند، یکسان باشند و در حالی که در وضع معینی یک چند ضلعی را با برگرداندن روی چند ضلعی مساوی دلخواهی قرار می‌دهیم، بتوان انطباق معکوس همه‌ی چند ضلعی‌های مجموعه را به دست آورد. در مورد جفت و جور کردن‌های غیر متساوی‌الساقین به شیوه‌ی منتظم، در این مقاله بحثی مطرح نشده است.

تعداد کثیر الاضلاع‌های منتظم حول یک نقطه

حول یک نقطه بیش از شش چند ضلعی منتظم محدب نمی‌توان قرار داد. زیرا کوچک‌ترین زاویه‌ای که بتوان برای این جفت و جور کردن‌ها انتخاب کرد، زاویه‌ی ۶۰ درجه $(\frac{2}{3} \text{ قائمه})$ است که به مثلث متساوی‌الاضلاع تعلق دارد. چون مجموع زوایای حول یک نقطه، مساوی چهار قائمه یا ۳۶۰ درجه است، لذا ملاحظه می‌شود که بیش از شش مثلث متساوی‌الاضلاع نمی‌توان حول نقطه‌ای چید. بدیهی است، نمی‌توان کمتر از سه چند ضلعی منتظم محدب حول نقطه جای‌گزین کرد. زیرا می‌دانیم، مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی محدب، مساوی $(2n - 4)$ قائمه است. در صورتی که n ضلعی منتظم باشد، هریک از زوایای رأس $\frac{(n-2)180}{n}$ درجه خواهد بود و برای شش ضلعی منتظم، این مقدار ۱۲۰ درجه است. پس طبعاً پوشاندن صفحه حول هر نقطه با چند ضلعی‌های منتظم باید: سه به سه، چهار به چهار، پنج به پنج و یا شش به شش صورت پذیرد.

مجموع زوایای مرکزی

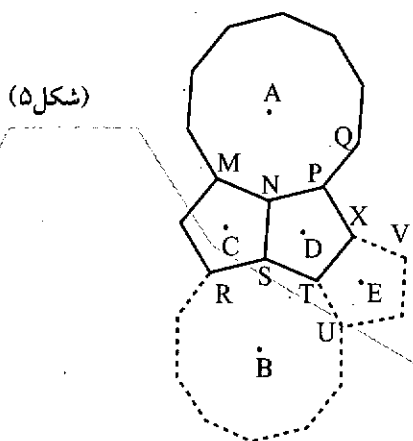
اگر O_1 و O_2 و O_3 ... مراکز چند ضلعی‌های منتظم جمع شده حول نقطه‌ی M باشند (شکل ۱)؛ اضلاع MA ، MB و MC ... مشترک بین هر دو چند ضلعی مجاور، لزوماً مساوی‌اند.

$$i=1,2,\dots,6 \text{ و } (4) \sum_{i=1}^6 \frac{1}{n_i} = 2 \text{ یا } \sum_{i=1}^6 \frac{4}{n_i} = 8$$

از این رابطه نیز فقط جواب زیر را داریم:

۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳

جواب های قابل قبول مسئله: جواب های «د»، «ز»، «ص» از نوع چند ضلعی های منتظم هم نوع هستند و در بند ۲ در نظر گرفته شده اند. ولی باید جواب های «الف»، «ب»، «پ»، «ت»، «ج»، «خ» را که در مورد این مسئله، یعنی پوشش دادن صفحه قابل قبول نیستند، کنار بگذاریم. چه برای مثال، اگر جواب «خ» یعنی ۱۰ و ۵ و ۵ را در نظر بگیریم، می توان حول نقطه ی N (شکل ۵)



یک ده ضلعی منتظم A و دو پنج ضلعی منتظم C و D را قرار داد، ولی این ترتیب چیدن نمی تواند برای پوشش صفحه تداوم داشته باشد. زیرا زاویه ی $\hat{RST}$ مساوی $144^\circ = 180^\circ - 2 \times 108^\circ = 36^\circ$ است و فقط می توان یک ده ضلعی B در S قرار داد. در نتیجه، چون $\hat{UTX} = 108^\circ$ درجه است، نمی توان در نقطه ی T جز یک پنج ضلعی منتظم E قرار داد. بعد از این، دیگر ممکن نیست پوشش را ادامه داد، چه زاویه ی $\hat{VXP} = 144^\circ$ درجه می شود. اگر در نقطه ی X یک پنج ضلعی قرار دهیم، چون زاویه ی $\hat{XPQ} = 108^\circ$ درجه است، این پنج ضلعی قسمتی از ده ضلعی A را می پوشاند و روی آن قرار می گیرد (شکل ۵). به طریق مشابه ثابت می شود، سایر جواب های اشاره شده ی اخیر قابل قبول نیستند.

خلاصه فقط جواب های زیر باقی می ماند:

(شکل ۶) ۱۲ و ۱۲ و ۳ (الف)

(شکل ۷) ۱۲ و ۶ و ۴ (ب)

(شکل ۸) ۸ و ۸ و ۴ (پ)

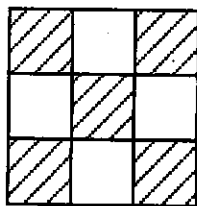
(شکل ۹) ۶ و ۶ و ۳ و ۳ (ت)

(شکل ۱۰) ۶ و ۴ و ۴ و ۳ (ث)

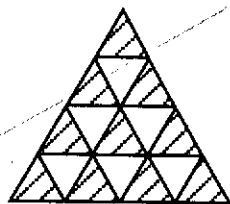
(شکل ۱۱) ۴ و ۴ و ۳ و ۳ و ۳ (ج)

(شکل ۱۲) ۱۲ و ۴ و ۳ و ۳ (چ)

(شکل ۱۳) ۶ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ (ح)



(شکل ۴)



(شکل ۳)

بند ۳. جفت وجور کردن ها با انواع متفاوت چند ضلعی منتظم

فرض می کنیم n_1 و n_2 و n_3 و ... ($n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots$) تعداد اضلاع هر یک از چند ضلعی های مجموعه باشند.

اولاً: جفت وجور کردن ها سه به سه است. آن گاه زوایای O_1 و O_2 و O_3 (زوایای مرکزی) شکل ۱، نظیر هر چند ضلعی، به ترتیب ارزش $\frac{4}{n_1}$ و $\frac{4}{n_2}$ و $\frac{4}{n_3}$ قائمه را دارند و باید داشته باشیم (طبق بند ۱):

$$(1) \quad \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{4}{n_1} + \frac{4}{n_2} + \frac{4}{n_3} = 2$$

با توجه به این که $3 \leq n_1 \leq 6$ است (بند ۱) متوالیاً n_1 را مساوی ۳ و ۴ و ۵ و ۶ انتخاب می کنیم. جواب های زیر را برای سایر n ها خواهیم داشت:

- | | |
|-----------------|---------------|
| الف) ۳ و ۷ و ۴۲ | ج) ۴ و ۵ و ۲۰ |
| ب) ۳ و ۸ و ۲۴ | چ) ۴ و ۶ و ۱۲ |
| پ) ۳ و ۹ و ۱۸ | ح) ۴ و ۸ و ۸ |
| ت) ۳ و ۱۰ و ۱۵ | خ) ۵ و ۵ و ۱۰ |
| ث) ۳ و ۱۲ و ۱۲ | د) ۶ و ۶ و ۶ |

ثانیاً: پوشش یا جفت وجور کردن ها چهار به چهار است. این جا نیز داریم (با توجه به بند ۱):

$$(2) \quad \frac{4}{n_1} + \frac{4}{n_2} + \frac{4}{n_3} + \frac{4}{n_4} = 4 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

که فقط جواب های زیر را خواهیم داشت:

- | | |
|-------------------|------------------|
| ذ) ۳ و ۳ و ۴ و ۱۲ | ز) ۳ و ۴ و ۴ و ۶ |
| ر) ۳ و ۳ و ۶ و ۶ | ژ) ۴ و ۴ و ۴ و ۴ |

ثالثاً: پوشش پنج به پنج است. طبق بند ۱ باید داشته باشیم:

$$(3) \quad \frac{4}{n_1} + \frac{4}{n_2} + \frac{4}{n_3} + \frac{4}{n_4} + \frac{4}{n_5} = 5 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{4}$$

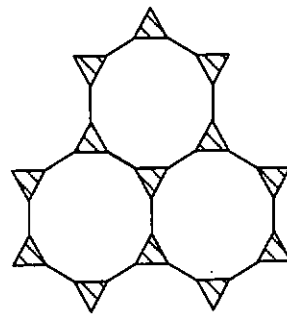
این رابطه فقط در ازای مقادیر زیر برقرار است:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| س) ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۶ | ش) ۳ و ۳ و ۳ و ۴ و ۴ |
|----------------------|----------------------|

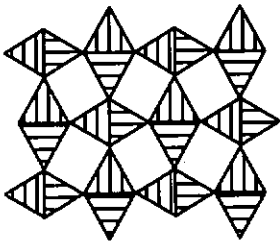
رابعاً پوشش حول نقطه ی شش تایی صورت می گیرد (بند ۱).

خواهیم داشت:

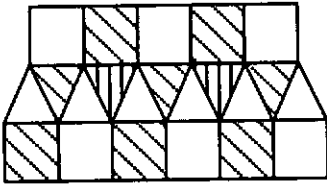
(الف)
(شکل ۶)



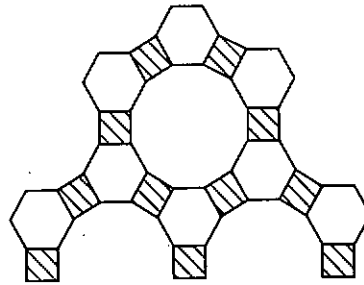
(ج)
(شکل ۱۱-۱)



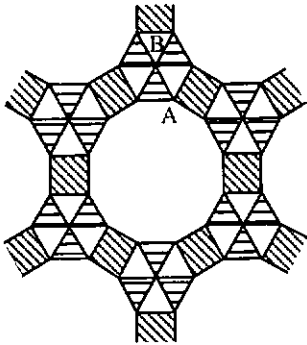
(ج)
(شکل ۱۱-۲)



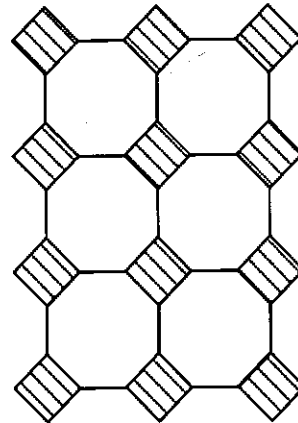
(ب)
(شکل ۷)



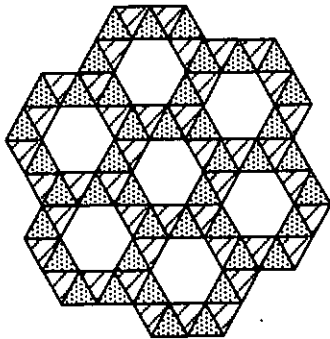
(ج)
(شکل ۱۲)



(ب)
(شکل ۸)



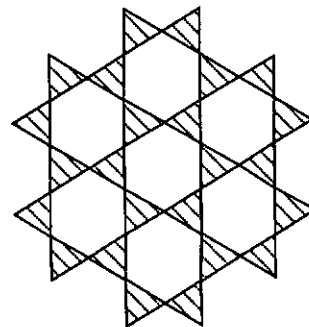
(ج)
(شکل ۱۳)



پوشش های متساوی الساقین

بین این هشت نوع پوشش، فقط شش نوع اول متساوی الساقین اند. برای بررسی شرط انطباق جمعی معکوس هم می توان از یک ترانسپارآن که روی آن یکی از این پوشش ها طراحی شده اند، استفاده کرد. بعد از انطباق معکوس یک چند ضلعی طرح اولیه بر یک چند ضلعی دلخواه ترانسپاران، ملاحظه خواهد شد که بادوران یا تغییر مکان مناسب ترانسپاران در تمام انطباق های ممکن دو چند ضلعی مساوی، دست کم حالتی پیدا خواهد شد که انطباق کامل برای همه ی مجموعه های نامتناهی طراحی شده، فراهم آید.

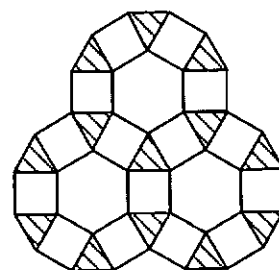
(ت)
(شکل ۹)

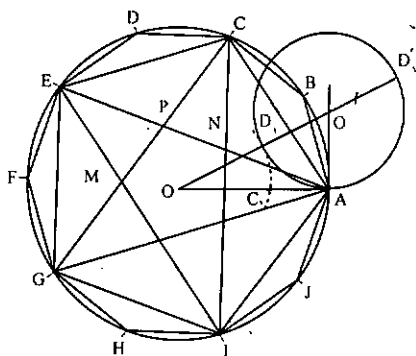


پوشش های غیر متساوی الساقین

جواب های «ج» و «ح» با توجه به شرح و تفصیل گذشته، متساوی الساقین نیستند. برای مجموعه ی «ح» (شکل ۱۳) با استفاده از زوش ترانسپاران مذکور بالا، تشخیص ممکن است. در مورد پوشش «ج» (شکل ۱۲) یک بررسی ساده در شکل نشان می دهد،

(ث)
(شکل ۱۰)



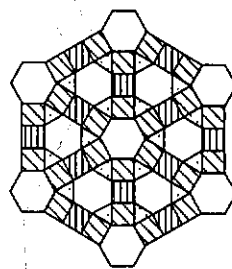


زوایای حول رأس های A و B چند ضلعی ها که به منظور پوشش به کار رفته اند، یکسان نیستند؛ چون حول رأس A دو مثلث متساوی الاضلاع، یک مربع و یک دوازده ضلعی منتظم قرار گرفته اند و حال آن که حول نقطه ی B شش مثلث متساوی الاضلاع. در حقیقت مجموعه ی «ج» طرح دیگری از مجموعه ی «ب» (شکل ۷) است. ولی می توان تعداد بسیار زیادی پوشش های غیر متساوی الساقین به دست آورد:

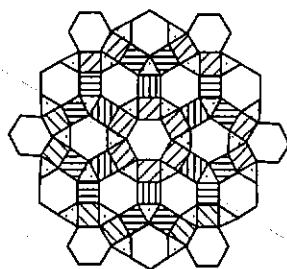
الف) خواه به وسیله ی چیدن عناصر مجموعه های متساوی الساقین به طریق دیگر؛

ب) خواه به وسیله ی ترکیب مجموعه ها از انواع متفاوت چند ضلعی.

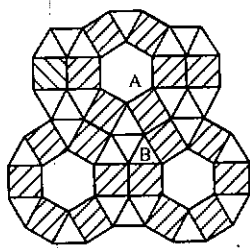
برای مثال اولاً: اشکال ۱۴ و ۱۵ دو پوشش غیر متساوی الساقین را نشان می دهند که می توان با طور دیگر قرار دادن عناصر مجموعه ی «ث» آن ها را به دست آورد. هر رأس شامل یک مثلث متساوی الاضلاع، دو مربع و یک شش ضلعی است. ولی ترتیب قرار گرفتن آن ها در همه ی رأس ها یک جور نیست و استقرار مجموعه بر خودش، با روشی که بیشتر اشاره شد، غیر ممکن است. ثانیاً: اشکال ۱۶ و ۱۷ نیز نمونه های دیگری از دو ترکیب نوع مجموعه های (۶ و ۴ و ۳ و ۲) «ث» و (۴ و ۳ و ۳ و ۳) «ج» را نشان می دهند. در رأس های A عناصر مجموعه ی اولیه قرار داده شده است و در رأس های B عناصر نوع دوم.



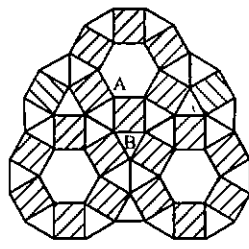
(شکل ۱۴)



(شکل ۱۵)



(شکل ۱۶)



(شکل ۱۷)

تقسیم طلایی

اگر پاره خطی را به دو جزء نامساوی چنان تقسیم کنیم که مربع جزء بزرگ تر، مساوی جزء کوچک تر در طول تمام پاره خط باشد، می گویند این پاره خط بر نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است. همان طور که اشاره شد، پیشینیان آن را تقسیم طلایی می گفتند.

در دایره ی شکل بالا به مرکز O، این تقسیم برای $OA=R$ صورت گرفته است. به این ترتیب که در A عمودی به اندازه ی

$$AO' = \frac{OA}{2}$$

شعاع $O'A$ می کشیم. خط راست OO' این دایره را در D_1 و D'_1

قطع می کند. داریم: (۱) $OA^2 = OD_1 \cdot OD'_1$ اما

$$OD'_1 = OD_1 + D_1D'_1 = OD_1 + OA$$

OD_1 روی OA مشخص کنیم، از رابطه ی (۱) نتیجه می شود:

$$OC_1^2 = OA \cdot C_1A$$

(یا $\frac{OC_1}{OA} = \frac{C_1A}{OC_1}$) که همان تقسیم طلایی است. اما با

تبدیلات مناسب در رابطه ی (۱)، با توجه به تساوی های ذکر شده ی

$$\text{بعد، مقدار } OD_1 = OC_1 = \frac{R}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1) \text{ را خواهید یافت}$$

(محاسبه کنید). پس $OC_1 = C_1A$. یعنی ضلع ده ضلعی منتظم محاط

در دایره ی O. بقیه ی رسم شکل به سهولت میسر است. در شکل،

یک ده ضلعی منتظم محدب، یک پنج ضلعی منتظم محدب و یک

پنج ضلعی ستاره ای رسم شده اند. حال شما دو سؤال زیر را بررسی

کنید:

۱. اضلاع پنج ضلعی منتظم ستاره ای یکدیگر را بر نسبت طلایی

تقسیم می کنند. ۲. نسبت ضلع پنج ضلعی محدب منتظم به قطرش،

نسبت طلایی است.

زیرنویس

1. Proclus.

2. Lucien

3. Aristophane

4. Kepler

5. M. Badoureau

۶. Transparent نوعی پرده ی نقاشی است که پشت به روشنائی قرار می دهند تا

تصاویر آن معلوم شود. نور گذر یا طلق شفاف.

منبع

Curiosités Géométriques/ E. Fourrey/ LIBRAIRIE VUIBERT-Paris

اشاره

در شماره‌های قبل راجع به درستی، شهودی، استدلال‌های استقرایی و قیاسی و محدودیت‌های آن‌ها، استدلال استنتاجی و مثال نقض صحبت کردیم. اینک در ادامه‌ی آن، استدلال‌های دیگر ریاضی را مطرح می‌کنیم.

استدلال ریاضی‌های

(قسمت ۳)

• میرشهرام صدر

mir_sadr@yahoo.com

برای دانش‌آموزان سال سوم

قضیه‌ی شرطی

هر قضیه که به صورت ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ (اگر p آن‌گاه q) باشد و با توجه به درستی p بتوان درستی q را نتیجه گرفت، قضیه‌ای شرطی است. در قضیه‌ی شرطی $p, p \Rightarrow q$ را فرض و q را حکم قضیه می‌نامیم.

مثال: ثابت کنید اگر $x > 2$ ، آن‌گاه $2x - 3 > 1$.

حل:

فرض: $x > 2$

حکم: $2x - 3 > 1$

برای اثبات این مطلب، باید با توجه به درستی فرض، به درستی

حکم رسید.

$$x > 2 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow 2x - 3 > 4 - 3 \Rightarrow 2x - 3 > 1$$

مثال: ثابت کنید اگر $x > 1$ ، آن‌گاه $4 - x^2 < 3$.

حل:

فرض: $x > 1$

حکم: $4 - x^2 < 3$

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow 4 - x^2 < 4 - 1 \Rightarrow 4 - x^2 < 3$$

اگر در مثال قبل، جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ی

$$-4x - 18 < 2$$

۲. دو زاویه ی مجاور به قاعده ی یک مثلث با هم برابرند، اگر و تنها اگر مثلث متساوی الساقین باشد.

اثبات بازگشتی

گاهی اوقات برای اثبات بعضی از مسئله ها، باید از یک فرض یا یک رابطه ی کاملاً بدیهی شروع کنیم. اما در برخورد اول با مسئله، ممکن است این رابطه ی بدیهی به ذهنمان نیاید. بنابراین با استفاده از درستی حکم و انجام اعمال ریاضی روی آن، سعی می کنیم به یک رابطه ی بدیهی برسیم. در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات، باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند. در غیر این صورت، درستی اثبات تأیید نمی شود.

مثال: با استفاده از اثبات بازگشتی، حکم های زیر را ثابت کنید:
الف) برای دو عدد حقیقی a و b ، ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + b + a$$

ب) برای عددهای حقیقی x ، y و z ثابت کنید:

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 \geq 4x - 2y + 30z$$

ج) برای عددهای حقیقی x ، y و z ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

د) برای عددهای حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 \geq ab(a + b)$$

حل:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + b + a$$

الف)

دو طرف را در ۲ ضرب می کنیم:

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2b + 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 1 + 1 - 2ab - 2b - 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2b + 1) + (a^2 - 2a + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - 1)^2 + (a - 1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، بنابراین آن را یک فرض بدیهی در نظر می گیریم و با بازگشت مراحل انجام شده، می توانیم به درستی حکم برسیم.

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 \geq 4x - 2y + 30z$$

ب)

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 - 4x + 2y - 30z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (9z^2 - 30z + 25) \geq 0$$

شرطی «اگر $x^2 < 3$ آن گاه $x > 1$ » به دست می آید. اکنون اگر با فرض درستی $x^2 < 3$ بتوان به درستی $x > 1$ رسید، در این صورت، عکس قضیه ی شرطی، یک قضیه ی شرطی است. در غیر این صورت، عکس قضیه ی شرطی، یک قضیه ی شرطی نیست.

$$4 - x^2 < 3 \Rightarrow 4 - x^2 - 4 < 3 - 4 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \\ \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1$$

همان طور که ملاحظه می کنید، با فرض درستی $4 - x^2 < 3$ ، به $(x < -1)$ یا $(x > 1)$ رسیدیم و نتوانستیم فقط درستی $(x > 1)$ را ثابت کنیم. در نتیجه، عکس این قضیه ی شرطی برقرار نیست.

عکس قضیه ی شرطی

هرگاه $p \Rightarrow q$ یک قضیه ی شرطی باشد، چنانچه در این قضیه جای فرض و حکم را با هم عوض کنیم، گزاره ی $q \Rightarrow p$ به دست می آید. حال در صورتی که $q \Rightarrow p$ یک قضیه ی شرطی باشد، به آن قضیه ی شرطی عکس $p \Rightarrow q$ می گوئیم.

مثال: قضیه ی «اگر $x > -5$ ، آن گاه $-4x - 18 < 2$ » را در نظر بگیرید. آیا عکس آن، یک قضیه ی شرطی است؟

حل: ابتدا عکس قضیه ی شرطی را می نویسیم:

$$\text{«اگر } -4x - 18 < 2 \text{ آن گاه } x > -5 \text{»}$$

$$-4x - 18 < 2 \Rightarrow -4x - 18 + 18 < 2 + 18$$

$$\Rightarrow -4x < 20 \Rightarrow \frac{-4x}{-4} > \frac{20}{-4} \Rightarrow x > -5$$

در نتیجه، عکس این قضیه ی شرطی برقرار است.

قضیه ی دوشروطی

اگر $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو قضیه ی شرطی باشند، در این صورت می گوئیم p با q یک قضیه ی دوشروطی را تشکیل می دهند و می نویسیم $p \Leftrightarrow q$ و می خوانیم: « p شرط لازم و کافی برای q است» یا «شرط لازم و کافی برای p آن است که q » یا « p اگر و تنها اگر q ».

مثال: در این جا، دو قضیه ی دوشروطی آمده است:

۱. شرط لازم و کافی برای این که $x > -5$ آن است که

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + (y+1)^2 + (3z-5)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با برگشت روابط، می توان به درستی حکم رسید.

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \quad (\text{ج})$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + xz)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با بازگشت روابط، می توان به درستی حکم رسید.

(د)

$$a^2 + b^2 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab \geq ab \quad (a+b > 0 \text{ چون})$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با برگشت روابط، می توان به درستی حکم رسید.

برهان خلف

برای اثبات درستی یک حکم با روش برهان خلف، ثابت می کنیم که خلاف حکم نادرست است. برای این منظور، مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

۱. فرض می کنیم که حکم مسئله درست نباشد (فرض خلف).
۲. نشان می دهیم که فرض خلف نتیجه ای به دست می دهد که خلاف فرض مسئله یا خلاف یکی از اصول یا قضیه های است که قبلاً پذیرفته ایم.

۳. در این مرحله به تناقض می رسیم. بنابراین فرض خلف، باطل و حکم مسئله برقرار است.

مثال: نشان دهید با فرض صحیح بودن n ، اگر n^2 مضرب ۳

باشد، آن گاه n نیز مضرب ۳ است.

حل: برهان خلف

فرض می کنیم n مضرب ۳ نباشد (فرض خلف)، یعنی $n \neq 3k$

که $k \in \mathbb{Z}$. بنابراین داریم:

$$n = 3k + 1 \text{ یا } n = 3k + 2; (k \in \mathbb{Z})$$

در حالتی که $n = 3k + 1$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \\ &= 3(3k^2 + 2k + 1) = 3k' + 1 \end{aligned}$$

در این حالت ملاحظه می کنیم که n^2 مضرب ۳ نیست و این با فرض مسئله متناقض است.

در حالتی که $n = 3k + 2$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 \\ &= 3(3k^2 + 4k + 2) = 3k'' + 2 \end{aligned}$$

در این حالت نیز ملاحظه می کنیم که n^2 مضرب ۳ نیست و این با فرض مسئله متناقض است.

در نتیجه، در هر دو حالت به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: اگر n عددی صحیح و n^2 مضرب ۵ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۵ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم n عدد صحیح و مضرب ۵ نباشد (فرض خلف)، بنابراین $n \neq 5k$ که $k \in \mathbb{Z}$ و داریم:

$$\begin{aligned} n &= 5k + 1 \text{ یا } n = 5k + 2 \text{ یا } n = 5k + 3 \text{ یا } n = 5k + 4 \\ &\text{یعنی } (k \in \mathbb{Z}); n = 5k + i \end{aligned}$$

اگر در هر یک از حالت های بالا مقدار n^2 را حساب کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که n^2 مضرب ۵ نیست و این با فرض مسئله تناقض دارد. در نتیجه، در هر حالت به تناقض می رسیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: ثابت کنید که $\sqrt[3]{3}$ گنگ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم $\sqrt[3]{3}$ گنگ نباشد، (فرض خلف) پس $\sqrt[3]{3}$ گویاست. یعنی:

$$\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1$$

حل مثال با برهان خلف

فرض کنیم $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1$ اول نباشد و عامل اول بزرگتر از p نداشته باشد (فرض خلف). در این صورت عدد N که بزرگتر از یک و طبیعی است، عامل اولی مانند p' دارد (نکته ۱). از طرف دیگر، عدد N عامل اول بزرگتر از p ندارد. بنابراین $p' \in \{2, 3, 5, \dots, p\}$ و N بر p' بخش پذیر است (نکته ۲). یعنی: $N = p' \times q$ ($q \in \mathbb{Z}$) یا

$$(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1 = p' \times q \quad (1)$$

چون $p' \in \{2, 3, 5, \dots, p\}$ ، بنابراین $(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p)$ بر p' بخش پذیر است. یعنی:

$$(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) = p' \times q' \quad (q' \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

با توجه به رابطه های ۱ و ۲ و نکته ۳ داریم:

$$\begin{aligned} (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1 &= p' \times q \\ (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) &= p' \times q' \\ \hline (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1 - (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) &= p' \times (q - q') \\ q_1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 = p' \times q_1$$

از رابطه ی اخیر می فهمیم که عدد ۱ بر عدد اول p' بخش پذیر است و این غیر ممکن است (تناقض). پس فرض خلف، باطل و حکم مسئله برقرار است.

برهان مستقیم

در قضیه ای به صورت $p \Rightarrow q$ ، به برهانی که با استفاده از درستی p نشان می دهد که q درست است، برهان مستقیم می گوئیم. استدلال استنتاجی و اثبات قضیه های شرطی، دو نوع از برهان های مستقیم اند.

برهان غیر مستقیم

به استدلال هایی مانند برهان خلف یا اثبات بازگشتی که در آن ها شیوه ی برهان مستقیم نیست، یعنی برهانی که حکم را به طور مستقیم از فرض نتیجه نگیریم، برهان غیر مستقیم می گوئیم.

$$\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow (\sqrt[3]{3})^3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 \Rightarrow p^3 = 3q^3$$

از برابری آخر نتیجه می گیریم که p^3 مضرب ۳ است، پس p نیز مضرب ۳ است، یعنی $p = 3k$ که $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} p^3 = 3q^3 \\ p = 3k \end{cases} \Rightarrow (3k)^3 = 3q^3 \Rightarrow q^3 = 9k^3 = 3(3k^3) = 3k'^3 \quad \begin{matrix} k' \in \mathbb{Z} \\ k' = 3k \end{matrix}$$

از این برابری نتیجه می گیریم که q^3 مضرب ۳ است، پس q مضرب ۳ است، یعنی $q = 3k_1$ که $k_1 \in \mathbb{Z}$. بنابراین p و q هر دو مضرب ۳ هستند و این با فرض $(p, q) = 1$ در تناقض است. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: ثابت کنید که $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ عددی گنگ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم که $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ گنگ نباشد (فرض خلف). پس $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ عددی گویاست، یعنی:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} - \sqrt{5} &= a, \quad a \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{3} = a + \sqrt{5} &\Rightarrow (\sqrt{3})^2 = (a + \sqrt{5})^2 \Rightarrow 3 = a^2 + 5 + 2a\sqrt{5} \\ \Rightarrow \sqrt{5} &= \frac{-a^2 - 2}{2a} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

در نتیجه $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ و این با گنگ بودن عدد $\sqrt{5}$ متناقض است. بنابراین به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: اگر ۲، ۳، ۵ و... تمام اعداد اول کوچکتر یا مساوی p باشند، ثابت کنید که $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1$ یا اول است یا عامل اول بزرگتر از p دارد.

قبل از حل این مثال لازم است که نکته های زیر را مطرح کنیم: ۱. هر عدد طبیعی $n > 1$ یک عامل اول دارد، یا به عبارت دیگر بر یک عدد اول بخش پذیر است.

۲. هرگاه a و $b \neq 0$ دو عدد صحیح باشند، به طوری که a بر b بخش پذیر باشد، در این صورت یک عدد صحیح مانند q یافت می شود؛ به گونه ای که $a = b \times q$.

۳. هرگاه دو عدد صحیح a و b بر عدد صحیح c بخش پذیر باشند، در این صورت $a \pm b$ بر c بخش پذیر است.

جباراهیان

مجموع ها و

این بخش در مورد «مجموع ها و حاصل ضرب های ادغامی» در مثلثات است. مسائل مربوط به «اصل ادغامی در جبر»، موضوع یکی از بخش های بعدی است. در مسائل شامل مجموع ها، شیوه ی کار، استفاده از اتحادهای مثلثاتی برای نوشتن مجموع به صورت

$$\sum_{k=1}^n [F(k+1) - F(k)]$$

و سپس حذف جمله ها برای به دست آوردن $F(n+1) - F(1)$ است. به طور مشابه، برای حاصل ضرب ها:

$$\prod_{k=1}^n \frac{F(k+1)}{F(k)} = \frac{F(n+1)}{F(1)}$$

در این مورد، یکی از مثال ها، محاسبه ی

$\sum_{k=1}^n \cos kx$ است. با فرض $x \neq 2m\pi$ و صحیح بودن m ،

آن را در $\frac{1}{2} \sin x$ ضرب می کنیم. از فرمول ضرب به جمع حاصل ضرب یک سینوس و یک کسینوس، به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \sin \frac{x}{2} \cos kx &= \sum_{k=1}^n (\sin(k + \frac{1}{2})x - \sin(k - \frac{1}{2})x) \\ &= \sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x \end{aligned}$$



حاصل ضرب‌های ادغامی در مثلثات

به این ترتیب، مجموع اولیه عبارت است از:

$$(\sin(n + \frac{1}{2})x) / (\frac{1}{2} \sin(x/2)) - \frac{1}{2}$$

البته زمانی که $x = 2m\pi$ ، m صحیح، پاسخ n است.
برای مثال دوم، از فرمول مربوط به تابع تانژانت استفاده

می‌کنیم.

مجموع:

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{k^2 + k + 1}$$

را محاسبه کنید که در آن، tg^{-1} به جای تابع $\arctg$ قرار دارد.

در حل این مثال، از فرمول تفریق مربوط به تانژانت، یعنی

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$$

استفاده می‌کنیم که فرمول مربوط به $\arctg$ ، یعنی فرمول:

$$\operatorname{tg}^{-1} u - \operatorname{tg}^{-1} v = \operatorname{tg}^{-1} \frac{u - v}{1 + uv}$$

را به دست می‌دهد.

برای سادگی کار، قرار می‌دهیم $a_k = \operatorname{tg}^{-1} x$. در این

صورت:

$$\frac{1}{k^2 + k + 1} = \frac{k + 1 - k}{1 + k(k + 1)} = \operatorname{tg}(a_{k+1} - a_k)$$

در نتیجه، مجموع مورد محاسبه برابر است با:

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{tg}^{-1} (\operatorname{tg}(a_{k+1} - a_k)) = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 = \operatorname{tg}^{-1}(n + 1)$$

در حل مسائل زیر، از شیوه‌های مشابهی می‌توان استفاده کرد.

۱. ثابت کنید:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \dots + \frac{\sin nx}{\cos^n x} = \cot x - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$$

به ازای هر $x \neq k\frac{\pi}{2}$ ، k صحیح، برقرار است.

۲. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$$

۳. فرض می‌کنیم n عددی صحیح و مثبت و a عددی حقیقی و چنان باشد که a/π عددی گنگ یا اصم است. مجموع زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{1}{\cos a - \cos 3a} + \frac{1}{\cos a - \cos 5a} + \dots + \frac{1}{\cos a - \cos(2n+1)a}$$

۴. اتحاد زیر را اثبات کنید.

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2k^2} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{n}{n+1}$$

۵. مجموع زیر را که در آن $a \neq k\pi$ ، k صحیح است، محاسبه کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{a}{2^n}$$

۶. ثابت کنید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \sin^2 \frac{a}{2^n} = \frac{1}{4} (a - \sin a)$$

۷. ثابت کنید میانگین اعداد $n \sin n^\circ$ ، $n = 2, 4, 6, \dots, 180$ ، برابر $\cot g 1^\circ$ است.

۸. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح و مثبت n و هر عدد حقیقی

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} - \frac{\cos 3x}{\sin x \cos^2 x} \\ + \dots + \frac{\cos nx}{\sin x \cos^{n-1} x} - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x} \\ = \cot g x - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$$

و اتحاد ثابت می شود.

(Ionescu-Tiu, C., Vidrascu, M., Exercitii si probleme de trigonometrie (Exercises and problems in trigonometry), Ed. Didactică si Pedagogică, Bucharest, 1969)

۲. با ضرب رابطه در $\sin 1^\circ$ به دست می آوریم:

$$\frac{\sin 1^\circ}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \dots + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}$$

این رابطه را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\sin(1^\circ - 0^\circ)}{\cos 1^\circ \cos 0^\circ} + \frac{\sin(2^\circ - 1^\circ)}{\cos 2^\circ \cos 1^\circ} + \dots + \frac{\sin(89^\circ - 88^\circ)}{\cos 89^\circ \cos 88^\circ} = \cot g 1^\circ$$

از اتحاد

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} = \operatorname{tga} - \operatorname{tgb}$$

نتیجه می گیریم که سمت چپ آن برابر است با

$$\sum_{k=1}^{89} [\operatorname{tg} k^\circ - \operatorname{tg}(k-1)^\circ] = \operatorname{tg} 89^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ = \cot g 1^\circ$$

و اتحاد به اثبات می رسد.

(USAMO, 1992)

۳. مجموع را به صورت زیر تبدیل می کنیم:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos a - \cos(2k+1)a} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin ka \sin(k+1)a}$$

مانند مسئله ی قبل، مجموع، پس از ضرب در $\sin a$ ، به صورت

زیر درمی آید:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((k+1)a - ka)}{\sin ka \sin(k+1)a} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\cot g ka - \cot g(k+1)a) \\ = \frac{1}{2} (\cot ga - \cot g(n+1)a)$$

بنابراین، پاسخ مسئله عبارت است از:

$$(\cot ga - \cot g(n+1)a) / (2 \sin a)$$

۴. داریم:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^n \operatorname{tg}^{-1} \frac{(2k+1) - (2k-1)}{1 + (2k-1)(2k+1)}$$

$(k, m = 0, 1, \dots, n, x \neq \frac{k\pi}{2^m})$ صحیح،

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot g x - \cot g 2^n x$$

۹. محاسبه کنید.

$$\frac{\operatorname{tg} 1}{\cos 2} + \frac{\operatorname{tg} 2}{\cos 4} + \dots + \frac{\operatorname{tg} 2^n}{\cos 2^{n+1}}$$

۱۰. ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی ناصفر x ، داریم:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$$

۱۱. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح $n > 1$:

$$\cos \frac{2\pi}{2^n - 1} \cos \frac{4\pi}{2^n - 1} \dots \cos \frac{2^{n-1}\pi}{2^n - 1} = \frac{1}{2^n}$$

۱۲. حاصل ضرب زیر را محاسبه کنید.

$$\prod_{k=1}^n (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{2^k \pi}{2^n + 1})$$

۱۳. فرض می کنیم n عددی صحیح و مثبت، و x عددی حقیقی

متفاوت از $\frac{\pi}{3} + l\pi$ ، $k = 1, 2, \dots, n$ ، و 1 صحیح باشد.

حاصل ضرب زیر را محاسبه کنید.

$$\prod_{k=1}^n (1 - 2 \cos \frac{x}{2^k})$$

۱۴. ثابت کنید.

$$\prod_{k=1}^n (1 + 2 \cos \frac{2\pi \cdot 3^k}{3^n + 1}) = 1$$

پاسخ های مجموع ها و حاصل ضرب های ادغامی در

مثلثات

۱. فرمول مجموع کسینوس ها مستلزم این است که:

$$\sin kx \sin x = \cos kx \cos x - \cos(k+1)x$$

که در آن k عدد صحیح و مثبت دل خواهی است. با تقسیم

دو طرف این برابری به $\sin x \cos^k x$ به دست می آوریم:

$$\frac{\sin kx}{\cos^k x} = \frac{\cos kx}{\sin x \cos^{k-1} x} - \frac{\cos(k+1)x}{\sin x \cos^k x}$$

داریم:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \frac{\sin 3x}{\cos^3 x} + \dots + \frac{\sin nx}{\cos^n x}$$

با استفاده از فرمول تفریق $\arctg$ (مقدمه را ملاحظه کنید)،
مجموع اخیر به صورت زیر درمی آید:

$$\sum_{k=1}^n (\operatorname{tg}^{-1}(\gamma k + 1) - \operatorname{tg}^{-1}(\gamma k - 1))$$

که برابر است با:

$$\operatorname{tg}^{-1}(\gamma n + 1) - \operatorname{tg}^{-1}(1) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{(\gamma n + 1) - 1}{1 + (\gamma n + 1)} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{n}{n + 1}$$

۵. توجه داشته باشید که:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 2 \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \cot gx - 2 \cot g^2 x$$

که مستلزم این است که:

$$\frac{1}{\gamma^n} \operatorname{tg} \frac{a}{\gamma^n} = \frac{1}{\gamma^n} \cot g \frac{a}{\gamma^n} - \frac{1}{\gamma^{n-1}} \cot g \frac{a}{\gamma^{n-1}}$$

این مجموع ادغام می شود و پاسخ زیر را به دست می دهد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma^n} \cot g \frac{a}{\gamma^n} - \cot ga$$

حد اخیر برابر $1/a$ است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot g ax = \lim_{x \rightarrow 0} \cos ax \frac{x}{\sin ax} = \frac{1}{a}$$

بنابراین، پاسخ مسئله برابر $1/a - \cot ga$ است.

(T. Andreescu)

$$\sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad \text{با استفاده از اتحاد}$$

ملاحظه می کنیم که:

$$\gamma^{n-1} \sin^3 \frac{a}{\gamma^n} = \frac{1}{4} (\gamma^n \sin \frac{a}{\gamma^n} - \gamma^{n-1} \sin \frac{a}{\gamma^{n-1}})$$

در نتیجه، این مجموع ادغام می شود و برابر است با:

$$\frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{a}{\gamma^n}}{\gamma^n} - \frac{1}{4} \sin a$$

با استفاده از این موضوع که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{a}{\gamma^n}}{\gamma^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$

نتیجه می گیریم، مقدار مجموع برابر است با $(a - \sin a)/4$.

۷. مجموع زیر را محاسبه می کنیم.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(\gamma k)^\circ \sin 1^\circ$$

با تبدیل حاصل ضرب ها به مجموع داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k \cos(\gamma k - 1)^\circ - k \cos(\gamma k + 1)^\circ \\ = \sum_{k=1}^{\infty} (k - (k-1)) \cos(\gamma k - 1)^\circ - 9 \cdot \cos 1^\circ \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\gamma k - 1)^\circ - 9 \cdot \cos 1^\circ \end{aligned}$$

از آن جا که

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$$

جملات مجموع اخیر، دوه دو حذف می شوند. در نتیجه عبارت محاسبه شده برابر $9 \cdot \cos 1^\circ$ است. با تقسیم بر $\sin 1^\circ$ و گرفتن میانگین، $\cos 1^\circ$ را به دست می آوریم.

راه حل دیگری نیز با استفاده از اعداد مختلط، امکان پذیر است. در این مورد $\sin n^\circ$ را به صورت:

$$(e^{i\pi n/180} - e^{-i\pi n/180}) / (2i)$$

بیان و از این موضوع استفاده می کنیم که:

$$x + \gamma x^2 + \dots + nx^n = \frac{nx^{n+1}}{x-1} - \frac{x^{n+1} - x}{(x-1)^2}$$

این فرمول را می توان با استقرا یا مشتق گرفتن از

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = (x^{n+1} - 1) / (x - 1)$$

به اثبات رساند [USAMO, 1996 با طرح از: T. Andreescu].

۸. داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \gamma x} &= \frac{\gamma \cos^2 x - (\gamma \cos^2 x - 1)}{\sin \gamma x} = \frac{\gamma \cos^2 x}{\gamma \sin x \cos x} - \frac{\gamma \cos^2 x - 1}{\sin \gamma x} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x}{\sin \gamma x} = \cot gx - \cot g^2 x \end{aligned}$$

این رابطه نشان می دهد که سمت چپ ادغام می شود و اتحاد به دست می آید [هشتمین المپیاد ریاضی، ۱۹۶۶].

۹. داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tga}}{\cos^2 a} &= \frac{\operatorname{tga}(1 + \operatorname{tg}^2 a)}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{\gamma \operatorname{tg} - \operatorname{tga}(1 - \operatorname{tg}^2 a)}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \\ &= \frac{\gamma \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a} - \operatorname{tga} = \operatorname{tg} \gamma a - \operatorname{tga} \end{aligned}$$

بنابراین، مجموع مسئله به صورت زیر درمی آید:

$$\operatorname{tg}^2 - \operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg}^4 - \operatorname{tg}^2 + \dots + \operatorname{tg}^{2n+1} - \operatorname{tg}^{2n} = \operatorname{tg}^{2n+1} - \operatorname{tg} 1$$

۱۰. از فرمول دو برابر زاویه ی سینوس حاصل می کنیم:
 $\cos u = \sin 2u / (2 \sin u)$

در نتیجه می توان نوشت:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k \cos \frac{x}{2^n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{\sin \frac{x}{2^n}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^k}} = \frac{\sin x}{x} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^k}}{\sin \frac{x}{2^k}} = \frac{\sin x}{x}$$

این حد، به ازای $x = \pi$ ، توسط ارشمیدس برای یافتن مقدار تقریبی π به کار رفته است. در واقع، آن چه که ارشمیدس انجام داد، محاسبه ی تقریبی طول دایره با استفاده از پیرامون چندضلعی منتظم با 2^k ضلع محاطی بود و محاسبه اش به فرمول فوق تبدیل می شود.
 ۱۱. در صورتی که سمت چپ را در $\sin((2^n - 1)\pi) / (2^n - 1)$ ضرب کنیم و متوالیاً از فرمول دو برابر زاویه ی سینوس استفاده به عمل آوریم حاصل می کنیم:

$$2^n \sin \frac{\pi}{2^n - 1} \cos \frac{\pi}{2^n - 1} \cos \frac{\pi}{2^n - 1} \dots \cos \frac{\pi}{2^n - 1}$$

$$= 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n - 1} \cos \frac{\pi}{2^n - 1} \dots \cos \frac{\pi}{2^n - 1} = \dots$$

$$= \sin \frac{2^{n+1} \pi}{2^n - 1} = \sin(2\pi + \frac{2\pi}{2^n - 1}) = \sin \frac{2\pi}{2^n - 1}$$

از آن جا که حاصل ضرب مورد محاسبه از این رابطه، با تقسیم بر $\sin((2^n - 1)\pi) / (2^n - 1)$ به دست می آید، نتیجه حاصل می شود:
 (Romanian high school text book)

$$1 - \tan^2 x = \frac{2 \tan x}{\tan^2 x} \quad ۱۲. اتحاد$$

رابطه ی زیر را به دست می دهد:

$$1 - \tan^2 \frac{2^k \pi}{2^n + 1} = 2 \frac{\tan \frac{2^k \pi}{2^n + 1}}{\tan \frac{2^{k+1} \pi}{2^n + 1}}$$

و نتیجه می شود که حاصل ضرب مورد بحث به مورد ذیل ادغام می شود:

$$2^n \frac{\tan \frac{2\pi}{2^n + 1}}{\tan \frac{2^{n+1} \pi}{2^n + 1}} = 2^n \frac{\tan \frac{2\pi}{2^n + 1}}{\tan(2\pi - \frac{2\pi}{2^n + 1})} = -2^n$$

(T. Andreescu)

۱۳. می توان نوشت:

$$1 - 2 \cos a = \frac{1 - 2 \cos^2 a}{1 + 2 \cos a} = \frac{1 - 2(1 + \cos 2a)}{1 + 2 \cos a}$$

$$= -\frac{1 + 2 \cos 2a}{1 + 2 \cos a}$$

نتیجه می گیریم که حاصل ضرب مسئله به صورت زیر ادغام می شود:

$$(-1)^n \frac{1 + 2 \cos x}{1 + 2 \cos \frac{x}{2^n}}$$

و اتحاد به اثبات می رسد.

۱۴. داریم:

$$1 + 2 \cos 2a_k = 1 + 2(1 - 2 \sin^2 a_k) = 3 - 2 \sin^2 a_k$$

$$= \frac{\sin 3a_k}{\sin a_k}$$

که در آن

$$a_k = \frac{2^k \pi}{2^n + 1}$$

در نتیجه، حاصل ضرب به مورد زیر ادغام می شود:

$$\frac{\sin 3a_n}{\sin a_1} = \frac{\sin \frac{3^{n+1} \pi}{2^n + 1}}{\sin \frac{3\pi}{2^n + 1}}$$

صورت کسر اخیر برابر است با:

$$\sin(3\pi - \frac{3\pi}{2^n + 1}) = \sin \frac{3\pi}{2^n + 1}$$

و در نتیجه، برابر مخرج همین کسر است. به این ترتیب، راه حل مسئله کامل می شود.

(T. Andreescu)

اشاره

در شماره‌های قبل درباره‌ی اتحاد و معادله، تجزیه چند جمله‌ای دلخواه و مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله بحث شد، اینک در پی به حل معادله‌هایی از درجه‌ی بالاتر خواهیم پرداخت.

انتهای و معادله (۱۵)

معادله‌هایی از درجه‌ی بالاتر (بحث تاریخی)

پرویز شهبازی

نخستین کسی که معادله‌ی درجه‌ی سوم را به طریق جبری حل کرد، جمشید کاشانی، ریاضی‌دان ایرانی بود. او در سده‌ی پانزدهم می‌زیست (مرگ او در سال ۱۴۳۶ میلادی اتفاق افتاد که به روایتی با توطئه‌ی الغ بیگ کشته شد). و برای ساختن رصدخانه‌ی سمرقند از کاشان به سمرقند رفته بود. جمشید کاشانی ریاضی‌دان و محاسب برجسته‌ای بود که توانست عدد π را تا ۱۷ رقم بعد از ممیز محاسبه کند و برای بار اول، عددها را به صورت ده‌دهی، همان‌طور که ما امروز می‌نویسیم، کشف کرد.

کاشانی، برای کارهای اخترشناسی به محاسبه‌ی سینوس یک درجه نیاز داشت. پیش از او، ریاضی‌دانان دیگر ایرانی، مثل ابوریحان بیرونی، ابوالوفای بوزجانی^۱ و دیگران، آن را به تقریب به کار می‌بردند. برای نمونه، ابوالوفای بوزجانی از یک نابرابری برای

محاسبه‌ی تقریبی سینوس یک درجه استفاده می‌کرد.^۲ ولی جمشید کاشانی توانست با حل جبری یک معادله‌ی درجه سوم، مقدار آن را تا هر دقت دلخواه، به دست آورد. تابع‌های مثلثاتی ۱۵ درجه و ۱۸ درجه را تا آن زمان پیدا کرده بودند و جمشید کاشانی باید به یاری سینوس ۳ درجه (یعنی اختلاف ۱۸ درجه و ۱۵ درجه) سینوس یک درجه را محاسبه می‌کرد. سینوس ۳ درجه بر حسب سینوس یک درجه چنین است:

$$\sin 3^\circ = 4 \sin^3 1^\circ - 3 \sin 1^\circ$$

اگر در این برابری فرض کنیم $\sin 1^\circ = x$ و $\sin 3^\circ = a$ ، باید این معادله را نسبت به x حل کنیم:

$$4x^3 - 3x - a = 0 \quad (۱)$$

و جمشید کاشانی این معادله را حل کرد (با هر تقریب دلخواه).

می دانسیم معادله ی کامل درجه سوم، یعنی:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ را با مجهول کمکی } x = y - \frac{b}{3a}$$

می توان به معادله ای تبدیل کرد که ضریب x^2 در آن برابر صفر باشد. یعنی با این مجهول کمکی، معادله را به معادله ای تبدیل کرد که شامل x^3 ، x و مقدار ثابت باشد. یعنی معادله به صورت «۱». به این ترتیب، جمشید کاشانی راه حل جبری معادله ی درجه سوم را پیدا کرد. البته قبل از کاشانی، خیام نیشابوری راه حل هایی، بعضی جبری و بعضی هندسی، برای حل انواع معادله ی درجه سوم داده بود (به یاری مقطع های مخروطی در کتاب جبر و مقابله ی خود). بعد از جمشید کاشانی، «پائولوولمس» ریاضی دان اسپانیایی، راه حلی برای معادله ی درجه چهارم پیدا کرده بود، از این راه حل، اطلاعی در دست نیست. ولی او بنا به دادگاه تفتیش عقاید و به دستور توماس دما-تو وگلکه مادا (۱۴۲۰ تا ۱۴۹۸ میلادی)، رئیس مرکز تفتیش عقاید اسپانیا به دلیل همین کشف ریاضی خود، به مرگ با آتش محکوم شد.

بعد نوبت به ریاضی دان های ایتالیایی می رسد. ژه زولا موکاردانو (۱۵۰۱ تا ۱۵۷۶ میلادی) برای محاسبه ریشه های معادله ی درجه سوم رابطه ای به دست آورد (برای معادله ی $x^3 + px + q = 0$). کاردانو در نوشته های فارسی به کاردان مشهور است:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{4}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{4}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{4}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{4}}$$

این رابطه، برای نخستین بار در کتاب کاردانو به نام «هنر بزرگ یا قانون های جبری» آمده است و به همین دلیل، «رابطه ی کاردان» نام گرفته است. دلیل هایی وجود دارند که این رابطه به یک ریاضی دان دیگر ایتالیایی به نام تارتاگلیا (۱۴۹۹ تا ۱۵۵۷ میلادی) است. تارتاگلیا در کودکی پدر خود را از دست داد. او به دست سربازان فرانسوی که شهرش را اشغال کرده بودند، کشته شد. همان جا سربازان فرانسوی، زبان تارتاگلیا را بریدند و فکش را شکستند. این وضع تا آخر زندگی همراه نیکولو بود و به همین دلیل، او را «تارتاگلیا» می نامیدند که به زبان ایتالیایی به کسی گفته می شود که لکنت زبان دارد. مادر نیکولو قدرت پرداخت شهریه ی او را در مدرسه نداشت و «نیکولو» زبان و ریاضیات را پیش خود آموخت. نیکولو جوانی با استعداد بود و چنان پیش رفت که در سال ۱۵۳۵ میلادی، کرسی ریاضیات را در شهر «وِرونا» ایتالیا به او سپردند. کاردانو آدم با استعدادی بود. او پزشکی و فلسفه را به خوبی می دانست. در حل تمرین های ریاضی هم کار می کرد. کاردانو، در ضمن، به اختر شماری (علمی دروغین) هم اعتقاد داشت. او حتی زایچه ی خود را تشکیل داد. او در این زایچه، روز و ساعت مرگ خود را پیش بینی کرده بود، ولی چون در روز موعود چیزی

پیش نیامد، برای این که درستی پیش گویی خود را ثابت کند، در ساعت موعود خودکشی کرد.

ظاهر امر این است که کاردان از راه حل معادله ی درجه سوم که تارتاگلیا کشف کرده بود، به نحوی آگاه می شود و بدون این که نام مؤلف اصلی آن را ببرد، در کتاب خود نشر می دهد. تارتاگلیا، خود مشغول نوشتن کتابی بزرگ در زمینه ی جبر بود که حل معادله ی درجه ی سوم، جای نمایی در آن داشت، ولی چون کاردان کتاب خود را زودتر منتشر کرده بود، وسیله ای برای نزاع آن هاشد که برای همه ی عمر باقی ماند.

از ریاضی دانان ایرانی که روی معادله های سیال کار کرده است، ابوبکر محمد فرزند حسین معروف به کرجی^۲ است. کرجی بخشی از کتاب «الفخری» خود را به معادله های سیال اختصاص داده است که بالاتر از درجه های دوم و سوم هستند؛ مثل:

$$x^4 - y^4 = z^2 \text{ یا } x^2 + y^4 = z^2$$

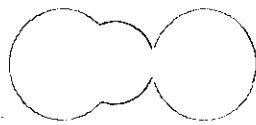
یا معادله های $x^2 - y^2 = z^2$ یا $x^2 + y^2 = z^2$ و می توان احساس کرد که کرجی به دنبال راهی بوده است تا ناممکن بودن مسئله ی بزرگ فرما را ثابت کند. البته کرجی هیچ جانی نامی از این قضیه که ۸۰۰ سال بعد فرما مطرح کرده است، نمی برد. بسیاری از معادله هایی را که آورده، با جواب ذکر کرده است. بین جواب ها، عددهای کسری (ولی گویا) به فراوانی دیده می شوند. به عنوان

نمونه، برای معادله ی $x^4 - y^4 = z^2$ جواب های $x = \frac{18}{5}$ ، $y = \frac{9}{5}$ و $z = \frac{27}{5}$ را معین می کند.

به هر حال به نظر من به دنبال ناممکن بودن معادله ی $x^n + y^n = z^n$ برای x, y, z و n درست بوده است. از قضیه ای که بعدها نام قضیه ی بزرگ فرما را به خود گرفته و همین چند سال پیش به صورت پیچیده ای ثابت شده است، نامی نمی برد.



پس از کاردان و تارتاگلیا، لو و دیکوفه راری (۱۵۲۲ تا ۱۵۶۵ میلادی) ریاضی دان دیگر ایتالیایی، به کشف راه حل معادله ی درجه چهارم موفق شد. این که ایرانی ها به معادله ی بالاتر از درجه سوم نمی پرداختند، یکی به خاطر این بود که دوره ی ریاضیات ایرانی، دوره ی کاربردی بود و در آن دوره تنها به معادله هایی توجه داشتند که در زندگی، عمل و دانش های دیگر کاربرد داشته باشد. دوم به این دلیل بود که آن ها به پیروی از ریاضی دانان یونانی، غالباً تلاش می کردند تعبیری هندسی برای عمل های خود پیدا کنند. آن ها مجهول را به صورت پاره خطی در نظر می گرفتند. اگر مجهول را با x نشان دهیم، x^2 را به معنای مساحت مربعی به ضلع x و x^3 را به صورت مکعبی به ضلع x در نظر می گرفتند و چون فضای ماسه بعدی است، برای x^4 ، x^5 و رتبه های بالاتر، مفهومی قائل نبودند. این



مشکل بعدها به وسیله ی رنه دکارت (۱۵۹۶ تا ۱۶۵۰ میلادی) حل شد که ثابت کرد جمله x^2 را هم می توان به یاری پاره خط راست نشان داد.



در ایران، مکان های «وراقی» (یعنی کتاب فروشی) مرکز تجمع اهل دانش و ادب بود. وراق ها تنها به فروش کتاب بسنده نمی کردند، خود اهل دانش و فرهنگ بودند، با دانشمندان و ادیبان صحبت می کردند، به رونویس کردن کتاب ها می پرداختند و حتی خودشان آن ها را صحافی می کردند. ولی در ایتالیا، در دوره ی رنسانس، کارگاه های نقاشی، مجسمه سازی و صنعتی محلی، اجتماع بزرگان فرهنگ بود. هر روز در این کارگاه ها جمع می شدند و اگر کسی مسئله یا خبری داشت، به دیگران می گفت. تارتاگلیا، کاردانو، فهراری و بسیاری دیگر از راه همین اجتماع کارگاهی، کار خود را آغاز کردند و موفقیت های خود را عرضه داشتند. رنسانس به دیگر کشورها، دیرتر از ایتالیا رسید. فرانسه، انگلیس و کشورهای شمالی اروپا، باید اندکی صبر می کردند تا پرتوهای رنسانس را دریافت کنند. از این گذشته، محفل هایی از دانشمندان و فرهنگیان، به آن صورت که در ایران و ایتالیا بود، در آن جاها کمتر پیدا می شد. تا سده ی نوزدهم طول کشید تا دنبال کار معادله ها گرفته شد.

یکی از بزرگترین ریاضی دانان اروپای غربی، نیلس هنریک آبل (۱۸۰۲ تا ۱۸۲۹ میلادی) ریاضی دان نروژی بود. آبل از خانواده ی تهی دستی بود. او از کودکی استعداد خود را نمایان ساخت، ولی تهی دستی خانواده، او را از امکان تحصیل منظم بازداشت. او پیشرفت خود را در دانش، مدیون آموزش پیش خود و برخی از دوستان نزدیکش بود. با زحمت بسیار توانست در دانشگاه پایتخت نام نویسی کند، ولی دانشگاه نمی توانست در جهت استعداد او کمک کند. زیرا او به دانش ریاضی علاقه داشت، ولی دانشگاه در آن زمان رشته ریاضی نداشت.

در سال ۱۸۲۳ کوشید معادله ی درجه پنجم را به یاری رادیکال ها حل کند. آبل در آغاز گمان کرد معادله را حل کرده است، ولی وقتی به اشتباه خود پی برد، دنبال مطلب را رها نکرد و سرانجام ثابت کرد، معادله درجه پنجم، راه حل جبری به صورت رادیکالی در حالت کلی خود ندارد، مگر در حالت های خاص.

این موفقیت جالب، هم چنین تألیف او درباره ی انتگرال گیری عبارت های جبری، شرایطی را فراهم کرد که او بتواند به خارج برود و هدف خود را دنبال کند. او نوشته خود را برای گاوس فرستاد. ولی گاوس به گمان این که کار یک جوان بی تجربه است، اعتنایی به آن نکرد.

آبل ابتدا «برلن ماند و با اندیشه ی پاسخ مساعد گاوس نسبت به استعداد خارق العاده ی خود، انتظار کشید. در اینجا با روزنامه ی «کرل» در زمینه ریاضیات نظری و کاربردی آشنا شد که خیلی مورد

علاقه ی جوانان بود و به وسیله ی اوگوست لئوپولد کرل (۱۷۸۰ تا ۱۸۵۵ میلادی) منتشر می شد.^۵

در برلن، آبل بررسی خود را درباره ی هم گرایی رشته های توانی و قضیه های مهمی که به شعاع هم گرایی رشته های توانی در حوزه ی عدد های حقیقی و مختلط مربوط می شدند، کامل کرد.

در سال ۱۹۲۶، آبل به پاریس رفت و در آن جا رساله ی خود را زیر عنوان «یادداشتی درباره ی یک گروه گسترده ی تابع های غیر جبری» به فرهنگستان علوم فرستاد. ولی این کار با ارزش هم مورد توجه لازم قرار نگرفت. این کار مدت ها نزد «کوشی» بین کاغذ های او باقی ماند و تنها بعد از مرگ آبل در سال ۱۸۴۱ چاپ شد. در این اثر، آبل انتگرال از نوع $R(x,y)dx$ را مورد بررسی قرار داده بود که در آن، $R(x,y)$ تابع دلخواه و گویایی از x و y و y تابعی جبری از x است. در ضمن، دو حالت جداگانه را تشخیص داده بود: اگر y به صورت ریشه ای از چند جمله ای درجه سوم و درجه چهارم بیان شود، آن وقت انتگرال به انتگرال بیضوی منجر می شود. و اگر y ریشه ای از چند جمله ای با توان بالای درجه چهارم باشد، آن وقت انتگرال به صورت هذلولوی درمی آید. امروزه، انتگرال به صورت $\int R(x,y)dx$ را انتگرال آبلی می نامند.

زندگی بعدی آبل، بسیار اندوه بار است: این بی حرمتی که در حق این ستاره ی دانش و کشف خلاق او شده بود و تنها پس از مرگش به رسمیت شناخته شد و در ضمن بی پولی و بینوایی دائمی، آبل را واداشت تا در سال ۱۹۲۷ به زادگاه خود برگردد. ولی بازگشت او هم با شادی همراه نبود. در آغاز توانست کار ثابتی پیدا کند و تنها درس می داد، یعنی بخشی از درس خود را حفظ کرده بود. راست است که در سال ۱۸۲۸، توانست کار تدریس در دانشگاه بگیرد، ولی سرانجام فقر و اندوه دائمی او را از پا درآورد و سل در او پیشرفت کرد و در ششم آوریل ۱۸۲۹، یعنی وقتی که تنها ۲۶ سال داشت، از دنیا رفت.

چنین بود زندگی جوان نابغه، ولی با مرگ آبل، اندیشه ی بلند او در ریاضیات نمرد و ارزش خود را تا زمان حال حفظ کرده است. به ویژه یکی از اندیشه های عمیق آبل، مورد استفاده ی پژوهشگران ریاضیات است. این اندیشه را خود آبل چنین، شرح می دهد: «به جای این که درباره ی رابطه ای بیندیشیم که وجود آن نامعلوم است، باید به این پرسش پاسخ دهیم: آیا چنین رابطه ای در واقع وجود دارد». خود آبل با در نظر گرفتن این اندیشه، ثابت کرد که معادله ی درجه چهارم را نمی توان به یاری رادیکال ها حل کرد. هم چنین برخی از تابع ها را پیدا کرد که نمی توان با روش های مقدماتی انتگرال آن ها را به دست آورد. بعد از مرگ آبل «مجله ی رکول» درباره ی او نوشت: «او برای خودش کار نمی کرد. کار او به خاطر دانش بود که عشق آتشین به آن داشت.»

اکنون درباره ی زندگی اندوه بار یکی دیگر از ریاضی دانان بزرگ



سده‌ی نوزدهم صحبت می‌کنیم. اواريست گالوا (۱۸۱۱ تا ۱۸۳۲ میلادی) در «بورلا-رن» نزدیک پاریس متولد شد. هنوز درس می‌خواند که نخستین کارهای علمی خود را چاپ کرد. در سال ۱۸۲۹ در امتحان پلی تکنیک پاریس شرکت کرد. گالوا، هم به دلیل کار علمی پلی تکنیک و هم به علت انقلابی بودن دانشجویان آن‌جا علاقه داشت به آن‌جا وارد شود. گالوا در امتحان پذیرفته نشد و علاقه‌ی عمیق او به ریاضیات موجب شد بین او و معلمی که امتحان می‌کرد، برخوردی پیش آید.^۶

گالوا به ناچار در «اکول نرمال» ثبت نام کرد که دنبال کار دبیرستان بود. ولی از آن‌جا هم، بعد از یک سال، اخراج شد. دلیل اخراج، علاقه‌ی پر حرارت گالوا به زندگی سیاسی فرانسه بود.

نهم ماه مه سال ۱۸۳۱، گالوا در ضیافتی که روز جمهوری برپا شده بود، با خنجر جری در دست، بلند شد و در حالی که خنجر را نشان می‌داد گفت: «به نام لوئی فیلیپ!» پیام آشکار بود: گالوا، لوئی فیلیپ را تهدید کرده بود.

پس از این حادثه، گالوا دستگیر و به زندان «سنت پلاگی» فرستاده شد. در دادگاه که گالوا را خیلی جدی به خاطر عواقب عمل او تهدید کرده بودند، سرانجام به دلیل جوان بودنش، حکم به تبرئه‌ی او دادند. در آن موقع گالوا ۱۹ ساله بود. چهاردهم ژوئیه‌ی ۱۸۳۱، گالوا به خاطر شرکت فعال در تظاهرات مردم در روز انقلاب سال ۱۷۸۹، دوباره به زندان افتاد. بعد از آزادی از زندان، گالوا ۲۱ ساله در یک دوئل کشته شد. شواهدی در دست است که پلیس این دوئل را ترتیب داده بود.

گالوا در زندگی کوتاه خود، توانست اندیشه‌ی تازه‌ای را در ریاضیات وارد کند؛ اندیشه‌ای که به پیشرفت جبر و به طور کلی ریاضیات، کمک کرد و جهت آن را تغییر داد.

گالوا در زندگی کوتاه خود، روی هم ۵ مقاله‌ی کوتاه منتشر کرد که نزدیک به ۳۵ صفحه می‌شدند. عنوان‌های این مقاله‌ها چنین است: «اثبات یک قضیه از کسرهای مسلسل»، «مقاله‌ای درباره‌ی برخی جنبه‌های آنالیز»، «تجزیه و تحلیل یک یادداشت درباره‌ی حل معادله‌ها»، «مقاله‌ای درباره‌ی حل عددی معادله‌ها» و «از نظریه‌ی عددها». اواريست گالوا، کارهای بسیار اساسی خود را دو بار برای فرهنگستان علوم پاریس و دیگران فرستاد. این نامه‌ها برای ریاضی دان مشهور اوگست کوشی (۱۷۸۹ تا ۱۸۵۷ میلادی) و ژان باتیست ژوزف فوریه (۱۷۶۸ تا ۱۸۳۰ میلادی) ریاضی دان بزرگ فرانسوی، برای بررسی فرستاده شد، ولی آن‌ها ارزشی برای این نامه‌ها قائل نشدند و حتی آن‌ها را گم کردند. شب قبل از دوئل، گالوا برای دوستش «شه‌والیه» نامه‌ای نوشت که در آن گفته شده است: «او چند کشف دارد که یکی از آن‌ها به حل معادله‌ها و دیگری به انتگرال تابع‌ها مربوط است.» در ضمن به شه‌والیه نوشته بود،

آن‌ها را برای گاوس و ژاکوبی فرستاده است، زیرا از درستی آن‌ها و این که برای دانش بسیار اهمیت دارد، مطمئن است، ولی از جانب آن‌ها جوابی به او داده نشد.

تنها ۱۴ سال بعد از مرگ گالوا بود که ژوزف لیوول (۱۸۰۹ تا ۱۸۸۲ میلادی) کار او را با دقت بررسی کرد و متوجه کشفی بزرگ شد. آن وقت بود که این اثر چاپ شد.

بررسی اساسی و عمیق گالوا به مسئله‌ی جبر مربوط است. او به تنظیم قضیه‌ی مربوط به عددهای گنگی پرداخت که معادله‌های جبری را تشکیل می‌دهند. این نظریه را در ریاضیات «نظریه‌ی گالوا» می‌نامند. نظریه گالوا، بررسی‌های گسترده‌ای درباره‌ی حل معادله‌های از درجه‌ی بالا کرده است. معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم را در سده‌ی شانزدهم و به وسیله‌ی ریاضی دانان ایتالیایی، به وسیله رادیکال‌ها داده شده بود و آبل در سده نوزدهم، غیر قابل حل بودن معادله‌های بالاتر از درجه چهارم را به کمک رادیکال‌ها ثابت کرد. نظریه‌ی معادله‌های دو جمله‌ای هم به وسیله گاوس گسترش یافته بود.

گالوا در «یادداشتی درباره‌ی شرط‌هایی در قابل حل بودن معادله‌ها به کمک رادیکال‌ها»، شرط‌های قابل حل بودن معادله‌ها به کمک رادیکال‌ها را، از هر درجه‌ای که باشند، مطرح کرده است. او در نظریه خود، مفهوم‌های زیادی را وارد ریاضیات کرده است که امکان بررسی‌های جدی را در چند جمله‌ای‌های جبری می‌دهد. از جمله این مفهوم‌ها، می‌توان از گروه، زیر گروه، میدان و غیره نام برد. نتیجه‌گیری‌های گالوا، کاربرد خود را در بسیاری از شاخه‌های گوناگون ریاضیات پیدا کرده است.

زیرنویس

۱. بوزجان در مرز افغانستان است. هنوز باقی مانده‌ی آثار این شهر در نزدیک تربت جام باقی است.

۲. این نابرابری را در کتاب «نابرابری‌ها» آورده‌ام.

3. Verona

۴. وپکه (woepcke) در سال ۱۸۵۳ نسخه‌ای از کتاب «فخری» تألیف کرجی را به دست آورد که در آن اشتباه نام کرجی به کرخی تبدیل شده بود. کرخه محله‌ای در نزدیکی بغداد است و در نتیجه وپکه کرجی را عرب و عراقی می‌دانست. ولی از کتاب «آب‌های زیرزمینی» (تألیف کرجی) به طور کامل مشهود است که ایرانی بوده و اهل کرج نزدیک تهران است.

۵. crelle ریاضی دان و مهندس آلمانی. از ۱۸۲۷ عضو فرهنگستان برلین شد و از سال ۱۸۲۶ مجله‌ی خود را منتشر کرد.

۶. گالوا دوباره در امتحان پلی تکنیک شرکت کرد، ولی هر دو بار رد شد. در یکی از امتحان‌ها، از پاسخ دادن به پرسش مربوط به لگاریتم، به دلیل ساده بودن آن، امتناع کرد.

۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

هم‌نهشتی و

کاربردهای آن

قسمت ۱

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

hashemi - moosavi@yahoo.com

صورتی که هر دو ظرف A و B پر از شیر باشند و بخواهیم با پیمانه‌ی C شیر برداریم، واضح است که پس از ۸ بار برداشت از ظرف A و پس از ۳ بار برداشت از ظرف B ، ۲ لیتر شیر در هر یک از ظرف‌ها باقی مانده به اصطلاح می‌گوییم دو ظرف A و B به پیمانه‌ی ۵ هم پیمانه و یا به بیان دیگر هم نهشت‌اند. این مطلب را با بیان ریاضی به این صورت نشان می‌دهند:

واژه‌ی «هم‌نهشتی» برگردان کلمه‌ی «Congruence» است. این کلمه به معنای سازگاری، موافقت و مطابقت شینی با شیء دیگر به کار رفته است. برای مثال، در هندسه دو شکل را که قابل انطباق باشند، هم‌نهشت گویند. در این جا، برای درک بیشتر این واژه مثالی می‌آوریم. مثال: فرض کنید دو ظرف شیر با گنجایش‌های $A = 42$ و $B = 17$ و یک پیمانه‌ی $C = 5$ لیتری در دسترس داشته باشیم. در

$$A \stackrel{\circ}{=} B$$

منهوم هم پیمانی یا هم نهشتی را که بین ظرف ها برقرار است، می توان در Z تعمیم داد و در حالت کلی، این مفهوم را به صورت زیر تعریف کرد:

تعریف

اگر m عددی طبیعی و a و b دو عدد صحیح باشند، a و b را به پیمانه m («هم نهشت» گوئیم، هرگاه $(a-b)$ یا $(b-a)$ مضربی صحیح از m (پیمانه) باشد. به بیان دیگر، عبارت $(a-b)$ یا $(b-a)$ بر m بخش پذیر باشد، در این صورت می نویسیم:

$$a \stackrel{m}{=} b \quad (۱)$$

بیان ریاضی این تعریف چنین است:

$$\forall a, b \in Z, m \in N; a \stackrel{m}{=} b \Leftrightarrow a - b = km \text{ یا } m | (a - b)$$

قضیه ۱: رابطه ی هم نهشتی به پیمانه m ($\stackrel{m}{=}$) روی Z (مجموعه ی اعداد صحیح) یک رابطه ی هم ارزی است.

اثبات: باید ثابت کرد که رابطه ی $\stackrel{m}{=}$ دارای سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی است:

(الف) (انعکاسی) $\forall a \in Z, a - a = (0)m \Rightarrow a \stackrel{m}{=} a$

(ب) $\forall a, b \in Z, a \stackrel{m}{=} b \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | -(a - b)$

(تقارنی) $\Rightarrow m | (b - a) \Rightarrow b \stackrel{m}{=} a$

(ج) $\forall a, b, c \in Z, a \stackrel{m}{=} b, b \stackrel{m}{=} c \Rightarrow m | (a - b), m | (b - c)$

(تعدی) $\Rightarrow m | (a - b) + (b - c) \Rightarrow m | (a - c) \Rightarrow a \stackrel{m}{=} c$

در این جا، ثابت شد که رابطه ی $\stackrel{m}{=}$ ، یک رابطه ی هم ارزی است و چون هر رابطه ی هم ارزی، هر مجموعه ی تعریف شده روی آن را افزایش می کند، بنابراین، رابطه ی $\stackrel{m}{=}$ مجموعه ی Z را افزایش می کند و بنا به تعریف کلاس های هم ارزی، برای هر عضو Z ، کلاس هم ارزی یا دسته ی هم نهشتی، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\forall a \in Z, [a] = \left\{ x \in Z \mid x \stackrel{m}{=} a \right\}$$

برای مثال، اگر $m=2$ ، آن گاه خواهیم داشت:

$$[0] = \left\{ x \in Z \mid x \stackrel{2}{=} 0 \right\} = \left\{ x \in Z \mid x = 2k \right\}$$

$$= \{ \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \}$$

$$[1] = \left\{ x \in Z \mid x \stackrel{2}{=} 1 \right\} = \left\{ x \in Z \mid x = 2k + 1 \right\}$$

$$= \{ \dots, -3, -1, 1, 3, \dots \}$$

بدیهی است که $2 \in [0]$ ، پس $[2] = [0]$ و هم چنین $3 \in [1]$ ، پس $[3] = [1]$. به همین ترتیب، برای هر عضو دل خواه مثل a که $a \in [0]$ داریم $[a] = [0]$ و برای هر عضو دل خواه مثل b که $b \in [1]$ خواهیم داشت $[b] = [1]$. بنابراین رابطه ی $\stackrel{2}{=}$ فقط دو کلاس یا دسته ی هم نهشتی دارد که این دو مجموعه، Z را افراز می کنند:

(زیرا: $1 \in [1], 0 \in [0]$) $[0] \neq \emptyset, [1] \neq \emptyset$ الف

ب) $[0] \cap [1] = \emptyset$

ج) $[0] \cup [1] = Z$

تذکره ۱: رابطه ی $\stackrel{m}{=}$ دارای m دسته ی هم نهشتی $[0], [1], \dots, [m-1]$ است. در حالت کلی، دسته ی هم نهشتی عدد مفروض a به پیمانه m را با نماد $[a]_m$ نشان می دهیم.

تذکره ۲: شرط لازم و کافی برای آن که $x \in [a]_m$ ، آن است که داشته باشیم: $x \stackrel{m}{=} a$.

قضیه ۲: اگر عددی مثل a را بر m تقسیم کنیم و باقی مانده ی تقسیم را به r نشان دهیم ($a = mq + r$)، آن گاه خواهیم داشت:

$$a \stackrel{m}{=} r$$

اثبات: با توجه به فرض قضیه، یعنی $a = mq + r$ ، می توان نوشت $a - r = mq$ یا $m | a - r$. پس:

$$a \stackrel{m}{=} r$$

نتیجه: با استفاده از قضیه ی ۲، می توان عدد هم نهشت با عدد مفروض به پیمانه ی دل خواه را محاسبه کرد. یعنی کافی است عدد مورد نظر را به پیمانه تقسیم کنیم و باقی مانده ی تقسیم را به دست آوریم.

مثال: عدد هم نهشت با ۳۳۴ به پیمانه ی ۱۷ را بیابید.

حل: با توجه به تقسیم ۳۳۴ بر ۱۷، خواهیم داشت:

$$334 = 17 \times 19 + 11 \Rightarrow 334 \stackrel{17}{=} 11$$

قضیه ۳: برای عددهای صحیح k و s ، اگر $a \stackrel{m}{=} b$ ، آن گاه:

$$a + km \stackrel{m}{=} b + sm$$

اثبات: با توجه به فرض $a \stackrel{m}{=} b$ ، می توان نوشت:

$$a - b = t_1 m$$

هم چنین:

$$(a + km) - (b + sm) = (a - b) + m(k - s) = t_1 m + t_2 m = (t_1 + t_2)m = qm$$

پس:

$$(a + km) - (b + sm) = qm \Rightarrow a + km \equiv b + sm$$

نتیجه: اگر به دو طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی، هر مضرب صحیحی از پیمانه را اضافه کنیم، همیشه به یک هم‌نهشتی معادل خواهیم رسید. در حالت خاص، با فرض $k = 0$ ، خواهیم داشت:

$$a \equiv b + sm$$

بنابراین، همیشه دو طرف یا یک طرف هر رابطه‌ی هم‌نهشتی را می‌توان به اندازه‌ی هر مضرب پیمانه تغییر داد. برای مثال، هم‌نهشتی

$$a \equiv -3$$

معادل هم‌نهشتی $a \equiv 5$ یا $a \equiv 2$ است.

مسئله: در صورتی که a عددی صحیح باشد، ثابت کنید:

$$a \equiv 1 \text{ یا } a \equiv 0$$

حل: رابطه‌ی $a \equiv 1$ مجموعه‌ی Z را به دو مجموعه‌ی $[0]$ و $[1]$ افراز می‌کند و با توجه به تعریف افراز، باید $[0] \cup [1] = Z$ پس اگر

$a \in [1]$ یا $a \in [0]$ باشد، باید $a \equiv 1$ یا $a \equiv 0$ صحیح دل‌خواهی باشد. برطبق تعریف دسته‌های هم‌نهشتی خواهیم داشت:

$$a \in [0]_r \Rightarrow a \equiv 0; a \in [1]_r \Rightarrow a \equiv 1$$

تذکره ۱: گزاره‌ی « a و b به پیمانه m هم‌نهشت‌اند» را با یکی از نمادهای زیر نشان می‌دهند:

۱) $a \equiv b \pmod{m}$ (پیمانه‌ی m)

$$a \equiv b$$

$$a \equiv b \pmod{m}$$

در صورتی که $(a-b)$ مضرب m نباشد، a و b به پیمانه‌ی m نا هم‌نهشت‌اند. در این صورت می‌نویسیم:

$a \not\equiv b \pmod{m}$ (پیمانه‌ی m)

$$a \neq b \pmod{m}$$

تذکره ۲: می‌دانیم هر عددی بر ۱ بخش پذیر است. بنابراین، هر دو عدد صحیح به پیمانه‌ی ۱ هم‌نهشت‌اند. به همین دلیل در عمل، همیشه پیمانه‌هایی غیر از ۱ مورد نظر ما خواهند بود.

قضیه‌ی ۴: دو عدد صحیح a و b به پیمانه‌ی m هم‌نهشت‌اند، اگر و تنها اگر باقی‌مانده‌ی a بر m برابر باقی‌مانده‌ی b بر m باشد.

اثبات: با فرض این که a و b به پیمانه‌ی m هم‌نهشت‌اند، می‌توان

نوشت:

$$a \equiv b \Rightarrow a - b = km; a = b + km \quad (1)$$

اگر باقی‌مانده‌ی b بر m برابر r باشد:

$$b = sm + r; 0 \leq r < m \quad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$a = (sm + r) + km; a = (k + s)m + r, 0 \leq r < m$$

این برابری نشان می‌دهد که r باقی‌مانده‌ی a بر m است. یعنی a

و b هم باقی‌مانده‌اند.

به عکس: با فرض این که باقی‌مانده‌ی a و b بر m برابر باشد:

$$\begin{cases} a = km + r \\ b = k'm + r \end{cases} \Rightarrow a - b = m(k - k'); a \equiv b$$

توجه: هم‌نهشتی در واقع تعمیم برابری است و رفتار آن در

ارتباط با جمع و ضرب، مانند جمع و ضرب معمولی است. برخی

از این خواص را در قضیه‌ی زیر آورده‌ایم.

قضیه‌ی ۵: اگر m عدد طبیعی ثابت و a ، b و c اعداد صحیح

دل‌خواه باشند، در این صورت خواص زیر برقرار است:

$$1) a \equiv a$$

$$2) a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$$

$$3) a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$$

$$4) a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow a + c \equiv b + d$$

$$5) a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow ac \equiv bd$$

$$6) a \equiv b \Rightarrow a^k \equiv b^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$7) a \equiv b, a \equiv b \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m,n]}$$

$$8) a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c \pmod{[m,n]}$$

$$9) a \equiv b \Rightarrow (a, m) = (b, m)$$

$$10) ac \equiv bc, (m, c) = d \Rightarrow a \equiv \frac{m}{d} b$$

$$11) a \equiv 1 \Leftrightarrow (a, m) = 1$$

در این جا، هر قسمت را به طور خلاصه و مختصر اثبات

می‌کنیم:

۱. می‌دانیم برای هر a داریم $a - a = (0)m$ ، پس می‌توان

نوشت:

$$a \equiv a$$

۲. اگر $a \equiv b$ ، در این صورت $a - b = km$ و یا

$$b - a = (-k)m$$

$$b \equiv a$$

$$a_1 a_2 \dots a_k \equiv^m b_1 b_2 \dots b_k$$

۶. اگر در نتیجه ی ۲ فرض کنیم:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = a, \quad b_1 = b_2 = \dots = b_k = b$$

خواهیم داشت:

$$a \equiv^m b \Rightarrow a^k \equiv^m b^k$$

۷. با فرض $a \equiv^m b$ و $a \equiv^n b$ ، به ترتیب می توان نوشت

$$n | (a-b), \quad m | (a-b)$$

$$[m, n] | (a-b) \Rightarrow a \equiv^{[m, n]} b$$

نتیجه: اگر $a \equiv^m b$ و $a \equiv^n b$ و $(m, n) = 1$ ، بدیهی است که

$$[m, n] = mn \text{ پس:}$$

$$a \equiv^{mn} b$$

۸. با فرض $(m, n) = d$ ، خواهیم داشت $d | m$ و $d | n$. پس:

$$\begin{cases} d | m \\ d | n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | (a-b)(1) \\ d | n(b-c) \end{cases} \Rightarrow$$

$$d | (b-c) \quad (2) \Rightarrow d | (a-b) + (b-c) \Rightarrow d | (a-c) \Rightarrow a \equiv^d c$$

۹. با فرض $(a, m) = d_1$ و $(b, m) = d_2$ ، ثابت می کنیم

$$d_1 = d_2$$

با توجه به فرض، یعنی $a \equiv^m b$ ، داریم $a - b = km$. پس:

$$(a, m) = d_1 \Rightarrow \begin{cases} d_1 | a \\ d_1 | m; d_1 | km \end{cases} \Rightarrow d_1 | a - km = b$$

می دانیم اگر $d_1 | m$ و $d_1 | b$ ، آن گاه $d_1 | (b, m) = d_2$ و در

نتیجه خواهیم داشت: $d_1 \leq d_2$

به همین ترتیب، می توان ثابت کرد که $d_2 \leq d_1$ یا $d_2 | d_1$.

بنابراین در کل ثابت می شود: $d_1 = d_2$.

۱۰. با فرض $ac \equiv^m bc$ ، خواهیم داشت $m | (ac - bc)$ یا

$$m | c(a-b) \text{ پس:}$$

$$c(a-b) = km \xrightarrow{\text{(تقسیم بر } c)} \frac{c}{d}(a-b) = \frac{m}{d}k$$

$$\Rightarrow \frac{m}{d} | \frac{c}{d}(a-b)$$

$$\xrightarrow{\substack{(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}) = 1 \\ \text{(لم اقلیدس)}}} \frac{m}{d} | (a-b) \Rightarrow a \equiv^{\frac{m}{d}} b$$

نتیجه: اگر $ac \equiv^m bc$ و $(m, c) = 1$ ، آن گاه $a \equiv^{\frac{m}{d}} b$

۳. با فرض $a \equiv^m b$ و $b \equiv^m c$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a - b = km \\ b - c = k'm \end{cases} \Rightarrow a - c = (k + k')m \Rightarrow a \equiv^m c$$

۴. با فرض $a \equiv^m b$ و $c \equiv^m d$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a - b = km \\ c - d = k'm \end{cases} \Rightarrow (a + c) - (b + d) = (k + k')m$$

$$\Rightarrow a + c \equiv^m b + d$$

نتیجه ی ۱: در حالت خاص خواهیم داشت:

$$a \equiv^m b \Rightarrow a \pm c \equiv^m b \pm c$$

نتیجه ی ۲: به استقرا می توان نشان داد که اگر داشته باشیم:

$$\begin{matrix} a_1 & \equiv^m & b_1 \\ a_2 & \equiv^m & b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots \\ a_k & \equiv^m & b_k \end{matrix}$$

آن گاه:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \equiv^m b_1 + b_2 + \dots + b_k$$

۵. با فرض $a \equiv^m b$ و $c \equiv^m d$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a - b = km \\ c - d = k'm \end{cases}; \quad \begin{cases} a = b + km \\ c = d + k'm \end{cases}$$

از ضرب دو رابطه ی فوق خواهیم داشت:

$$ac = bd + (bk' + dk + kk'm)m \Rightarrow ac \equiv^m bd$$

نتیجه ی ۱: در حالت خاص خواهیم داشت:

$$a \equiv^m b \Rightarrow ac \equiv^m bc$$

نتیجه ی ۲: به استقرا می توان نشان داد که اگر داشته باشیم:

$$\begin{matrix} a_1 & \equiv^m & b_1 \\ a_2 & \equiv^m & b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots \\ a_k & \equiv^m & b_k \end{matrix}$$

آن گاه:

۶. باقی مانده ی تقسیم $31 + 3^2(32)^{15}$ بر ۱۵ را بیابید.

حل:

$$2^5 = 32 \equiv 2, 2^4 \equiv 1, (2^4)^{200} \equiv 1; 2^{800} \times 2^2 \equiv 2^2 \\ 2^{802} \equiv 4, 3^{2802} \equiv 2^{802} \Rightarrow 3^{2802} \equiv 4; 3^{2802} + 31 \equiv 4 + 31 \\ (3^{2802} + 31) \equiv 35 \equiv 5 \Rightarrow r = 5 \text{ (باقی مانده ی تقسیم)}$$

۷. باقی مانده ی تقسیم $9 \times (7006)^{2001}$ بر ۷ را بیابید.

حل:

$$7006 \equiv 6 \equiv -1; (7006)^{2001} \equiv (-1)^{2001} \equiv -1; \\ 9 \times (7006)^{2001} \equiv -9 \equiv 5; 9 \times (7006)^{2001} \equiv 5 \Rightarrow r = 5 \\ ۸. باقی مانده ی تقسیم $(2^{12} - 4)$ بر ۲۳ را بیابید.$$

حل:

$$2^6 \equiv 18 \equiv -5, 2^5 \equiv 9 \Rightarrow 2^6 \times 2^5 \equiv -45 \equiv 1 \\ 2^{11} \equiv 1; 2^2 \times 2^{11} \equiv 2^2; 2^{12} \equiv 4; 2^{12} - 4 \equiv 0 \Rightarrow r = 0$$

تمرین

۱. اگر $x \equiv 37$ ، باقی مانده ی x بر ۵ چه عددی است؟

۲. اگر x بر ۱۳ باقی مانده ی ۷ دهد، $8x - 1$ ، بر ۱۳ چه باقی مانده ای می دهد؟

۳. اگر n بر ۷ باقی مانده ی ۴ دهد و $x = n^2 + 3n^2 + 4n + 1$ ، باقی مانده ی x بر ۷ چه عددی است؟
۴. اگر باقی مانده های تقسیم x بر ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۳ و ۵ باشند، باقی مانده ی تقسیم x بر ۵۶ چه عددی است؟

۵. باقی مانده ی تقسیم 64^{1377} بر ۱۳ چه عددی است؟

۶. باقی مانده ی تقسیم $65^{1377} + 66^{1377}$ بر k بر ۱۳ چه عددی است؟

۷. باقی مانده ی تقسیم $s = (67 \times 68)^{1377}$ بر ۱۳ چه عددی است؟

۵۱

۸. باقی مانده ی تقسیم 7^{1382} بر عدد ۱۹ چه عددی است؟

۹. باقی مانده ی تقسیم 11^{1383} بر عدد ۶۱ چه عددی است؟

۱۰. باقی مانده ی تقسیم 13^{581385} بر عدد ۴۱ را تعیین کنید.

۱۱. باقی مانده ی تقسیم $N = 19^{57} + 13^{75}$ بر عدد ۱۷ را تعیین کنید.

۱۲. باقی مانده ی تقسیم $5(7006)^{2005}$ بر عدد ۷ را بیابید.

ادامه دارد...

۱۱. با فرض $a \equiv 1$ ، خواهیم داشت $a - 1 = km$ یا

$a = km + 1$. پس $(a, m) = 1$ و به عکس، اگر $(a, m) = 1$ ،

خواهیم داشت $a = km + 1$ یا $a - 1 = km$. پس $a \equiv 1$ ،

نتیجه: با فرض $(a, m) = 1$ ، خواهیم داشت:

$$(n \in \mathbb{N}) \quad a^n \equiv 1$$

نکته: به طور کلی، اگر $a \equiv r$ و $0 \leq r < m$ ، در این صورت

باقی مانده ی a بر m برابر r است.

مسائل حل شده

۱. عدد ۱۳۴ به پیمانه ی ۷، با چه عددی بین صفر و ۷ هم نهشت

است؟

حل: ابتدا عدد ۱۳۴ را بر ۷ تقسیم می کنیم:

$$134 = 19(7) + 1$$

بدیهی است، باقی مانده ی این تقسیم، جواب مسئله است:

$$134 \equiv 1 \quad (19(7) \equiv 0 \text{ (زیرا)})$$

۲. با فرض $a \equiv -2$ ، نشان دهید $a \equiv 3$.

حل: با توجه به $a \equiv -2$ ، می توان به طرف دوم فرض، صفر را

افزود:

$$5 \equiv 0 - 2 \equiv 5 - 2 \equiv 3 \Rightarrow a \equiv 3$$

۳. با فرض $a \equiv 79$ ، باقی مانده ی a بر ۹ را به دست آورید.

$$\text{حل: (زیرا: } 79 \equiv 0) \quad a \equiv 79 \Rightarrow a \equiv 7$$

۴. باقی مانده ی تقسیم 2^7 ، 4^7 ، 2^{21} را بر ۲۹ بیابید.

حل:

$$2^7 = 128 = 4(29) + 12 \Rightarrow 2^7 \equiv 12$$

$$4^7 = 2^{14} = (2^7)^2 \equiv (12)^2 \equiv 144 \equiv 28$$

$$2^{21} = (2^7)^3 \equiv (12)^3 \equiv 1728 \equiv 59(29) + 17 \equiv 17$$

۵. باقی مانده ی تقسیم $[5 \times (41)^{83}]^{1379}$ بر ۹ را به دست

آورید.

حل:

$$41 \equiv 5, 5^3 \equiv 125 \equiv 8 \equiv -1 \Rightarrow 5^3 \equiv -1$$

$$(5^3)^{27} \equiv (-1)^{27} \equiv -1 \Rightarrow 5^{81} \times 5^2 \equiv (-1) \times 5^2 \Rightarrow 5^{83} \equiv -25$$

$$(41)^{83} \equiv 5^{83} \equiv -25 \equiv 27 - 25 \equiv 2 \Rightarrow 5 \times (41)^{83} \equiv 10 \equiv 1$$

$$\Rightarrow [5 \times (41)^{83}]^{1379} \equiv 1$$

مدت‌های مدیدی است که ریاضیات به عنوان درسی که یادگرفتن آن دشوار است، شهرت دارد. برای بسیاری از دانش‌آموزان، ریاضی درس سختی است که فراگرفتن آن زحمت زیادی دارد. وقتی من خود را به عنوان دبیر ریاضیات به کسی معرفی می‌کنم، اولین واکنش او بیان این جملات است که: «در مدرسه، من در درس ریاضی خیلی ضعیف بودم.» یا این که: «من از ریاضی متنفرم...» چنین نظرانی، در مورد درس‌های دیگر کمتر بیان می‌شوند. در این سال‌ها که من معلم دانش‌آموزان زیادی بوده‌ام، متوجه شده‌ام که گروهی از آن‌ها در آموختن ریاضیات مشکلات جدی داشته‌اند. در حالی که عده‌ای دیگر، تنها به این راهنمایی نیاز داشته‌اند که چگونه ریاضیات را بخوانند و توانایی خود را در آن به حداکثر برسانند.

ریاضی بیش از سایر درس‌ها به روش‌های مطالعه‌ای خاص احتیاج دارد. در این متن به اختصار بعضی از این روش‌ها را بررسی می‌کنیم.

شناخت ریاضی

ریاضیات مجموعه‌ای از مباحث است که هر مبحث به طور جداگانه، برپایه‌ای متکی است که تمام مباحث قبلی را شامل می‌شود. اگر در هر یک از این مباحث ضعیف هستید، آن را کاملاً یاد بگیرید و سپس آموختن مبحث بعدی را آغاز کنید. هیچ‌گاه ضعف‌های خود را نادیده نگیرید و همان‌طور به درس ادامه ندهید. بدانید که ضعف‌ها خیلی زود شما را دچار زحمت و مشکل خواهند کرد.

مفاهیم و قضایا

مفاهیم و قضایای ریاضی، تقریباً جزو محسوسات جهان اطراف ما نیستند. اما با این حال، روش‌های بسیاری برای محسوس‌تر و قابل فهم‌تر کردن آن‌ها وجود دارد. در مورد درک مفاهیم، برای این که یک مفهوم را کاملاً درک کنید، باید چند مثال از آن را مطالعه کنید. اغلب اوقات، دانش‌آموزان تعاریف را حفظ می‌کنند. حفظ کردن تعاریف زبانی ندارد، اما به خودی خود هم مفید نیست، چون به زودی فراموش می‌شوند. بهترین راه درک تعاریف، مطالعه‌ی مثال‌های خاص است. برای مطالعه‌ی مثال‌ها،

چند منبع در دسترس شماست؛ کتاب درسی برای هر مفهوم اصلی و تعریف، تعداد زیادی مثال آورده است. معلم نیز در کلاس درس، مثال‌های بیشتری را ارائه می‌کند. برای آن که درک خود را از تعاریف قوی‌تر کنید، باید خودتان نیز مثال بسازید یا با حل مسئله‌های کتاب درسی، موارد صدق یا نقض تعریف را پیدا کنید.

اثبات قضایا

اولین و مهم‌ترین قدم این است که بفهمید، یک قضیه چه می‌گوید و چگونه می‌توان آن را در مسئله‌ها به کار بست، تا این که بدانید قضیه به چه طریقی اثبات می‌شود. تنها موقعی به اثبات یک قضیه توجه کنید که کاملاً درک کرده باشید، آن قضیه چه می‌گوید و مثال‌های زیادی هم در مورد آن حل کرده باشید. آن وقت است که از عهده‌ی اثبات قضیه برخوردار شوید.

داریوش عابد

تجسم ذهنی

تجسم ذهنی را به عنوان یک 'بازار کمکی' اثبات قضایا برای مطالعه‌ی درس و یادگیری آن به کار ببرید و نگران نباشید که احتمالاً با تجسم ذهنی، به نوعی خود را فریب می‌دهید و ریاضی را فقط باید در فرم شفاهی آن یاد بگیرید. این دقیقاً همان کاری است که ریاضی‌دان‌ها به عنوان امری عادی می‌پندارند. در حقیقت، علم ریاضیات با انجام همین تصاویر مجسم و شهودی توسعه می‌یابد. پس شما هم می‌توانید در اثبات قضایا، از اشکال و تصاویر استفاده کنید و پس از استدلال ایده‌های خود به صورت تصویری، آن‌ها را به صورت شفاهی و محاسباتی درآورید.

استفاده از منابع تمرین

درس ریاضی مانند یک سریال تلویزیونی نیست که مثل یک بیننده‌ی خاموش، تنها به تماشای آن بپردازید، بلکه باید در آن مشارکت کنید و برای تأمین این هدف، تمرین‌های زیادی حل کنید. برای حل تمرین، منابع بسیاری در اختیار شما هستند؛ اول از همه، تمرین‌های آخر هر بخش در کتاب درسی، بعد مجموعه‌ی مسائل یادآوری در آخر هر فصل، سپس مسائل و پلی‌کی‌های اضافی که معلم به شما می‌دهد، هم چنین در بازار کتاب‌های بسیاری در این زمینه وجود دارند.

معمولاً اولین مجموعه تمرین در مجموعه تمرین‌های آخر هر بخش کتاب درسی، تعمیم ساده‌ای از مثال‌های متن کتاب هستند و شما می‌توانید با حل آن‌ها، مهارت‌های پایه‌ای خود را تقویت کنید. قبل از حل این تمرین‌ها، حتماً تکنیک‌های محاسباتی مهم آن بخش را که غالباً در میان کادر یا با رنگی متفاوت نوشته شده‌اند، مطالعه کنید. در بیشتر کتاب‌ها، مجموعه‌ی تمرین‌ها طوری ترتیب داده شده‌اند که بعد از آن‌ها، تمرین‌هایی می‌آیند که هم شامل مباحث فصل جاری هستند و هم به مباحث بخش‌های قبل مربوط می‌شوند. برای آن که در درس ریاضی کاملاً مهارت پیدا کنید، باید تعداد زیادی از این تمرین‌ها را حل کنید. تا وقتی که در حل این گونه تمرین‌ها توانایی لازم را کسب نکرده‌اید و یا با آن‌ها مشکلی دارید، به تمرینات دشوار یا به اصطلاح ستاره‌دار، حتی فکر هم نکنید.

روش‌های حل مسائل

در حل مسائل و تمرینات و انجام

محاسبات، لازم است عملیات جبری و حسابی انجام دهید. چنین محاسباتی، اشتباهاتی را ایجاد می کنند که علت آن ها درست نفهمیدن مفهوم درس نیست، بلکه بی دقتی و نداشتن تمرکز است. بعضی از مسائل ریاضی نیز چند قسمتی هستند؛ مثل مسائل رسم منحنی و یافتن ماکزیمم و می نیمم. در حل این مسائل هم خیلی دقت کنید، چون اگر در مرحله ی اول اشتباهی مرتکب شوید، جواب بقیه ی قسمت ها نیز نادرست به دست می آید. هم چنین، هیچ مرحله ای از محاسبات را ذهنی انجام ندهید، چون محاسبات ذهنی معمولاً عاری از خطا و اشتباه نیستند.

اهمیت کتاب درسی

کتاب درسی بهترین منبع است که در اختیار دارید. کتاب شامل شرح تعاریف و قضایا، مثال های حل شده، تمرین ها و مطالب یادآوری است. ممکن است به نظر برسد نقش کتاب درسی کاملاً واضح و روشن است و دیگر به توضیح نیازی ندارد. با این حال، ذکر چند نکته را لازم می دانم. اول از همه باید بدانید که کتاب ریاضی را نمی توان مثل دیگر کتاب ها مطالعه کرد. کتاب های ریاضی با دقت بسیار نوشته شده اند و باید با دقت بسیار مطالعه شوند. یعنی نباید انتظار داشته باشید که صفحات یک کتاب ریاضی را به سرعت مطالعه و مطالب آن را هم درک کنید. این روش مطالعه شاید برای یک کتاب داستان و رمان مناسب باشد، اما درباره ی ریاضیات این طور نیست.

کتاب ریاضی را باید با دقت بسیار مطالعه کرد و جزئیات هر تعریف، قضیه یا مثال را بررسی نمود. بد نیست موقع مطالعه ی کتاب ریاضی، مداد و کاغذ به دست بگیرید تا بتوانید محاسبات را پیش خود بررسی کنید. بعد از خواندن هر تعریف یا قضیه، سعی کنید بدون نگاه کردن به کتاب، آن را تکرار کنید. قبل از خواندن جواب مثال ها، سعی کنید خودتان آن ها را حل کنید. فقط بعد از آن که مسئله را حل کردید و یا در حل مسئله با مشکلی مواجه شدید، به جواب کتاب نگاه کنید.

تکلیف منزل

تکلیف منزل قسمت اساسی در درس ریاضیات است. چه طور انتظار دارید بدون انجام تعداد زیادی تمرین، در حل مسائل ریاضی

متبحر شوید؟ حتماً معلمانتان تعدادی تمرین تعیین می کنند تا شما حل کنید. در حل این تمرین ها کوشا باشید. تمام مسائل را حل کنید و جزئیات را موبه مو انجام دهید. ممکن است معلمتان شما را مکلف به تحویل تمرین ها به صورت کتبی کند یا نه. در هر حال، حتی اگر ملزم به نوشتن تمرین ها نشده اید، باید آن ها را در دفترتان حل کنید. اگر مسئله را ذهنی حل کنید، هیچ راهی برای بررسی کردن جزئیات وجود ندارد. من اکثر اوقات با دانش آموزانی برخورد می کنم که وقتی نمره شان را می بینند، مأیوس می شوند و ادعا می کنند درس را فهمیده اند، اما سر امتحان گیج شده اند. این افراد، اگر تکلیف های منزلشان را به تفصیل می نوشتند، هیچ گاه از نتیجه ی کارشان تعجب نمی کردند.

توصیه ی مهم

توصیه می شود سعی کنید، قبل از آن که مطالب در کلاس درس ارائه شوند، آن ها را از کتاب درسی بخوانید. زمانی که معلم درس می دهد، به نکاتی که هنگام مطالعه ی درس از کتاب نفهمیده اند، توجه کنید و مطمئن شوید که این نکات در کلاس درس برای شما تفهیم شده اند. بعداً می توانید دوباره کتاب را بخوانید. سعی کنید کلاس ها را از دست ندهید و مهم تر از همه سعی کنید عقب نیفتید. ریاضیات درسی به هم پیوسته است؛ اگر درس دیروز را یاد نگرفته باشید، نمی توانید تمرین های امروز را حل کنید. به علاوه از درس فردا هم سردر نخواهید آورد. پس علاوه بر حضور مستمر و پویا در کلاس، حتماً یادداشت هایی بردارید.

بعضی از دانش آموزان، کلمه به کلمه ی حرف های معلمشان را یادداشت می کنند، در حالی که بعضی دیگر تنها کلیات درس را می نویسند. شما نیز می توانید از روش خاص خود برای یادداشت برداشتن استفاده کنید؛ روشی که با عادت ها و نیازهای مطالعاتی شما سازگار است. اما به هر حال در کلاس درس معلم، یادداشت بردارید و نسبت به کلاس درس برخوردی فعال داشته باشید. درس را گوش دهید و تجزیه و تحلیل کنید.

اگر مطلبی را نفهمیدید، از سؤال کردن نترسید. می دانم که ممکن است پرسیدن سؤال در مقابل دانش آموزان دیگر کار آسانی نباشد،

اما نباید این احساس را هم داشته باشید که با پرسیدن سؤال، نادانی خود را در معرض نمایش گذاشته اید. بسیاری از سؤالاتی که به ذهن شما می رسند، برای هم کلاسی هایتان هم مطرح هستند. آن ها حتماً خوش حال می شوند شما سؤالاتی را که برای آن ها هم مطرح اند، پرسید. در ضمن، نگران نظر و بیان معلم هم نباشید.

امتحان

از امتحان داین فرار نکنید. معلم برای این که اطلاعات شما را درباره ی درس آزمایش کند، در کلاس امتحان می گیرد. به نظر من، امتحان شانس خوبی برای دانش آموزان است تا درجه ی مهارت خود را در درس بیازمایند. این بهترین فرصت برای آزمودن پیشرفت توانایی آن ها در ریاضیات است. اگر از امتحان دادن می ترسید، بهتر است قبل از آن اقدامات زیر را انجام دهید:

- اول این که یادداشت های کلاسی خود را مرور کنید.
- تکلیف های منزل را مرور کنید. مطمئن شوید که می توانید همه ی تمرین های تعیین شده را حل کنید.
- همه ی قضایا و تعاریف را خوب بخوانید و بفهمید، تا آن جا که به راحتی بتوانید آن ها را روی کاغذ بیاورید.
- تا آن جا که می توانید تمرین حل کنید. معمولاً تعداد تمرین های کتاب درسی آن قدر زیاد است که معلم نمی تواند همه ی آن ها را به عنوان تکلیف منزل برای شما تعیین یا در کلاس حل کند. پس هنگام آماده شدن برای امتحان، از هر بخش تعدادی از تمرین های حل نشده را حل کنید. می توانید از ابزارهای کمک درسی سمعی و بصری، مانند نوار یا کتاب های کمک آموزشی هم استفاده کنید.

- وقت خود را با عقل و درایت صرف کنید. دنبال بهانه نگردید. کار خود را به طور منظم انجام دهید. در این صورت، ریاضی را آسان و لذت بخش خواهید یافت.

مطالب گفته شده را به کار ببندید. بسیار مایلیم نظرات شما را در این باره بدانیم، لذا با ما مکاتبه کنید.

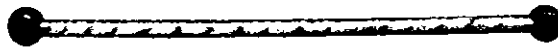
منبع:

یکی از مقالات دکتر لاری جونل گلدشتاین از سایت:

www.projeeteuclid.org



۱. تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $(k+1)$ عضوی، ۴۸ واحد از تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $(k+3)$ عضوی کمتر است، حاصل $(k^2 - k + 1)$ را بیابید.
۲. فرض کنید a کوچک ترین عدد طبیعی باشد که $N = 3^5 \times 6^7 \times 13^5 \times a$ مربع کامل یک عدد طبیعی باشد، در این صورت مجموع مقسوم علیه های مثبت a را بیابید.
۳. اگر عدد $6\sqrt{24}$ به کسر تحویل ناپذیر $\frac{a}{b}$ تبدیل شود، آن گاه مجموع رقم های دهگان اعداد a و b را بیابید.
۴. عبارت های زیر را تجزیه کنید.
۵. خارج قسمت تقسیم عبارت $8x^3 + 2x^2 + x + 1$ بر $x^2 - kx + 1$ مقدار $m+n+k$ را بیابید.
۶. اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ آن گاه مقدار $A = \frac{x^2}{(x+1)^2}$ را بیابید.
۷. مختصات سه رأس مثلثی به صورت $A(0, -1)$ ، $B(2, -4)$ ، $C(3, 1)$ است.
۸. نوع مثلث را مشخص کنید.
۹. نمودار معادله $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$ از نقطه $A(a, b)$ دو بار عبور می کند، این نقطه را بیابید.
۱۰. حاصل عبارت $\frac{1}{(\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7})}$ را بیابید.
۱۱. انتهای کمان α در کدام ناحیه باشد تا عبارت $\frac{\tan \alpha + \sin \alpha}{\cot \alpha + \cos \alpha}$ همواره مثبت باشد.
۱۲. مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} |x| < 2 \\ |x| < |2x - 1| \end{cases}$ را بدست آورید.
۱۳. معادله $2x^2 + y - x - \frac{3}{y} = 0$ محور تقارن منحنی نمایش تابع $y = \frac{3}{x}$ را بدست آورید.
۱۴. مکعب مستطیلی با قاعده مربع شکل و ارتفاع ۸ مفروض است. اگر عدد حجم مکعب ۱۰ واحد کمتر از عدد سطح مکعب مستطیل باشد، حجم مکعب را بیابید.

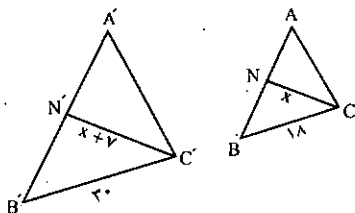


۱. دامنه تعریف هریک از معادله های زیر را تعیین و معادله را حل کنید.
۲. اولاً نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ x - 2 & x < 0 \end{cases}$ را $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ رسم کنید و از روی آن، یک به یک و پوشایی f را تحقیق کنید. ثانیاً مقدار $f(f(\frac{1}{2}))$ را به دست آورید.
۳. اولاً مقدار k را طوری به دست آورید که دستگاه معادلات $\begin{cases} kx + (k+2)y = k+4 \\ (k+1)x + 3ky = 4k+1 \end{cases}$ بی شمار جواب داشته باشد. ثانیاً به ازای k ، دستگاه معادلات فوق را به روش ماتریس وارون حل کنید.
۴. نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{|x|}{x} - x$ را به ازای $2 \leq x < 2$ رسم کنید.
۵. معادله $\log 2 + \log(x^2 - 1) - \log(4x - 1) = 0$ را به دست آورید.
۶. دنباله $a_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 - n + 1}$ مفروض است. اولاً چندمین جمله از این دنباله مساوی $\frac{5}{4}$ است. ثانیاً آیا جمله ای از این دنباله مساوی ۲ است؟
۷. تصاعد حسابی را مشخص کنید که مجموع هشت جمله ی نخست آن، نصف مجموع هشت جمله ی بعدی آن باشد و دوبرابر جمله ی چهارم آن، ۷ واحد از جمله ی هشتم آن بیشتر باشد.
۸. m را طوری به دست آورید که $2m + 1$ و $m - 8$ سه جمله ی متوالی از یک تصاعد هندسی باشند.
۹. درستی اتحاد های زیر را اثبات کنید:
۱۰. معادله ی مثلثاتی زیر را حل کنید:
۱۱. نقاط $A(1, -1)$ ، $B(2, 3)$ و $C(-3, 1)$ مفروض اند. مختصات بردارهای $\vec{a} = \vec{AB}$ ، $\vec{b} = \vec{AC}$ و $\vec{c} = \vec{BC}$ را به دست آورید و سپس بردارهای $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ و $\vec{a} - \vec{c}$ را بر حسب بردارهای واحد نمایش دهید. هم چنین زاویه ی بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.
۱۲. با حروف کلمه ی «آهستگی»، چند کلمه ی چهار حرفی می توان نوشت؟ چنداناً از این کلمات با حرف «ت» شروع می شوند؟ چنداناً از آن ها بدون نقطه هستند؟
۱۳. سه دانش آموز سال اول، چهار دانش آموز سال دوم و پنج دانش آموز سال سوم، به اردوی آموزشی رفته اند.
۱۴. الف) اگر بخواهیم از بین آن ها یک تیم فوتبال شش نفره تشکیل دهیم، به طوری که از هر پایه به تعداد مساوی در تیم عضویت داشته باشند، این کار به چند طریق مقدور است؟
- ب) اگر از این جمع به تصادف یک گروه چهار نفره انتخاب کنیم، چه قدر احتمال دارد که دوتا از آن ها کلاس اول و دوتا کلاس سوم باشند؟ چه قدر احتمال دارد که هیچ دانش آموز سال سومی در تیم نباشد؟

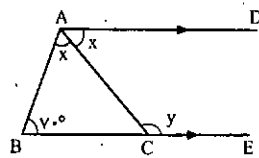




مثلت هستند. اندازه‌ی این دو میانه را تعیین کنید.

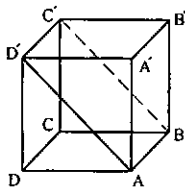


۱. اندازه‌ی x و y را در شکل داده شده تعیین کنید. (پیکان‌های هم‌جهت، خط‌های موازی را نشان می‌دهند.)



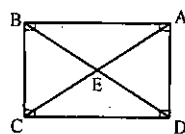
۸. مکعب مستطیلی به قطر $\sqrt{138}$ داده شده است که اندازه‌ی طول و عرض قاعده‌اش ۵ و ۷ است. دربار‌ه‌ی این مکعب مستطیل حساب کنید:
(الف) اندازه‌ی ارتفاع را.
(ب) اندازه‌ی مساحت جانبی، مساحت کل و حجم را.

۹. در مکعب داده شده، اندازه‌ی مساحت ABCD مساوی $36\sqrt{2}$ است. اندازه‌ی حجم آن را تعیین کنید.

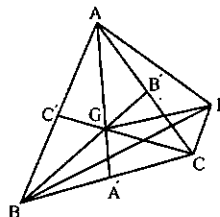


۲. چهار ضلعی ABCD مستطیل و نقطه‌ی E برخورد قطرهای آن است. نسبت x به y را در هریک از حالت‌های زیر تعیین کنید:

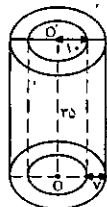
(الف) $AC = 2x + y$, $BD = 16$, $AD = x - 2y$, $BC = 3$
(ب) $AE = 2x$, $BE = y$, $ED = x + 1$



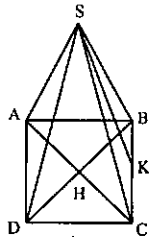
۳. اگر نقطه‌ی G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC را به نقطه‌ی P واقع در خارج این مثلث وصل کنیم، ثابت کنید یکی از سه مثلث PGA، PGB و PGC، معادل مجموع دو مثلث دیگر است.



۱۰. قاعده‌های دواستوانه‌ی شکل رویه‌رو، برهم‌منطبق و مرکزهای دو قاعده نیز برهم‌منطبق هستند. با توجه به شکل، اندازه‌ی حجم فضای بین این دو استوانه را تعیین کنید.

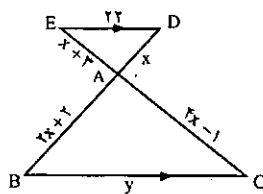


۱۱. در هرم مربع القاعدی منظم SABCD، اندازه‌ی ارتفاع هرم مساوی ۲۴ سانتی‌متر و اندازه‌ی سهم هرم مساوی ۲۶ سانتی‌متر است. اندازه‌ی حجم آن را تعیین کنید.



۴. تفاضل اندازه‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه، مساوی ۳۱ است. اگر اندازه‌ی مساحت این مثلث ۱۸۰ واحد سطح باشد، اندازه‌ی ضلع‌های آن را تعیین کنید.

۵. واسطه‌ی هندسی بین دو مقدار $\sqrt{2a}$ و $\sqrt{18a^3}$ را تعیین کنید.
۶. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل داده شده تعیین کنید. پیکان‌های هم‌جهت، خط‌های موازی را نشان می‌دهند.



۱۲. سطح کره‌ای به شعاع R با سطح کل مخروط قائمی به شعاع قاعده‌ی $\frac{R}{4}$ مساوی است. اندازه‌ی ارتفاع مخروط را تعیین کنید.



a و b را بیابید.

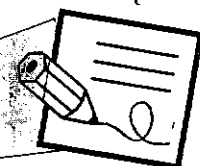
۳. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \tan^2 4x + \cot^2 2x$ مفروض است. $f'(\frac{\pi}{12})$ را بیابید.

۴. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + mx + 1}$ ، حدود m را چنان بیابید که نمودار تابع سه مجانب داشته باشد.

۷. دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه و CN و C'N' دو میانه‌ی متناظر از این دو

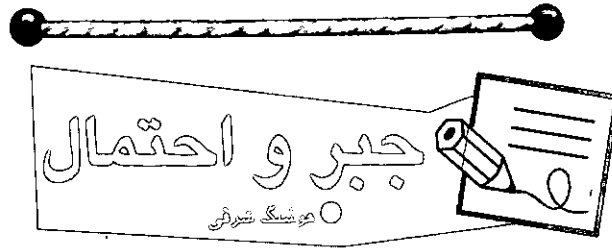
۱. مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x^2+11} - 3}$

۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} b \sin \pi x & , x < 0 \\ \sqrt{1 - \cos \pi x} & , x > 0 \\ a[x-1] & , x = 0 \end{cases}$ پیوسته است.



۵. نقطه‌ای روی محور y ‌ها بیابید که بتوان از آن، دو مماس عمود بر هم بر نمودار تابع با ضابطه $y = -x^2 + 2$ رسم کرد.
۶. معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ای به طول ۸ واقع بر منحنی تابع بیابید.
۷. اگر خط به معادله‌ی $y = -2x + 1$ از نقاط اکثر مماسی تابع با ضابطه‌ی

- $f(x) = x^2 - 3x^2 + mx + 5$ بگذرد، مقدار m را بیابید.
۷. معادله‌ی $\cos 2x + 3 \cos x - 4 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.
۸. جدول تغییرات و نمودار دو تابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.
- (الف) $y_1 = -x^2 + 3x^2 - 1$ (ب) $y_2 = \frac{2x-1}{2x+1}$



۱. به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$2^n - 2n + 5 = 2^n$$

۲. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$1 + x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 2)$$

۳. می‌دانیم $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ نیز عددی گنگ است.

۴. از جمعی که در آن سی جفت کش بیجه گانه در چهار رنگ متفاوت وجود دارد، لااقل چند جفت باید خارج کنیم تا مطمئن شویم که سه جفت آن‌ها همرنگ هستند؟

۵. ثابت کنید هرگاه x و y دو عدد گویای غیر صفر باشند، حاصل تقسیم آن‌ها نیز عددی گویاست.

۶. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

۷. اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$ باشد، مجموعه‌ی $A^c - A \times B$ را با اعضای خود نمایش دهید و نمودار هندسی آن را رسم کنید.

۸. رابطه‌ی زیر در مجموعه‌ی $\mathbb{R}^2$ مفروض است. اولاً، نشان دهید این رابطه هم‌ارزی است. ثانیاً، کلاس هم‌ارزی $[(-2, 1)]$ را مشخص کنید.

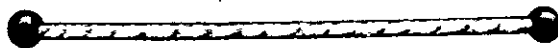
۹. یک تیم فوتبال در دو هفته‌ی متوالی دو مسابقه داده است. نتیجه‌ی هر مسابقه می‌تواند برای این تیم برد، باخت یا مساوی شود.
- (الف) فضای نمونه‌ی این پدیده‌ی تصادفی را بنویسید.
- (ب) پیشامد A را که در آن این تیم، لااقل یک برد داشته است، بنویسید.
- (ج) پیشامد B را که در آن این تیم، فقط یک باخت داشته است، بنویسید.
- (د) پیشامدهای $A \cap B$ و $A^c - B$ را مشخص کنید.
۱۰. می‌خواهیم از بین ۵ مرد و ۴ زن، یک کمیته‌ی چهارنفره تشکیل دهیم. مطلوب است تعیین احتمال آن که: (الف) تعداد مردها در کمیته بیشتر باشد. (ب) تعداد زن‌ها در کمیته بیشتر باشد.

۱۱. در یک مسابقه‌ی دو، شانس برد A ، دو برابر شانس برد B و نصف شانس برد C و شانس برد B ، سه برابر شانس برد D است. شانس برد D و احتمال برد B یا C را به دست آورید.

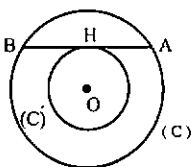
۱۲. دو دوست بین ساعت ۸ تا ۸:۲۰ در جایی قرار ملاقات دارند. مطلوب است تعیین احتمال آن که هیچ یک بیشتر از ۵ دقیقه معطل نشود.

۱۳. یک عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰۱، به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین احتمال آن که این عدد مضرب ۳ یا ۵ باشد، ولی مضرب ۷ نباشد.

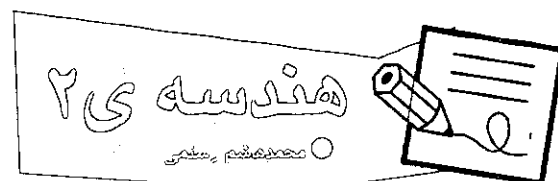
۱۴. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ی S باشند، ثابت کنید:

$$P(A^c - B) = P(A^c) + P(B^c) - P(A \cap B)^c$$


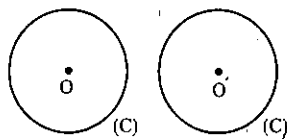
طول ۲۴ سانتی متر، بر دایره‌ی C' مماس است. اگر نسبت شعاع‌های این دو دایره مساوی $\frac{1}{3}$ باشد، اندازه‌ی این دو شعاع را تعیین کنید.



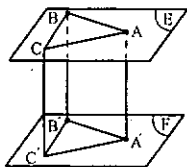
۱. در مثلث ABC ، $\hat{A} = 65^\circ$ و $\hat{B} = 40^\circ$ است. ترتیب اندازه‌های سه ضلع این مثلث را مشخص کنید.
۲. ثابت کنید در هر مثلث، بزرگ‌ترین ضلع، از ثلث محیط مثلث بزرگ‌تر است و کوچک‌ترین ضلع، از ثلث محیط کوچک‌تر است.
۳. از مثلث ABC ، اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{B} = \alpha$ و $\hat{C} = \beta$ و محیط مثلث $AB + BC + AC = 2P$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.
۴. دو دایره‌ی هم‌مرکز C' و C'' داده شده‌اند. وتر AB ، از دایره‌ی C' به



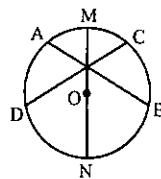
دایره، انتقال یافته‌ی دایره‌ی دیگر است. بردار انتقال را نیز مشخص کنید.



۹. دو صفحه‌ی E و F با هم موازی‌اند. اگر مثلثی در صفحه‌ی E و تصویر قائم این مثلث در صفحه‌ی F باشد، ثابت کنید این دو مثلث هم‌نهشت هستند.



۵. ثابت کنید در هر دایره، دو وتر متقاطع متساوی، با قطری که از نقطه‌ی تقاطعشان می‌گذرد، زاویه‌های مساوی می‌سازند.



۶. مختصات نقطه‌ای را تعیین کنید که تحت تبدیل $T(x, y) = (2x - 1, 2y + 6)$ تصویرش نقطه‌ی (۵ و -۳) باشد.

۷. نقطه‌های $A = (4, 0)$ ، $B = (2, 6)$ و $C = (-6, 0)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. این مثلث و تصویر آن تحت تجانس $H(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. این تجانس انبساط است یا انقباض؟
۸. دو دایره‌ی مساوی «C» و «C'» داده شده‌اند. ثابت کنید که هر یک از این دو

پاسخ تشریحی مسائل



ریاضیات ۱

$$= x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]$$

$$= (x^2+x+1)[x(x-1)(x^2+x+1) + x^2(x-1)+1]$$

۵.

$$a^2 + b^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^2 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 2^2) \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 2^2 = x^m - kx^n + 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \Rightarrow m+n+k=5 \\ k=2 \end{cases}$$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} + 2 = 2 + 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 1 + 2x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2 + 1 + 2x}{x} = 0 \right)^2 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2} = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}$$

۶.

$$m_{AC} = \frac{1-(-1)}{2-0} = \frac{2}{2} = 1$$

$$m_{AB} = \frac{-4-(-1)}{2-0} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow m_{AC} \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow \text{قائم الزاویه} \Rightarrow \angle C = 90^\circ$$

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \text{متساوی الساقین}$$

۷.

$$2^{k+1} + 48 = 2^{k+2} \Rightarrow 2^{k+1} - 2^{k+1} = 48 \Rightarrow 8(2^k) - 2(2^k) = 48$$

$$\Rightarrow 6(2^k) = 48 \Rightarrow 2^k = 8 \Rightarrow k = 3$$

$$k^2 - k + 1 = (3^2) - (3) + 1 = 7$$

۲.

$$N = 3^5 \times 6^7 \times 13^5 \times 8 = 2^7 \times 3^{12} \times 13^5 \times 2^3 \times 5$$

$$a \text{ کوچکترین مقدار} = 2 \times 13 = 26$$

$$a \text{ مقسوم علیه های مثبت} = (1, 2, 13, 26) \Rightarrow 1+2+13+26 = 42$$

۳.

$$x = 0 / \sqrt{24}$$

$$10x = 6 / \sqrt{24}$$

$$100x = 624 / \sqrt{24}$$

$$990x = 618$$

$$\Rightarrow x = \frac{618}{990} = \frac{103}{165} \Rightarrow \begin{cases} a = 103 \\ b = 165 \end{cases} \Rightarrow 0 + 6 = 6$$

۴.

$$A = y^2 + 2y - x^2 + 1 = (y^2 + 2y + 1) - x^2$$

$$= (y+1)^2 - x^2 = (x+y+1)(y-x+1)$$

$$B = x^{10} + x^5 + 1 + x - x = x^{10} - x + (x^5 + x + 1)$$

$$= x^{10} - x + (x^5 - x^2 + x^2 + x + 1)$$

$$= x^{10} - x + x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1$$

$$= x^{10} - x + x^2(x-1)(x^2+x+1) + x^2 + x + 1$$

$$= x(x^9 - 1) + (x^2 + x + 1)[x^2(x-1) + 1]$$

$$= x(x^3 - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)[x^2(x-1) + 1]$$

۱۲. معادله‌ی محور تقارن عبارت درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ خط

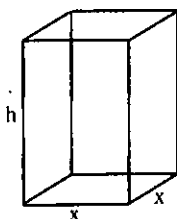
$$x = -\frac{b}{2a} \text{ می‌باشد. پس:}$$

$$2x^2 + y - x - \frac{7}{4} = 0 \Rightarrow y = -2x^2 + x + \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی محور تقارن: } x = -\frac{-1}{2(-2)} = \frac{1}{4}$$

$$x \times x = \text{ارتفاع} \times \text{سطح قاعده} = \text{حجم مکعب}$$

$$2x^2 + 4x(8) = \text{سطح جانبی} + \text{مجموع سطح دو قاعده} = \text{سطح کل}$$



$$\Rightarrow 8x^2 = 2x^2 + 32x - 10$$

$$\Rightarrow 6x^2 = 32x - 10 \Rightarrow 3x^2 - 16x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3x - 15)(3x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \Rightarrow V = 8x^2 = 8 \times 25 = 200 \\ x = \frac{1}{3} \Rightarrow V = 8x^2 = 8 \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - (y-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = y-1 \Rightarrow y = x \\ x-1 = -y+1 \Rightarrow y = 2-x \end{cases}$$

معادله‌ی فوق نمودار دو خط است، که نقطه‌ی تقاطع آنها مورد نظر است. $x = 2 - x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1,1)$

$$\frac{1}{(2\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{1}{6\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

برای گویا کردن کسر، صورت و مخرج را در مزدوج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tan \alpha + \sin \alpha}{\cot \alpha + \cos \alpha} &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \sin \alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha}} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha(1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha(1 + \sin \alpha)} \end{aligned}$$

هر چهار عامل فوق نامنفی هستند، پس به شرط آن که هیچ یک از عبارات فوق صفر نباشند (α مضربی از 90° نباشد) عبارت داده شده همیشه مثبت می‌شود.

$$x \geq 0, x < 2, 2x - 1 < x \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$x < 0, -x < 2, 2x - 1 < -x \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow -2 < x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -2 < x < 1 - 11$$

ریاضیات ۲

$$D = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$$

۱. الف)

$$\frac{2x^2 - 4x + x^2 - 1}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x+2}{x} \Rightarrow 2x^2 - 4x^2 - 1 = 2x^2 - 4x^2 - x$$

$$= (2x+2)(x^2 - 2x + 2)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x^2 - x = 2x^2 - 9x^2 + 6x + 2x^2 - 6x + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = \frac{5}{2}$$

$$x \geq 0, x \geq -1, x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow D = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \text{ (ب)}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2 = (\sqrt{2x+1})^2 \Rightarrow x + x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x} = 2x + 1$$

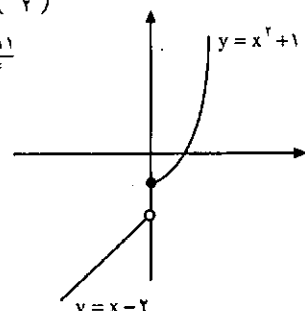
$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2 + x} = x \Rightarrow 4x^2 + 4x = x^2 \Rightarrow 3x^2 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(3x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -\frac{4}{3} \text{ (غیر قابل قبول)}$$

۲. با توجه به نمودار، f یک به یک است، ولی پوشا نیست.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$$



$$x = \frac{\begin{vmatrix} k+4 & k+2 \\ 4k+1 & 3k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & k+2 \\ k+1 & 3k \end{vmatrix}} = \frac{3k^2 + 12k - 4k^2 - 4k - k - 2}{3k^2 - k^2 - 3k - 2}$$

$$= \frac{-k^2 + 3k - 2}{2k^2 - 3k - 2}$$

$$-k^2 + 3k - 2 = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ یا } k = 2$$

به ازای $k = 2$ مخرج کسر نیز مساوی صفر می‌شود. در نتیجه به ازای این مقدار، دستگاه معادلات مبهم می‌شود و بی‌شمار جواب دارد. اما به ازای $k = 1$ ، دستگاه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} - x & -2 \leq x < -1 \\ -\frac{x}{2} - x & -1 \leq x < 0 \\ \text{تعریف نشده} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$= \frac{\sin^2 \gamma}{\sin \gamma \cos \gamma} = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \operatorname{tg} \gamma$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \cos \gamma (\alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \gamma \alpha}{\cos \gamma \alpha}) &= (\cos \gamma \alpha + \frac{\sin \alpha \sin \gamma \alpha}{\cos \alpha}) \\ &= \frac{\cos \gamma \alpha \cos \alpha + \sin \gamma \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos(\gamma \alpha - \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ج) } \frac{\gamma \sin \alpha (\gamma \cos^2 \alpha - \gamma \cos \alpha)}{\gamma \sin \alpha \cos \alpha} = \gamma \cos^2 \alpha - \gamma$$

$$= \gamma (\frac{1 + \cos \gamma \alpha}{\gamma}) - \gamma = 1 + \gamma \cos \gamma \alpha - \gamma = \gamma \cos \gamma \alpha - 1$$

$$\sin \gamma x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \sin \gamma x = \cos \gamma x \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow \gamma x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{\gamma} + \frac{\pi}{4\gamma}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} = -\lambda \vec{i} + \gamma \vec{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \times (-6) + 4 \times (-2) = -20 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$= -20 \cdot (\lambda \vec{i} + \gamma \vec{j}) = -16\lambda - 12\gamma$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-4) + 4 \times 2 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

۱۲

$$\text{تعداد کلمات چهار حرفی: } p(4, 4) = \frac{4!}{1!} = 24$$

$$\text{تعداد کلمات چهار حرفی که با 'ا' شروع می‌شوند: } p(3, 3) = \frac{3!}{1!} = 6$$

برای شمارش تعداد کلمات چهار حرفی بدون نقطه، توجه می‌کنیم که حرف 'ی' در وسط نقطه دار است و برای بدون نقطه بودن، تنها می‌تواند حرف آخر باشد. بنابراین:

$$\begin{array}{c} \text{ی} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ی در آخر باشد:

ی در آخر نباشد:

در نتیجه، تعداد کلمات بدون نقطه برابر است با:

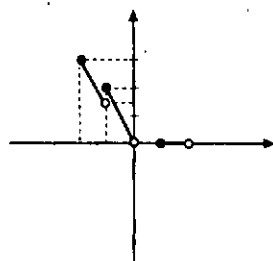
$$24 + 24 = 48$$

۱۳

$$C(3, 2) \cdot C(4, 2) \cdot C(5, 2) = 3 \times 6 \times 10 = 180 \quad \text{(الف)}$$

$$p(A) = \frac{C(3, 2) \cdot C(4, 2)}{C(12, 4)} = \frac{3 \times 6}{11 \times 10 \times 9} = \frac{2}{33} \quad \text{(ب)}$$

$$p(B) = \frac{C(7, 4)}{C(12, 4)} = \frac{35}{11 \times 10 \times 9} = \frac{7}{99}$$



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & -2 \leq x < -1 \\ -x & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\log \gamma + \log(x^2 - 1) = \log(\gamma x - 1) \quad ۵$$

$$\Rightarrow \log(\gamma x^2 - \gamma) = \log(\gamma x - 1) \Rightarrow \gamma x^2 - \gamma = \gamma x - 1$$

$$\Rightarrow \gamma x^2 - \gamma x - \gamma + 1 = 0 \Rightarrow (\gamma x - \gamma)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\gamma}{\gamma} \text{ یا } x = -\frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{\gamma n^2 - 1}{n^2 - n + 1} = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \gamma n^2 - \gamma n + \gamma = \frac{\gamma}{2} n^2 - \frac{\gamma}{2} n + \frac{\gamma}{2}$$

$$n^2 - \gamma n + 1 = 0 \Rightarrow (n - 2)(n - 5) = 0 \Rightarrow n = 2 \text{ یا } n = 5$$

جملات دوم و پنجم، هر دو مساوی هستند.

$$a_n = 2 \Rightarrow \frac{\gamma n^2 - 1}{n^2 - n + 1} = 2 \Rightarrow \gamma n^2 - 1 = 2n^2 - 2n + 2 \Rightarrow n = \frac{\gamma}{2}$$

و چون $n \in \mathbb{N}$ ، بنابراین چنین جمله‌ای وجود ندارد.

$$S_n = \frac{1}{\gamma} (S_{1\gamma} - S_n) \Rightarrow S_{1\gamma} = \gamma S_n \quad ۷$$

$$\Rightarrow \lambda[2a_1 + 15d] = 3 \times 4[2a_1 + 7d] \Rightarrow 2a_1 + 15d = 6a_1 + 12d$$

$$\Rightarrow 2a_1 = 4d, 2a_1 = a_n + \gamma \Rightarrow 2(a_1 + 7d) = a_1 + 7d + \gamma$$

$$\Rightarrow a_1 - d = \gamma \quad \begin{cases} a_1 - d = \gamma \\ 2a_1 - 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow d = 2, a_1 = 9$$

$$9, 11, 13, 15, \dots$$

۸

$$m^2 = (m - 8)(2m + 12) = 2m^2 + 12m - 16m - 96$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m - 96 = 0 \Rightarrow (m - 12)(m + 8) = 0$$

$$\Rightarrow m = 12 \text{ یا } m = -8$$

۹

$$\text{کسر (الف)} = \frac{\operatorname{tg}(180^\circ - 10^\circ) \operatorname{tg}(90^\circ + 10^\circ) - \sin(170^\circ + 20^\circ) \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\sin(180^\circ - 20^\circ) \sin(90^\circ - 20^\circ)}$$

$$= \frac{(-\operatorname{tg} 10^\circ)(-\cot 10^\circ) - (-\cos 20^\circ)(-\cos 20^\circ)}{(\sin 20^\circ)(\cos 20^\circ)} = \frac{1 - \cos^2 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$

هلدسه ۱

۱. الف) روش اول: AD موازی BE و AB قاطع است. پس داریم:

$$\hat{DAB} + \hat{ABC} = 180^\circ \Rightarrow x + x + 70^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \Rightarrow x = 55^\circ$$

از طرف دیگر، ACE زاویه‌ی خارجی مثلث ABC است. پس داریم:

$$\hat{ACE} = \hat{ABC} + \hat{BAC} \Rightarrow y = 70^\circ + x = 70^\circ + 55^\circ = 125^\circ$$

ب) روش دوم: AD موازی BC و AC قاطع است، پس $\hat{ACB} = \hat{CAD} = x$. از آنجا که مثلث ABC داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow x + 70^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 55^\circ$$

اکتون داریم:

۵۹

$$\hat{ACB} + \hat{ACE} = 180^\circ \Rightarrow 55^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 125^\circ$$

۲. در مستطیل ABCD داریم:

(الف)

$$AC = BD \Rightarrow 2x + y = 16 \quad (1)$$

$$AD = BC \Rightarrow x - 2y = 3 \quad (2)$$

از آنجا داریم:

$$(1) \begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 7 \text{ و } y = 2$$

ب) قطرهای مستطیل با هم مساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند. پس داریم:

$$\frac{CN}{C'N'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{x}{x+v} = \frac{18}{30} \Rightarrow 30x = 18x + 126$$

$$\Rightarrow 12x = 126 \Rightarrow x = 10.5 \Rightarrow CN = 10.5 \text{ و } C'N' = 17.5$$

۸. طول، عرض، ارتفاع و قطر مکعب مستطیل را به ترتیب a ، b ، c و d فرض می کنیم. بنا به داده های مسئله داریم:

$$a = 5, b = 7 \text{ و } c = x \text{ و } d = \sqrt{128}$$

اما می دانیم که در مکعب مستطیل داده شده، $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ است، پس خواهیم داشت:

$$\sqrt{128} = \sqrt{5^2 + 7^2 + x^2} \Rightarrow 128 = 25 + 49 + x^2 \Rightarrow x^2 = 64$$

اندازه ای ارتفاع مکعب مستطیل

$$x = 8$$

$$S = 5 \times 7 \times 8 = 280$$

$$S = 5 \times 7 = 35$$

$$\text{واحد سطح} = 280 + 35 = 315$$

$$\text{واحد حجم} = 5 \times 7 \times 8 = 280$$

۹. ضلع مکعب را a فرض می کنیم. $ABCD$ بخشی از یک صفحه ی قطری است که به مکعب محدود است (صفحه ی قطری مکعب، یا صفحه ی قطری مکعب مستطیل، صفحه هایی هستند که بر هر دو قطر مکعب یا بر هر دو قطر مکعب مستطیل می گذرند). بنابراین، $ABCD$ مستطیلی است که طول و عرض مساوی $a\sqrt{2}$ است. در نتیجه، مساحتش $a^2\sqrt{2}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{اندازه ی ضلع مکعب} = a \Rightarrow a^2\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

از آن جا:

$$\text{واحد حجم} = 6^3 = 216$$

۱۰. با توجه به شکل داده شده، شعاع قاعده ی استوانه ی کوچک تر $R = 10$ و شعاع قاعده ی استوانه ی بزرگ تر $R' = 10 + 7 = 17$ و ارتفاع مشترک استوانه ها

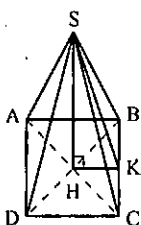
$$h = 25$$

$$\text{حجم استوانه ی کوچک تر} = \pi R^2 h = \pi \times 10^2 \times 25 = 2500\pi$$

$$\text{حجم استوانه ی بزرگ تر} = \pi R'^2 h = \pi \times 17^2 \times 25 = 7225\pi$$

$$\text{واحد حجم} = 7225\pi - 2500\pi = 4725\pi$$

۱۱. ارتفاع هرم SH و سهم هرم SK است. از H به K وصل می کنیم. در مثلث قائم الزاویه ی SHK ($\hat{H} = 90^\circ$) داریم:



$$SK^2 = SH^2 + HK^2 \Rightarrow 26^2 = 24^2 + HK^2$$

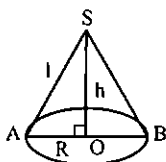
$$\Rightarrow HK^2 = 676 - 576 = 100 \Rightarrow HK = 10 \Rightarrow \frac{AB}{2} = 10 \Rightarrow AB = 20$$

از آن جا:

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times AH = \frac{1}{3} (20)^2 \times 24 = 3200$$

۱۲. ارتفاع مخروط داده شده را h و مولد آن را l می نامیم. در مثلث قائم الزاویه ی

$$SAO (\hat{O} = 90^\circ)$$



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + \frac{R^2}{4}}$$

S قاعده ی مخروط و S جانبی مخروط

$$\Rightarrow \text{کل مخروط} S = \frac{1}{2} (2\pi R) \frac{R}{2} + \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$AE = BE \Rightarrow 2x = y \quad (1)$$

$$AE = ED \Rightarrow 2x = x + 10 \quad (2)$$

$$(1) \begin{cases} 2x = y \\ 2x = x + 10 \end{cases} \Rightarrow x = 10 \text{ و } y = 20$$

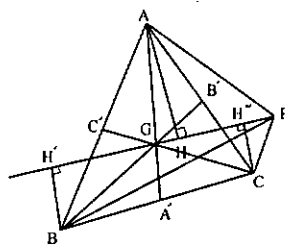
۳. از رأس های A ، B و C ، عمودهای AH ، BH' و CH'' را بر خط PG رسم می کنیم. می دانیم که $AH = BH' + CH''$ است (بنا به مسئله ای در جلد اول دایره المعارف هندسه). از آن جا داریم:

$$AH \times \frac{PG}{2} = BH' \times \frac{PG}{2} + CH'' \times \frac{PG}{2}$$

$$\Rightarrow S_{PAG} = S_{PBG} + S_{PCG}$$

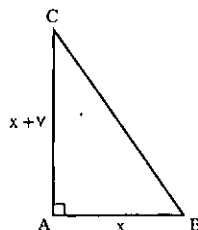
و این حکم مسئله است که ثابت شد.

نکته: صورت مسئله ی جلد اول دایره المعارف هندسه چنین است:



۴. مثلث قائم الزاویه ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را در نظر می گیریم. فرض می کنیم AB یعنی ضلع کوچک تر زاویه ی قائمه ی مثلث، مساوی x باشد. در این صورت، $AC = x + 31$ خواهد شد. اما بنا به فرض داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \text{ و } S_{ABC} = 180$$



از آن جا خواهیم داشت:

$$180 = \frac{1}{2} x(x + 31) \Rightarrow x^2 + 31x - 360 = 0$$

$$\Rightarrow x = -40 < 0 \text{ و } x = 9 \Rightarrow AB = 9 \text{ و } AC = 16$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 16^2 = 225 \Rightarrow BC = \sqrt{225}$$

۵. این واسطه ی هندسی را x می گیریم. داریم:

$$x^2 = (\sqrt{28} \times \sqrt{180}) = \sqrt{5040} = 6a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{6}$$

۶. بنا به نتیجه ی ۲ از قضیه ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{2x+2}{x} = \frac{2x-1}{x+3} = \frac{y}{22}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x} = \frac{2x-1}{x+3} \Rightarrow 2x^2 + 8x + 6 = 2x^2 - x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 288}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{369}}{4}$$

$$x = \frac{9 - \sqrt{369}}{4} < 0 \text{ غرضی}$$

$$x = \frac{9 + \sqrt{369}}{4} \Rightarrow \frac{2(9 + \sqrt{369})}{4} + 2 = \frac{y}{22}$$

$$\Rightarrow y = 22 \times \frac{26 + 2\sqrt{369}}{4 + \sqrt{369}}$$

۷. می دانیم که نسبت طول میانه های متناظر دو مثلث متشابه، مساوی نسبت تشابه آن دو مثلث است. بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \frac{13R}{9} = \sqrt{h^2 + \frac{R^2}{9}} \Rightarrow \frac{169R^2}{81} = h^2 + \frac{R^2}{9}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{169R^2}{81} - \frac{R^2}{9}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{169R^2}{81} - \frac{R^2}{9} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{13}}{9} R \text{ ارتفاع مخروط}$$

$$\Rightarrow \text{کل مخروط } S = \frac{\pi R}{2} \left(\sqrt{h^2 + \frac{R^2}{9}} \right) + \frac{\pi R^2}{4} \text{ کره } S = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$\text{کره } S = \frac{\pi R^2}{3} \Rightarrow \text{کل مخروط } S = \frac{\pi R}{2} \sqrt{h^2 + \frac{R^2}{9}} + \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\frac{4R}{3} - \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + \frac{R^2}{9}} \Rightarrow \frac{13R}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + \frac{R^2}{9}}$$

حسابان

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x^2+11}-3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x^2+11}-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x^2+11}-3} \times \frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3} \times \frac{\sqrt{x^2+11}+3}{\sqrt{x^2+11}+3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{x^2+11}+3)}{(\sqrt{x^2+11}-3)(\sqrt{x^2+11}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+1-9)(\sqrt{x^2+11}+3)}{(x^2+11-9)(\sqrt{x^2+11}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-4)(\sqrt{x^2+11})}{(x-2)(x+4)(\sqrt{x^2+11})} = \frac{9}{0}$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 4 = -2(x - 8) \Rightarrow y = -2x + 28 \text{ معادله خط قائم}$$

۷. در تابع درجه سوم، اگر خطی از نقاط اکسترمم نسبی نمودار تابع بگذرد، این خط از نقطه‌ی عطف تابع هم می‌گذرد.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + mx + 5, \text{ طول عطف} = -\frac{b}{3a} = \frac{2}{3} = 1, y = -2x + 1$$

$$y_{\text{عطف}} = -2(1) + 1 = -1 \Rightarrow F(1, -1)$$

$$F(1, -1) \rightarrow -1 = 1 - 3 + m + 5 \Rightarrow m = -4$$

$$\cos^2 x + 3 \cos x - 4 = 0$$

$$2 \cos^2 x - 1 + 3 \cos x - 4 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 5 = 0$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow \text{مجموع ضرایب صفر است} \Rightarrow \cos x = -\frac{5}{2}$$

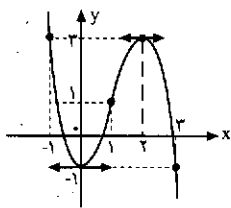
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$y_1 = -x^2 + 3x^2 - 1$$

$$y_1' = -2x + 6x = 0 \Rightarrow -2x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=3 \Rightarrow y=8 \end{cases}$$

$$y_1'' = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x_F = 3 \Rightarrow y_F = 8$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
y	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801	10000



$$y_1 = \frac{2x-1}{2x+1}$$

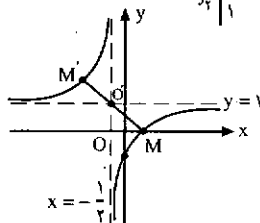
$$\text{معادله‌ی مجانب قائم: } y \rightarrow \pm\infty \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{معادله‌ی مجانب افقی: } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y_1 = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$y_1' = \frac{2}{(2x+1)^2} > 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y = -1, y = 0$$

$$\Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
y	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801	10000



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b \sin x}{\sqrt{ax^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b(x)}{\sqrt{2} \sqrt{x}} = \frac{-2b}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a[0^+ - 1] = -a \text{ حد راست}$$

$$f(0) = [0 - \sqrt{3}] = -2 \text{ مقدار تابع}$$

$$-a = -2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \frac{-2b}{\sqrt{2}} = -2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

$$f'(x) = 16(1 + \tan^2 x) \tan x - 4(1 + \cot^2 x) \cot x$$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = 16(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}) \tan \frac{\pi}{4} - 4(1 + \cot^2 \frac{\pi}{4}) \cot \frac{\pi}{4}$$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = 16(1 + 1)(1) - 4(1 + 1)(1) = 16 - 4 = 12$$

۴. چون صورت و مخارج کسر هم درجه‌اند، پس نمودار تابع یک مجانب افقی دارد. بنابراین منحنی این تابع، باید دو مجانب قائم داشته باشد. باید این معادله دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد:

$$\text{مجاانب قائم: } f(x) \rightarrow \pm\infty \Rightarrow x^2 + mx + 1 = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4 > 0 \Rightarrow m^2 > 4 \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases} \text{ یا}$$

۵. فرض می‌کنیم نقطه‌ی $A(0, k)$ روی محور y ها و m شیب خط مماس باشد.

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - k = m(x - 0) \Rightarrow y = mx + k \text{ معادله‌ی فرضی مماس}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = mx + k \end{cases} \Rightarrow mx + k = -x^2 + 2 \Rightarrow x^2 + mx + (k-2) = 0$$

برای این که خط بر منحنی مماس باشد، باید $\Delta = 0$

$$\Delta = m^2 - 4(k-2) = 0 \Rightarrow m^2 + m - 4(k-2) = 0$$

ریشه‌های این معادله، شیب‌های خط‌های مماس‌اند (m') و (m'') ریشه‌های این معادله‌اند.

$$m' m'' = -1 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow \frac{-4(k-2)}{1} = -1 \Rightarrow 4(k-2) = 1 \Rightarrow k = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 4(k-2) = 1 \Rightarrow 4k = 9 \Rightarrow k = \frac{9}{4} \Rightarrow A(0, \frac{9}{4})$$

$$f(x) = \sqrt{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \quad x_A = 8$$

$$y_A = \sqrt{64} = 8, m = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8} \Rightarrow m = -\frac{1}{8} \text{ مماس}$$

$$(-2, 1)R(x, y) \Rightarrow -2 + \frac{1}{y}y^2 = x + \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1}{y}y^2 - \frac{5}{y}$$

$$\Rightarrow \{(-2, 1)\} = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x = \frac{y^2 - 5}{y} \right\}$$

۹. برد، باخت و مساوی را با امتیازهای آنها، یعنی ۱، ۰، ۳ می‌کنیم:

$$S = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$$

$$A = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (1, 2), (0, 2)\}$$

$$B = \{(3, 0), (1, 0), (0, 1), (0, 2)\} \Rightarrow A \cap B = \{(3, 0), (0, 2)\}$$

$$A' - B = A' \cap B' = (A \cup B)' = \{(1, 1), (0, 0)\}$$

۱۰.

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{5}{3}\binom{4}{1} + \binom{4}{3}}{\binom{9}{4}} = \frac{1 \times 4 + 5}{126} = \frac{9}{126} = \frac{1}{14}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1} + \binom{4}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{4 \times 5 + 1}{126} = \frac{21}{126} = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = 2P(B) = \frac{1}{3}P(C), P(B) = 2P(D), P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1 \Rightarrow 2P(B) + P(B) + 2P(B) + \frac{1}{2}P(B) = 1$$

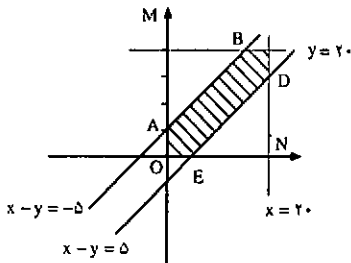
$$\Rightarrow P(B) = \frac{2}{11}, P(D) = \frac{1}{11}, P(C) = \frac{1}{11} \Rightarrow P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{2}{11}$$

$$= P(B) + P(C) = \frac{10}{11}$$

$$S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x, y \leq 2\}$$

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in S, |x - y| \leq 2\}$$

$$P(A) = \frac{S_{OABCDE}}{S_{OMEN}} = \frac{2 \times 2 - \frac{10 \times 10}{2} - \frac{10 \times 10}{2}}{2 \times 2} = \frac{4}{16}$$



$$P(A \cup B - C) = P(A \cup B) - P[(A \cup B) \cap C]$$

$$= P(A \cup B) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$$

$$+ P(A \cap B \cap C)$$

$$= \left[\frac{200}{3} + \frac{200}{5} - \frac{200}{15} - \frac{200}{21} - \frac{200}{35} + \frac{200}{105} \right]$$

$$= \frac{80}{105} = \frac{8}{105}$$

$$P(A' - B) = P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) + 1 - P(B)$$

$$- (1 - P(A \cap B)) = P(A') + P(B') - P(A \cap B')$$

۱۴.

$$n=1: 4-3+5=6=3r(r=2)$$

$$n=k: 4^k-3k+5=3r'$$

$$n=k+1: 4^{k+1}-3(k+1)+5=3r''$$

طرفین فرض را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$4^{k+1}-12k+20=12r' \Rightarrow$$

$$4^{k+1}-3(k+1)+5-9k+18=12r'$$

$$\Rightarrow 4^{k+1}-3(k+1)+5=9k+12r'-18$$

$$= 3(3k+4r'-6)=3r''$$

۲.

$$1+x^2+y^2 \geq 2x+2y-4 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \geq 0 \text{ و } (n-1)^2 \geq 0 \text{ و } (y-2)^2 \geq 0$$

۳. فرض می‌کنیم $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ عددی گویا باشد (برهان خلف):

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}-1 = \frac{2m^2}{n^2} \Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{2m^2}{n^2}$$

$$= \frac{n^2+2m^2}{n^2} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$$

۱۱.

بنابراین $\sqrt{2}$ مساوی عدد گویایی می‌شود و این تناقض است.

$$m=? \text{ و } n=4 \text{ و } \left[\frac{m-1}{n} \right] + 1 = 2 \Rightarrow \left[\frac{m-1}{4} \right] = 1$$

$$\Rightarrow 2 \leq \frac{m-1}{4} < 3 \Rightarrow 8 \leq m-1 < 12 \Rightarrow 9 \leq m < 13$$

۱۲.

پس باید حداقل ۹ جفت بیرون بیاوریم.

$$x = \frac{m}{n} \text{ و } m, n \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ و } y = \frac{m'}{n'}, m', n' \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m'}{n'}} = \frac{mn'}{nm'} = \frac{m''}{n''} \text{ و } m'' \text{ و } n'' \in \mathbb{Z} \text{ و } n'' \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$$

۶.

$$(A-C) \cap (B-C) = (A \cap C') \cap (B \cap C')$$

$$= (A \cap B) \cap (C' \cap C') = (A \cap B) \cap C'$$

$$= (A \cap B) - C$$

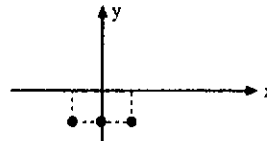
۷.

$$A = \{-1, 1, 0\} \text{ و } B = \{0, 1\} \Rightarrow$$

$$A^2 = \{(-1, -1), (-1, 1), (-1, 0), (1, -1), (1, 1), (1, 0), (0, -1), (0, 1), (0, 0)\}$$

$$A \times B = \{(-1, 0), (-1, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 0), (0, 1)\}$$

$$A^2 - A \times B = \{(-1, -1), (1, -1), (0, -1)\}$$



۸.

$$(x, y)R(x, y) \Rightarrow x + \frac{1}{y}y^2 = x + \frac{1}{y}y^2$$

$$(x, y)R(z, 1) \Leftrightarrow (z, 1)R(x, y)$$

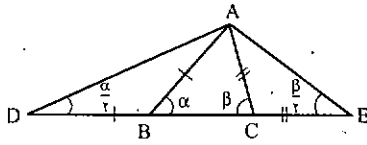
$$x + \frac{1}{y}y^2 = z + \frac{1}{1}1^2 \Leftrightarrow z + \frac{1}{y}y^2 = x + \frac{1}{y}y^2$$

$$(x, y)R(z, 1), (z, 1)R(r, s) \Rightarrow (x, y)R(r, s)$$

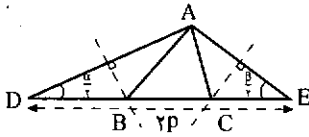
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y}y^2 = z + \frac{1}{y}y^2 \\ z + \frac{1}{s}s^2 = r + \frac{1}{s}s^2 \end{cases} \Rightarrow x + \frac{1}{y}y^2 = r + \frac{1}{y}y^2$$

از جمع کردن طرفین دورابطه‌ی سمت چپ، به رابطه‌ی سمت راست می‌رسیم.

زاویه و ضلع بین این دو زاویه از مثلث ADE معلوم است ($\hat{E} = \frac{\beta}{\gamma}$, $\hat{D} = \frac{\alpha}{\gamma}$, $DE = 2p$). پس این مثلث قابل رسم است. بنابراین، برای رسم مثلث ABC چنین عمل می کنیم:

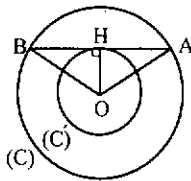


پاره خط DE را به طول معلوم 2p رسم می کنیم. آن گاه از D خطی رسم می کنیم که با DE زاویه ای مساوی $\frac{\alpha}{\gamma}$ بسازد و از نقطه ی E و در همان طرفی که زاویه ی $\frac{\alpha}{\gamma}$ را ساخته ایم، خطی رسم می کنیم که با DE زاویه ی $\frac{\beta}{\gamma}$ بسازد. محل برخورد دو خط رسم شده، رأس A از مثلث ABC است. اکنون عمود منصف ضلع AD، هم چنین عمود منصف ضلع AE را رسم می کنیم تا DE را در نقطه های C و B قطع کنند. از A به B و C وصل می کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.



نکته: چون مثلث ABD در رأس B متساوی الساقین است، پس عمود المُنصف قاعده ی AD، از رأس B می گذرد و همین ویژگی، برای مثلث متساوی الساقین ACE نیز وجود دارد. یعنی عمود منصف قاعده ی AE از رأس C می گذرد.

۴. از O به A و H وصل می کنیم. می دانیم که OH عمود منصف وتر AB است. پس داریم:



$$AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{2\gamma}{2} = \gamma$$

از طرف دیگر، $OH = R'$ ، $OA = R$ ، و با $R = 2R' = \gamma$ است.

۱. اندازه ی زاویه ی سوم مثلث، یعنی اندازه ی زاویه ی C را به دست می آوریم داریم:

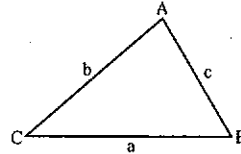
$$\hat{A} = 65^\circ, \hat{B} = 40^\circ, \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 65^\circ + 40^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

از آن جا خواهیم داشت:

$$75^\circ > 65^\circ > 40^\circ \Rightarrow \hat{C} > \hat{A} > \hat{B} \Rightarrow c > a > b$$

۲. ضلع های مثلث را a، b و c و محیط مثلث را 2p می نامیم. فرض می کنیم بزرگ ترین ضلع مثلث باشد، داریم:



$$\begin{cases} a > b \\ a > c \\ a = a \end{cases}$$

از جمع این رابطه ها داریم:

$$3a > a + b + c \Rightarrow 3a > 2p \Rightarrow a > \frac{2p}{3}$$

اکنون فرض می کنیم c کوچک ترین ضلع مثلث باشد. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} c < a \\ c < b \\ c = c \end{cases} \Rightarrow 3c < a + b + c \Rightarrow 3c < 2p \Rightarrow c < \frac{2p}{3}$$

پس حکم مسئله ثابت شد.

۳. فرض می کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن است، یعنی مثالی است که محیط آن مساوی 2p، $\hat{C} = \beta$ و $\hat{B} = \alpha$ است. ضلع BC را از طرف B به اندازه ی BD=AB و از طرف C به اندازه ی CE=AC امتداد می دهیم و از D و E به A وصل می کنیم. طول پاره خط DE مساوی محیط مثلث ABC است، زیرا داریم:

$$DE = DB + BC + CE = AB + BC + AC = 2p$$

مثلث های ABD و ACE نیز متساوی الساقین هستند. زاویه ی $\hat{ABC}$ ، زاویه ی

خارجی مثلث متساوی الساقین ABD است، پس: $\hat{D} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$ و زاویه ی $\hat{ACB}$

زاویه ی خارجی مثلث متساوی الساقین ADE است، پس: $\hat{E} = \frac{\hat{C}}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$. در نتیجه، دو

مجله های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش، با این عناوین تهیه و منتشر می شوند:

مجله های دانش آموزی (به صورت ماهنامه - ۸ شماره در هر

سال تحصیلی - منتشر می شوند):

- رشد کودک (برای دانش آموزان ابتدایی و پایه ی اول دوره ی ابتدایی)
- رشد نوجوان (برای دانش آموزان پایه های دوم و سوم دوره ی ابتدایی)
- رشد دانش آموز (برای دانش آموزان پایه های چهارم و پنجم دوره ی ابتدایی)
- رشد نوجوان (برای دانش آموزان دوره ی راهنمایی تحصیلی)
- رشد جوان (برای دانش آموزان دوره ی متوسطه)

مجله های عمومی (به صورت ماهنامه - ۸ شماره در هر سال

تحصیلی منتشر می شوند):

- رشد آموزش ابتدایی، رشد آموزش راهنمایی تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدرسه فردا، رشد مدیریت مدرسه
- رشد معلم (دو هفته نامه)

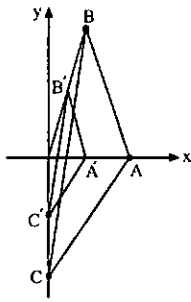
مجله های تخصصی (به صورت فصلنامه و ۴ شماره در سال

منتشر می شوند):

- رشد برهان ریاضی (مجله ی ریاضی، برای دانش آموزان دوره ی راهنمایی تحصیلی)، رشد برهان متوسطه (مجله ی ریاضی، برای دانش آموزان دوره ی متوسطه)، رشد آموزش معارف اسلامی، رشد آموزش جغرافیا، رشد آموزش تاریخ، رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش زبان، رشد آموزش زیست شناسی، رشد آموزش تربیت بدنی، رشد آموزش فیزیک، رشد آموزش شیمی، رشد آموزش ریاضی، رشد آموزش هنر، رشد آموزش قرآن، رشد آموزش علوم اجتماعی، رشد آموزش زمین شناسی، رشد آموزش فنی و حرفه ای، رشد مشاور مدرسه.

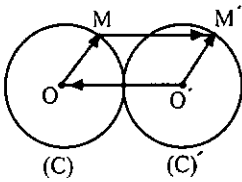
مجله های رشد عمومی و تخصصی برای معلمان، آموزگاران، مدیران و کادر اجرایی مدارس دانشجویان، مراکز تربیت معلم و رشته های دبیری دانشگاهها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می شوند.

• نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸، دفتر انتشارات کمک آموزشی.



این تجانس یک انقباض محسوب می شود، زیرا $k = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ است.

۸. دو شعاع دلخواه موازی و هم جهت OM و O'M' از دو دایره را رسم می کنیم و از M به M' وصل می کنیم. چهارضلعی OMM'O' متوازی الاضلاع است، زیرا OM = O'M' و OM || O'M' است.



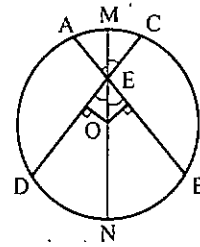
بنابراین انتقال یافته ی نقطه ی M به اندازه ی بردار $\vec{MM'} = \vec{OO'}$ و نقطه ی M' انتقال یافته ی نقطه ی M به اندازه ی بردار $\vec{OO'}$ است. پس دایره ی (C') انتقال یافته ی دایره ی (C) به اندازه ی بردار $\vec{OO'}$ است. بدیهی است که دایره ی C نیز انتقال یافته ی دایره ی C' به اندازه ی بردار انتقال $\vec{OO'}$ است.

۹. می دانیم که خط های عمود بر یک صفحه باهم موازی اند. پس AA', BB', CC' باهم موازی هستند. از طرف دیگر، پاره خط های AA', BB', CC' و فاصله ی بین دو صفحه ی موازی E و F هستند. پس باهم مساوی اند؛ یعنی AA' = BB' = CC'. بنابراین چهارضلعی های AA'C'C, AA'B'B و BB'C'C که در هر کدام، دو ضلع روبه رو باهم موازی و مساوی اند، متوازی الاضلاع هستند، $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ است. در نتیجه، دو مثلث ABC و A'B'C' به حالت تساوی سه ضلع نظیر هم نهشت هستند حکم مسئله ثابت شد.

در مثلث قائم الزاویه ی OHA داریم:

$$\begin{aligned} OA' &= OH' + AH' \Rightarrow (rR')^2 = R'^2 + 12^2 \\ \Rightarrow 2R'^2 &= R'^2 + 144 \Rightarrow R'^2 = 144 \Rightarrow R' = 12 \\ \Rightarrow R' &= \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \Rightarrow R = 2R' = 2 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

۵. می خواهیم ثابت کنیم که $\hat{AEM} = \hat{MEC}$ و $\hat{BEN} = \hat{DEN}$ است.



برای اثبات، از نقطه ی O مرکز دایره، دو عمود OH و OK را به ترتیب بر AB و CD فرود می آوریم.

چون $AB = CD$ است، پس داریم: $OH = OK$ (وترهای مساوی در یک دایره، از مرکز آن دایره به یک فاصله اند). اما نقطه ای که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشد، روی نیم ساز زاویه های حاصل از آن دو خط متقاطع واقع است. بنابراین نقطه ی O زاویه ی AEC (یا BED) قرار دارد، به عبارت دیگر، OE نیم ساز زاویه ی BED (یا AEC) است و حکم مسئله ثابت شد.

۶. داریم:

$$\begin{cases} 2x - 1 = -3 \\ 3y + 6 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -2 \\ 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow (-1, -\frac{1}{3})$$

۷. داریم:

$$\begin{aligned} A &= (4, 0), B = (2, 6), C = (-6, 0) \\ H(x, y) &= (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) \\ \Rightarrow A' &= H(A) = H(4, 0) = (2, 0) \\ B' &= H(B) = H(2, 6) = (1, 3) \\ C' &= H(C) = H(-6, 0) = (-3, 0) \end{aligned}$$

برگ اشتراک مجله های رشد

گزارش

استوریز مبلغ ۲۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی الحساب به حساب شماره ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آرمایش (مرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲- ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- نام مجله:
- نام و نام خانوادگی:
- تاریخ تولد:
- میزان تحصیلات:
- تلفن:
- نشانی کامل پستی:

استان: شهرستان:

خیابان:

پلاک: کدپستی:

- مبلغ واریز شده:
- شماره و تاریخ رسید بانکی:

امضا:

نشانی: تهران - صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

شماره مشترکین: ۷۷۳۴۶۵۶ - ۷۷۳۳۵۱۱۰

پیم گیر مجلات رشد: ۸۸۳۹۲۳۲۲ - ۱۴۸۲۰۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

• هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.

• مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.

• برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).

برگردانده و به این اسم نامیده است.

ترجمه‌ی فارسی قسمتی از مقدمه‌ی کتاب المقنع:

«علی بن احمد نسوی گوید: برای کتابخانه‌ی مجدالدوله کتابی درباره‌ی به کار بردن حساب هندی تصنیف کرده بودم و آن کتاب بعداً در کتابخانه‌ی مولانا شرف الملوک وارد شد و طرز کلام آن وی را قانع نساخت، زیرا به فارس نوشته شده بود و او می‌گفت که الفاظ فارسی دراز و معانی آن پوشیده است و دستور داد که برای کتابخانه‌اش کتابی به زبان عربی بنویسم که به مقصودی که دارد نزدیک تر باشد و من دستور او را انجام دادم.» کتاب المقنع در چهار مقاله است: مقاله‌ی اول درباره‌ی اعمال مربوط به عددهای صحیح، مقاله‌ی دوم درباره‌ی کسرها، مقاله‌ی سوم در عددهای صحیح و کسر (= عددهای صحیحی که کسر همراه دارند) و مقاله‌ی چهارم درباره‌ی درجه‌ها و دقیقه‌ها (= کسره‌های شصتگانی). نسوی خود نوشته است که در کتاب المقنع برهان‌های هندسی را نیاورده تا کلام طولانی نشود.

۲. کتاب الاشباع فی شرح الشكل القطاع

این کتاب به زبان عربی است و نسوی آن را در شرح «شکل قطاع» از کتاب مجسطی بطلمیوس نوشته است. دو نسخه‌ی خطی از کتاب الاشباع در استانبول (کتابخانه‌ی سرای به شماره‌های ۱۴/۳۴۶۴ و ۲/۴۵۵) و یک نسخه‌ی خطی نیز در لیدن (به شماره‌ی ۱۰۶۰) موجود است. نسوی کتاب الاشباع را مانند یکی دیگر از تألیف خود (= اختصار صور الکواکب) به یکی از نقبای علویان ری اهداء کرده است.

۳. کتاب التجريد اصول الهندسه

این کتاب مختصری است در هندسه‌ی مقدماتی دارای مقدمه و هفت مقاله که نسوی آن چه را از ضایای هندسه در نجوم و مساحت لازم می‌دانسته در آن گرد آورده است.

در مقالات هفتگانه‌ی این کتاب از مطالب زیر گفت و گو شده است: تعریف مفاهیم هندسی و قضایای درباره‌ی خطوط متوازی و مثلث و به خصوص قضیه‌ی فیثاغورس، جبر هندسی، دایره و خط مماس و زاویه‌ی محاطی، چند ضلعی‌های محاطی و محیطی، تناسب و نسبت شکل‌های متشابه، هندسه‌ی فضایی مخصوصاً خواص کره.

نسوی این کتاب را نیز مانند کتاب الاشباع و کتاب اختصار صور الکواکب به مطهر بن ابوالقاسم از نقبای علویان ری اهداء کرده است. در آخر این کتاب نام کتاب البلاغ که نسوی در شرح اصول اقلیدس تألیف کرده آمده است.

۴. تفسیر کتاب مأخوذات ارشمیدس

مأخوذ در لغت به معنی «گرفته شده» و در اصطلاح ریاضی قضیه‌ای است که آن را به عنوان مقدمه ثابت می‌کنند تا بعداً در استدلال قضیه یا قضایای دیگر از آن استفاده نمایند.

مأخوذات نام کتاب مختصری است در هندسه، منسوب به ارشمیدس، شامل پانزده شکل (= قضیه یا مسأله). اصل یونانی کتاب مأخوذات از بین رفته است ولی ترجمه‌ی عربی آن که توسط ثابت بن قره انجام گرفته در دست است. در سده‌ی چهارم هجری ریاضیدان و منجم ایرانی ابوسهل کوهی مقاله‌ای درباره‌ی کتاب مأخوذات ارشمیدس نوشت و آن را «تزیین کتاب ارشمیدس فی المأخوذات» نامید. این مقاله نیز متأسفانه از بین رفته است.

نسوی با در دست داشتن مقاله‌ی ابوسهل کوهی مأخوذات را تفسیر کرده و نصیرالدین طوسی در سال ۶۵۳ تفسیر نسوی را تحریر کرده است.

آثار ریاضی مفقود نسوی

۵. کتاب البلاغ فی شرح کتاب اقلیدس

نسوی در صفحه‌ی آخر کتاب التجريد فی اصول الهندسه اشاره کرده است به کتاب البلاغ که آن را در شرح کتاب اصول اقلیدس نوشته بوده است. از این کتاب فعلاً اثری در دست نیست.

۶. مقاله فی عمل الدائرة

نصیرالدین طوسی در تحریر کتاب مأخوذات نوشته است: «قال الاستاد المختص (= نسوی) قد صنفت مقاله فی عمل دائرة نسبتها الی دائرة مفروضة كنسبة مفروضة...»

منبع

زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی، ابوالقاسم قربانی، مرکز نشر دانشگاهی

ستاد اقامه ی نماز وزارت آموزش و پرورش، پس از برگزاری موفقیت آمیز مرحله ی نخست مسابقه ی «پنجره ای روبه آفتاب» در دوره ی ابتدایی، مرحله ی دوم این مسابقه را در دوره ی راهنمایی برگزار می کند:

● هدف:

گردآوری و استفاده از تجربه های ارزنده ی معلمان، مربیان و مدیران دوره ی آموزش راهنمایی در راه یادگیری و ترویج نماز در مدارس راهنمایی کشور

● جوایز:

- ♦ ده نفر اول، اهدای لوح تقدیر + کمک هزینه ی سفر حج عمره مفرد به مبلغ ۵ میلیون ریال
- ♦ ده نفر دوم، اهدای لوح تقدیر + کمک هزینه ی سفر به سوریه به مبلغ ۳ میلیون ریال
- ♦ ده نفر سوم، اهدای لوح تقدیر + کمک هزینه ی سفر به عتبات عالیات به مبلغ ۲ میلیون ریال
- ♦ ده نفر چهارم، اهدای لوح تقدیر + کمک هزینه ی سفر به مشهد مقدس به مبلغ ۱ میلیون ریال

● شرایط:

۱. آثار ارسالی باید فقط در قالب نوشتاری «خاطره» باشد. بنابراین آثاری که در قالب داستان تخیلی، مقاله و... باشد، داوری نمی شود.
۲. معیارهای ارزیابی خاطره ها عبارتند از: «بکر و تازه بودن موضوع»، «کشش و جذابیت»، «محتوای غنی آموزشی»، «نثر و زبان مناسب» و «سندیت (نکر زمان و مکان)».
۳. موضوع خاطره باید در چارچوب: الف - شیوه های یادگیری خلاق؛ ب - روش موفق یا ناموفق برای ترویج نماز بین دانش آموزان دوره ی راهنمایی در موقعیت های گوناگون، شامل کلاس درس، جشن تکلیف، نمازخانه، اردو و... باشد.
۴. حجم و تعداد خاطره های ارسالی، به تصمیم شرکت کنندگان در مسابقه بستگی دارد.
۵. زمان ارسال خاطره ها حداکثر تا پایان خرداد ۱۳۸۷ است.
۶. شرکت کنندگان باید اصل یا کپی برگی ی مشخصات خود را که در بروشور مسابقه آمده است، تکمیل کنند، و ضمن الصاق یک قطعه عکس ۲×۳، همراه با خاطره ها که با خط خوانا و ترجیحاً به صورت حروف چینی تهیه شده است، به نشانی دبیرخانه ی مسابقه، ارسال نمایند.

- خاطره های برگزیده به صورت کتاب منتشر خواهد شد و طی مراسم ویژه ای در آبان ماه ۱۳۸۷ از پدیدآورندگان آثار منتخب، تجلیل خواهد شد. برای تهیه ی بروشور مسابقه به دفتر آموزشگاه مراجعه نمایید.

آفتاب روبه پنجره های

مسابقه ی خاطره نویسی
تجربه های من در آموزش و ترویج نماز
بین دانش آموزان دوره ی راهنمایی