مجله ریاضی

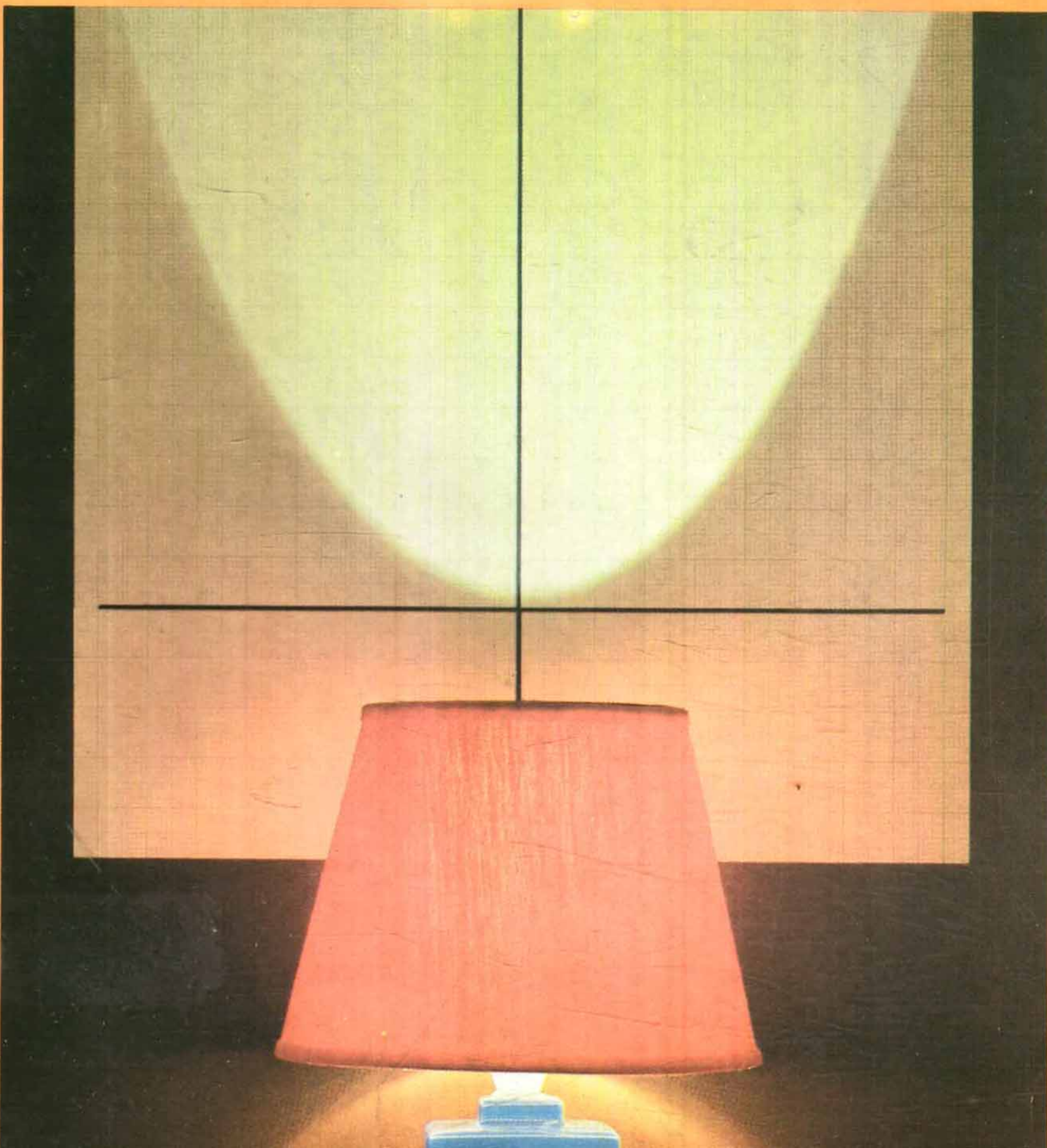
برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۳

سال اول، تابستان ۱۳۷۱ بهاء ۵۰۰ ریال

چاپ چهارم



بسم الله الرحمن الرحیم

● صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
● مدیر مسئول: عبدالعظیم فریدون
● سردبیر: حمیدرضا امیری
● مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی
● صفحه‌آرا و رسام: سیدمحسن طرازانی
● حروفچینی: یگانه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)
۲ ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن
۳ ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان)به همراه حل آن
۴ ـ طرح معماهای ریاضی
۵ ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه ولطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

● مقالات وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
● هیئت تحریریه درحکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاداست.
● مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۸، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش تلفن: ۸۲۶۰۰۷

انتشارات مدرسه

مطالب این شماره

سخن سردبیر

مخاطبین مجلهٔ برهان:

راستی مخاطبین مجلهٔ «برهان» چه کسانی هستند؟ همان‌طور که قبلاً هم متذکر شدیم مخاطبین اصلیِ مجلهٔ «برهان» آن دسته از دانش‌آموزان‌اند که دسترسی چندانی به معلمان ورزیده حتی کتب مناسب ندارند. ما مجلهٔ «برهان» را برای دانش‌آموزی منتشر می‌کنیم که علاقه به آموختن ریاضیات دارد اما به منابع و مآخذ آن دسترسی ندارد. دبیر ریاضی ندارد یا کم دارد. کتاب ریاضی جنب درسی ندارد یا کم دارد. چنین دانش‌آموزی مشکلاتش را با که در میان بگذارد و از که صلاح و مصلحت جوید؟ مجلهٔ ریاضی «برهان» در وهلهٔ اول برای چنین دانش‌آموزی است و به‌عبارت دیگر «برهان» در مرحلهٔ اول یک مجلهٔ تعلیمی است، آن هم تعلیم دانش‌آموزان با بنیهٔ علمی متوسط، اما این بدان معنی نیست که مطالب علمی آن ضعیف باشد یا مجله مایل به داشتن خوانندگانی از گروه دیگر نباشد.

سعیِ گردانندگان و نویسندگان مجلهٔ براین است که مقالات و مطالب و مسائل آن را چنان تنظیم کنند که به کار دانش‌آموزانِ با امکانات بیشتر و دبیران ریاضی نیز بیاید و آنان نیز سهمی از مطالب آن داشته باشند، و این هدف، البته صعب‌الوصول است و جز با یاری و تذکر و انتقاد صاحب نظران و تجربه آموختگان و به‌طور کلّی شما عزیزانِ خواننده ممکن نیست، و ما، ضمن اینکه امیدواریم که در هر شمارهٔ جدید قدمی دیگر به سوی این هدف برداشته باشیم، بار دیگر از خوانندگان عزیز تقاضا می‌کنیم که ندای یاری ما را بی‌جواب نگذارند.

اما، دراین شماره، همان‌طور که ملاحظه خواهیدکرد، سه بخش جدید به مجله افزوده‌ایم. این سه بخش عبارت‌اند از:

۱ ـ طرح و حل مسائل اساسی به روشهای مقدماتی

۲ ـ معرفی کتب ریاضی

۳ ـ مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان

امیدواریم درحالی‌که به آوردن این سه‌بخش در شماره‌های آینده ادامه می‌دهیم، دو بخش مستمر دیگر «مصاحبه با معلمین شما» و «مصاحبه با دانش‌آموزان و دانشجویان ممتاز و موفق» را نیز از شماره‌های آینده آغاز کنیم.

نیز از این شماره بخش «مسائل برای حل» را تغییر داده‌ایم و مسائل آن را براساس سالِ تحصیلی و رشتهٔ تحصیلی، و نه برحسب عنوان درس، انتخاب کرده‌ایم.

امیدمان به خداست و چشم‌مان در انتظار دریافت ارشادات و انتقادات شما عزیزان.

ما بدان مقصد عالی نتوانیم رسید

هم مگر پیش نهد لطف شما گامی چند

والسلام

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۳)

پرویز شهریاری

سخنان بودا و دکارت را خواندید. چقدر به هم نزدیک‌اند! بودا، روحانی و حکیمی از شرق، و دکارت، فیلسوف و ریاضیدانی از غرب است. فاصلهٔ زمانی بین زندگی آنها هم کوتاه نیست. بودا در سدهٔ ششم پیش از میلاد می‌زیسته و دکارت در سدهٔ هفدهم بعد از میلاد، یعنی نزدیک به ۲۳۰۰ سال، آنها را از هم جدا می‌کند. با وجود این، توصیه‌های آنها، چنان به هم شباهت دارد که به نظر می‌رسد، دو مترجم مختلف، متن واحدی را ترجمه کرده‌اند. چرا به قول دکارت «نباید چیزی را جست‌وجو کنیم که دیگران فکر می‌کنند» و چرا به قول بودا «نباید گفته‌ای را، به صرف این که دیگران گفته‌اند، باور کنیم»؟

ابتدا، این سخن ابن سینا را، در مقدمه «شفا» بشنویم و، سپس، دلیلهای خود را بیاوریم:

«... همچنین، از جست‌وجوی رابطه‌ای بین اوضاع و احوال آسمان خواص روح و بعدهای موسیقی خودداری می‌کنیم وگرنه روش کسانی را که از حقیقت علم آگاهی ندارند (منظور ابن‌سینا، برخی دانشمندان یونانی، مثل فیثاغورث و افلاطون و پیروان آنهاست) پیروی‌کرده باشیم. اینان وارث فلسفه‌ای کهنه و سست می‌باشند و ویژگیهای اصلی چیزها را با کیفیتهای اتفاقی آنها، به جای هم گرفته‌اند؛ خلاصه کنندگان نیز از آنها تقلید کرده‌اند. ولی کسانی که فلسفه حقیقی را فهمیده و ویژگیهای درست چیزها را درک کرده‌اند (منظور ابن‌سینا، فارابی و پیروان اوست)، اشتباههایی را که در اثر تقلید رخ می‌دهد، تصحیح کرده و خطاهایی را که زیباییهای اندیشه‌های کهنه را می‌پوشاند، پاک کرده‌اند. اینان سزاوار تحسین‌اند...»

اول، به این دلیل که قانونهای حاکم بر طبیعت و جامعه، چنان بغرنج‌اند که هرگز، یک یا چند بررسی، یک یا چند دیدگاه و یک یا چند سند، نمی‌تواند ماهیت و حقیقت یک قانون را روشن کند. باآن که دانش، بسیار پیش‌رفته و بسیاری از رازها را گشوده است، انسان هنوز در آغاز راه است و تارسیدن به حقیقت واقع، راه درازی در پیش دارد. با دانشی که امروز داریم و باآگاهیهایی که در اختیار ماست، می‌توان به نتیجه‌هایی رسید که گاه با هم متضادند و انسان پژوهشگر و اندیشمند، تنها باید با آنها آشنا شود، دربارهٔ آنها بیندیشد و مسیرهای تازه‌ای برای بررسی آنها پیدا کند. به این دو اظهارنظر توجه کنید. آیا در برخورد اول، هر دوی آنها را درست نمی‌پندارید؟

کارل چاپک، نویسندهٔ نکته سنج «چک»، نزدیک به هفتاد سال پیش نوشت:

«انسان وقتی می‌تواند به طبیعت دست یابد که به کاری غیر از آن چه در طبیعت وجود دارد، بپردازد. تا زمانی که انسان تلاش می‌کرد، همچون پرنده یا پروانه، بال بزند، تمام کوششهای او در زمینهٔ پرواز، با ناکامی مواجه شد. وقتی می‌خواست با سرعت بیشتری روی زمین بدود، به جای این که مثل گوزن یا اسب، چهار دست و پا راه برود، یا دو پای اضافی برای خود درست کند، چرخ را ساخت. وقتی از دندانهای طبیعی و ثابت خود

راضی نبود، دندانهای مصنوعی قابل جابه‌جا شدن را برای خود ساخت که می‌توانست آنها را در «تیردان» خود جای دهد. ریسمان باف، ضمن بافتن ریسمان، عقب عقب می‌رود یعنی به طریقی عمل می‌کند که درست عکس حرکت عنکبوت، هنگام بافتن تار است. اگر آدمی می‌خواست از عنکبوت تقلید کند، هرگز نمی‌توانست دستگاه بافندگی را اختراع کند. تمام هنر صنعتی بشر در این است که، برای انجام هرکاری، نه در جهتی که در طبیعت وجود دارد، بلکه درست در جهت متضاد با آن حرکت می‌کند.»

اکنون نظر یک دانشمند، ای. ب. تی بی نتسکی را در کتاب «بیونیک» (۱۹۷۶) بشنوید:

«همهٔ نمونه‌ها، به طور قانع کننده‌ای ثابت می‌کنند که، از دورترین دورانهای پیش از تاریخ، طبیعت زنده، الهام بخش آدمی در کشش او به سمت پیشرفت علمی و صنعتی بوده است. در جریان هزاران سال، انسان از طبیعت آموخته است و کشفها و اختراعهای خود را، از روی آن برداشته است. صنعت، که در واقع ابزار مصنوعی کار به شمار می‌رود، چیزی نیست جز تقلیدی از اندامهایی از دستگاههای زنده.»

وقتی که شما می‌خواهید با دورانهای تکامل ریاضیات آشنایی پیدا کنید، با دو دیدگاه متفاوت روبه رو می‌شوید. گروهی، ریاضیات را تنها «ریاضیات نظری» و مفهومها و رابطه‌های انتزاعی آن می‌دانند و «ریاضیات کاربردی» را، به عنوان بخشی از ریاضیات به حساب نمی‌آورند. به همین جهت، دورانی از تاریخ بشر را، که بیشتر در جهت ریاضیات کاربردی تلاش شده است، دوران رکود دانش ریاضی می‌دانند. برخی از دانشمندان، پا را از این هم فراتر گذاشته‌اند و ریاضیات را، تنها محصول ذهن بشر می‌دانند که، کاربرد برخی از قانونهای آن در عمل، تنها امری تصادفی است. گروه «نیکلای بورباکی» که عده‌ای از بهترین ریاضیدانان معاصر فرانسوی را شامل می‌شود و کتابهای خود را، که بسیار هم با ارزش‌اند، زیر همین نام مستعار «بورباکی» منتشر می‌کنند، از این دسته‌اند و «ریاضیات کاربردی» را، اصلاً «ریاضیات» نمی‌دانند. اما گالیله عقیدهٔ دیگری دارد:

ـ «جهان کتابی است پر از فلسفه. این جهان در برابر چشمان ما گشوده است. ولی تنها وقتی می‌توان از آن سردرآورد که با نشانه‌ها، نمادها و زبان این کتاب آشنا باشیم. این زبان، ریاضیات و این نشانه‌ها، مثلثها و دایره‌ها و دیگر شکلها هستند.»

و گنه دنکو، ریاضیدان و فیلسوف معاصر و عضو آکادمی علوم اوکراین، ریاضیات را عنصری لازم برای زندگی امروزی می‌داند و در مقالهٔ «ریاضیات کاربردی و چشم انداز آینده» می‌نویسد:

«روشهای ریاضی در تمامی زندگی ما نفوذ کرده است. ریاضیات امروزی، تنها زمینه‌ای برای محاسبه نیست، بلکه به‌صورت سلاحی نیرومند برای تحقیق درآمده و بارها و بارها بر تجربه پیشی گرفته است. با وجود این، جوانان جست و جوگر امروزی، حداکثر با چنان سطحی از پیشرفت ریاضیات سروکار دارند که، در بهترین شرایط، مربوط به صد سال پیش است و همین جوانان، فردا باید بتوانند دانشهای طبیعی، صنعت و اقتصاد را تکامل دهند. همین جوانان امروزی‌اند که باید رازهای اندیشه را بگشایند، به فضای دوردست کیهانی راه یابند، روندهای صنعتی را ادامه دهند و روشهای مؤثری برای تشخیص بیماریها و درمان آنها پیدا کنند.»

دربارهٔ دورانهای تکامل ریاضیات صحبت می‌کردیم و گفتیم، گروهی تنها به ریاضیات نظری توجه دارند. بنابراین دیدگاه، تاریخ ریاضیات، تاکنون از سه مرحله گذشته است: ریاضیات مقدماتی (یا ریاضیات کمیتهای ثابت)، ریاضیات کمیتهای متغیر و، سرانجام، ریاضیات امروزی. ولی گروهی دیگر، ایرادهایی جدی به این تقسیم‌بندی دارند. آنها می‌گویند، در این تقسیم بندی، یکپارچگی و وحدت ریاضیات را، که هم شامل ریاضیات نظری و هم شامل ریاضیات کاربردی باشد، به هم می‌زند. از این گذشته، با این تقسیم‌بندی، دوره‌های کاملی از تکامل بشر، کنار گذاشته می‌شود. در

واقع، در تاریخ بشر، دو دورهٔ کم و بیش طولانی وجود دارد که، در آنها، توجه اصلی دانشمندان، به ریاضیات کاربردی بوده‌است: ۱) دوران پیش از ریاضیات یونانی و ۲) دوران سده‌های میانه، که مرکز ثقل همهٔ دانشها (و از آن جمله ریاضیات)، در شرق و به ویژه در ایران بوده است. البته، خود این دو دوره با هم فرق دارند. در دوران پیش از ریاضیات یونانی، در مصر، بابل، سرزمین عیلام، چین و سایر جاها، تلاش عمده در حل مسأله‌های به طور نسبی ساده‌ای از ریاضیات کاربردی، مثل تقسیم زمین برای کشت، ساختن انبارها، راهها و قلعه‌ها، توسعهٔ بازرگانی، فراهم کردن توشهٔ سربازانی که در جنگ به سر می‌برند،... بوده‌است؛ حل این گونه مسأله‌ها، نیاز به محاسبه، شناخت ویژگیهای بعضی شکلها و غیر آن داشته است. و همین‌ها، زمینه را برای به وجودآمدن «ریاضیات نظری» فراهم کرد. در دورهٔ دوم برتری «ریاضیات کاربردی»، مسأله‌های بغرنج‌تری در برابر ریاضیدانان قرار داشت و آنها ناچار بودند، ابتدا قانون مندیهای کلی را پیداکنند و سپس، به کمک آنها مسأله‌های کاربردی را حل کنند. مثلاً خوارزمی، ریاضیدان ایرانی، کتاب «جبر» خود را، که نخستین کتاب جبر در تاریخ ریاضی است، به خاطر حل مسأله‌هایی نوشته است که، در زمان او، دشواریهایی به وجود آورده بودند، مثل مسأله‌های مربوط به تقسیم ارث و عمل کردن به وصیتها. اغلب این مسأله‌ها، منجر به حل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شدند، به همین مناسبت، خوارزمی ابتدا انواع معادله‌های درجه دوم را می‌آورد، برای هریک از آنها راه حل کلی (آلگوریتم) پیدا می‌کند، سپس، کاربرد آنها را، در مسأله‌های عملی، با ذکر مثالهای فراوان، توضیح می‌دهد.

به این علتهاست که گروه دیگری از دانشمندان، دورانهای تکامل ریاضیات را به این نحو در نظر گرفته‌اند که، همیشه، به دنبال دورانی که «ریاضیات کاربردی» تسلط داشته است، دورانی فرا می‌رسد که، در آن «ریاضیات نظری» مسلط می‌شود. بعداز دوران «ریاضیات کاربردی» ملتهای باستانی، ریاضیات نظری یونانیها، سپس دوباره ریاضیات کاربردی ملتهای مشرق زمین و دوباره، بعد از رونسانس، ریاضیات نظری، حالتی مسلط پیدا می‌کند و امروز، این طور به نظر می‌رسد که داریم به دوران تازه‌ای از ریاضیات کاربردی وارد می‌شویم. چنین است، دو دیدگاه متفاوت درباره تنظیم تاریخ ریاضیات.

دوم، به این دلیل که اغلب، و به ویژه در دوران ما، که نظام سودجوی سرمایه‌داری حاکم بر جهان است، به نام دانش، خبرها و «داستان»های هیجان‌آوری منتشر می‌شود که با دانش، فاصله بسیار دارند و، در برخی موردها، به‌صورت نوعی شیادی در می‌آید. دستگیرهٔ این کارهای «شبه علمی» و یا بهتر بگوییم «ضد علمی»، عنوانهای پر هیاهویی از قبیل «مثلث برمودا» ، «بیگانه‌های غیر زمینی»، «نخستین انسانی که از میمون زاده‌شد»، «بشقاب‌های پرنده»، «عمل جراحی با دستهای برهنه»،... است. روی جلد و تیترهای درشت برخی مجله‌ها و روزنامه‌ها و حتی گاهی، به اصطلاح «مجله‌های علمی» جهان، با این عنوانها و عنوانهای مشابه آنها پر می‌شود و دریغ که گاهی، به نشریه‌ها و رسانه‌های درونی هم نفوذ می‌کنند. تنها به یکی از این نمونه‌ها اشاره می‌کنیم.

در ژانویهٔ سال ۱۹۸۲، تلویزیون فرانسه، برنامه هیجان انگیزی در بارهٔ «روان شناسی تجربی» پخش کرد. این برنامه، با این هدف تنظیم شده بود تا بینندهٔ تلویزیون را قانع کند که، گویا مسأله‌هایی از نوع «روشن بینی» ، «دور آگاهی (تله پاتی)» و «انتقال فکر» (بدون هیچ حامل شناخته شده‌ای)، در حوزهٔ دانش قرار دارد و امروز، در مورد این پدیده‌ها، هیچ تردیدی وجود ندارد.

میشل روزه، گزارشگر مجلهٔ علمی «علم و زندگی» چاپ پاریس دربارهٔ این گفتار تلویزیونی مقاله‌ای نوشت که برخی از جنبه‌های نادرست این برنامه را فاش می‌کند. بخش بسیار کوتاهی از نوشتهٔ میشل روزه را می‌آوریم.

در برنامه تلویزیونی تأکید شد که «روانشناسی تجربی»، به عنوان یک دانش رسمی پذیرفته شده است و، در زمان ما، در بیشتر دانشگاهها جزو برنامه‌های درسی قرار دارد. گردانندهٔ برنامه گفت: «امروزه شخصیتهای بسیار جدی، روانشناسی تجربی را در محدودهٔ بررسیهای خود قرار داده‌اند و از آن به عنوان یکی از رشته‌های دانش نام می‌برند.» و گوینده، از دانشمندانی، به عنوان این گونه شخصیتها نام برد. ابتدا نام پروفسور واسیلی یف از فرهنگستان علوم دانشگاه لنینگراد را آورد. ولی باید گفت که اولاً جایی به نام «فرهنگستان علوم دانشگاه لنینگراد» وجود ندارد. اگر منظور «فرهنگستان علوم

اتحاد شوروی» است، در مسکو واقع است نه در لنینگراد؛ ثانیاً مرحوم ل.ل. واسیلی یف، عضور فرهنگستان نبود و تنها کُرسی فیزیولوژی انسان را در دانشگاه لنینگراد اداره می‌کرد. او البته، از هواداران «دور آگاهی» بود و کتابی هم به نام «تسلط برفاصله‌ها» در این باره نوشت. ولی این نظریه‌های او را، نباید خیلی جدی گرفت؛ از این گذشته، نظریه‌های شخصی واسیلی یف، به هیچ وجه نظر رسمی دانش شوروی نیست.

گوینده، به عنوان شخصیت دوم، از «ای یولی نیون» نام برد که گویا کرسی روانشناسی تجربی را در دانشگاه تولوز اداره می‌کند. بنابه اظهار گوینده، او بنیانگذار آزمایشگاه روانشناسی تجربی در این دانشگاه است. ولی در دانشگاه تولوز، نه کرسی روانشناسی تجربی وجود دارد و نه، در این زمینه، آزمایشگاهی در آن پیدا می‌شود. آقای «لی نیون» هم اصلاً استاد نیست. او تنها آسیستان است و کار او، تدریس کاربرد ریاضیات در آمار است.

شخصیت سوم، پروفسور «رمی‌شوون»، متخصص مشهور رفتار زنبورهای عسل و مورچگان بود. ولی او هرگز به طور رسمی، روی روانشناسی تجربی کار نکرده است و همچون «واسیلی یف» و «لی نیون» او را هم نمی‌توان نماینده دانش رسمی دانست که برروانشناسی تجربی مُهر تأیید گذاشته باشد...

گمان می‌کنم، همین چند سطر، برای روشن کردن ماهیت «بحث علمی تلویزیونی» کافی باشد.

در سال ۱۹۵۳، در آزمایشگاه علمی - پژوهشی «نول سو» (کمپانی «جنرال الکتریک») مجلسی تشکیل شد که «ایروینگ لنگ‌مور» (۱۸۵۱ - ۱۹۸۷)، دانشمند سرشناس امریکایی و برندهٔ جایزهٔ نوبل، زیر عنوان «دانش پدیده‌هایی که در واقع وجود ندارند» سخنرانی کرد و پرده از روی بسیاری ادعاهای به اصطلاح علمی برداشت. «لنگ‌مور» این گونه نظریه‌ها را «دانش بیمار» می‌نامد. متن این سخنرانی بسیار جالب و آموزنده است، ولی به دلیل تخصصی بودن آن، و هم به دلیل این که کم وبیش طولانی است، در این جا تنها بخش پایانی این سخنرانی را که به «بشقابهای پرنده» مربوط می‌شود، می‌آوریم.

«من خیلی خودم را آماده نکرده‌ام تا روی موضوع بشقابهای پرنده، بحثی مفصل داشته باشم و تنها دربارهٔ یک جنبهٔ آن صحبت می‌کنم؛ بشقابهای پرنده، در واقع، یک موضوع علمی نیست، گرچه بعضی از دانشمندان هم، چیزهایی دربارهٔ آن نوشته‌اند. بعداز جنگ، من عضو یک شورای مشورتی بودم. در یکی از نشستهای کاملاً محرمانهٔ آن، طرح مورد بحث قرار می‌گرفت. همه چیز اسرارآمیز بود. صحبت کردن دربارهٔ آن دشوار است. گفت و گو از همین بشقابهای پرنده بود، از جمع آوری اظهارات گواهان و از برآورد و ارزیابی همهٔ آگاهیهایی که دربارهٔ بشقابهای پرنده وجود دارد. به ما گفتند: «می‌دانید! وضع خیلی جدی است. مثل این که واقعاً چیزی وجود دارد.» آن وقت، من دربارهٔ نمونه‌هایی از «کشف»هایی که می‌شناسیم، برای آنها صحبت کردم. گفتم که بشقابهای پرنده هم پدیده‌ای است که مرا به یاد همان به اصطلاح کشفها می‌اندازد. خواهش کردم تنها سی یا چهل نفر از بهترین گواهان را انتخاب کنند و پیش من بیاورند؛ من نیازی به صدها گواهی که در اختیار شماست، ندارم. بیشتر موردها، مربوط به مشاهدهٔ زهره در هوای تیره و گرفته بود. اگر فقط بدانیم به کجا باید نگاه کنیم، زهره را حتی در وسط روز هم می‌توان دید. این وضع، بارها موجب هراس و ولوله شده است. مثلاً در نیویورک، به خاطر دیدن زهره در نزدیکی یک ساختمان، راه بندان واقعی به‌وجود آمد. مردم گمان می‌کردند که این، یک ستارهٔ دنباله‌دار است که همین الان با زمین برخورد می‌کند؛ یا این که کسی از مریخ آمده است و یا چیزهای دیگری از این قبیل. این حادثه مربوط به سالهای قبل است، سی یا چهل سال پیش. ولی همین زهره، تا امروز، داستانهای زیادی دربارهٔ بشقابهای پرندهٔ به‌وجود آورده است. بین مدرکهایی که ارائه شد، تنها دو عکس وجود داشت که به وسیلهٔ یک نفر گرفته شده بود. در برخورد اول، به نظرم رسید که در عکسها، تکه‌ای از یک کارتُن قیر آلود دیده می‌شود؛ در ضمن، چیزی که در دو عکس دیده می‌شد، به کلی با هم متفاوت بود. من به جمع آوری جزئیات اضافی پرداختم: وضع هوا در آن موقع چگونه بود؟

روزنامه‌های کهنه را در آوردم، معلوم شد عکسها موقعی برداشته شده است که پانزده یا بیست دقیقه از توفان قوی پررعد و برقی گذشته بوده‌است. خوب، در چنین وضعی، چه چیزی طبیعی‌تر از وجود یک قطعه کارتُن قیرآلود است که، در اثر گردباد، بلند می‌شود و به طرف ابرها می‌رود و حالا، خیلی ساده دارد، پایین می‌افتد. چه رازی در این مسأله وجود دارد؟ به من می‌گفتند: «این شیء با سرعتی حیرت‌انگیز حرکت می‌کرد.» ولی شخصی که همهٔ اینها را دیده بود، کمترین تصوری در این باره نداشت که، این شیء، در چه فاصله‌ای از او بوده است و روشن است که، در چنین وضعی، همه چیز دشوار می‌شود. وقتی شما چیزی در آسمان می‌بینید، هیچ‌گونه تصوری دربارهٔ اندازه‌های آن در شما پدید نمی‌آید و، به همین مناسبت، ممکن است هر گونه حدسی دربارهٔ سرعت آن بزنید. سعی کنید اندازه‌های واقعی ماه را، با توجه به صورت ظاهری آن، حدس بزنید. آیا حجمی به اندازهٔ مُشت دارد یا توپ یا خانه؟ وقتی به‌طور ساده به ماه نگاه می‌کنید، هیچ چیز دربارهٔ این مطالب نمی‌توانید بگویید. پس چگونه می‌شود اندازه‌های یک بشقاب پرنده را فهمید؟ به هر حال، با وجودی که همهٔ سندها را بررسی کردم حتی یک نمونه پیدا نکردم که دست‌کم ذره‌ای معنا داشته باشد. بین آنها، هیچ گونه هماهنگی وجود نداشت. همهٔ آنها از همان نوعی بودند که شرح دادم و البته، همراه با تلقیهایی ذهنی و خیال بافانه. در واقع هیچ کس با دقت نمی‌داند که با چه معیاری باید سرعت شیء را در آسمان پیدا کرد و، اگر چیزی ناشناخته است، در چه فاصله‌ای از ما قرار دارد؟ ولی همهٔ این گواهیها، یک وجه مشترک داشتند: فقدانِ استدلال قانع کننده در آنها... بعدها داستان این شورای محرمانه، فاش و در روزنامه‌ها چاپ شد. به نظر می‌رسد، این مسأله خاتمه یافته است. ولی البته روزنامه‌ها، به هیچ وجه اجازه نمی‌دهند، هیجان مردم در این باره، فروکش کند.»

سوم، به این دلیل که دانش رو به تکامل است و ما هم باید در این تکامل سهمی داشته باشیم. روزاپتر (۱۹۰۵ - ۱۹۷۷)، ریاضیدان و عضو سابق آکادمی علوم مجارستان، در پایان کتاب زیبای خود «بازی با بی‌نهایت» می‌گوید:

«بدون تردید، پیشرفت آیندهٔ ریاضیات، دامنهٔ آن را وسعت خواهد داد. گرچه دورنمای این پیشرفت، از دید امروز ما پنهان است. یک چیز را باید، یکبار برای همیشه، بفهمیم: ریاضیات پدیده‌ای ساکن و بسته نیست، ریاضیات دانشی زنده و پر تحرک است که پیوسته راه خود رابه طرف جلو می‌گشاید. هر وقت خواسته‌اند ریاضیات را در درون محدودهٔ بسته‌ای زندانی کنند، دیر یا زود توانسته است راهی به سوی آزادی بجوید و قابلیت زنده بودن خود را نشان دهد.»

به همین دلیل، نباید تصور کنیم، آن چه از ریاضیات می‌دانیم و یا به‌طور کلی، آن چه در ریاضیات وجود دارد، دقتی مطلق دارد و بی‌تغیر و جاویدان است. تعریفها، مفهومها و نظریه‌های ریاضی، ضمن پیشرفت ریاضیات، دقیق‌تر و کاراتر می‌شوند. اگر یک قانون ریاضی، در گذشته، در محدوده‌ای تنگ کاربرد داشته است، با پیشرفت ریاضیات و دقیق‌تر شدن مفهومها و نظریه‌ها، این محدودهٔ تنگ شکافته می‌شود و به میدانی گسترده‌تر تبدیل می‌شود. بنابراین، نمی‌توان و نباید کار قانونها و مفهومهای ریاضی را، پایان یافته دانست. شَك، موجب پیشرفت دانش و موجب نزدیکتر شدن به حقیقت واقع است. هیچ چیز را نباید به‌صورت قطعی پذیرفت. طرز تفکری که دانش موجود را کمال مطلوب می‌داند، مانعی برای پیشرفت است. نظریهٔ نسبیت، چیزی از ارج و ارزش نیوتون نمی‌کاهد، ولی اگر همهٔ دانشمندان، به نیوتون، به عنوان دانشمندی که حرف آخر را زده است، می‌نگریستند، نه ریاضیات تکامل می‌یافت و نه قانون‌مندیهای فضای کیهانی کشف می‌شد. دو مثال از ریاضیات بیاوریم.

مثال اول. در سرزمین عیلام (جنوب و جنوب غربی ایران)، در بابل و در مصر، در هزاره‌های پیش از میلاد، برای محاسبهٔ ساخت یک چهار ضلعی، نصف مجموع دو ضلع روبه‌رو را در نصف مجموع دو ضلع دیگر ضرب می‌کردند، قاعده‌ای که تنها برای

مستطیل درست است. در آن زمانها، بیشتر به کاربرد عملی ریاضیات توجه داشتند و محاسبهٔ مساحت، بیشتر برای تقسیم زمینهای کشاورزی به کار می‌رفت. چون در عمل، زمین را به صورتی تقسیم می‌کردند که، کم و بیش، مستطیل شکل بودند، این نوع محاسبه، تفاوت چندانی با واقعیت پیدا نمی‌کرد. بعدها، در دورهٔ تکامل ریاضیات کاربردی، ریاضیدانان ایرانی با شکلهای گوناگونتری سروکار پیدا کردند و به ناچار، محاسبهٔ مساحت را، برمبنای دقیقتری گذاشتند. مثلاً در کتاب «الایضاح عن اصول صناعة المساح» تألیف ابومنصور تمیمی که در اواخر سدهٔ چهارم و اوایل سدهٔ پنجم هجری قمری در نیشابور و به عربی نوشته شده و ابوالفتوح اصفهانی آن را به فارسی برگردانده است، انواع چهار ضلعی را ۹ قسم دانسته: مربع، مستطیل، ذوزنقه قائم الزوایه، لوزی، شبه لوزی (چهار ضلعی که دو قطر آن بر هم عمود باشند ویکی از قطرها به وسیلهٔ دیگری نصف شود)، متوازی الاضلاع، ذوزنقهٔ متساوی الساقین، ذوزنقهٔ غیر مشخص و سرانجام، چهار ضلعی غیر مشخص، در کتاب تقریباً در همهٔ حالتها، محاسبهٔ مساحت با دقت انجام گرفته، تنها در حالت چهار ضلعی غیر مشخص (یعنی چهار ضلعی که یکی از هشت حالت دیگر نباشد) دو راه برای محاسبهٔ مساحت آورده است. در یکی از روشها، چهار ضلعی را با رسم قطر به دو مثلث تقسیم می‌کند و توصیه می‌کند، مساحت هر مثلث را به طور جداگانه محاسبه، سپس، با هم جمع کنید. ولی در روش دوم نوعی عدم دقت به چشم می‌خورد. او می‌گوید: برای «مربعی مختلف الاضلاع و القطرین و الزوایا...طریق مساحتش آن بُود که نیمهٔ جوانب، جمله برگیرند و فضل آن بر هر ضلعی بدانند و فضل‌ها، بعضی در بعضی زنند. جذر آنچ برسد، مساحتش بُود». [توجه کنیم، دراین جا، منظور از «مربع» چهار ضلعی و منظور از «جوانب» محیط است.] به زبان امروزی، یعنی «هر ضلع را از نصف محیط کم کنیم و جذر حاصل ضرب چهار عدد حاصل را به دست آوریم». اگر طول ضلعهای چهار ضلعی را a ، b، c و d و اندازهٔ نصف محیط را p بنامیم، به این دستور می‌رسیم:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

ولی می‌دانیم، این دستور، برای محاسبهٔ مساحت یک چهار ضلعی قابل محاط در دایره درست است، نه هر چهار ضلعی غیرمشخص. محاسبهٔ دقیقتر شده، ولی هنوز به دقت کامل نرسیده.

جالب این است که هنوز هم، دهقانان ایرانی، در بیشتر جاها، مساحت قطعه‌های زمین را با همان روشی انجام می‌دهند که عیلامی‌ها در چهار هزار سال پیش انجام می‌دادند.

مثال دوم. در ریاضیات، برای هر مفهومی و هر شکلی، باید تعریفی داشته باشیم. ولی «تعریف» مجموعه‌ای از واژه‌هاست: «مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه، که از نقطه ثابتی به یک فاصله باشند، دایره نامیده می‌شود». این، یک تعریف است، تعریف دایره، ولی، در این تعریف واژه‌هایی وجود دارد که اگر معنای آنها را ندانیم، از خود «تعریف» سردر نمی‌آوریم: «مجموعه»، «نقطه» ، «صفحه» ، «نقطه ثابت»، «فاصله». ولی همان دو واژهٔ اول را نمی‌توانیم تعریف کنیم: برای «مجموعه» و یابرای «نقطه» تعریفی وجود ندارد. البته، اقلیدس در کتاب «مقدمات» خود، نقطه را تعریف کرده است: «نقطه چیزی است که بدون بُعد باشد». در این «تعریف» دو مُشکل وجود دارد: اول واژهٔ «چیز» ، «چیزی است» یعنی چه؟ در این جا، «چیز» چه معنایی دارد؟ دوم «بُعد» یعنی چه؟ لازم است گفته شود که مفهوم و تعریف «بُعد» تنها در دهه‌های اخیر روشن شده است، آن هم به شرطی که خیلی از مفهومهای هندسی، و از آن جمله مفهوم «نقطه» را بشناسیم. عجب! نقطه را به کمک مفهوم بُعد و بُعد را به کمک مفهوم نقطه تعریف کنیم؟ مثل این است که بگوییم «پرستو نوعی پرنده است» و بعد، وقتی از ما بپرسند پرنده یعنی چه؟ در پاسخ بگوییم «پرنده چیزی مثل پرستو است». این نوع داوری یاتعریف را، در منطق قدیم، «دور باطل» می‌گفتند. «دور باطل»، یعنی تعریف یک موضوع، سرانجام به خود آن موضوع برگردد. و تعریف اقلیدس از نقطه، منجر به دور باطل می‌شود.

در مورد عملهای ریاضی هم، وضع به همین گونه است. مثلاً عمل جمع را نمی‌توان تعریف کرد. جمع یعنی چه؟ تعریف عمل جمع چیست؟ درکتابها، گاه به چنین جمله‌هایی برمی‌خوریم: «عمل جمع، یعنی افزودن دو یا چند عدد به یکدیگر» یا «عمل جمع، یعنی

روی هم ریختن واحدهای دو یا چند عدد». خوب دقت کنید. در این تعریفها، تنها کاری که کرده‌اند، به جای واژهٔ «جمع» از واژهٔ «افزودن» یا واژهٔ «روی هم ریختن» استفاده کرده‌اند. اگر بخواهیم هر کدام از این تعریفها را، با زبانی ساده بیان کنیم، باید بگوییم «جمع یعنی جمع»!

ریشهٔ دشواری در کجاست؟ ذهن آدمی، برای این که چیزی را بشناسد یا دربارهٔ آن داوری کند، به تکیه‌گاهی نیاز دارد. شما اول از دوستتان می‌پرسید: «آیا قبول داری که ...» و اگر او قبول کرد آن وقت با تکیه بر آن و براساس آن، سعی می‌کنید نظر خود را توضیح دهید. ولی اگر به هر موضوع روشنی اشاره کنید، دوستتان از قبول آن سرباز زند و هیچ چیز را قبول نکند، در بیان نظر خود و در استدلال خود در می‌مانید. گفت وگو و بحث بین دو نفر، وقتی به جایی می‌رسد که آگاهیهای مشترکی داشته باشند. همین آگاهیهای مشترک (که هر دو طرف دربارهٔ آنها توافق دارند)، مبنا و تکیه‌گاه گفت و گوی آنهاست.

در ریاضیات، برای تعریف «نقطه» یا «عدد» یا «عمل جمع»، تکیه‌گاهی نداریم و تعریف را از «هیچ» نمی‌توان آغاز کرد. ولی اگر معنای «جمع» را بدون تعریف بپذیریم و مثلاً بگوییم «معنای آن روشن است» یا «معنای آن در خودش پنهان است»، آن وقت می‌توانیم، «عمل تفریق» و «عمل ضرب» را با تکیه بر آن تعریف کنیم.

به همین ترتیب در مورد داوری و استدلال هم، به تکیه‌گاههایی نیاز داریم که قابل اثبات نیستند. می‌گوییم «نقطه C را روی پاره خط راست AB و بین دو نقطهٔ A و B انتخاب می‌کنیم». اگر کسی از شما بپرسد: «مگر بین دو نقطه A و B، همیشه می‌توان نقطهٔ دیگری پیدا کرد؟» و شما بخواهید وجود این نقطهٔ سوم را برای او ثابت کنید، در استدلال خود درخواهید ماند. می‌گویید «اگر خط راستی دو ضلع مثلث را قطع کند، یا با ضلع سوم موازی است و یا امتداد ضلع سوم را در نقطه‌ای قطع می‌کند». و کسی از شما می‌پرسد: «مگر نمی‌شود یک خط راست هر سه ضلع مثلث را قطع کند؟» و شما بخواهید ثابت کنید، اگر خط راستی از یک رأس مثلث عبور نکند، نمی‌تواند هر سه ضلع آن را قطع کند، درمانده می‌شوید.

در ریاضیات، مفهومهایی داریم که قابل تعریف نیستند و گزاره‌هایی داریم که باید، درستی یا نادرستی آنها را، براساس تجربهٔ زندگی و بدون استدلال بپذیریم. ولی آیا آنچه را امروز می‌پذیریم، ثابت و جاوانی است؟ اقلیدس در «مقدمات» خود می‌گفت: «هرکُل از جزء خود بزرگتر است» و این، اصلی درست و بی‌عیب، در طول بیش از دو هزار سال به حساب می‌آمد. ولی وقتی ژرژ کانتور (۱۸۴۵ - ۱۹۱۸)، ریاضی‌دان آلمانی، نظریهٔ مجموعه‌ها را ساخت و تعریف دقیقتری، برای برابری تعداد عضوهای دو مجموعه (به ویژه، دو مجموعهٔ نامتناهی) آورد، معلوم شد، این اصل بدیهی و روشن (که هر عقل سلیمی آن را قبول داشت) در مورد مجموعه‌های نامتناهی درست نیست و مثلاً، تعداد عضوهای مجموعهٔ عددهای طبیعی، با تعداد عضوهای مجموعهٔ عددهای فرد، برابر است، در حالی که مجموعهٔ عددهای فرد، زیر مجموعه‌ای یا جزئی از کُل مجموعهٔ عددهای طبیعی است. امروز باید اصل اقلیدس را تغییر داد و به این صورت، تصحیح کرد: «هر کُل از جزء خود بزرگتر است، به شرطی که نامتناهی نباشد».

انسان، هرروز به تجربهٔ خود و در نتیجه به آگاهیهای خود می‌افزاید و در زندگی پیشرفته‌تر خود، نیازهایی پیدا می‌کند که برای پدران او مطرح نبوده‌اند و، به همین مناسبت به ابزارهای تازه، مفهومهای تازه، تعریفها و داوریهای تازه نیاز دارد و این یعنی تکامل علم و تکامل انسان.

اگر گمان کنیم، آنچه از گذشته به ما رسیده، کامل و بی‌نقص است و اگر با دید شک و انتقادی به آن‌چه می‌خوانیم و می‌شنویم، نگاه نکنیم، به معنای این است که نخواسته‌ایم در این راه پر تکاپوی پیشرفت، گامی برداریم و خود را محکوم به توقف و، در نتیجه نیستی کرده‌ایم.

اگر دگرگونیهایی را که در طول تاریخ بشر، در مورد یکی از ساده‌ترین مفهومهای ریاضی، یعنی مفهوم عدد، به وجود آمده است، مطالعه کنیم (و امیدواریم در یکی از بحثهای خود، به آن بپردازیم)، متوجه می‌شویم که با همهٔ ارزش و نبوغی که مثلاً ارشمیدس داشته است، ما خیلی بیشتر، بهتر و دقیقتر از او، عدد را می‌شناسیم و، به همین ترتیب است، دگرگونیهایی که در مفهوم حد یا مفهوم تابع پدید

آمده است.

چهارم، به این دلیل که حتی ریاضیدانان بزرگ هم دچار اشتباه می‌شوند. پیرفرما (۱۶۰۱ - ۱۶۶۱)، ریاضیدان فرانسوی، گمان می‌کرد عدد $۲^{۲^n} + ۱$، به ازای هر مقدار درست و غیر منفی n، عددی اول است. او استدلال خود را شرح نداده است، ولی گمان می‌رود، به شیوهٔ استقرایی، برای چند عدد نخستین آزمایش کرده باشد:

$$n = ۰ \Rightarrow ۲^{۲^n} + ۱ = ۲^{۲^۰} + ۱ = ۲^۱ + ۱ = ۳ ;$$

$$n = ۱ \Rightarrow ۲^{۲^n} + ۱ = ۲^۲ + ۱ = ۵$$

به همین ترتیب، به ازای $n = ۲$ به عدد ۱۷، به ازای $n = ۳$ به عدد ۲۵۷، به ازای $n = ۴$ به عدد ۶۵۵۳۷ می‌رسیم که همهٔ آنها عددهایی اول‌اند. ولی به ازای $n = ۵$ چطور؟ می‌توان حدس زد که فرما، آزمایش خود را ادامه نداده است و یا در مورد عدد بزرگ $۲^{۳۲} + ۱$ دچار اشتباه شده و گمان کرده است که باید عددی اول باشد. ولی این عدد، بر ۶۴۱ بخش پذیر است. لازم نیست عدد ۲ را به توان ۳۲ برسانیم و با عمل تقسیم قانع شویم که عدد $۲^{۳۲} + ۱$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است. $۲^{۳۲}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۲^{۳۲} = ۲^{۱۳} \times ۲^{۱۳} \times ۲^{۶} = ۸۱۹۲ \times ۸۱۹۲ \times ۶۴$$

باقی ماندهٔ تقسیم ۸۱۹۲ بر ۶۴۱، برابر ۵۰۰ است، بنابراین باید باقی ماندهٔ تقسیم عدد

$$۵۰۰ \times ۵۰۰ \times ۶۴ = ۲۵۰۰۰ \times ۶۴۰$$

را بر ۶۴۱ پیدا کنیم. باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۵۰۰۰ بر ۶۴۱ برابر ۱ و بنابراین باقی ماندهٔ تقسیم عدد $۲^{۳۲}$ بر ۶۴۱ برابر ۶۴۰ می‌شود و این، به معنای آن است که $۲^{۳۲}+۱$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است. فرما اشتباه کرده بود.

برنارداولر (۱۷۰۷ - ۱۷۸۳)، ریاضیدان نامدار سویسی هم، دربارهٔ یکی از کشفهای خود می‌نویسد:

«من هیچ استدلال دیگری جز استقرای طولانی ندارم. آزمایشهای طولانی، برای من شکی در مورد درستی قانون باقی نگذاشته ... و به نظر می‌رسد که وقتی قانونی، مثلاً برای ۲۰ مورد متوالی آن درست باشد، ممکن نیست برای موردهای بعدی نادرست از آب در آید».

ولی در واقع این طور نیست. به ویژه در نظریهٔ عددها، می‌توان به نمونه مسأله‌هایی برخورد که نه تنها برای ۲۰ موردمتوالی، بلکه برای صدها مورد متوالی نتیجه‌ای را تأیید می‌کنند، در حالی که، این نتیجه، در حالت کلی درست نیست. مثلاً تا مدتها گمان می‌کردند عدد $۹۹۱n^۲ + ۱$، به ازای عددهای طبیعی n، هرگز برابر با مجذور کامل یک عدد درست نمی‌شود. حتی اگر این مسأله را به کامپیوتر بدهید و با طرح برنامهٔ مناسب، از آن بخواهید، با آزمایش عددهای طبیعی متوالی، نخستین عددی را پیدا کند که، به ازای آن، $۹۹۱n^۲ + ۱$ مجذور کامل باشد، به زودی به جواب نمی‌رسد. می‌دانید چرا؟ برای این که، کوچکترین عدد n، در این مورد، یک عدد ۲۹ رقمی است. این عدد n، چنین است:

$$n = ۱۲۰۵۵۷۲۵۷۹۰۳۳۱۳۵۹۴۴۷۴۴۲۵۳۸۷۶۷$$

هر عدد طبیعی دیگری که کوچکتر از این عدد n باشد، عبارت $۹۹۱n^۲ + ۱$ را مجذور کامل نمی‌کند.

آزمایش و روش استقرایی در دانشهای تجربی، نقش بزرگی به عهده دارد، ولی در ریاضیات، تنها می‌تواند وسیله‌ای برای حدس و گمان باشد. برای این که به درستی حکمی قانع شویم، باید با استدلال به آن برسیم. کارهای فرما، اولر و دیگران نشان داد که، در ریاضیات، نمی‌توان روش استقرایی رابه همان صورت عادی خود، مورد استفاده قرار داد. لازم بود تغییری در این روش داده شود تا بتواند در ریاضیات هم کاربرد داشته باشد. ما امروز، این روش را می‌شناسیم: روش استقرای ریاضی. کسانی که بیش از همه برای یافتن این روش تلاش کردند، بلز پاسکال (۱۶۲۳ - ۱۶۶۲)، رنه‌دکارت (۱۵۹۶

۱۶۵۰) و ژاکوب برنولی (۱۶۵۴ - ۱۷۰۵) بودند.

به اشتباه دیگری از یک ریاضیدان بزرگ اشاره می‌کنیم. فوریه (ژان باتیست ژوزف، ۱۷۶۸ - ۱۸۳۰)، ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی، در کتاب «نظریهٔ تحلیلی گرما» (۱۸۲۹) مقدار

$$S = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \cdots$$

را برابر $\frac{۱}{۲}$ دانسته است. دو استدلال برای اثبات «درستی» این حکم می‌توان آورد. می‌دانیم، برای $|x| < ۱$ داریم:

$$۱ + x + x^۲ + x^۳ + x^۴ + \cdots = \frac{۱}{۱-x}$$

(سمت چپ برابری، مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی نامتناهی با قدر نسبت $-۱<x<۱$ و سمت راست برابری، حد مجموع آن است؛ در ضمن، با تقسیم ۱ بر $x - ۱$ هم می‌توان، به‌طور مستقیم، به عبارت سمت راست رسید). اگر در این برابری $x= -۱$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - \cdots = \frac{۱}{۲}$$

در استدلال دوم، می‌توان S را این طور نوشت:

$$S = ۱- (۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \cdots) = ۱ - S \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}$$

ولی، این نتیجه‌گیری نادرست است، زیرا S، رشته‌ای متباعد است و حدی ندارد. برناردبولتسانو (۱۷۸۱ - ۱۸۴۸)، فیلسوف و ریاضیدان چك، برای رد نظر فوریه، مقدار S را به‌دو گونهٔ دیگر به دست آورد:

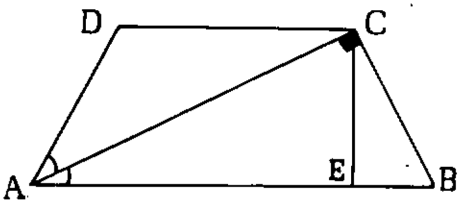
$$۱)\ S = (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + \cdots = ۰$$

$$۲)\ S= ۱ - (۱ - ۱) - (۱ - ۱) - (۱ - ۱) - \cdots = ۱$$

که اگر آنها را بپذیریم، باید به ناچار پذیرفت: $\frac{۱}{۲} = ۱ = ۰$

پنجم، به این دلیل که گاهی شکل ما را فریب می‌دهد. دیدید که چگونه «استدلال» فوریه را فریب داد؛ اکنون به این مسأله و حل آن توجه کنید (در «آشنایی با ریاضیات» شماره ۳۲، نمونه‌های دیگری از این نوع مسأله‌ها را می‌توانید پیدا کنید):

مسأله. مساحت ذوزنقه‌ای را پیدا کنید که بر دایره‌ای به شعاع برابر R محیط شده است، به شرطی که بدانیم، یکی از زاویه‌های مجاز به قاعدهٔ آن برابر ۶۰ درجه است؛ در ضمن، قطری از ذوزنقه که از رأس این زاویه می‌گذرد، زاویه را نصف می‌کند و بر یکی از ساقهای ذوزنقه عمود است.



حل. با توجه به صورت مسأله و با توجه به شکل داریم:

$$\hat{BAC} = \hat{CAD} = ۳۰^\circ \text{ و } \hat{ACB} = ۹۰^\circ$$

در ضمن $|CE| = ۲R$، زیرا در هر ذوزنقه‌ای که بر دایره‌ای محیط باشد، طول ارتفاع برابر با قطر دایره است.

در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ضلع BC روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه و برابر نصف طول وتر AB است، یعنی

$$|AB|^۲ = \left(\frac{|AB|}{۲}\right)^۲ + |AC|^۲ \qquad (۱)$$

ولی $|AC| = ۴R$، زیرا در مثلث قائم الزاویهٔ AEC، ضلع CE رو به رو زاویهٔ ۳۰ درجه و بنابراین، برابر نصف وتر، یعنی AC است. در نتیجه از (۱) به دست می‌آید:

$$\frac{۳|AB|^۲}{۴} = ۱۶R^۲ \Rightarrow |AB| = \frac{۸R\sqrt{۳}}{۳}$$

مثلث ACD متساوی الساقین است، زیرا زاویهٔ DCA با زاویهٔ CAB (که برابر ۳۰ درجه است) برابر است. به این ترتیب $|AD| = |DC|$. اگر از رأس D، ارتفاع ذوزنقه را (که برابر $۲R$ است) رسم کنیم و آن را DF بنامیم، از مثلث قائم الزاویهٔ ADF به سادگی به دست می‌آید: $|AD| = |CD| = \frac{R\sqrt{۳}}{۳}$. با در دست داشتن طولهای دو قاعده و طول ارتفاع ذوزنقه، مساحت آن به دست می‌آید:

$$S = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۸R\sqrt{۳}}{۳} + \frac{۴R\sqrt{۳}}{۳}\right) \circ ۲R = ۴R^{۲}\sqrt{۳}$$

مسأله حل شد؛ مساحت ذوزنقه به دست آمد؛ مسألهٔ ساده‌ای بود. در ضمن، وقتی مسأله را حل می‌کردیم، همهٔ داده‌های مسأله مورد استفادهٔ ما قرار گرفت: محیطی بودن ذوزنقه (آن جاکه ارتفاع ذوزنقه را برابر $۲R$ گرفتیم)، $\hat{A} = ۶۰^\circ$ ، $[AC] \perp [BC]$؛ همچنین قطر AC را نیمساز زاویهٔ به حساب آوریم. مشکل خاصی وجود ندارد. مسأله به سادگی حل شد.

ولی اگر اندکی دقت کنیم، معلوم می‌شود، مساحت شکلی را به دست آورده‌ایم که در واقع، وجود ندارد. از آن جاکه چهار ضلعی محیطی است، باید داشته باشیم:

$$|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$$

و چون $|AD| = |CD|$، پس $|BC| = |AB|$، یعنی باید در مثلث قائم الزاویه ABC، طول وتر با طول یکی از دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه برابر باشد و این، ممکن نیست. شکل ما را فریب داده بود.

□

گمان می‌کنم همین نمونه‌های کوتاه ولی آموزنده، کافی باشد تا به درستی سخنان بوداو دکارت پی ببریم. بیش از هر چیز به اندیشه و خرد خود اعتماد کنید و آن چه را می‌بینید و می‌شنوید، با محک اندیشه و خرد و دانش خود بسنجید، خودتان آزمایش کنید، خودتان استدلال کنید، دربارهٔ واژه‌ها، تعریفها، مفهومها، استدلالها و شکلها بیندیشید. از خودتان بپرسید: «آیا شکل را درست رسم کرده‌ام؟»، «آیا در این تعریف یا این استدلال نقصی وجود ندارد؟»، «آیا راهی برای آزمایش درستی جواب وجود دارد؟»، «آیا ممکن است مثالی پیداکرد که حکم واستدلال ما را نقض کند؟»، «آیا...».

مقاله را با سخن ابونصر فارابی، ریاضیدان، فیلسوف، منجم و روش‌شناس بزرگ ایرانی که در سده‌های سوم و چهارم هجری قمری می‌زیسته، از مقدمهٔ «کتاب بزرگ موسیقی» او پایان می‌دهیم:

«برای این که اندیشمند خوبی در تنظیم نظریه‌ها باشیم، بدون این که ارتباطی به دانش ویژه‌ای داشته باشد، باید سه شرط را داشته باشیم: ۱) همهٔ قاعده‌ها را به خوبی بدانیم؛ ۲) توانایی نتیجه‌گیریهای ضروری را، از این قاعده‌ها و از داده‌هایی که در این دانش وجود دارد، داشته باشیم؛ ۳) توانایی پاسخگویی به نظریه‌های نادرست را داشته باشیم و بتوانیم اندیشه‌ها و دیدگاههای دیگران را تجزیه و تحلیل کنیم، درست را از نادرست جدا و اشتباهها را اصلاح کنیم.»

تا بعد

ادب ریاضی

زبان ریاضیات دشوار ولی فناناپذیر است. من گمان نمی‌کنم هیچ یک از محققین کنونی در ادب یونانی بتواند لطایف نهفته در دیالوگهای افلاطون یا طنزهای آریستو فانس را بدان تمامی و کمال که یک ریاضیدان هر معنی و مقصودی را در کارهای ارشمیدس می‌فهمد درک کند.

م. ه. ا. نیومن

دکتر غلامحسین مصاحب

تئوری مقدماتی اعداد

هندسه تحلیلی

(قسمت اول ـ تا معادلهٔ صفحه)

محمد عابدی

مورد استفاده دانش‌آموزان چهارم ریاضی

۱ـ مختصات فضایی

کنج سه وجهی سه‌قائمه $(Ox\ ,\ Oy\ ,\ Oz)$ یاکنج سه قائمه $Oxyz$ و O $(x\hat{o}y=y\hat{o}z=z\hat{o}x=90^{\circ})$ را در نظر گرفته‌نقطه O را مبدأ مختصات و Ox و Oy و Oz رامحورهای مختصات می‌نامند. سه وجهی $Oxyz$ را مستقیم نامند هرگاه بیننده‌ای درروی محور Oz بایستد به‌طوری‌که پایش درنقطه O و سرش به طرف z باشد، چون Ox را نگاه‌کند Oy را در سمت چپ خود ببیند.

اگر نقطه‌ای مانند M درفضا درنظربگیریم وازنقطه M صفحاتی بر Ox (صفحه $MHPA$) و بر Oy (صفحه $MHQB$) و بر oz (صفحه $MARB$) عمودنماییم دراین‌صورت اندازه‌های جبری $\overline{OP}$ و $\overline{OQ}$ و $\overline{OR}$ رابه ترتیب طول وعرض‌وارتفاع نقطهٔ M نامند وچنین‌نمایش می‌دهند:

$$M(\overline{OP}=x\ ,\ \overline{OQ}=y\ ,\ \overline{OR}=z)$$

ضمناً اگر بردارهای یکه‌محورهای xها و yها و zها رابه ترتیب

$$\vec{k}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{i}$$

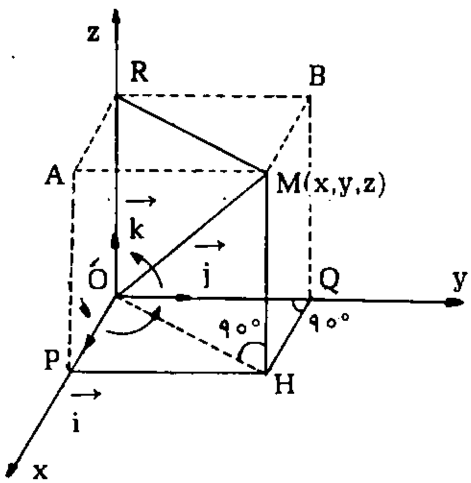
درنظربگیریم ($\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهایی‌می‌باشند به ترتیب‌در روی xها و yها و zها به طولهای واحد وجهت مثبت آنهادر جهت مثبت محورها می‌باشد) داریم:

$$\overline{OP}=x\vec{i}\ ,\ \overline{OQ}=y\vec{j}\ ,\ \overrightarrow{OR}=z\vec{k}$$

از طرفی $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OR}$ و نیز در متوازی $OPHQ$ داریم $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ پس:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=$$

$$\boxed{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}$$



شکل ۱

با توجه به شکل(۱) $OR=HM$ یعنی‌ارتفاع نقطه M اندازه جبری‌فاصله نقطه M ازصفحه xy (یعنی $\overline{HM}$) و چون

$$PH = Q = AM$$

می‌باشد بنابراین عرض نقطه M برابر است با اندازه‌جبری فاصله نقطه M ازصفحه xz (یعنی $\overline{AM}$) و نیز چون

$$OP = HQ = MB$$

می‌باشد پس طول نقطه M برابر است بـا اندازه جبری فاصله نقطه M ازصفحه yz (یعنی $\overline{MB}$) و برای به‌دست آوردن طول و عرض و ارتفاع نقطه M ازنقطه M عمود HM را برصفحه xy فرود آورده وازنقطه H خطوط HQ و HP را به‌موازات محورهای yها و xها رسم نموده داریم:

$$M(\overline{OP} = x\ ,\ \overline{OQ} = y\ ,\ \overline{HM} = z)$$

۲ـ محاسبه‌اندازه یك‌بردار برحسب تصاویر آن‌بردار

باتوجه به شکل(۱) چون تصویر نقطه M روی محورهای xها و yها و zها به ترتیب P و Q و R می‌باشد بنابرایـن تصویر بردار $\overrightarrow{OM}$ روی محورها به ترتیب x و y و z است وچون خط HM برصفحه xy عمود است پس بـرکلیه خطوط صفحه منجمله برخط OH عمودبوده ومثلث OHM در زاویه $\hat{H}$ قائمه می‌باشدبنابراین $OM^2 = OH^2 + HM^2$ ازطرفی در مثلث قائم‌الزاویه OHQ ($\hat{Q} = 90^\circ$) داریم:

$$OH^2 = OQ^2 + QH^2$$

پس:

$$OM^2 = OH^2 + HM^2 = OQ^2 + QH^2 + HM^2$$

$$\Longrightarrow OM^2 = OQ^2 + OP^2 + HM^2 =$$

$$y^2 + x^2 + z^2$$

اگر اندازه بردار $\overrightarrow{OM}$ را به‌صورت $|\overrightarrow{OM}|$ نشان‌دهیم‌داریم:

$$\boxed{|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

بخصوص اگر $A(x_1 , y_1 , z_1)$ و $B(x_2 , y_2 , z_2)$ باشد تصویر بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1\ ,\ z_2 - z_1)$$

بوده و اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر است با:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال ۱ : مطلوب‌است معادله‌کره‌ای‌که مرکزش نقطه

$$C(\alpha , \beta , \gamma)$$

بوده وشعاعش R می‌باشد.

حل : نقطه $M(x, y, z)$ ازکره‌را درنظر گرفته داریم:

$$CM = R = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2}$$

بخصوص اگرمبدأ مختصات برمرکز کره منطبق باشد معادله کره به صورت $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ می‌باشد.

مثال ۲ : اگرنقاط $A(1,2,3)$ و $B(-3,0,5)$ باشد معادله‌مکان هندسی‌نقاطی‌را بیابیدکه ازآن نقاط پاره خط AB به زاویهٔ قائمه رؤیت‌شود.

حل : این مکان کره‌ای‌است‌به قطر AB زیرا اگراز قطر AB صفحه دلخواهی مرور دهیم ایـن صفحه‌کره را در دایره عظیمه‌ای قطع نموده و اگـر نقطه M را روی ایـن دایره در نظربگیریم زاویه محاطی $\widehat{AMB}$ که روبروی‌قطرمی‌باشد قائمه است و چـون C مرکزکره وسط پاره خط AB است داریم :

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+0}{2}=1$$

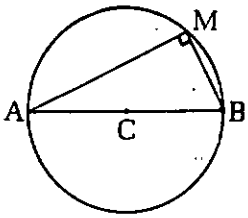
$$z_C=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{3+5}{2}=4$$

$$C(\alpha=-1\ ,\ \beta=1\ ,\ \gamma=4)$$

$$CA=R=\sqrt{(1+1)^2+(2-1)^2+(3-4)^2}$$
$$=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

معادله کره : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

$$\Longrightarrow \boxed{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=6}$$

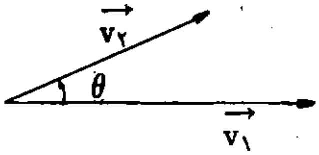


شکل ۲

۳ـ حاصلضرب داخلی دو بردار

مطابق تعریف حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ عددی است جبری که آن را به صورت $\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2$ نمایش داده و اندازه آن برابر است با اندازه بردار $\vec{v}_1$ ضرب در اندازه بردار $\vec{v}_2$ ضرب در کسینوس زاویه بین دو بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$. اگر اندازه بردار $\vec{v}$ را به صورت $|\vec{v}|$ نمایش دهیم داریم: (شکل ۳)

$$\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2=|\vec{v}_1|\ |\vec{v}_2|\cos\theta$$



شکل ۳

۴ـ خواص حاصلضرب داخلی دو بردار

۱ـ می‌دانیم اگر $(\widehat{\vec{v}_1\ ,\ \vec{v}_2})=\theta$ باشد آنگاه

$$(\widehat{\vec{v}_2\ ,\ \vec{v}_1})=-\theta$$

بوده از طرفی چون $\cos(-\theta)=\cos\theta$ است داریم:

$$\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2=|\vec{v}_1|\ |\vec{v}_2|\cos\theta \qquad (1)$$

$$\vec{v}_2 \circ \vec{v}_1=|\vec{v}_2|\ |\vec{v}_1|\cos(-\theta) \qquad (2)$$

$$\xRightarrow{\text{با مقایسه روابط ۱ و ۲}} \boxed{\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2=\vec{v}_2 \circ \vec{v}_1}$$

یعنی حاصلضرب داخلی دو بردار دارای خاصیت جابجایی می‌باشد.

۲ـ اگر دو بردار برهم عمود باشند یعنی

$$\cos\theta=\cos 90^\circ=0$$

در نتیجه $\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2=0$ و یا اگر اندازه یکی از بردارها صفر باشد $\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2=0$ است به عبارت دیگر حاصلضرب داخلی دو بردار وقتی صفر است که یا دو بردار برهم عمود باشند و یا آنکه اندازه یکی از بردارها صفر باشد. برعکس اگر حاصلضرب داخلی دو بردار صفر باشد یا دو بردار برهم عمودند و یا اندازه یکی از بردارها صفر است.

۳ـ بردار $\vec{v}_2$ را مطابق شکل (۴) روی بردار $\vec{v}_1$ تصویر

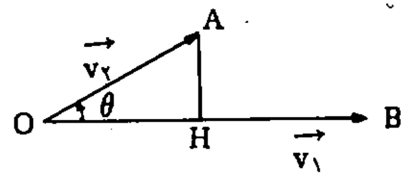
می‌کنیم و این تصویر را $\overline{OH}$ فرض می‌کنیم. درمثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

$$\overline{OH}=OA\cos\theta \Longrightarrow \overline{OH}=|\vec{v}_2|\cos\theta$$

$$\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2=|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|\cos\theta=|\vec{v}_1|\overline{OH}$$

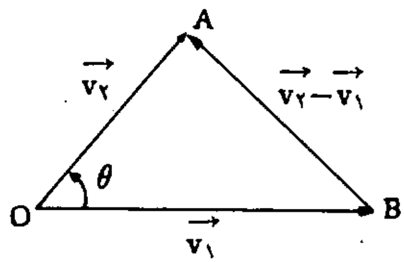
(تصویر بردار $\vec{v}_2$ روی بردار $\vec{v}_1$) $\times$ (اندازه‌بردار $\vec{v}_1$) $=$

یعنی حاصلضرب داخلی دوبردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ برابر است با اندازه یکی‌از بردارها ضرب‌در تصویر بردار دیگرروی آن‌بردار.



شکل ۴

۵ - محاسبه حاصلضرب داخلی دو بردار برحسب تصاویر آنها



شکل ۵

مطابق تعریف داریم:

$$\vec{v}_2-\vec{v}_1=\overrightarrow{BA} \quad \text{یا} \quad \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$

از طرفی طبق رابطه کسینوسها در مثلث OAB داریم: (شکل۵)

$$(1)\quad BA^2=OA^2+OB^2-2OAOB\cos\theta$$

اگر بردار $\vec{v}_1$ به تصاویر (a_1,b_1,c_1) و بردار $\vec{v}_2$ به‌تصاویر (a_2,b_2,c_2) باشد در این‌صورت

$$\overrightarrow{BA}=\vec{v}_2-\vec{v}_1=(a_2-a_1\ ,\ b_2-b_1\ ,\ c_2-c_1)$$

بوده و می‌دانیم :

$$OA=|\vec{v}_1|=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$$

$$OB=|\vec{v}_2|=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$$

$$BA=|\vec{v}_2-\vec{v}_1|=$$

$$\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$$

$$OA\cdot OB\cos\theta=|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|\cos\theta=\vec{v}_1\circ\vec{v}_2$$

اگر این مقادیر را در رابطه (۱) قرار دهیم داریم:

$$(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2=$$

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)+(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-$$

$$2\vec{v}_1\circ\vec{v}_2 \Longrightarrow a_2^2+a_1^2-2a_2a_1+b_2^2+$$

$$b_1^2-2b_2b_1+c_2^2+c_1^2-2c_2c_1=$$

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-2\vec{v}_1\circ\vec{v}_2 \Longrightarrow$$

$$-2a_1a_2-2b_1b_2-2c_1c_2=$$

$$-2\vec{v}_1\circ\vec{v}_2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_1\circ\vec{v}_2=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}$$

تبصره ۱ : با توجه به رابطه

$$\vec{v}_1\circ\vec{v}_2=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

اگر $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ باشد یا بردار $\vec{v}_1$ بر بردار

$\vec{v_2}$ عمود است و یا اندازه یکی‌از بردارها صفر می‌باشد.

تبصره ۲: بردار $\vec{N}(a,b)$ برخط d به معادله

$$ax+by+c=0$$

عمود است.

اثبات: دونقطه $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ را روی خط (d) درنظر گرفته داریم:

$$\overrightarrow{P_1P_2}(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1)$$

$$\vec{N}\circ\overrightarrow{P_1P_2}=a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1) \qquad (1)$$

چون نقاط P_1 و P_2 روی‌خط (d) می‌باشند پس‌مختصات این نقاط در معادله‌خط (d) صدق می‌کند یعنی:

$$\begin{cases}ax_1+by_1+c=0\\ ax_2+by_2+c=0\end{cases} \xRightarrow{\text{دورابطه‌را ازهم‌کم‌می‌کنیم}}$$

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0$$

با توجه به رابطه (۱) لازم می‌آید که

$$\vec{N}\circ\overrightarrow{P_1P_2}=0$$

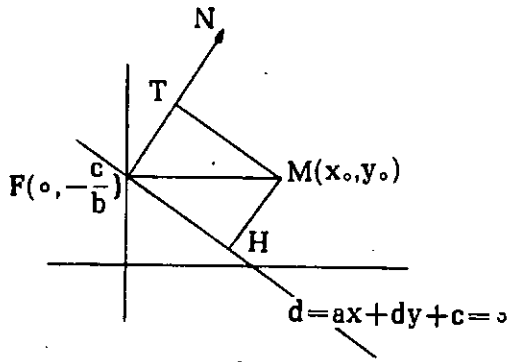
باشد و چون اندازه بردار $\vec{N}$ و اندازه بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ مخالف صفراست پس بردار $\vec{N}$ بربردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ عمود می‌باشد.

تبصره ۳: محاسبه فاصله نقطه $M(x_0,y_0)$ ازخط d به معادله $ax+by+c=0$ محل برخورد خط d با محورyها را نقطه F فرض‌کرده چون $x_F=0$ است پس

$$ax+by+c=0 \text{ یا } ay+c=0 \text{ یا } y=\frac{-c}{b}$$

بنابراین $F\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ و

$$\overrightarrow{FM}\left(x_M-x_F=x_0\ ,\ y_M-y_F=y_0+\frac{c}{b}\right)$$



شکل ۶

می‌باشد بردار $\vec{N}$ که باتوجه به شکل(۶) برخط d عمود است مطابق تبصره (۲) می‌تواند تصاویرش (a , b) انتخاب شود، داریم:

$$(1)\quad \vec{N}\circ\overrightarrow{FM}=$$

$$|\vec{N}|\times (\text{تصویر بردار } \overrightarrow{FM} \text{ روی بردار } \vec{N})=$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\times\overline{FT}=\sqrt{a^2+b^2}\times\overline{HM}$$

وطبق محاسبه‌حاصلضرب‌داخلی دوبردار برحسب‌تصاویرداریم:

$$(2)\quad \vec{N}\circ\overrightarrow{FM}=ax_0+b\left(y_0+\frac{c}{b}\right)=$$

$$ax_0+by_0+c$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{a^2+b^2}\times\overline{HM}=ax_0+by_0+c \Longrightarrow$$

$$\boxed{|\overrightarrow{HM}|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

۶ـ محاسبه‌کسینوس زاویه بین دوبردار

$\vec{v_1}(a,b,c)$ و $\vec{v_2}(a',b',c')$

حل : می‌دانیم

$$\vec{v_1}\circ\vec{v_2}=aa'+bb'+cc'=|\vec{v_1}|\,|\vec{v_2}|\cos\theta=$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}\cos\theta \Longrightarrow$$

$$\boxed{\cos\theta=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}}$$

۷ـ خاصیت پخشی ضرب داخلی بردارها

نشان دهید:

$$\vec{v_1}\circ(\vec{v_2}+\vec{v_3})=\vec{v_1}\circ\vec{v_2}+\vec{v_1}\circ\vec{v_3}$$

اثبات: فرض می‌کنیم

$\vec{v}(a'',b'',c'')$ و $\vec{v_2}(a',b',c')$ و $\vec{v_1}(a,b,c)$

باشد ،بنابراین

$$\vec{v_2}+\vec{v_3}(a'+a'',\ b'+b'',\ c'+c'')$$

می‌باشد و طبق قضیه حاصلضرب داخلی دو بردار برحسب تصاویر شان داریم :

$$\vec{v_1}\circ(\vec{v_2}+\vec{v_3})=$$

$$a(a'+a'')+b(b'+b'')+c(c'+c'')=$$

$$(aa'+bb'+cc')+(aa''+bb''+cc'')=$$

$$\vec{v_1}\circ\vec{v_2}+\vec{v_1}\circ\vec{v_3}\Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{v_1}\circ(\vec{v_2}+\vec{v_3})=\vec{v_1}\circ\vec{v_2}+\vec{v_1}\circ\vec{v_3}}$$

حال حاصلضرب $(\vec{v_1}+\vec{v_2})\circ\vec{v_3}$ را حساب می‌کنیم. چون حاصلضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد پس:

$$(\vec{v_1}+\vec{v_2})\circ\vec{v_3}=\vec{v_3}\circ(\vec{v_1}+\vec{v_2})=$$

$$\vec{v_3}\circ\vec{v_1}+\vec{v_3}\circ\vec{v_2}=\vec{v_1}\circ\vec{v_3}+\vec{v_2}\circ\vec{v_3}$$

$$\Longrightarrow\boxed{(\vec{v_1}+\vec{v_2})\circ\vec{v_3}=\vec{v_1}\circ\vec{v_3}+\vec{v_2}\circ\vec{v_3}}$$

و نیز داریم:

$$(\vec{v_1}+\vec{v_2})\circ\underbrace{(\vec{v_3}+\vec{v_4})}_{\vec{v}}=(\vec{v_1}+\vec{v_2})\circ\vec{v}=$$

$$\vec{v_1}\circ\vec{v}+\vec{v_2}\circ\vec{v}=$$

$$\vec{v_1}\circ(\vec{v_3}+\vec{v_4})+\vec{v_2}\circ(\vec{v_3}+\vec{v_4})=$$

$$\boxed{\vec{v_1}\circ\vec{v_3}+\vec{v_1}\circ\vec{v_4}+\vec{v_2}\circ\vec{v_3}+\vec{v_2}\circ\vec{v_4}}$$

تبصره ۴ : به سادگی می‌توان بررسی کرد

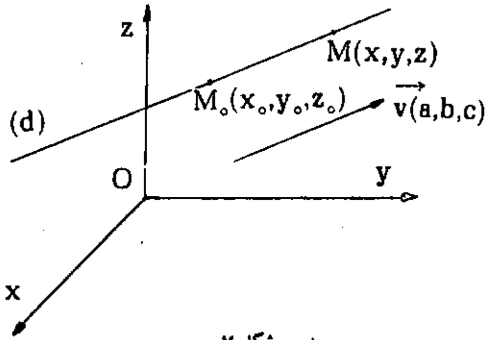
$$\boxed{a(b\vec{v})=ab\vec{v}}$$

$$\boxed{a(\vec{v_1}\circ\vec{v_2})=(a\vec{v_1})\circ\vec{v_2}=\vec{v_1}\circ(a\vec{v_2})}$$

$$\boxed{a(\vec{v_1}+\vec{v_2})=a\vec{v_1}+a\vec{v_2}}$$

۸ـ معادله یک خط در فضا

بردار $\vec{v}(a,b,c)$ را موازی با خط (d) و یا منطبق بر خط (d) در نظر گرفته a و b و c را پارامترهای هادی خط (d) نامند.



شکل ۷

طبق (شکل ۷) بردار

$$\overrightarrow{M_0M}\,(x-x_0\ ,\ y-y_0,\ z-z_0)$$

بوده وچون بردار $\overrightarrow{M_0M}$ موازی‌بردار $\vec{v}$ می‌باشد پس مطابق تعریف‌دو بردار موازی $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{v}$ این‌رابطه‌راروی‌محورها تصویر نموده داریم:

$$x-x_0=ta\ \ ,\ \ y-y_0=tb\ \ ,\ \ z-z_0=tc$$

$$\Longrightarrow \frac{x-x_0}{a}=t\ \ ,\ \ \frac{y-y_0}{b}=t\ \ ,\ \ \frac{z-z_0}{c}=t$$

$$\Longrightarrow d \overset{\text{به معادله}}{\equiv} \boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$

معادله‌بالا را معادله کانونیك خط (d) نامند و معادلات زیر را معادلات‌پارامتری خط d نامند.

$$\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$$

۹ـ کسینوسهای هادی یك خط

کسینوس زوایایی کــه خط (d) با محورهای مختصات می‌سازند کسینوسهای‌هادی‌خط(d) نامند. فرض‌می‌کنیم‌برداری ازخط (d) به صورت $\vec{v}(a,b,c)$ باشد بنابراین a و b و c پارامترهای‌هادی‌خط (d) می‌باشند . ازطرفی بردارهای‌یکه

$$\vec{i}\,(1\ ,\ 0\ ,\ 0)\ \ ,\ \ \vec{k}\,(0\ ,\ 0\ ,\ 1)\ \ ,\ \ \vec{j}\,(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$$

را درنظر گرفته حاصلضرب داخلی بردار $\vec{v}$ با این بردارهای یکه را نوشته داریم:

$$\vec{v}\circ\vec{i}=|\vec{v}|\,|\vec{i}|\cos\underbrace{(\widehat{\vec{v}\ ,\ \vec{i}})}_{\alpha'}=$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 1\times\cos\alpha'=$$

$$a\times 1+b\times 0+c\times 0=a$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\alpha'=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\alpha}$$

$$\vec{v}\circ\vec{j}=|\vec{v}|\,|\vec{j}|\cos\underbrace{(\widehat{\vec{v}\ ,\ \vec{j}})}_{\beta'}=$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 1\times\cos\beta'=$$

$$a\times 0+b\times 1+c\times 0=b$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\beta'=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\beta}$$

$$\vec{v}\circ\vec{k}=|\vec{v}|\,|\vec{k}|\cos\underbrace{(\widehat{\vec{v}\ ,\ \vec{k}})}_{\gamma'}=$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 1\times\cos\gamma'=$$

$$a\times 0+b\times 0+c\times 1=c$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\gamma'=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\gamma}$$

$$\alpha^۲+\beta^۲+\gamma^۲=\frac{a^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}+\frac{b^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}$$

$$+\frac{c^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}=\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}=۱ \implies$$

$$\alpha^۲+\beta^۲+\gamma^۲=۱ \implies \sqrt{\alpha^۲+\beta^۲+\gamma^۲}=۱$$

یعنی بردار $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ برداریکه بردار $\vec{v}(a,b,c)$ می‌باشد، پس:

$$\vec{u}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}=$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}\vec{i}+\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}\vec{j}+$$

$$\frac{c}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}\vec{k}$$

$$\implies \vec{u}=\frac{a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=\boxed{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

بردار $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ را سوی بردار $\vec{v}$ می‌نامند.

مثال ۱ : a و b را چنان بیابیدکه بردارهای

$\vec{v}_۱(۳,۶,a)$, $\vec{v}_۲(۲,b,۴)$

موازی باشند.

حل : چون دوبردار موازی‌اند پس :

$$\vec{v}_۲=k\vec{v}_۱$$

این تساوی‌را روی محورها تصویر نموده داریم:

$$۲=۳k \;,\; b=۶k \;,\; ۴=ak \implies$$

$$\frac{۲}{۳}=\frac{b}{۶}=\frac{۴}{a} \implies ۱۲=۳b \implies \boxed{b=۴}$$

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{a} \implies ۲a=۱۲ \implies \boxed{a=۶}$$

یا می‌توانیم بگوییم اگر دو بردار

$\vec{v}_۱(a,b,c)$, $\vec{v}_۲(a',b',c')$

موازی باشند:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \implies \frac{۳}{۲}=\frac{۶}{b}=\frac{a}{۴} \implies$$

$$\boxed{b=۴ \quad , \quad a=۶}$$

مثال ۲ : نشان‌دهید زاویه بین دوبردار

$\vec{v}_۱(۱,۲,۱)$, $\vec{v}_۲(۲,۱,-۱)$

دوبرابر زاویه بین دوبردار

$\vec{A}(۱,۴,۱)$, $\vec{B}(۲,۵,۵)$

می‌باشد.

حل :

$$\cos(\widehat{\vec{v}_۱,\vec{v}_۲})=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}\sqrt{a'^۲+b'^۲+c'^۲}}$$

$$=\frac{(۱)(۲)+(۲)(۱)+(۱)(-۱)}{\sqrt{۱+۴+۱}\times\sqrt{۴+۱+۱}}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \implies$$

$$(\widehat{\vec{v}_۱,\vec{v}_۲})=\frac{\pi}{۳} \;,\; \cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}})=$$

$$\frac{(۱)(۲)+(۴)(۵)+(۱)(۵)}{\sqrt{۱+۱۶+۱}\times\sqrt{۴+۲۵+۲۵}}=$$

$$\frac{۲۷}{\sqrt{۱۸}\times\sqrt{۳\times ۱۸}}=\frac{۲۷}{۱۸\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Longrightarrow$$

$$(\widehat{\vec{A}\,,\,\vec{B}})=\frac{\pi}{۶} \Longrightarrow$$

$$\boxed{(\widehat{\vec{v}_۱\,,\,\vec{v}_۲})=۲(\widehat{\vec{A}\,,\,\vec{B}})}$$

مثال ۳ : به ازای چه مقدار m بردارهای

$\vec{v}_۱(۲,۳,۴)$, $\vec{v}_۲(a,-۱,۳a)$

برهم عمودند؟

حل :

$$\vec{v}_۱\circ\vec{v}_۲=۲(a)+۳(-۱)+۴(۳a)=۰ \Longrightarrow$$

$$۲a-۳+۱۲a=۰ \Longrightarrow \boxed{a=\frac{۳}{۱۴}}$$

مثال ۴ : اگر دو بردار

$\vec{v}_۱(۲\,,a\,,b)$, $\vec{v}_۲(۴\,,c\,,۱)$

همسنگ‌باشند a و b و c کدام است؟

حل :

$$\vec{v}_۱=\vec{v}_۲ \Longrightarrow \frac{۴}{۲}=\frac{a}{c}=\frac{۱}{b} \Longrightarrow ۲=\frac{۱}{b} \Longrightarrow$$

$\boxed{b=\frac{۱}{۲}}$ و $۲=\frac{a}{c} \Longrightarrow a=۲c$ و

$$|\vec{v}_۱|=|\vec{v}_۲| \Longrightarrow$$

$$\sqrt{۴+a^۲+b^۲}=\sqrt{۱۶+c^۲+۱}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{۴+۴c^۲+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{۱۷+c^۲}$$

$$\Longrightarrow ۴+۴c^۲+\frac{۱}{۴}=۷+c^۲ \Longrightarrow$$

$$۳c^۲=۳-\frac{۱}{۴}=\frac{۱۱}{۴} \Longrightarrow c^۲=\frac{۱۱}{۳\times ۴} \Longrightarrow$$

$$c^۲=\frac{۳۳}{۹\times ۴} \Longrightarrow \boxed{c=\pm\frac{\sqrt{۳۳}}{۶}}$$

$$\Longrightarrow a=۲c \Longrightarrow \boxed{a=\pm\frac{\sqrt{۳۳}}{۳}}$$

مثال ۵ : زاویه‌بین خط (d) به معادله

$x=۱+t$, $y=-۱+\sqrt{۳}t$, $z=۲\sqrt{۳}t$

و محورzها کدام است؟

حل :

$$x-۱=t\ ,\ y+۱=\sqrt{۳}t\ ,\ z=۲\sqrt{۳}t \Longrightarrow$$

$$\frac{x-۱}{۱}=\frac{y+۱}{\sqrt{۳}}=\frac{z}{۲\sqrt{۳}}=t$$

پارامترهای هادی‌خط (d) عبارتنداز:

$a=۱$, $b=\sqrt{۳}$, $c=۲\sqrt{۳}$

بنابراین :

$$\gamma=\cos\hat{\gamma}'=\frac{c}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱+۳+۱۲}}=$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Longrightarrow \cos\gamma'=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Longrightarrow \boxed{\gamma'=\frac{\pi}{۶}}$$

. توجه‌کنید ضرایب t پارامترهای هادی خط می‌باشند.

مثال ۶ : آیا برداری وجود دارد که با محورها زوایای ۱۲۰° و ۶۰° و ۴۵° بسازد؟

حل :

$\alpha = \cos\alpha' = \cos ۱۲۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$

$\beta = \cos\beta' = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

$\gamma = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\alpha^۲+\beta^۲+\gamma^۲ = \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۴} = \frac{۴}{۴} = ۱ \Longrightarrow$

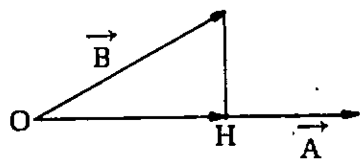
$\alpha^۲+\beta^۲+\gamma^۲ = ۱$

بنابراین چنین برداری وجود دارد.

مثال ۷ : بردارهای

$\vec{B} = ۲\vec{i}+\vec{j}-۳\vec{k}$ و $\vec{A} = ۶\vec{i}-۳\vec{j}+۲\vec{k}$

مفروض‌اند. مطلوب است تعیین بردار تصویر $\vec{B}$ روی بردار $\vec{A}$.



شکل ۸

حل :

$(\vec{A}$ برداریکه$)\ \vec{u} = \frac{a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}} =$

$\frac{۶\vec{i}-۳\vec{j}+۲\vec{k}}{\sqrt{۳۶+۹+۴}} = \frac{۶}{۷}\vec{i}-\frac{۳}{۷}\vec{j}+\frac{۲}{۷}\vec{k}$

$\overline{OH} = \vec{A}$ تصویر بردار $\vec{B}$ روی بردار $=$

$|\vec{B}|\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \cancel{\sqrt{۴+۱+۹}} \times$

$\frac{(۶)(۲)+(-۳)(۱)+(۲)(-۳)}{\cancel{\sqrt{۴+۱+۹}} \times \sqrt{۳۶+۹+۴}} =$

$\frac{۱۲-۳-۶}{۷} = \frac{۳}{۷}$ و $\overrightarrow{OH} = \frac{۳}{۷}\vec{u} =$

$\frac{۳}{۷}\left(\frac{۶}{۷}\vec{i}-\frac{۳}{۷}\vec{j}+\frac{۲}{۷}\vec{k}\right).$

$\Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{OH} = \frac{۱۸}{۴۹}\vec{i}-\frac{۹}{۴۹}\vec{j}+\frac{۶}{۴۹}\vec{k}}$

توجه داشته‌باشید از این موضوع استفاده کردیم که هر بردار در روی هرمحور برابر است با اندازه جبری آن بردار در برداریکه محور یعنی:

$\boxed{\overrightarrow{OH} = \overline{OH}\ \vec{u}}$

مثال ۸ : اگر نیروی $\vec{F} = ۵\vec{i}-۳\vec{k}$ برمتحرکی اثرکند و آن‌را از نقطه $A_۱(۴,۱,۳)$ تا نقطه $A_۲(-۵,۶,۲)$ تغییر مکان دهد مطلوب‌است کار انجام شده این نیرو.

حل : می‌دانیم اگر بردار نیرو $\vec{F}$ و بردار تغییرمکان $\vec{l}$ باشد کار این‌بردار نیرو برابراست با :

$W = \vec{F} \circ \vec{l} = |\vec{F}|\,|\vec{l}|\cos\theta$

$\vec{l} = \overrightarrow{A_۱A_۲}(-۵-۴\ ,\ ۶-۱\ ,\ ۲-۳)$

$\Longrightarrow \overrightarrow{A_۱A_۲}(-۹\ ,\ ۵\ ,\ -۱)$

$W = \vec{F} \circ \overrightarrow{A_۱A_۲} =$

$(-۹)(۵)+(۵)(-۳)+(-۱)(۰) = -۴۵-۱۵$

$\Longrightarrow \boxed{W = -۶۰}$

مثال ۹ : اگر بردار $\vec{A} = ۱۲\vec{i}+۹\vec{j}-۵\vec{k}$ و بردار

$$\vec{B}=۴\vec{i}-۳\vec{j}-۵\vec{k}$$

باشد مقدار c را چنان بیابید که بردار

$$\vec{B}-c\vec{A}$$

بر بردار $\vec{A}$ عمود باشد.

حل: چون بردار $\vec{B}-c\vec{A}$ بر بردار $\vec{A}$ عمود می‌باشد پس حاصلضرب داخلی آنها صفر است:

$$(\vec{B}-c\vec{A})\circ\vec{A}=\vec{B}\circ\vec{A}-c\vec{A}\circ\vec{A}=$$

$$(۴)(۱۲)+(-۳)(۹)+(-۵)(-۵)$$

$$+c[(۱۲)(۱۲)+(۹)(۹)+(-۵)(-۵)]=$$

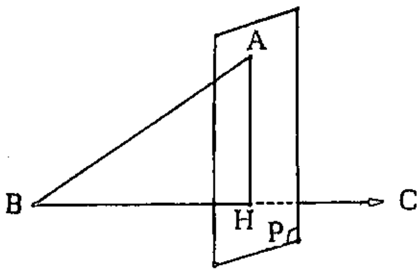
$$۴۸-۲۷+۲۵+c(۱۴۴+۸۱-۲۵)=۰$$

$$\Longrightarrow ۴۶+۱۰۰c=۰ \Longrightarrow \boxed{c=-\frac{۲۳}{۵۰}}$$

مثال ۱۰: مطلوب است فاصله نقطه $A(۴,۱,۶)$ از خط BC که $B(۸,۳,۲)$ ، $C(۲,-۳,۵)$ می‌باشد.

حل:

$$\overrightarrow{BA}(۴-۸\,,\,۱-۳\,,\,۶-۲) \Longrightarrow$$



شکل ۹

$$\overrightarrow{BA}(-۴\,,\,-۲\,,\,۴)$$

$$\overrightarrow{BC}(۲-۸\,,\,-۳-۳\,,\,۵-۲) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{BC}(-۶\,,\,-۶\,,\,۳)$$

از نقطه A صفحه P را عمود بر بردار $\overrightarrow{BC}$ فرود می‌آوریم (شکل ۹) AH فاصله نقطه A تا خط BC می‌باشد:

$$\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BC}|\times\overline{BH} \Longrightarrow$$

$$(-۴)(-۶)+(-۲)(-۶)+(۴)(۳)=$$

$$\sqrt{(-۶)^۲+(-۶)^۲+(۳)^۲}\times\overline{BH} \Longrightarrow ۴۸=$$

$$۹\overline{BH} \Longrightarrow \boxed{\overline{BH}=\frac{۱۶}{۳}}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{۱۶+۴+۱۶}=۶$$

از مثلث قائمه ABH $\Longrightarrow AH^۲=AB^۲-BH^۲=$

$$۳۶-\frac{۲۵۶}{۹}=\frac{۳۲۴-۲۵۶}{۹}=\frac{۶۸}{۹} \Longrightarrow$$

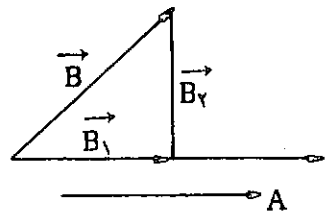
$$\boxed{AH=\frac{۲\sqrt{۱۷}}{۳}}$$

مثال ۱۱: بردار $\vec{B}=۳\vec{i}+۵\vec{j}-۲\vec{k}$ را به دو بردار موازی با بردار $\vec{A}=۴\vec{i}-۳\vec{j}-۵\vec{k}$ وعمود بر بردار $\vec{A}$ تجزیه کنید.

حل: با توجه به شکل (۱۰) داریم:

$$\vec{B}=\vec{B}_۱+\vec{B}_۲ \quad \text{و} \quad \vec{B}_۱=c\vec{A} \Longrightarrow$$

$$B=c\vec{A}+\vec{B}_۲ \Longrightarrow \vec{B}_۲=\vec{B}-c\vec{A}$$



شکل ۱۰

$$\vec{B}_۲ \perp \vec{A} \Longrightarrow \vec{B}_۲ \circ \vec{A} = ۰ \Longrightarrow$$

$$(\vec{B} - c\vec{A}) \circ \vec{A} = ۰ \Longrightarrow \vec{B}\circ\vec{A} - c\vec{A}\circ\vec{A} = ۰$$

$$\Longrightarrow c = \frac{\vec{B}\circ\vec{A}}{\vec{A}\circ\vec{A}} =$$

$$\frac{(۳)(۴)+(۵)(-۳)+(-۲)(-۵)}{(۴)(۴)+(-۳)(-۳)+(-۵)(-۵)} =$$

$$\frac{۱۲-۱۵+۱۰}{۱۶+۹+۲۵} = \boxed{\frac{۷}{۵۰}}$$

$$\vec{B}_۱ = c\vec{A} = \frac{۷}{۵۰}(۴\vec{i} - ۳\vec{j} - ۵\vec{k}) =$$

$$\boxed{\frac{۱۴}{۲۵}\vec{i} - \frac{۲۱}{۵۰}\vec{j} - \frac{۷}{۱۰}\vec{k}}$$

$$\vec{B}_۲ = \vec{B} - c\vec{A} = (۳\vec{i} + ۵\vec{j} - ۲\vec{k}) -$$
$$\left(\frac{۱۴}{۲۵}\vec{i} - \frac{۲۱}{۵۰}\vec{j} - \frac{۷}{۱۰}\vec{k}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B}_۲ = \frac{۶۱}{۲۵}\vec{i} + \frac{۲۷۱}{۵۰}\vec{j} - \frac{۱۳}{۱۰}\vec{k}}$$

بنابراین مؤلفه‌های بردار $\vec{B}$ که بردارهای $\vec{B}_۱$ و $\vec{B}_۲$ می‌باشند کاملاً مشخص شده است.

مثال ۱۲: اگر نقاط

$A(۳,۶,-۷)$ و $B(-۵,۲,۳)$ و $C(۴,-۷,-۲)$

رئوس مثلث ABC باشند معادلهٔ میانه AM را بیابید.

حل: چون نقطه M وسط پاره‌خط BC است پس:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{-۵+۴}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{۲-۷}{۲} = \frac{-۵}{۲}$$

$$z_M = \frac{z_B + z_C}{۲} = \frac{۳-۲}{۲} = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow$$

$$M\left(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۵}{۲}, \frac{۱}{۲}\right) \quad \text{و} \quad A(۳, ۶, -۷)$$

$$\overrightarrow{MA}\left(۳+\frac{۱}{۲}, ۶+\frac{۵}{۲}, -۷-\frac{۱}{۲}\right) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{MA}\left(\frac{۷}{۲}=a, \frac{۱۷}{۲}=b, -\frac{۱۵}{۲}=c\right)$$

$$MA \overset{\text{به‌معادله}}{\equiv} \frac{x-x_۰}{a} = \frac{y-y_۰}{b} = \frac{z-z_۰}{c} \Longrightarrow$$

$$\frac{x+\frac{۱}{۲}}{\frac{۷}{۲}} = \frac{y+\frac{۵}{۲}}{\frac{۱۷}{۲}} = \frac{z-\frac{۱}{۲}}{-\frac{۱۵}{۲}}$$

$$AM \overset{\text{به معادله}}{\equiv} \boxed{\frac{x+\frac{۱}{۲}}{۷} = \frac{y+\frac{۵}{۲}}{۱۷} = \frac{z-\frac{۱}{۲}}{-۱۵}}$$

مثال ۱۳: فاصله دو خط

$$d: x = -۲+۲t, \; y = ۳t, \; z = -۳+t$$

و

$$d': x = ۲t' - ۱, \; y = ۳t' - ۴, \; z = t'$$

را بیابید.

حل : ضرایب t پارامترهای هادی خط d یعنی

$$a=2 \ , \ b=3 \ , \ c=1$$

و ضرایب t' پارامترهای هادی‌خط d' یعنی

$$a'=2 \ , \ b'=3 \ , \ c'=1$$

چون $1=\frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$ می‌باشد پس دو خط d و d' موازی‌اند.

به ازای $t=0$ نقطه

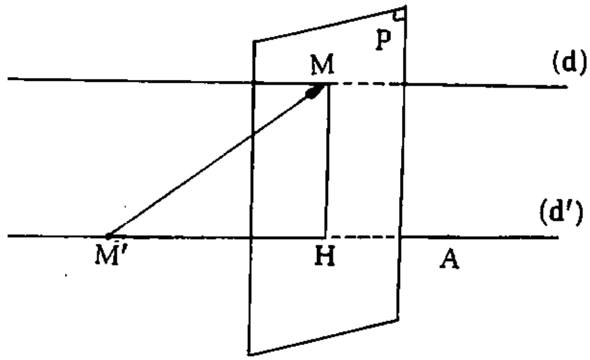
$$M(-2 \ , \ 0 \ , \ -3)$$

مربوط به خط d و به ازای $t'=0$ نقطه

$$M'(-1 \ , \ -4 \ , \ 0)$$

مربوط به خط d' می‌باشد، از نقطه M صفحه P را برخط d' عمود نموده پـای عمود را نقطه H گرفته HM فاصله دوخط موازی می‌باشد. به‌ازای $t'=1$ نقطه

$$A(1 \ , \ -1 \ , \ 1)$$



شکل ۱۱

داریم:

$$\overrightarrow{M'M}(-2+1 \ , \ 0+4 \ , \ -3-0) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{M'M}(-1 \ , \ 4 \ , \ -3)$$

$$\overrightarrow{M'A}(1+1 \ , \ -1+4 \ , \ 1-0) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{M'A}(2 \ , \ 3 \ , \ 1)$$

$$\overrightarrow{M'A} \circ \overrightarrow{M'M} = |\overrightarrow{M'A}| \times \overline{M'H} \Longrightarrow$$

$$(2)(-1)+(3)(4)+(1)(-3)=$$

$$\sqrt{2^2+3^2+1^2} \times \overline{M'H} \Longrightarrow$$

$$7=\sqrt{14} \times \overline{M'H} \Longrightarrow \overline{M'H}=\frac{7}{\sqrt{14}}$$

$$M'M=\sqrt{26} \quad \text{و} \quad HM^2=M'M^2-M'H^2$$

$$\Longrightarrow HM^2=26-\frac{49}{14}=26-\frac{7}{2}=\frac{52-7}{2}=\frac{45}{2}$$

$$\Longrightarrow HM=\sqrt{\frac{45}{2}}=\sqrt{\frac{5\times 9}{2}}=3\sqrt{\frac{5}{2}}=$$

$$3\sqrt{\frac{10}{4}}=\boxed{\frac{3\sqrt{10}}{2}}$$

مثال ۱۴ : وضع دوخط

$$d: x=2+2t \ , \ y=1+4t \ , \ z=-1-t$$

$$d': x=-31+3t' \ , \ y=6+2t' \ , \ z=3+6t'$$

را نسبت به هم مشخص نمایید.

حل: ضرایب t و t' پارامترهای هادی‌خطوط d و d' می‌باشند پس :

$$a=2 \ , \ b=4 \ , \ c=-1$$

$$a'=3 \ , \ b'=2 \ , \ c'=6$$

چون $\frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$ نمی‌باشد لذا دو خط d و d' موازی نمی‌باشند.

حال بررسی می‌کنیم که آیا دو خط مزبور متقاطع‌اند داریم:

$$\begin{cases} ۲+۲t=-۳۱+۳t' \\ ۱+۴t=۶+۲t' \\ -۱-t=۳+۶t' \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{matrix} (۱) \\ (۲) \\ (۳) \end{matrix} \begin{cases} ۲t-۳t'=-۳۳ \\ ۴t-۲t'=۵ \\ t+۶t'=-۴ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$-۲\begin{cases} -۴t+۶t'=۶۶ \\ ۴t-۲t'=۵ \end{cases}$$

$$۴t'=۷۱ \Longrightarrow \boxed{t'=\frac{۷۱}{۴}}$$

و

$$۴t-\frac{۷۱}{۲}=۵ \Longrightarrow$$

$$۴t=\frac{۸۱}{۲} \Longrightarrow \boxed{t=\frac{۸۱}{۸}}$$

اگر این مقادیر t و t' در معادله سوم یعنی

$$t+۶t'=-۴$$

صدق نماید دوخط متقاطع خواهند بود.

$$\frac{۸۱}{۸}+۶\times\frac{۷۱}{۴}=-۴ \Longrightarrow \frac{۸۱+۶\times۱۴۲}{۸}\neq-۴$$

بنابراین دو خط نه‌موازی‌اند و نه متقاطع به ناچار دو خط متنافرند.

تفریح اندیشه ۱

برج ایفل

برج ۳۰۰ متری ایفل در پاریس از فولادی به وزن ۸،۰۰۰،۰۰۰ کیلوگرم ساخته شده است.

می‌خواهیم مدلی از این برج به وزن یک کیلوگرم بسازیم. ارتفاع این مدل چقدر می‌شود؟ آیا بزرگتر یا کوچکتر از یک لیوان آبخوری خواهد بود؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

۲ تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران

غلامرضا یاسی‌پور

گرچه نتوان خورد طوفان سحاب
کی توان کردن به ترک خوردِ آب
آب دریـا را اگـر نـتوان کشید
هم به قـدرتشنگی بـاید چشید [1]

مجلهٔ دومی که به بررسی آن می‌پردازیم **مجلهٔ ریاضیات دکتر مصاحب** است که در سال ۱۳۰۹ در تهران به چاپ رسیده است. نام ایـن مـجله چنانکه از روی جلد آن بـرمی‌آید واحـد است و نـام خانوادگی‌اش: مجلهٔ ریاضیات «عالی و مقدماتی». مدیر مسئول و مؤسس آن مصاحب و جای اداره‌اش: موقتاً ادارهٔ جریدهٔ قـانون[2]، تهران خیابان باب همایون است. مجله در اول و پانزدهم هـر مـاه بـا چاپ در مطبعهٔ علمی منتشر می‌شود و وجه اشتراکش در ایران: سالیانه[3]: از ۲۵ تا ۴۰ قران (برای محصلین ۱۰ قران)، ششماهه: فقط برای محصلین ۶ قران[4] است، و تک‌شماره‌اش یک ریال بـه فـروش می‌رسد. اینها را از روی جلد یعنی به اصطلاح صفحهٔ اول نقل کردیم. اما بشنوید از پشت جلد (یا به اصطلاح مجله‌پردازان صفحهٔ چهارم) که در آن آگهیهای تجارتی (وگاهی هم خجالتی!) آمده است.[5] یکی از آگهیهای تجارتی را نقل می‌کنیم:

کتاب علوم تفریحی

از مطالعهٔ کتاب علوم تفریحی تألیف آقای مصاحب غفلت نکنید. ما از این کتاب تـعریف نـمی‌کنیم شما خودتـان از آنهـایی کـه آن را خریده‌اند بپرسید و بعد تا تمام نشـده آن را از کـتابخانه‌های عـمدهٔ تهران خریداری کنید. برای خرید کلی بـه کـتابخانهٔ مـرکزی رجـوع نمایید. خیابان شاهپور ـ کتابخانهٔ مرکزی.

نمرهٔ اعلان ۵

به نقل یکی از آگهیهای خجالتی آن نیز می‌پردازیم:

هتل مقدم

(چهارراه حسن آباد)

از منظرهٔ باشکوه این هتل و ارکستر عالی آن که جدیداً با بهترین طرز برای پذیرایی واردین تشکیل شده است استفاده فرمایید.

فامیلهای محترم می‌توانند در این هتل از مهمانهای گرامی خود با بهترین ترتیب پذیرایی نمایند.

بعد از یک هفته

همه شب . . . را از ساعت ۹ به بعد مشاهده فرمایید.[۶]

نمرهٔ اعلان ٦

شماره‌های سال اول انتشار مجله به قطع جیبی و خط نسخ خوش است اما شماره‌های سال دومش که از آذر ماه ۱۳۱۴ آغاز می‌شود به قطع رقعی و با حروف سربی به چاپ رسیده است.

فریاد دفتر مجله از دست مشترکینی که وجه اشتراک خود را نپرداخته‌اند یا مفت‌خوانهایی که مایل به پرداختن آن نیستند به عَیّوق[۷] می‌رسد، و در این مورد مثلاً در شمارهٔ اول سال دوم آن تحت عنوان: **چرا نشر مجلهٔ ریاضیات تعطیل شد؟** چنین می‌خوانیم:

عادت بر این جاری شده است که وقتی مجله‌ای یا روزنامه‌ای پس از مدتی تعطیل، حیات را از سرمی‌گیرد در بالای آن این شعر را با خط درشت می‌نویسند:

مدتی این مثنوی تعطیل شد
مهلتی بایست تا خون شیر شد[۸]

نگارنده به جای این که مجله را با این گونه مضامین شروع نمایم با عبارتی مختصر و مفید عرض می‌کنم که تنها علت تعطیل نشر مجلهٔ ریاضیات بدحسابی جمعی از مشترکین آن بود، بالاخص بسیاری از اشخاصی که صفت معارف‌پروری را جزء لاینفک اسم خود می‌شمارند مرتباً ۲۰ یا ۳۰ شماره از مجله را، از بدو تا ختم آن، تحت عناوین مختلفه دریافت داشتند، بدون این که وجه اشتراک آنها را بپردازند. فعلاً باوجود داشتن مدارک کافیه برله[۹] ادعای خود از ذکر اسامی این گونه آقایان صرف‌نظر می‌کنیم. ولی به اطلاع طالبین این مجله می‌رسانیم که از این به بعد مجله برای هیچ‌کس مجاناً ارسال نخواهد شد ودرخواست اشتراک در صورتی که باوجه اشتراک سالیانه همراه نباشد بلاجواب خواهد ماند.[۱۰]

و در جای دیگر، یعنی در شمارهٔ ششم سال اول آن چنین:

باز هم تقاضای تخفیف...!!

ما گمان می‌کردیم با تعیین این وجه اشتراک قلیل وقتمان برای خواندن مراسلات راجع به تخفیف تلف نخواهد شد. متأسفانه هر روز مراسلاتی به ما می‌رسد به این مضمون که ابتداء فکر نشر مجلهٔ ریاضیات را تقدیس کرده **بقا و دوام مجله و موفقیت ما را مسألت می‌نمایند**[۱۱] و بعد در آخر مراسله می‌نویسند «**فقط خواهش می‌کنم برای معارف‌پروری یک تومان برای وجه اشتراک آن قبول فرمایید**[۱۲]».

گمان می‌کنم نویسندگان این مراسلات خیال می‌کنند وقتی امتیاز مجلهٔ ریاضیات داده شد، خداوند هم فرشته‌ای خلق کرد که مخارج آن را (تأدیه)[۱۳] کند و موجبات بقا و دوام آن را فراهم آورد یا تصور می‌کنند ما سرمایهٔ هنگفتی برای نشر مجلهٔ ریاضیات وقف کرده‌ایم که مجله را طبع نموده برای **معارف‌پروری** (!) تقدیم آقایان بکنیم. اگر معنی معارف‌پروری این است خواهش می‌کنیم نه مِنبعد ما را معارف‌پرور بخوانند و نه مدتی وقتمان را برای خواندن این گونه مراسلات تلف کنند.

به هرحال چون احتمال می‌دهیم بعدها نیز دچار این گونه مراسلات بشویم از حالا اطلاع می‌دهیم که **مراسلات راجع به تخفیف بلاجواب خواهد ماند.**

(دفتر مجلهٔ ریاضیات)

ناگفته نماند که در دورهٔ دوم انتشار مجله، یعنی از سال دوم به بعد، جای مجله به **شرکت نشر کتاب**، طهران، خیابان ناصرخسرو (ناصریه) انتقال یافته، قطع آن همان طور که قبلاً هم متذکر شدیم، رقعی شده، به جای ماهی دوبار ماهی یک بار انتشار یافته، و تک شمارهٔ آن نیز با سه ریال تفاوت قیمت به ۴ ریال ترقی کرده است.

اکنون که از پرداختن به جزئیات - شاید هم کلیات - مجله فراغت

حاصل کرده‌ایم به ذکر مطالب اصلی یعنی مسائل و مقالات آن می‌پردازیم.

مجله مانند تمام کارهای بعدی مرحوم مصاحب ـ رحمة‌الله علیه ـ شسته و رفته و تمام و کمال است[۱۴]، و هرچند که به ریاضیات مقدماتی و عالی می‌پردازد از ذکر مطالب تفریحی و تاریخی و موارد ظریف و مسائل لطیف باز نمی‌ماند و به طورکلی به شیوه‌ای است که خواننده را به‌کار و بار ریاضی علاقه‌مند می‌سازد. نه تنها از ریاضیدانهای گذشته ذکری به میان می‌آورد و در این مورد هم گوشهٔ چشمی به ریاضیدانهای ایرانی و اسلامی دارد هم به ریاضیدانهای اروپایی، بلکه به ریاضیات معاصر نیز می‌پردازد و در این زمینه تازه‌ترین مطالب روز را مطرح می‌کند، و با اینهمه از حوادث اجتماعی زمان خود متأثر است و مثلاً در مورد **فوت مدیر نامهٔ مقدس حبل‌المتین** در اولین صفحهٔ شمارهٔ (۷ و ۸) پانزدهم بهمن ماه ۱۳۰۹ شمسی خود چنین می‌نگارد.

هرگز نمیرد آنکه دلش زنده شد به عشق
ثبت است بر جریدهٔ عالم دوام ما
(حافظ)

روز ۲۶ آذر آقا سید جلال‌الدین مؤیدالاسلام مدیر نامهٔ مقدس حبل‌المتین[۱۵] دار فانی را بدرود گفته[۱۶] و قلب عموم ایرانیان را جریحه‌دار ساخت.

ذکر خدمات این شخص بزرگ در صفحات کوچک مجلهٔ ریاضیات نمی‌گنجد و از این گذشته آنجا که عیان است چه حاجت به بیان است. لهذا برای ابراز آتشی که وقوع این حادثهٔ ناگوار در قلب ما مشتعل ساخته به همین چند سطر قناعت نموده این مصیبت عظیم را به عموم ایرانیان مخصوصاً آقای **سیدجمال‌الدین** مدیر محترم نامهٔ کهن‌سال حبل‌المتین تسلیت گفته موفقیت ایشان را در ادامهٔ انتشار حبل‌المتین آرزومندیم (مجلهٔ ریاضیات).

همان‌طور که قبلاً هم متذکر شدیم یکی از جنبه‌های مهم و ثابت مجله پرداختن به تاریخ ریاضی است و در این زمینه همانگونه که در مقالهٔ زیر ملاحظه می‌کنیم از پند و اندرز اخلاقی نیز نمی‌ماند و به موازات تربیت ریاضی به تربیت اخلاقی می‌پردازد. مقاله از شمارهٔ پنجم سال اول است:

به قلم دانشمند معظم آقای میرزا عباس خان اقبال[۱۷].

ابوریحان بیرونی و حساب دانه‌های گندم خانه‌های شطرنج

در کتب تواریخ اسلامی چنین نقل کرده‌اند که یکی از پادشاهان محلی هند به نام شرام مردی سفاک و ظلم‌پیشه بود و در اندک مدتی بر اثر سوء سیاست و بی‌خردی مملکتش دستخوش فقر و رعایایش قرین تیره‌روزی شدند. برهمنان[۱۸] آن دیار برای رهایی از این مصیبت به فکر چاره افتادند. عاقبت یکی از ایشان که سمسا نام داشت بازی شطرنج را اختراع کرد و به حضور شاه برد و بدو فهماند که شاه شطرنج با آنکه مهمترین سواران نطع[۱۹] بازی است بی دستیاری مهره‌های دیگر نمی‌تواند به حرکتی مبادرت کند و اگر معاونت سایر مهره‌ها نباشد هر حرکتی که از او ناشی شود مذبوح[۲۰] و منجر به هلاکت است.

پادشاه را این بازی فوق‌العاده مسرور کرد و به برهمن وعده داد که رفتار خود را عوض کند و به پاداش این اختراع شگرف هرچه بخواهد به او بدهد. برهمن که می‌خواست پادشاه را درس دیگری در باب احتیاط و میانه‌روی بیاموزد گفت تنها پاداشی که متوقعم این است که پادشاه امر فرماید که گماشتگان در خانهٔ اول شطرنج یک دانهٔ گندم بگذارند و در خانهٔ دوم دوبرابر گندم خانهٔ اول ودر خانهٔ سوم دو برابر عدد گندم خانهٔ دوم، و به همین ترتیب تا خانهٔ آخر عدهٔ گندمهای هر خانه را مضاعف خانهٔ قبل از آن بنمایند و مجموع آن گندمها را به من بدهند. پادشاه ابتدا به حقارت این درخواست برهمن خندید ولی پس از آنکه به عظمت کمیت حاصل گندمها پی برد دید

که از عهدهٔ انجام خواهش برهمن برنمی‌آید.

از لحاظ تاریخی درست معلوم نیست که این قصه حقیقتی داشته یا نه، بلکه قریب به یقین است که بعضی از حکما آن را برای گرفتن درس عبرت وضع و جعل کرده‌اند ولی از وقتی که قضیهٔ مزبور شایع شده علمای ریاضی درصدد پیدا کردن مجموع گندم خانه‌های شطرنج به طرز مذکور در فوق برآمده و در باب آن زحماتی کشیده‌اند. حالیه که جداول لگاریتم و دستورهای جبری مدون در دست است، حساب این گونه مسائل آسان و کار محصلین کلاسهای متوسطه است، ولی سابقاً که علوم ریاضی ترقیات عصر ما را نداشته و حتی نوشتن معادلات با حروف و علامات نیز معمول نبوده است پیدا کردن جواب مسائلی نظیر مسألهٔ فوق سخت مشکل بوده است.

مسألهٔ فوق چنانکه اشاره شد مبنی بر حساب حاصل جمع یک تصاعد هندسی است با قدر نسبت ۲، و این ایام یافتن جواب آن در چندقیقه ممکن می‌شود.

ابوریحان محمد ابن احمد بیرونی[21] (۳۶۲ـ۴۴۰ هـ) از اجلّهٔ حکما و علمای ریاضی و مورّخین و ادبای ایران که از معتقدین به حرکت زمین بوده و بسیاری از مشکلات ریاضی و هیأت را حل کرده و از بزرگترین مفاخر حقیقی نژاد ایرانی است در باب مسألهٔ فوق نیز فکر کرده و دو قضیّهٔ ذیل را یافته و طبق آنها مجموع جمل فوق را حساب کرده است.

قضیهٔ ۱. درصورتی که عدهٔ گندم خانه‌ای را بدانیم شمارهٔ گندم خانه‌ای که فاصلهٔ آن تا این خانه برابر باشد با فاصلهٔ این خانه تا خانهٔ اول، برابر است با مجذور عدهٔ گندم خانهٔ معلوم. مثلاً عدهٔ گندم موجود در خانهٔ ۵، برابر است با ۱۶ چون فاصلهٔ خانهٔ ۵ تا خانهٔ اول ۴ خانه است، عدهٔ گندم خانهٔ نهم که فاصلهٔ آن نیز تا خانهٔ ۵ بیشتر از ۴ خانه نیست برابر خواهد شد با $۱۶^{۲}$ یعنی ۲۵۶، و شمارهٔ گندم خانهٔ ۱۷، برابر است با $۲۵۶^{۲}$...

قضیهٔ ۲. عدهٔ گندم هر خانه منهای واحد برابر است با مجموع گندم خانه‌های قبل از آن. مثلاً شمارهٔ گندم خانهٔ ۶ برابر است با ۳۲، مجموع گندم پنج خانهٔ قبل از آن برابر است با ۳۱ دانه، به این ترتیب

۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶ = ۳۲ − ۱

بعد از ذکر این دو قضیه، ابوریحان می‌گوید اگر فرض کنیم که شطرنج به جای ۶۴ خانه ۶۵ خانه داشته باشد، بر طبق قضیهٔ ۲ عِدّهٔ گندم خانهٔ ۶۵، برابر می‌شود با مجموع گندمهای خانه‌هـــای ماقبل آن منهای واحد، و این مجموع گندم ۶۴ خانهٔ شطرنج است. پس ابتدا باید شمارهٔ گندم موجود در خانهٔ ۶۵ را یافت.

به موجب قضیهٔ ۱ چون خانهٔ ۳۳ واسطهٔ بین خانهٔ ۶۵ و خانهٔ اول، یعنی از هر دو به یک فاصله است، پس مربع گندمهای موجود در آن خانه برابر است با عدهٔ گندم خانهٔ ۶۵، و مربع عدهٔ گندم خانهٔ ۱۷ (واسطهٔ بین خانهٔ ۳۳ و خانهٔ اول) برابر با عدهٔ گندم خانهٔ ۳۳ و مربع عدهٔ گندم خانهٔ ۹ (واسطهٔ بین دو خانهٔ ۱۷ و اول) برابر با گندم خانهٔ ۱۷ و مربع شمارهٔ گندم خانهٔ ۵ (واسطهٔ بین دو خانهٔ ۹ و اول) برابر با عدهٔ گندم خانهٔ ۹، و مجذور عدهٔ گندم خانهٔ ۳ (واسطهٔ بین دو خانهٔ ۵ و اول) برابر با شمارهٔ گندم خانهٔ ۵ و مربع عدهٔ گندم خانهٔ ۲ (واسطهٔ بین خانه‌های ۳ و اول) یعنی چهار مساوی است با عدهٔ گندم خانهٔ ۳ و مجذور ۴ یعنی ۱۶ شمارهٔ گندم خانهٔ ۵ است، و مجذور ۱۶ یعنی ۲۵۶ مساوی است با عدهٔ گندم خانهٔ ۹ و مجذور ۲۵۶ یعنی ۶۵۵۳۶ برابر است با عدهٔ گندم خانهٔ ۱۷ و مجذور عدد اخیر یعنی ۲۹۶، ۹۶۷، ۴۹۴، ۴ عدهٔ گندم خانهٔ ۳۳ است، و اگر این عدد آخری را در خود ضرب کنیم حاصل یعنی:

۱۸،۴۴۶،۷۴۴،۰۷۳،۷۰۹،۵۵۱،۶۱۶

عدّهٔ گندمهای خانهٔ ۶۵ است، و چون این عدد، به موجب قضیهٔ ۲، منهای واحد برابر است با مجموع گندمهایی که در کل خانه‌های ماقبل خانهٔ ۶۵ یعنی در ۶۴ (خانهٔ) شطرنج گذاشته شده، پس مجموع گندمهای خانه‌های ۶۴ گانهٔ شطرنج به موجب حساب فاضل استاد ابوریحان بیرونی عدد بیست رقمی ذیل است:

۱۸،۴۴۶،۷۴۴،۰۷۳،۷۰۹،۵۵۱،۶۱۵

البته با به کار بردن دستور[۲۲]

$$S = \frac{t_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

و داشتن جدول لگاریتم، عمل کردن بر طبق قضایای فوق و اجرای چندین عمل ضرب، امروز دیگر لازم نیست، ولی در عهدی که این نوع دستورها و جداول معمول نبوده پیدا کردن دو قضیهٔ مذکور و یافتن حاصل گندمها به وجه سادهٔ مرقوم در فوق، یکی از شاهکارها محسوب می‌شده و نمایندهٔ هوش و درجهٔ استادی ابوریحان بیرونی است.

از خانه‌های ۶۴ گانهٔ شطرنج بیرون می‌آییم و یک راست به زیرزمین علی بابا که هر چند کور است روشندل است می‌رویم. مسأله را از همین شماره برداشته‌ایم.

زیرزمین علی‌بابا

شربت فروش کوری موسوم به علی بابا در زیرزمین منزل خود نه جعبه به طریقی که در شکل دیده می‌شود گذارده، جعبهٔ وسط را برای شیشه‌های خالی معین کرده و در هر یک از چهار جعبهٔ گوشه‌ها سه شیشه و در چهار جعبهٔ دیگر ده شیشهٔ شربت نهاده بود.

نوکر علی بابا[۲۳] روزی که خانه را خالی یافت چهار شیشهٔ شربت از جعبه(های) مذکور دزدید. یکی از همسایگان علی بابا که موضوع را ملتفت شده بود وی را آگاه ساخت.

۳	۱۰	۳
۱۰		۱۰
۳	۱۰	۳

علی بابا به زیرزمین سرکشی کرده مشاهده نمود که شیشه‌های اطراف تغییر نکرده، بدین معنی که در هر طرف همان ۱۶ شیشهٔ شربت موجود است. لهذا خیال کرد به نوکرش تهمت زده‌اند. نوکر از سادگی ارباب و این اتفاق استفاده کرده سه دفعهٔ دیگر دزدی خود را تکرار نموده و هر دفعه که علی بابا به جعبه‌ها سرکشی کرد موافق حساب خود نقصی در جعبه‌ها ندید.

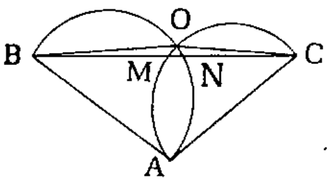
حال بگویید نوکر علی بابا چه حیله‌ای به کار برده و چگونه مکان شیشه‌ها را تغییر داده است.

مجله همانطور که قبلاً هم ذکر کردیم به مطالب متنوع می‌پردازد و بخشی به نام **حیل ریاضی** دارد و بخشی به نام **حکایات و اقوال**، دو مطلب زیر را به ترتیب از این دو بخش برداشته‌ایم:

حیل ریاضی

اولاً مجموع زوایای مثلث از دو قائمه زیادتر است، ثانیاً دو خط عمود بر یک خط متقاطعند، ثالثاً بر دو نقطهٔ مفروض بیش از یک خط مستقیم مرور می‌کند.

برهان: برای اثبات قضیه زاویه‌ای مانند BAC رسم نموده به قطر هر یک از اضلاع آن نیمدایره‌ای رسم کرده خط BC را رسم می‌کنیم و



فرض می‌کنیم M و N نقاط تقاطع آن با دوایر مرسوم باشند. اولاً چون هر یک از زوایای AMC و ANB در نیمدایره محاطند مساوی یک قائمه خواهند بود و بنابراین مجموع زوایای مثلث AMN از دو قائمه متجاوز است. ثانیاً دو خط AM و AN که بر BC عمودند بر A تقاطع نموده‌اند. ثالثاً هر یک از زوایای BOA و COA قائمه‌اند و بنابراین خط BOC مستقیم است، و چون BC نیز مستقیم می‌باشد بر B و C دو مستقیم مرور کرده. فثبت المطلوب[۲۴].

عشق به حساب

بسیاری از دانشمندان عشق مفرطی به حساب داشته‌اند. آمپر[۲۵]

دانشمند شهیر و عالم معروف فرانسوی در علاقه‌ای که به این قسمت داشته مشهور است، چنان که گویند قبل از این که ارقام را شناخته و قادر به نوشتن آنها باشد با سنگ ریزه و لوبیا حسابهای بس طولانی می‌نمود.

و نیز گویند در کودکی کسالتی عارض وی شده بود و برای این که فکرش راحت باشد مادرش او را از لوبیاهای عزیزش جدا ساخته بود. آمپر لقمهٔ نانی را که پس از سه روز گرسنگی و پرهیز به وی داده بودند خرد کرده مشغول محاسبات خود گردید!!

در این جا و پیش از این که به ذکر بعضی از مقالات دیگر این مجله بپردازیم بعضی از مسائل مطرح شده در آن را با حل‌شان می‌آوریم، این را نیز ذکر می‌کنیم که بعضی از این مسائل را افرادی فرستاده‌اند که بعدها از ناموران این دیار شدند و از آن جمله‌اند احمد آرام[۲۶].

ادامه دارد...

یادداشتها

۱- مثنوی، دفتر پنجم

۲- قانون با ریاضی مناسبتی بیش از هم محل بودن دارد.

۳- ظاهراً سالانه درست‌تر است.

۴- خدا پدرشان را بیامرزد که به فکر محصلین بیچاره بوده‌اند.

۵- شاید برای جور کردن دخل و خرج

۶- شاید در آن زمانها، مشاهدهٔ رقص و نه «رقصیدن» برای ریاضیدانهای عزیز مفید به نظر می‌رسیده است.

۷- ستاره‌ای در آسمان. تعبیر از محتشم کاشانی و از دوازده بند معروف اوست.

۸- صورت صحیح این بیت که اولین بیت دفتر دوم مثنوی مولوی است چنین است:

مدتی این مثنوی تأخیر شد
مهلتی بایست تا خون شیر شد

۹- ظاهراً «بر» زیادی است.

۱۰- در این جا و در بقیهٔ نقل قولها شیوهٔ نگارش نویسنده را تغییر نداده‌ایم و تنها به تغییر رسم‌الخط اکتفا کرده‌ایم.

۱۱- تأکیدها همه جا از متن اصلی است.

۱۲- بعداز همهٔ این حرفها این چنین هم می‌نماید که بعضی از مشترکین قصد خوردن وجه اشتراک مجله را نداشته‌اند و واقعاً بی‌پول بوده‌اند، این هم معلوم می‌شود که در قدیم هم قلم شاه جهان نبوده و قلم زن را به دولت نمی‌رسانده است، البته از استثنائاتی چون عنصری که از نقره دیگدان می‌زده و از زرآلات خوان می‌ساخته می‌گذریم.

۱۳- این کلمه در نسخه‌ای که در دست این جانب است و آن را نیز مانند نسخ مربوط به مقالهٔ اول از استاد پرویز شهریاری به امانت گرفته‌ام، به علت رفتگی پاک شده و به گمانش آورده‌ایم.

۱۴- و این نشان می‌دهد که کارهای کوچک و اولیهٔ مردان بزرگ همچنان آثاری از بزرگی دارد و مرد بزرگ در هر مرحله از حیات خود بزرگی خود را می‌نماید و به یاد این مصراع می‌افتیم که: چنین کنند بزرگان چو کرد باید کار.

۱۵- ریسمان محکم، عروةالوثقی

۱۶- ظاهراً «و» زیادی است.

۱۷- عباس اقبال آشتیانی، محقق و مورخ ایرانی (۱۲۷۵ - ۱۳۳۴). وی در آغاز جوانی درودگر بود و سپس به تحصیل پرداخت و دورهٔ دارالفنون را به پایان رسانید و به معاونت کتابخانهٔ معارف انتخاب گردید. به معلمی مدارس نظام، مدرسهٔ علوم سیاسی و دارالمعلمین عالی منصوب شد. به اخذ درجهٔ لیسانس از سور بن نایل آمد. پس از بازگشت به ایران به سمت استادی دانشگاه و عضویت فرهنگستان انتخاب شد. در ۱۳۲۴ مجلهٔ یادگار را تأسیس کرد که پنج دورهٔ آن منتشر شده. در تحقیقات تاریخی و ادبی روش عالمانه‌ای دارد. «نقل به اختصار از فرهنگ معین».

۱۸- بَرَهْمَن، پیشوای روحانی مذهب برهمایی، برهما: یکی از سه خدای مذهب برهمایی، کلمه‌ای است از هندی گرفته شده.

۱۹- بساط چرمینی که محکومان را بر آن گردن می‌زدند. در اینجا معنی صفحهٔ شطرنج یا میدان کارزار است.

۲۰- مَذبوح: گلوبریده، کشته

۲۱- ریاضیدان و فیلسوف ایرانی اهل بیرون خوارزم (۳۶۲ - ۴۴۰ ه). کتاب «آثار الباقیه» را به نام قابوس بن وشمگیر تألیف کرد. در دربار ابوالعباس مأمون بن مأمون مدتی بزیست. در غالب غزوات محمود به هندوستان در ملازمت او بود. زبان سنسکریت را بیاموخت و کتاب «تحقیق ماللهند» را تألیف کرد. کتاب مهم دیگر او «التفهیم» است که آن را به عربی و فارسی (جداگانه) تألیف کرده‌است. فرهنگ معین.

۲۲- حروف دستور مزبور را مطابق با حروف روز کمی تغییر داده‌ایم.

۲۳- علی بابای کور شربت فروش، توان نوکرنگهداشتن نداشته، مگر آنکه نوکر را به معنای «عصاکش» در نظر بگیریم.

۲۴- مطلب مورد نظر ثابت شد.

۲۵- فیزیکدان فرانسوی (۱۷۷۵ - ۱۸۳۶) موجد رشتهٔ الکترودینامیک و مخترع الکترومان، دستگاه تلگراف الکترومانیتیک. در فلسفه و ریاضی نیز تحقیقات بسیار دارد. فرهنگ معین.

۲۶- مترجم و نویسندهٔ نامدار معاصر

تصاعد هندسی

● احمد قندهاری

تصاعدهندسی دنباله‌ای است که هر جمله آن از جمله اول به‌بعد برابراست با جمله‌قبل‌ضرب‌در عددثابتی. این‌عدد ثابت را قدرنسبت گوییم و با حرف (q) نشان می‌دهیم.

مثال: $q=۲$ $\div\div$ ۳,۶,۱۲,۲۴,۴۸,...

درحالت کلی، دنبالهٔ تصاعد هندسی‌را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\div\div\ a_1 : a_1q : a_1q^{2} : a_1q^{3} : \dots \quad a_1q^{n-1}$$

حال دنباله‌تصاعد عددی‌راکه درشمارهٔ قبل گفته شد می‌نویسیم:

$$\div a_1\ ,\ (a_1+d)\ ,\ (a_1+2d)\ ,\ (a_1+3d)\ ,\ \dots\ ,a_1+(n-1)d$$

اگر به دو دنبالهٔ فوق دقت‌کنیم ،ملاحظه می‌کنیم‌که:

الف: علامت $+$ در تصاعد عددی بــه صورت $\times$ در تصاعد هندسی ظاهر می‌شود.

ب: ضریب قدرنسبت در تصاعد عددی‌به صورت توان قدرنسبت در تصاعد هندسی تبدیل‌شده است.

حال به دو رابطه زیر دقت‌کنید:

درتصاعد عددی: $a_2-a_1=d$

درتصاعد هندسی: $\frac{a_2}{a_1}=q$

ج: بنابراین می‌توان گفت‌که علامت $-$ درتصاعدعددی به علامت $\div$ در تصاعد هندسی تبدیل می‌شود.

خلاصه، گفتار فوق چنین است:

تصاعد هندسی		تصاعد عددی
$\times$	$\longrightarrow$	$+$
توان	$\longrightarrow$	ضریب
تقسیم	$\longrightarrow$	$-$

با توجه به تغییرات گفته شده خواهیم داشت:

مقایسه ۱

هرگاه z،y،x سه‌جمله متوالی یك‌تصاعد هندسی باشند داریم:

درتصاعد عددی داشتیم: $2y=x+z$

درتصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{y^2=x\cdot z}$

مقایسه ۲

$\Longrightarrow$ درتصاعد عددی داشتیم: $a_m-a_n=(m-n)d$

درتصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}}$

مثال: دریك تصاعد هندسی $a_5=4a_1$ ، قدرنسبت این تصاعد چند است؟

$$\frac{a_5}{a_1}=q^4 \Longrightarrow \frac{4a_1}{a_1}=q^4 \Longrightarrow q^4=4 \Longrightarrow q^2=2$$

$$\Longrightarrow q=\pm\sqrt{2}$$

مقایسه ۳ (جمله عمومی یا جمله (n) ام)

$\Longrightarrow$ در تصاعد عددی داشتیم: $a_n=a_1+(n-1)d$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{a_n=a_1q^{n-1}}$

مثال در تصاعد $\sqrt{2}$ و ۲ ... ، جمله نهم چیست؟

$$q=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_n=a_1q^{n-1} \Longrightarrow a_9=a_1q^8=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8=$$

$$2\left(\frac{2^4}{2^8}\right)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

مقایسه ۴ (قاعدهٔ اول اندیسها)

$\Longrightarrow$ در تصاعد عددی داشتیم: $2a_{10}=a_7+a_{13}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $(a_{10})^2=a_7\cdot a_{13}$

$$2\times 10=7+13$$

و در حالت کلی:

$\Longrightarrow$ در تصاعد عددی داشتیم: $2a_n=a_{n-p}+a_{n+p}$

$$\boxed{(a_n)^2=a_{n-p}\cdot a_{n+p}} \qquad n,p\in N, p<n$$

$$2n=(n-p)+(n+p)$$

مثال: در یک تصاعد هندسی حاصل ضرب دوجمله هفتم وهفدهم($4\sqrt{2}$) است، جمله دوازدهم و قدرنسبت را بیابید.

حل: $(a_{12})^2=a_7\cdot a_{17} \Longrightarrow (a_{12})^2=4\sqrt{2}$

$$\Longrightarrow a_{12}=\pm 2\sqrt[4]{2}$$

$$\frac{a_{12}}{a_7}=q^5 \Longrightarrow q^5=\frac{\pm 2\sqrt[4]{2}}{4\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{8}}=\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{64}} \Longrightarrow$$

$$q^5=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{32}}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2^5}} \Longrightarrow q=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

مقایسه ۵ (قاعدهٔ دوم اندیسها)

$\Longrightarrow$ در تصاعد عددی داشتیم: $a_4+a_{12}=a_3+a_{13}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$a_4\cdot a_{12}=a_3\cdot a_{13}$$

$$4+12=3+13$$

در حالت کلی خواهیم داشت:

$\Longrightarrow$ در تصاعد عددی داشتیم: $a_m+a_n=a_p+a_k$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_k}$

با شرط $m+n=p+k$

مثال حاصل‌ضرب دو جمله پنجم و بیست و پنجم در یک تصاعدهندسی ($4\sqrt[4]{2}$) است اگر جمله‌هفدهم ($2\sqrt[8]{2}$) باشد جمله سیزدهم این تصاعد چند است؟

$$a_{13}\cdot a_{17}=a_5\cdot a_{25} \Longrightarrow 2\sqrt[8]{2}\,a_{13}=4\sqrt[4]{2}$$

$$\Longrightarrow a_{13}=\frac{4\sqrt[4]{2}}{2\sqrt[8]{2}}=\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2}}=\frac{\sqrt[4]{2^5}}{\sqrt[8]{2}}=\frac{\sqrt[8]{2^{10}}}{\sqrt[8]{2}}=\sqrt[8]{2^9}$$

$$\Longrightarrow a_{13}=2\sqrt[8]{2}$$

مقایسه۶ (حاصل‌ضرب n جمله‌اول یك تصاعد هندسی)

$\Longrightarrow$ در تصاعد عددی داشتیم: $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

در تصاعدهندسی‌خواهیم‌داشت: $\boxed{P_n=(a_1\cdot a_n)^{\frac{n}{2}}}$

اگر به جای a_n مساویش a_1q^{n-1} را قراردهیم خواهیم‌داشت:

$$\boxed{P_n=(a_1^2q^{n-1})^{\frac{n}{2}}}$$

مثال: در تصاعد $\frac{\div}{\div}\,2:\sqrt{2}$ ، حاصل‌ضرب هشت‌جمله اول‌را بیابید.

$$\begin{cases} q=\sqrt{2} \\ p_n=(a_1^2q^{n-1})^{\frac{n}{2}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$p_8=(a_1^2q^7)^4=[2(\sqrt{2})^7]^4=(2\times 2^3\sqrt{2})^4 \Longrightarrow$$

$$p_8=(2^4\sqrt{2})^4=2^{16}\times 2^2=2^{18}$$

مقایسه۷

در هر تصاعد هندسی داریم:

$\Longrightarrow$ در تصاعد عددی داشتیم: $a_{10}=S_{10}-S_9$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{10}=S_{10}-S_9 \\ a_{10}=\frac{p_{10}}{p_9} \end{cases}$$

در حالت کلی خواهیم داشت:

درتصاعد عددی داشتیم: $a_n=S_n-S_{n-1}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} a_n=S_n-S_{n-1} \\ a_n=\frac{p_n}{p_{n-1}} \end{cases}}$$

مثال: دریك تصاعد هندسی داریم: حاصل ضرب هشت جمله‌اول بیست برابر حاصل‌ضرب هفت جمله‌اول است، جمله‌هشتم این تصاعد چند است؟

$$p_8=20p_7 \Longrightarrow a_8=\frac{p_8}{p_7}=\frac{20p_7}{p_7}$$

$$\Longrightarrow a_8=20$$

مقایسه۸

اگر دریك تصاعد هندسی‌تعدادجملات‌فرد و جمله وسط k باشد داریم:

$\Longrightarrow$ درتصاعد عددی داشتیم: $2k=a_1+a_n$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$\boxed{k^2=a_1\cdot a_n}$$

مقایسه۹

اگر دریك تصاعد هندسی تعداد جملات‌فرد وجمله وسط k باشد داریم:

$\Longrightarrow$ درتصاعد عددی داشتیم: $S_n=n\cdot k$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{p_n=k^n}$

مثال: در یك تصاعد هندسی جمله چهارم $2\sqrt{2}$ است حاصل‌ضرب هفت جمله‌اول آن چند است؟

حل: $p_n=k^n \Longrightarrow p_7=k^7$

$$\Longrightarrow p_7=(2\sqrt{2})^7=2^7\times\sqrt{2}^7=2^7\times 2^3\times\sqrt{2}$$

$$=2^{10}\sqrt{2}$$

مقایسه ۱۰

اگـر بین دو عـدد ، b ...... , a ، $\underbrace{\ldots\ldots}_{n}$ ، n

واسطه‌هندسی درج کنیم، قدرنسبت از رابطه زیر به‌دست‌می‌آید:

در تصاعد عددی داشتیم: $d=\frac{b-a}{n+1}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت :

$$\Longrightarrow \boxed{q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{q}}}$$

زیرا در تصاعد عددی :

$$d=\frac{1}{n+1}(b-a)$$

که در تصاعد هندسی به صورت $q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ خواهد شد.

توجه: اگر $(n+1)$ زوج باشد باید نوشت :

$$\frac{b}{a}>0 \quad \boxed{q=\pm\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}}$$

مثال : بین دوعدد ۳۲ ... , ۲ ، هفت واسطه‌هندسی درج کردیم، قدرنسبت را بیابید.

حل : $q=\pm\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}=\pm\sqrt[8]{\frac{32}{2}}=\pm\sqrt[8]{16}$

$$=\pm\sqrt[8]{2^4}=\pm\sqrt{2}$$

مقایسه ۱۱

حاصل‌ضرب n واسطه

اگر بین دوعدد b ... , a ، n واسطه‌هندسی درج کنیم، داریم:

در تصاعد عددی داشتیم: $S_{\text{واسطه‌ها}}=\frac{n}{2}(a+b)$

$$\Longrightarrow \boxed{P_{\text{واسطه‌ها}}=(ab)^{\frac{n}{2}}}$$

مثال : بین دوعدد $\sqrt[4]{8}$ و $\sqrt[4]{2}$ ، هشت واسطه هندسی درج کردیم، حاصل‌ضرب این (۸) واسطه‌چند است؟

حل :

$$P_{\text{واسطه‌ها}}=(ab)^{\frac{n}{2}} \Longrightarrow P_8=(\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8})^{\frac{8}{2}}=$$

$$(\sqrt[4]{16})^4=2^4$$

مقایسه ۱۲

S_n ، مجموع n جمله اول یك تصاعد هندسی متناهی .

اگر a_1 جمله‌اول و q قدرنسبت یك تصاعدهندسی‌متناهی باشد داریم:

$$\div\, a_1 : a_1q : a_1q^2 : a_1q^3 : \ldots : a_1q^{n-1}$$

پس مجموع n جمله‌اول این تصاعد هندسی متناهی چنین است:

رابطه (I)

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$$

اگر طرفین رابطه (I) را در q ضرب کنیم خواهیم داشت:

رابطه (II)

$$q\cdot S_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^n$$

حال اگر رابطه (I) را از رابطه (II) کم کنیم خواهیم‌داشت:

$$qS_n-S_n=a_1q^n-a_1 \Longrightarrow$$

$$S_n(q-1)=a_1(q^n-1) \Longrightarrow$$

$$q\neq 1$$

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}}$$

اگر به جای a_1q^{n-1} ، a_n را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$S_n=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1}=\frac{q(a_1q^{n-1})-a_1}{q-1}\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{q\cdot a_n-a_1}{q-1}=S_n}$$

توضیح: اگر $q=0$ تصاعد به صورت

$a_1,0,0,0,\dots,0$

درمی آید که $S_n=a_1$ و اگر $q=1$ تصاعدبه صورت

$a_1,a_1,\dots,a_1$

درمی آید که $S_n=na_1$

مثال: درتصاعــد هندسی ، ۸ : ۴ :: ، مجموع (۱۰) جمله‌اول چقدر است؟

حل: $q=\frac{8}{4}=2$

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{4(2^{10}-1)}{2-1}=$$

$$4(2^{10}-1)=2^{12}-4$$

مقایسه ۱۳

حد مجموع جملات یك تصاعد هندسی نزولی‌نامتناهی.

تصاعد هندسی . . . : $\frac{1}{4}$: ۱ : ۴ :: را درنظرمی گیریم.

ملاحظه می کنیم که $q=\frac{1}{4}$ ، و

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{4\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{4}-1}$$

چون‌تصاعد باجملات نامتناهی‌است پس $n\to+\infty$. در نتیجه

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n\to 0$$

پس :

$$\text{حد } S=\frac{4(0-1)}{-\frac{3}{4}}=\frac{-4}{-\frac{3}{4}}=\frac{16}{3}$$

در حالت کلی می‌توان گفت اگر در یك تصاعــد هندسی نزولی نامتناهی $|q|<1$ ، آنگاه :

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ (q)^n=0$$

پس فرمول S_n به فرمول حد مجموع زیر تبدیل می‌شود:

$$n\to+\infty\Rightarrow q^n\to 0\Rightarrow$$

$$\text{حد } S=\frac{a_1(0-1)}{1-q}\Rightarrow\boxed{\text{حد } S=\frac{a_1}{1-q}}$$

توجه : اگر درتصاعد موردبحث شماره (۱۳)، $q=\frac{1}{2}$

آنگاه $\boxed{\text{حد } S=2a_1}$

مثال : حدمجموع تصاعدهندسی...: $2\sqrt{3}$: $\sqrt{48}$ :: را بیابید .

حل : $q=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{48}}=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$\text{حد } S=2a_1=2\sqrt{48}=8\sqrt{3}$$

مسأله ۱ ـ در یك تصاعد هندسی نزولی نامتناهی، جمله اول(۱۰۰) است و هر جمله برابر است با ده برابر حدمجموع کلیه جملات بعداز خودش. حد مجموع کلیه جملات این تصاعد چند است؟

حل :

$$\div\div\ 100 : \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}_{k}$$

اگر به جز جمله اول، حد مجموع کلیه جملات را (k) بنامیم، بنا به فرض مسأله $100 = 10k$ پس: $k = 10$

$$\Rightarrow \text{حد } S = 110$$

مسأله ۲ ـ در یك تصاعد هندسی نزولی نامتناهی، حد مجموع جملات (۲۰) و جمله دوم این تصاعد (۵) است. جمله هفتم این تصاعد چند است؟

حل : صورت و مخرج کسر را در q ضرب می‌کنیم:

$$\text{حد } S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\text{حد } S = \frac{a_1 q}{(1-q)q} \Rightarrow \frac{20}{1} = \frac{5}{q-q^2} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{1} = \frac{1}{q-q^2} \Rightarrow 1 = 4q - 4q^2 \Rightarrow$$

$$4q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow (2q-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}} \Rightarrow a_1 = \frac{5}{q} = \frac{5}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = 10}$$

$$a_7 = a_1 q^6 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{10}{64} = \frac{5}{32} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_7 = \frac{5}{32}}$$

مسأله ۳ ـ در یك تصاعد هندسی، مجموع سه جمله اول (۱۱۲) و مجموع شش جمله اول (۱۲۶) است. قدر نسبت این تصاعد چند است؟

حل :

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 112$$

$$112 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^5 = 126 \Rightarrow$$

$$112 + q^3(a_1 + a_1 q + a_1 q^2) = 126 \Rightarrow$$

$$112 + q^3(112) = 126 \Rightarrow 112q^3 = 14 \Rightarrow$$

$$q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$$

مسأله ۴ ـ اگر در مثلث ABC، $\hat{A} = 90°$ و اضلاع a و b و c تصاعد هندسی بسازند قدرنسبت این تصاعد را بیابید.

حل : $\div\div\ c : b : a$ قدر نسبت q

ضلع c را با $\frac{b}{q}$ وضلع a را با bq نشان داده‌ایم.

$$\div\div \frac{b}{q} : b : bq$$

$$\text{مثلث قائم‌الزاویه است} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$$

طرفین تساوی را در $\frac{q^2}{b^2}$ ضرب می‌کنیم:

$$b^2 q^2 = b^2 + \frac{b^2}{q^2} \Rightarrow q^4 = q^2 + 1 \Rightarrow$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

مسأله ۵ ـ ثابت کنید اگر اضلاع مثلثی تصاعد هندسی بسازند، سه ارتفاع آنها نیز تصاعد هندسی می‌سازند.

حل : اضلاع را a و b و c و ارتفاعات متناظر آنها را h_a

و h_b و h_c می‌نامیم.

بنا به فرض مسأله داریم:

$$:: c : b : a \qquad b^۲ = ac$$

$$۲S_{ABC} = a\cdot h_a = b\cdot h_b = c\cdot h_c$$

$$۲S\times ۲S = ۲S\times ۲S$$

$$bh_b\times bh_b = a\cdot h_a\times ch_c$$

$$b^۲h_b^۲ = ach_ah_c \Longrightarrow \boxed{h_b^۲ = h_ah_c}$$

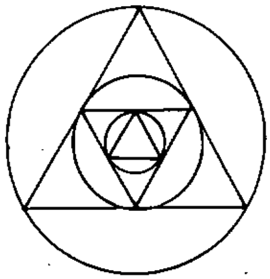
مسأله ۶ - مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مفروض است. اگر اوساط اضلاع را به‌هم وصل کنیم مثلث جدیدی به‌دست می‌آید و اگر این عمل را بی‌شمار دفعه ادامه دهیم، مطلوب است محاسبه:

الف: حد مجموع محیطهای مثلثها

ب: حد مجموع مساحتهای مثلثها

ج: حد مجموع مساحتهای دوایر محاطی این مثلثها

د: حد مجموع مساحتهای دوایر محیطی این مثلثها



حل الف: ضلع مثلث اولی a پس محیط آن ۳a است.

ضلع مثلث دومی $\frac{a}{۲}$ پس محیط آن $\frac{۳a}{۲}$ است.

$$\Longrightarrow q = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow \text{حد } S = ۲a_۱ = ۲(۳a) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\text{حد } S = ۶a}$$

حل: ب: ضلع مثلث اولی a و مساحت آن $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است. ضلع مثلث دومی $\frac{a}{۲}$ و مساحت آن $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۶}$ است،

بنابراین

$$q = \frac{۱}{۴}$$

$$\text{حد } S = \frac{a_۱}{۱-q} = \frac{\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۳} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\text{حد } S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۳}}$$

حل ج:

طول ضلع n ضلعی منتظم محیطی $= ۲R\,tg\,\frac{۱۸۰^\circ}{n} \Longrightarrow$

$$a = ۲R\,tg\,۶۰^\circ \Longrightarrow a = ۲R\sqrt{۳} \Longrightarrow R = \frac{a}{۲\sqrt{۳}}$$

$$\Longrightarrow S_{\text{دایره محاطی اولی}} = \pi R^۲ = \frac{\pi a^۲}{۱۲} =$$

جمله اول تصاعد هندسی

$$a \xrightarrow{\text{تبدیل}} \frac{a}{۲} \Longrightarrow R'_{\text{جدید}} = \frac{a}{۴\sqrt{۳}} \Longrightarrow$$

$$S_{\text{دایره محاطی دومی}} = \pi R'^۲ = \frac{\pi a^۲}{۴۸} = \text{جمله دوم تصاعد هندسی}$$

$$\Longrightarrow q = \frac{۱}{۴} \Longrightarrow \text{حد } S = \frac{a_۱}{۱-q} = \frac{\frac{\pi a^۲}{۱۲}}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{\pi a^۲}{۱۲}}{\frac{۳}{۴}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{S_{\text{حد}} = \frac{\pi a^2}{9}}$$

حل د :

$$\Longrightarrow \text{طول ضلع n ضلعی منتظم محاطی} = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \Longrightarrow$$

$$a = 2R\sin 60^\circ$$

$$a = 2R\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow a = R\sqrt{3} \Longrightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow S_{\text{دایره محیطی اولی}} = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{3} =$$

جمله اول تصاعد هندسی

$$a \xrightarrow{\text{تبدیل}} \frac{a}{2} \Longrightarrow R'_{\text{جدید}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow S_{\text{دایره محیطی دومی}} = \pi R'^2 = \frac{\pi a^2}{12} =$$

جمله دوم تصاعد هندسی

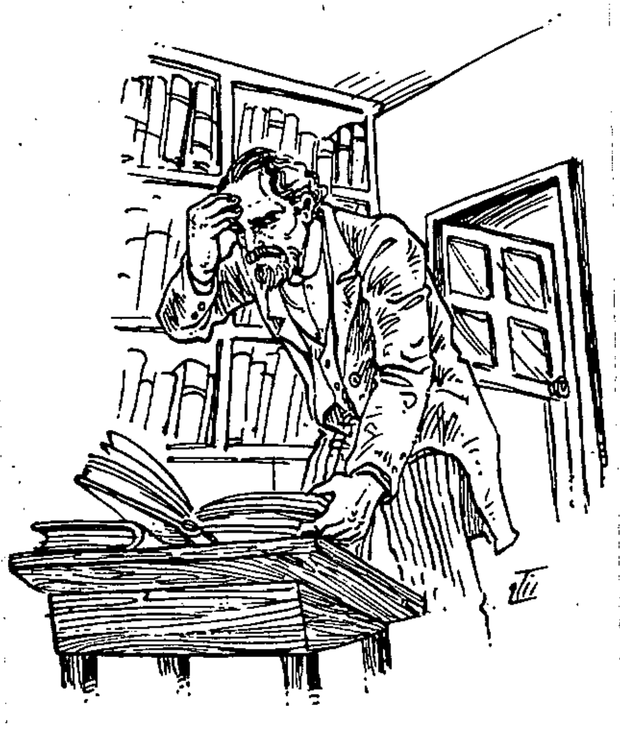
$$\Longrightarrow q = \frac{1}{4} \Longrightarrow S_{\text{حد}} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{\pi a^2}{3}}{1-\frac{1}{4}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{S_{\text{حد}} = \frac{4\pi a^2}{9}}$$

ادب و ریاضی

پیش از آنکه نگاهی به هندسه بیفکند، که به تصادف اتفاق افتاد، چهل ساله بود. مقدمات اقلیدس بود و در کتابخانهٔ آقایان، و در صفحهٔ باز آن قضیه‌ای، قضیه را خواند، و گفت: قسم به خدا (گهگاه سوگندان غلیظی به طریق تأکید بر زبان می‌آورد) که غیر ممکن است! و برهان آن را، که به قضیهٔ دیگری ارجاعش می‌داد، و آن را هم خواند، دید. قضیهٔ دوم به قضیهٔ دیگر رجوعش داد، آن را هم خواند...... تا سرانجام به برهان، حقیقتِ مطلب را پذیرفت، و به این ترتیب به محبت هندسه گرفتار شد.

«از سرگذشت هابز»



قواعد استنتاج

غلامرضا یاسی‌پور

هر باب از این کتاب نگارین که برکنی
همچون بهشت‌گویی از آن باب خوشتر است

دو باب اصلی منطق یکی باب تصور[۱] است و دیگری باب تصدیق[۲]. تصور همان تعریف[۳] و تعریف همان قول شارح است و تصدیق همان قضیه[۴]، و قضیه همان قول جازم یا لفظ مرکب تام خبری، که در منطق ریاضی آن را گزاره[۵] می‌نامند و کل این دو را علم می‌گویند، چنانکه گفته‌اند:

علم، در صورتی که اقرار به نسبت (بین دو چیز) باشد تصدیق وگرنه تصور است[۶].

و هریک را به بدیهی[۷] و نظری[۸] تقسیم می‌کنند، چنانکه فرموده‌اند:

و به ضرورت به دو قسم بدیهی و نظری تقسیم می‌شود، و نظری ملاحظهٔ معلوم برای حصول به مجهول است[۹].

باب معرِّف[۱۰] در تصور نظری و باب حجت[۱۱] در تصدیق نظری است، و در همین باب است که از گزاره‌هایی به نام مقدمات[۱۲] به گزاره‌ای به نام نتیجه[۱۳] می‌رسیم و در مورد همین رسیدن از مقدمات به نتیجه است که استنتاج[۱۴] می‌کنیم و بنابراین به قواعد استنتاج[۱۵] نیاز داریم.

اما، پیش از پرداختن به این موضوع باید مشخص کنیم که استنتاج یا استدلال[۱۶] درست[۱۷] چیست. در این صورت به تعریف استنتاج درست می‌پردازیم.

تعریف ۱. استنتاجی را درست می‌گوییم که چون صورت آن را به دست آوریم و جدول ارزش این صورت را رسم کنیم، در این جدول ارزش هر جا که مقدمات صورت مزبور راست[۱۸] باشند نتیجهٔ آن نیز راست باشد.

اما صورت یا صورت استدلالی[۱۹] چیست؟

تعریف ۲. چون در یک استدلال به جای گزاره‌های ساده[۲۰] متغیرهای گزاره‌ای[۲۱] و به جای رابطها[۲۲] علایم منطقی[۲۳] آنها را قرار دهیم، حاصل کار را صورت استدلالی گویند. متغیرهای گزاره‌ای به جای گزاره‌های ساده می‌نشینند و به عبارت دیگر جانگهدارند[۲۴].

به این ترتیب برای تحقیق درستی استنتاج زیر:

اگر باران ببارد در این صورت هوا ابر است.
باران می‌بارد.
∴ هوا ابر است.[۲۵]

«باران می‌بارد» را با p، و «هوا ابر است» را با q و رابط «اگر ـ در این صورت» را با ⇒ نمایش می‌دهیم و در نتیجه صورت استدلالی زیر را به دست می‌آوریم:

$p \Rightarrow q$
p
$\therefore q$

اکنون به رسم جدول ارزش این صورت می‌پردازیم:

مقدمهٔ ۱ $p \Rightarrow q$	مقدمهٔ ۲ p	نتیجه q
T	T	T
F	T	F
T	F	T
T	F	F

با توجه به جدول فوق، ملاحظه می‌کنیم که در هر سطر جدول که مقدمات ۱ و ۲ راستند نتیجه نیز راست است (در این مثال این واقعه تنها در سطر اول اتفاق می‌افتد)، بنابراین استدلال مورد بحث درست است. به این ترتیب، استدلال

اگر ناپلئون تهرانی است در این صورت ایرانی است.
ناپلئون تهرانی است.
∴ ناپلئون ایرانی است.

نیز که دارای همان صورت فوق است استدلالی درست[26] می‌باشد.

اکنون استدلال نادرست[27] زیر را در نظر می‌گیریم:

۲+۲=۴
∴ تهران پایتخت پاکستان است.

و صورت آن را با قرار دادن p به جای «۲+۲=۴» و q به جای «تهران پایتخت پاکستان است» به دست می‌آوریم:

p
$\therefore q$

وجدول آن را رسم می‌کنیم:

مقدمه p	نتیجه q
T	T
T	F
F	T
F	F

و ملاحظه می‌کنیم که در هر سطر که مقدمه راست است نتیجه چنین نیست (در سطر دوم مقدمه T است در حالی که نتیجه نیست). بنابراین می‌گوییم که استدلال مزبور نادرست است. استدلال

۲+۲=۴
∴ ۲×۳=۶

نیز که دارای همان صورت است، هر چند مقدمه و نتیجه‌اش راستند، نادرست است.

به این ترتیب می‌توانیم درستی یا نادرستی هر استدلال را با روش مکانیکی[28] فوق تحقیق کنیم. در این صورت چه نیازی به طرح قوانین استنتاج داریم؟ پاسخ در این مسأله نهفته است که روش فوق، گرچه می‌تواند در مورد هر استدلال متعارف[29]ی به کار رود، چون تعداد متغیرهای موجود در مقدمات یک صورت استدلالی زیاد باشد (اما نامتناهی نباشد) روشی عملی[30] نیست. زیرا همانطور که می‌دانیم چون تعداد متغیرهای گزاره‌ایِ واقع در صورتی n باشد تعداد سطرهای جدول آن 2^{n} می‌شود[31]، و به این ترتیب چون n مثلاً برابر ۱۰ باشد تعداد سطرهای جدول مربوطه 2^{10} یا ۱۰۲۴ می‌شود و این تعداد، رسم جدول را، اگر نه غیر ممکن، بسیار پرزحمت می‌کند. بنا به این دلیل است که نیاز به روشی کاراتر و عملی‌تر داریم و این روش همان

روش استفاده از قواعد استنتاج است.

اما قواعد استنتاج خود صورتهای استدلالی درستی می‌باشند که چون در مورد مقدماتی به کار روند و نتیجه را به دست دهند آن نتیجه با راست بودن مقدمات، راست می‌شود و به عبارت دیگر راستی را در هر مورد که به کار روند به میراث می‌گذارند.

این قواعد فعلاً تعداد، حتی صور ثابتی ندارند و از هر کتاب به کتاب دیگر تغییر می‌کنند. و ما برای این مقاله، آنها را از کتاب معتبر منطق علامتی[32] کوپای[33] انتخاب کرده‌ایم. قواعد مورد ذکر به خاطر فواید عملی، مستقل از یکدیگر نیز نیستند (گر چه در یک منطق صوری[34] باید باشند) و به عبارت دیگر می‌توان بعضی از آنها را از بعضی دیگر استنتاج کرد. اما باید تمام[35] باشند، یعنی باید بتوانند درستی هر استنتاج درست را ثابت کنند و به عبارت دیگر با در دست داشتن آنها، در صورتی که درستی استدلال درستی ثابت نشود این استدلال کننده است که عجز دارد و ناتوانی از آنِ قواعد نیست. قواعد مزبور به ترتیب زیرند و همانطور که گفته شد می‌توان درستی هر یک از آنها را با استفاده از جدول ارزش تحقیق کرد.

۱. قیاس استثنایی یا قاعدهٔ انفصال[36].

$p \Rightarrow q$

p

$\therefore q$ M.P.

۲. انفصال نقیض[37].

$p \Rightarrow q$

$\sim q$

$\therefore \sim p$ M.T.

۳. قیاس فرضی[38].

$p \Rightarrow q$

$q \Rightarrow r$

$\therefore p \Rightarrow r$ H.S.

۴. قیاس فاصل[39].

$p \vee q$

$\sim p$

$\therefore q$ D.S.

۵. قیاس ذوحدّین بانی[40].

$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$

$p \vee r$

$\therefore q \vee s$ C.D.

۶. قیاس ذوحدّین مخرب[41].

$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$

$\sim q \vee \sim s$

$\therefore \sim p \vee \sim r$

۷. تسهیل[42].

$p \wedge q$

$\therefore p$ Simp.

۸. ترکیب عطفی[۴۳].

p

q

∴ $p \wedge q$ Conj.

۹. جمع[۴۴].

p

∴ $p \vee q$ Add.

پیش از به دست دادن بقیهٔ قواعد به ذکر چند مثال می‌پردازیم و در مورد آنها این مطلب را خاطر نشان می‌کنیم که حروف بزرگ به جای گزاره‌های خاص به کار رفته، علامت / پس از آخرین مقدمه آمده و بعداز ∴ نتیجهٔ استدلال آورده شده و در سطرهای بعدی هر مقدمه و هر قاعدهٔ به کار رفته در مقابل سطر مربوطه نوشته شده است، و این ترتیب را به دست دادن اثبات صوری[۴۵] استدلال می‌گوییم.

مثال ۱. اثبات صوری استدلال زیر را به دست دهید.

$(A \wedge B) \Rightarrow [A \Rightarrow (D \wedge E)]$, $(A \wedge B) \wedge C / \therefore D \vee E$

حل. استدلال را به ترتیب زیر اثبات می‌کنیم:

1. $(A \wedge B) \Rightarrow [A \Rightarrow (D \wedge E)]$	
2. $(A \wedge B) \wedge C / \therefore D \vee E$	
3. $A \wedge B$	2, Simp.
4. $A \Rightarrow (D \wedge E)$	3, 1 , M.P.
5. A	3, Simp.
6. $D \wedge E$	5, 4, M.P.
7. D	6, Simp.
8. $D \vee E$	7, Add.

در سطر ۳، $A \wedge B$ را از سطر ۲، با استفاده از قاعدهٔ تسهیل استنتاج کرده‌ایم و به همین علت در مقابل آن ۲ و .Simp را که مخفف تسهیل است، نوشته‌ایم. در سطر ۴، $A \Rightarrow (D \wedge E)$ را با استفاده از سطرهای ۳ و ۱ و قاعدهٔ قیاس استثنایی استنتاج کرده‌ایم و به همین مناسبت در مقابل آن ۳، ۱ و .M.P را، که مخفف قیاس استثنایی است، نوشته‌ایم. در سطر ۵، A را از سطر ۳، با استفاده از قاعدهٔ تسهیل نتیجه گرفته‌ایم و به همین علت در مقابل آن ۳ و Simp ، مخفف تسهیل، را یادداشت کرده‌ایم. در سطر ٦، $D \wedge E$ را از سطر ۵ و ۴ با قیاس استثنایی به دست آورده‌ایم و از همین رو در مقابل آن ۵، ۴ و .M.P ، مخفف قیاس استثنایی، را نوشته‌ایم. در سطر ۷، D را از سطر ٦ با قاعدهٔ تسهیل استنتاج کرده‌ایم و به همین مناسبت در مقابل آن ٦ و .Simp ، علامت تسهیل، را رقم زده‌ایم. و آخرالامر، در سطر ۸، $D \vee E$ را از سطر ۷، با استفاده از قاعدهٔ جمع حاصل کرده‌ایم و به همین علت در مقابل آن ۷ و .Add ، مخفف جمع، را نوشته‌ایم، و به این ترتیب، با استفاده از قواعد استنتاج مزبور، بدون رسم جدول ارزش، که در این حالت به 2^5 یا ۳۲ سطر احتیاج داشته، به مطلوب رسیده‌ایم.

مثال ۲. اثبات صوری استدلال زیر را به دست دهید.

1. $H \Rightarrow (I \Rightarrow J)$	
2. $K \Rightarrow (I \Rightarrow J)$	
3. $(\sim H \wedge \sim K) \Rightarrow (\sim L \vee \sim M)$	
4. $(\sim L \Rightarrow \sim N) \wedge (\sim M \Rightarrow \sim O)$	
5. $(P \Rightarrow N) \wedge (Q \Rightarrow O)$	
6. $\sim (I \Rightarrow J) / \therefore \sim P \vee \sim Q$	
7. $\sim H$	6, 1, M.T.
8. $\sim K$	6,2, M.T.
9. $\sim H \wedge \sim K$	7,8, Conj.
10. $\sim L \vee \sim M$	9,3, M.P.

$11.\ \sim N \vee \sim O$ — 4,10, C.D.

$12.\ \sim P \vee \sim Q$ — 5,11, D.D.

اکنون به ذکر قاعدهٔ بعد، یعنی قاعدهٔ جانشینی[46]، می‌پردازیم.

قاعدهٔ جانشینی: هر یک از عبارات منطقاً معادل زیر را می‌توان، در هرجا که رخ دهند، به جای یکدیگر قرار داد.

۱۰. قضایای دومورگان[47] (De M.):

$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

۱۱. تعویض پذیری[48] (Com):

$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

۱۲. شرکت پذیری[49] (Assoc):

$[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$

$[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$

۱۳. توزیع پذیری[50] (Dist.):

$[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

۱۴. نقیض مضاعف[51] (D.N.):

$p \equiv \sim \sim p$

۱۵. ترانهاد[52] یا جبر (Trans.):

$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

۱۶. استلزام مادی[53] (Impl.):

$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

۱۷. تعادل مادی[54] (Equiv.):

$(p \equiv q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

$(p \equiv q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

۱۸. صدور[55] (Exp.)

$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

۱۹. صادق[56] (Taut.):

$p \equiv (p \vee p)$

$p \equiv (p \wedge p)$

در مورد هر یک از قواعد فوق باید توجه داشت که اولاً: دو گزاره را

از لحاظ مادی معادل[57] گویند اگر دارای یک ارزش راستی باشند، و این گزاره را، که آنها از لحاظ مادی معادلند، با درج علامت «≡» در بین آنها علامتی می‌کنیم، و علامت مزبور را با جدول زیر تعریف می‌کنیم:

p	q	p ≡ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

در این صورت همانطور که از جدول فوق برمی‌آید گفتن اینکه دو گزاره از لحاظ مادی معادلند گفتن این است که از لحاظ مادی مستلزم یکدیگرند. در نتیجه علامت مزبور را می‌توان به صورت «از لحاظ مادی معادل است با» یا «اگر و تنها اگر» خواند. گزارهٔ به صورت $p \equiv q$ را دو شرطی[58] می‌نامند. ثانیاً، دو گزاره را منطقاً معادل[59] می‌گویند اگر دو شرطی بیان کنندهٔ تعادل مادیشان صادق[60] یا همواره راست باشد. به این ترتیب هر یک از دو عبارت واقع در ده مورد فوق منطقاً معادلند و به عبارت دیگر عبارت حاصل از کل آنها صادق است، یعنی در جدول ارزش همواره T می‌گیرد و این مطلب را می‌توان در مورد هر یک از تعادلات فوق تحقیق کرد.

توجه داشته باشید که بین نه قاعدهٔ استنتاج اول و ده قاعدهٔ استنتاج بعد تفاوت مهمی موجود است و آن تفاوت این است که نه قاعدهٔ اول را می‌توان تنها در مورد سطور کامل به کار برد. به این ترتیب، مثلاً، بااستفاده از تسهیل می‌توان A را از $A \wedge B$، در صورتی که $A \wedge B$ سطری کامل باشد، استنتاج کرد، و اگر این عبارت قسمتی از یک سطر، مثلاً، $(A \wedge B) \Rightarrow C$ باشد، نمی‌توان A را از آن با استفاده از این قاعده نتیجه گرفت. در حالی که هر یک از ده قاعدهٔ اخیر را هم می‌توان در مورد یک سطر کامل هم در مورد قسمتی از یک سطر به کار برد. به این ترتیب نه تنها می‌توان $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ را از سطر کامل $(A \wedge B) \Rightarrow C$، با استفاده از صدور، استنتاج کرد، بلکه از سطر $[(A \wedge B) \Rightarrow C] \vee D$ هم می‌توان $[A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \vee D$ را از این قاعده نتیجه گرفت. تفاوت مهم دیگر این است که نه قاعدهٔ اول یک طرفه‌اند در حالی که ده قاعدهٔ بعد دو طرفه می‌باشند.

اکنون به ذکر مثالی چند در توضیح کاربرد قواعد فوق می‌پردازیم.

مثال ۳. اثبات صوری درستی استدلال زیر را به دست دهید:

1. $(O \Rightarrow \sim P) \wedge (P \Rightarrow Q)$	
2. $Q \Rightarrow O$	
3. $\sim R \Rightarrow P \; / \therefore R$	
4. $\sim Q \vee O$	2,Impl.
5. $O \vee \sim Q$	4, Com.
6. $(O \Rightarrow \sim P) \wedge (\sim Q \Rightarrow \sim P)$	1, Trans.
7. $\sim P \vee \sim P$	6, 5, C.D.
8. $\sim P$	7, Taut.
9. $\sim\sim R$	8,3, M.T.
10. R	9,D.N.

مثال ۴. اثبات صوری درستی استدلال زیر را به دست دهید:

1. $J \vee (\sim K \vee J)$	
2. $K \vee (\sim J \vee K) \; / \therefore (J \wedge K) \vee (\sim J \wedge \sim K)$	
3. $(\sim K \vee J) \vee J$	1, Com.
4. $\sim K \vee (J \vee J)$	3, Assoc.
5. $\sim K \vee J$	4, Taut.
6. $K \Rightarrow J$	5, Impl.
7. $(\sim J \vee K) \vee K$	2, Com.
8. $\sim J \vee (K \vee K)$	7, Assoc.
9. $\sim J \vee K$	8, Taut.

10. $J \Rightarrow K$	9, Impl.
11. $(J \Rightarrow K) \wedge (K \Rightarrow J)$	10,6, Conj.
12. $J \equiv K$	11, Equiv.
13. $(J \wedge K) \vee (\sim J \wedge \sim K)$	12, Equiv.

همانطور که قبلاً گفته شد معمولاً چنین است که قواعد استنتاج مستقل از یکدیگر نیستند و برخی را می‌توان از برخی دیگر به دست آورد. این مطلب در مورد قواعد فوق نیز صادق است و مثلاً می‌توان قاعدهٔ .M.T را از قواعد جبر و .M.P به ترتیب زیر نتیجه گرفت:

1. $p \Rightarrow q$	
2. $\sim q \,/\, \therefore\ \sim p$.	
3. $\sim q \Rightarrow \sim p$	1, Trans.
4. $\sim p$	3,2, M.P.

در این جا به مقاله‌مان خاتمه می‌دهیم و اثبات ناتمام بودن قواعد فوق، نیز نادرستی استدلالات را برای مقالهٔ دیگر می‌گذاریم.

یادداشتها

۱- Concept

۲- Assent

۳- Definition

۴- Proposition

۵- Statement

۶- اَلْعِلْمُ اِنْ کانَ اِذْعاناً لِلنِّسْبَةِ فَتَصْدیقٌ، وَ اِلاّ فَتَصَوُّرٌ. «تهذیب المنطق تفتازانی»

۷- Self-evident

۸- Speculative

۹- و یَنْقَسِمانِ بِالضَّرورَةِ، اَلضَّرورَةِ و الْاِکتسابَ بِالنَّظَرِ، وَ هُوَ مُلاحِظَةُ الْمَعْقُولِ لِتَحْصیلِ الْمَجْهُولِ. «تهذیب المنطق»

۱۰- Definiens در مقابل معرَّف «Definiendum»

۱۱- Argument

۱۲- Premisses

۱۳- Conclusion

۱۴- Deduction

۱۵- Rules of Inference

۱۶- Reasoning

۱۷- Valid

۱۸- True در این مقاله «راست» را با T و «دروغ»، «False» را با F نمایش می‌دهیم.

۱۹- Argument Form

۲۰- Simple Statement

۲۱- Statement Variable

۲۲- Connective

۲۳- Logical Symbols

۲۴- Place Holder، اینها را با حروف کوچک الفبای لاتین با شروع از p نمایش می‌دهیم.

۲۵- ∴ علامت «در نتیجه» Therefore است.

۲۶- استدلال مزبور درست است اما صحیح «Sound» نیست، زیرا حداقل یکی از مقدمات آن دروغ است. به این ترتیب استدلالی صحیح است که علاوه بر درست بودن، جمیع مقدماتش نیز راست باشند. اما در منطق تنها با درستی استدلالات کار داریم و تحقیق راستی مقدمات کار منطقی با عنوان منطقی نیست و اشتغال عالم است.

۲۷- Invalid

۲۸- Mechanical Procedure

۲۹- مقصود از استدلال متعارف «Common Reasoning» استدلالی است که مقدمات و متغیرهای گزاره‌ای به کار رفته در مقدمات صورت استدلالی آن، هر دو، به تعداد متناهی باشند.

۳۰- Effective Procedure

۳۱- این مطلب را با استفاده از استقراء ریاضی ثابت می‌کنند.

۳۲- Symbolic Logic

۳۳- Irving M. Copi منطقی معاصر و استاد دانشگاه هاوایی

۳۴- Formal Logic

۳۵- Complete

۳۶- Modus Ponens، منطقیون معمولاً برای ترکیب شرطی از علامت «⊃» که «C» ی برگردان است استفاده می‌کنند و این C خود اول کلمه Conditional یا «شرطی» است. به همین ترتیب برای ترکیب عطفی از علامت. (چون در این مرجع) یا علامت & (چون در کتب دیگر) استفاده می‌برند، ولی ما در این مقاله به ترتیب از علامات «⇒» و «∧» بهره برده‌ایم.

۳۷- Modus Tollens

۳۸- Hypothetical Syllogism

۳۹- Disjunctive Syllogism

۴۰- Constructive Dilemma

۴۱- Destructive Dilemma

۴۲- Simplification
۴۳- Conjunction
۴۴- Addition
۴۵- Formal Proof
۴۶- Rule of Replacement
۴۷- De Morgan's Theorms
۴۸- Commutation
۴۹- Association
۵۰- Distribution
۵۱- Double Negation
۵۲- Transposition
۵۳- Material Implication
۵۴- Material Equivalence
۵۵- Exportation
۵۶- Tautology
۵۷- Materially Equivalent
۵۸- Biconditional
۵۹- Logically Equivalent
۶۰- Tautology

تفریح اندیشه ۲

در صورتی که P در مهمانی بودن و D مغرور بودن و R دانشجوی سال اول بودن و S دانشجوی سال آخر بودن و A خوشحال بودن را نمایش دهد گزارهٔ زیر را علامتی کنید:

اگر هر دانشجوی سال آخر در مهمانی مغرور نبود، در این صورت بعضی از دانشجویان سال اول خوشحال می‌شدند.

از: The Language of Logic
MORTON L. SCHAGRIN

جواب در صفحهٔ ۹۶

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

(به دو روش)

● حمید رضا امیری

هرگاه α و β دو زاویه دلخواه باشند می‌خواهیم نسبتهای مثلثاتی $(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنیم یعنی:

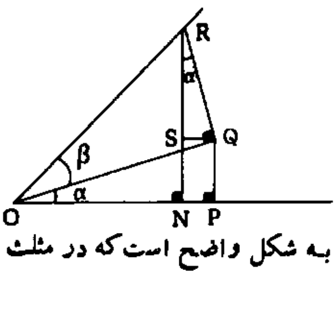
$$\sin(\alpha+\beta)\ ,\ \cos(\alpha+\beta)$$
$$tg(\alpha+\beta)\ ,\ cotg(\alpha+\beta)$$

ابتدا به محاسبهٔ $\sin(\alpha+\beta)$ می‌پردازیم، لازم به تذکر است می‌توان ابتدا $\cos(\alpha+\beta)$ را محاسبه نمود و سپس با استفاده‌از اتحاد $\sin x=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$ ، $\sin(\alpha+\beta)$ را به‌دست آورد. در ذیل به ۲ روش متفاوت یکبار ابتدا

$$\sin(\alpha+\beta)$$

محاسبه می‌شود و در روش‌دوم ابتدا $\cos(\alpha+\beta)$ را به دست می‌آوریم.

روش اول: محاسبهٔ $\sin(\alpha+\beta)$.



با توجه به شکل واضح است که در مثلث قائم الزاویهٔ ONR داریم:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{NR}{OR}=\frac{NS+SR}{OR}=\frac{PQ+SR}{OR}$$

$$=\frac{PQ}{OR}+\frac{SR}{OR}=\frac{PQ}{OQ}\times\frac{OQ}{OR}+\frac{SR}{QR}\times\frac{QR}{OR}$$

$$=\sin\alpha\times\cos\beta+\cos\alpha\times\sin\beta$$

(در مثلث قائم‌الزاویهٔ SQR داریم : $\frac{SR}{QR}=\cos\alpha$)

$$\Longrightarrow \boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

حال با استفاده از اتحاد $\cos x=\sin(\frac{\pi}{۲}-x)$ به محاسبهٔ $\cos(\alpha+\beta)$ می‌پردازیم. اما ابتدا نیاز داریم

$$\sin(\alpha-\beta)$$

را به دست آوریم. برای به‌دست آوردن رابطه موردنظر در رابطهٔ $\sin(\alpha+\beta)$ کافیست β را بـه $(-\beta)$ تبدیل کنیم ، خواهیم داشت:

$$\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

و داریم:

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta\ ,\ \cos(-\beta)=\cos\beta$$

$$\Longrightarrow \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Longrightarrow \cos(\alpha+\beta)=\sin\left[\frac{\pi}{۲}-(\alpha+\beta)\right]=$$

$$\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$$

$$\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\cos\alpha}\cos\beta-\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\sin\alpha}\sin\beta=$$

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

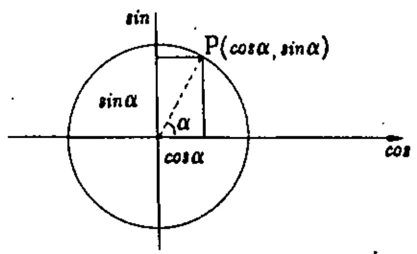
و اگر در رابطهٔ اخیر β را به $(-\beta)$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=$$

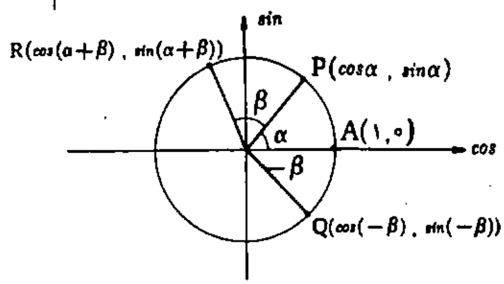
$$\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\Longrightarrow$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

روش‌دوم: دراین‌روش ابتدا $\cos(\alpha+\beta)$ را محاسبه‌می‌کنیم. با توجه به شکل (۱) و تعریف دایره مثلثاتی و محورهای آن می‌توان گفت دایره مثلثاتی مکان‌هندسی نقاطی از صفحه چون P است که طول این نقاط $\cos\alpha$ و عرض این نقاط $\sin\alpha$ می‌باشد (α زاویه روبرو به‌کمان OP است). حال با توجه به‌این مطلب و فرمول فاصلهٔ دونقطه وشکل (۲) خواهیم داشت:



شکل ۱



شکل ۲

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{QA}=\widehat{PR}=\beta\\ \widehat{AP}=\alpha\\ \widehat{QAP}=\alpha+\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow \widehat{PQ}=\widehat{RA}$$

اندازه‌های دوکمان $\widehat{RA}$ و $\widehat{PQ}$ با هم‌برابرند لذا:

$$PQ=RA\Longrightarrow\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}$$

$$=\sqrt{(x_R-x_A)^2+(y_R-y_A)^2}$$

$$\Longrightarrow\sqrt{[\cos\alpha-\cos(-\beta)]^2+[\sin\alpha-\sin(-\beta)]^2}$$

$$=\sqrt{[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+[\sin(\alpha+\beta)-0]^2}\Longrightarrow$$

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos(-\beta)+\cos^2(-\beta)+\sin^2\alpha$$

$$-2\sin\alpha\sin(-\beta)+\sin^2(-\beta)$$

(۱)

$$=\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)+1+\sin^2(\alpha+\beta)$$

از طرفی داریم: $\sin^2x+\cos^2x=1$

پس: $\sin^2(-\beta)+\cos^2(-\beta)=1$

$$\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$$

$$(1)\Longrightarrow-2\cos\alpha\cos(-\beta)-2\sin\alpha\sin(-\beta)+2$$

$$=-2\cos(\alpha+\beta)+2\Longrightarrow\cos(\alpha+\beta)=$$

$$\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\Longrightarrow$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی

$$\sin(\alpha-\beta)\ ,\ \sin(\alpha+\beta)\ ,\ \cos(\alpha-\beta)$$

مشابه روش قبل است.

۱ مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

نمایش وابستگیهای بین جبر و هندسه[1]

از: Mathematics Teacher

دیوید. ار. لینگ و
آرتور. تی. وایت[2]

عبارت $2n/(n-2)$ حداقل در دو زمینهٔ بسیار متفاوتِ ارتباط دهندهٔ جبر و هندسه رخ می‌دهد. عبارت مزبور در یکی از این زمینه‌ها در صورتی که عددی صحیح باشد جالبتر می‌شود، و در دیگری باید عددی صحیح باشد.

کدام مستطیلها مساحت و محیط از لحاظ عددی مساوی دارند؟

بیتز[3] (۱۹۷۹) مثلثهای دارای مساحت و محیط از لحاظ عددی مساوی را مشخص کرد. فی‌المثل، مثلث قائم‌الزاویهٔ با اضلاع ۶، ۸، و ۱۰ مساحت و محیطی، هر دو، مساوی ۲۴ واحد دارد. مثال دوم، مثلث قائم‌الزاویهٔ دارای اضلاع به طولهای ۵، ۱۲، و ۱۳ است. مارکویتس[4] (۱۹۸۱) نشان داد که بی‌نهایت مثلث با اضلاع به طولهای جمیعاً گویا، محیط و مساحتی از لحاظ عددی مساوی دارند، اما تنها پنج مثلث با اضلاع به طولهای جمیعاً عدد طبیعی چنین‌اند، و از اینها، چنان که قبلاً داده شده، دو مثلث قائم‌الزاویه‌اند. شاهین[5] (۱۹۸۶) ملاحظه کرد که مربع 4×4 محیط و مساحتی از لحاظ عددی مساوی ۱۶ دارد و بعد اشیای سه بعدی‌ای را رسم کرد که دارای مجموع یالها، مساحت سطح، و حجم جمیعاً از لحاظ عددی مساوی، بودند.

با بازگشت به صفحه و تعمیم مربع به مستطیل (مثلاً به ابعاد $m \times n$)، درمی‌یابیم که $2m+2n=mn$، شرط محیط و مساحت از لحاظ عددی مساوی، را می‌توان به صورت

$$mn-2m=2n$$

که به

$$m=\frac{2n}{n-2}$$

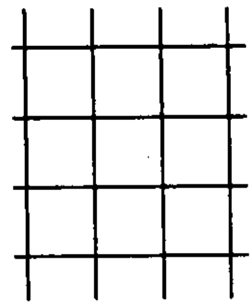
تحویل می‌شود نوشت. در این مورد می‌توانیم، به ازای هر عدد حقیقی بزرگتر از ۲، دقیقاً یک زوج مناسب (m,n) به دست آوریم. بنا به تقارن، هر عدد حقیقی m بزرگتر از ۲ نیز به عنوان بُعدی از مستطیل منحصر به فردی دارای محیط و مساحت از لحاظ عددی برابر، رخ می‌دهد.

مسأله در صورتی که بخواهیم m و n، هر دو، اعدادی صحیح و مثبت باشند، جالبتر می‌شود. اما این پدیده چه وقت رخ می‌دهد؟

1. Exhibiting Connections between Algebra and Geometry
2. David R. Laing and Arthur T. White
3. Bates
4. Markowitz
5. Shahin

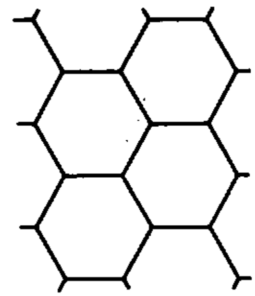
صفحه چه وقت می‌تواند توسط چند ضلعیهای منتظم همنهشت صفحه‌بندی شود؟

در این مرحله موضوع اصلی بحث‌مان را تغییر می‌دهیم. این واقعیت بسیار معروف است که صفحه‌بندی صفحه با n ضلعیهای منتظم همنهشت p_n ($n \geq ۳$ ، n عددی صحیح) دقیقاً هنگامی صورت می‌پذیرد که n مساوی ۳ ، ۴ ، یا ۶ باشد. عمل صفحه‌بندی با استفاده از مثلثهای متساوی‌الاضلاع، مربعها، و شش ضلعیهای منتظم می‌تواند به سادگی انجام شود: صفحه‌بندیهای با مربع و شش‌ضلعی منتظم را به ترتیب در شکلهای ۱a و ۱b مشخص کرده‌ایم. در شکل ۱c نشان داده‌ایم که یک شش ضلعی منتظم می‌تواند به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم شود. اگر این جریان در مورد هر شش ضلعی واقع در شکل ۱b انجام شود، صفحه‌بندی‌ای با استفاده از مثلثهای متساوی‌الاضلاع به دست می‌آوریم.



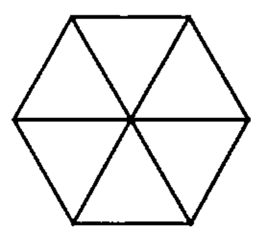
(a)

صفحه‌بندی صفحه با مربع



(b)

صفحه‌بندی صفحه با شش ضلعی



(c)

شش ضلّعی منتظم به مثلثهای متساوی‌الاضلاعی تقسیم شده است

شکل ۱. سه جزء این شکل سه صفحه‌بندی ممکن صفحه را با چند ضلعیهای منتظم همنهشت مشخص می‌کند.

بعد باید جمیع مقادیر متفاوت از ۳، ۴ و ۶ عدد n را کنار بگذاریم. یکی از اثباتهای این موضوع به آسانی، با دانستن این که هر زاویهٔ p_n به اندازهٔ

$$\theta(n) = \left(\frac{n-۲}{n}\right) ۱۸۰$$

است، انجام می‌گیرد. این حقیقت با افزودن $(n - ۳)$ قطر از رأس ثابتی از p_n، برای تقسیم p_n به $(n-۲)$ مثلث، اثبات می‌شود؛ در این صورت

$$n\theta(n) = (n - ۲)\ ۱۸۰$$

در هر رأس یک صفحه‌بندی، باید تعداد درستی از p_n های یکسان بدون فاصله داشتن یا برخورد کردن، پهلوی هم قرار گیرند؛ به این ترتیب باید $\theta(n)$ عدد ۳۶۰ را به طور صحیح، مثلاً، m بار، بشمرد. به عبارت دیگر، $\theta(n) = \frac{۳۶۰}{m}$، بنابراین

$$n\left(\frac{۳۶۰}{m}\right) = (n - ۲)\ ۱۸۰$$

و در این صورت می‌خواهیم که باز هم

$$m = \frac{۲n}{n - ۲}$$

صحیح باشد.

چه وقت $۲n(n-۲)$ صحیح است؟

با راههای گوناگونی می‌توان به این سؤال پاسخ داد. یکی از این راهها رسم به دقت تابع

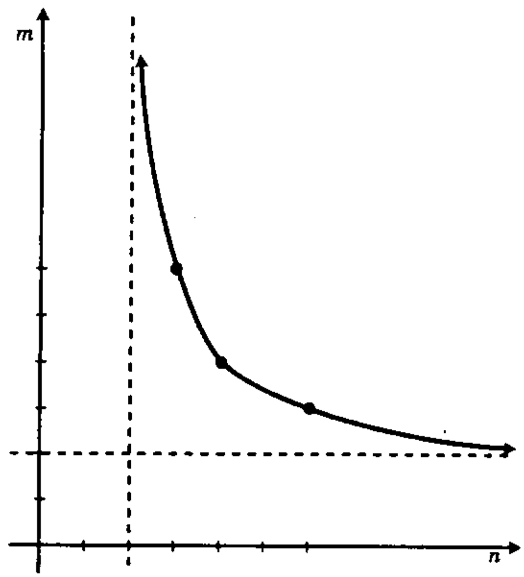
$$m = f(n) = \frac{۲n}{n - ۲}$$

چنان که در شکل ۲ نشان داده است، می‌باشد. با استفاده از این حقیقت که خطوط ۲ = m و ۲ = n مجانبهای این تابع‌اند، برای پیداکردن این که تنها نقاط با هر دو مختص صحیح واقع بر نمودار مورد بحث، نقاط داده با (۳،۶) ، (۴،۴) ، و (۶،۳) اند، تنها به آزمایش تعداد اندکی نقاط نیاز داریم.

راه دیگر با به کاربردن آلگوریتم تقسیم مربوط به چند جمله‌ایها، و رسیدن به

$$\frac{۲n}{n-۲} = ۲ + \frac{۴}{n-۲}$$

انجام می‌گیرد، که به این ترتیب (۲ − n) ۲n ، دقیقاً هنگامی که (۲ − n) عدد ۴ را بشمرد، عددی صحیح خواهد بود. سه مقسوم‌علیه ۱، ۲، و ۴ به ترتیب متناظر با n مساوی ۳، ۴، و ۶ خواهند بود.



شکل ۲. نمودار $m = ۲n/(n-۲)$ به ازاء $n > ۲$

سومین راه حل مان بینش ظریفی در مورد دو سؤال اول مان به دست می‌دهد. فرض می‌کنیم m و n اعداد صحیح و مثبتی باشند، و فرض می‌کنیم مستطیل (m × n) ی به طریق معمول به mn مربع واحد تقسیم شده باشد. در این صورت هر مربع گوشه‌ای دو واحد محیط در کل محیط، اما تنها یک واحد سطح در کل سطح، سهیم است، به این ترتیب یک واحد اضافه می‌کند (۱+). هر مربع محیطی دیگر یک واحد سهم در محیط و یک واحد سهم در سطح دارد و به این ترتیب در حال موازنه است (۰). هر مربع داخلی، سهمی در محیط کل ندارد اما همچنان یک واحد در سطح کل سهیم است، و بنابراین یک واحد کم می‌کند (۱ −). به این ترتیب، اگر لازم باشد که محیط و مساحت مستطیل مورد بحث از لحاظ عددی مساوی باشند، باید تعداد مربعات داخلی برای موازنه با چهار مربع گوشه‌ای دقیقاً برابر چهار باشد. در این صورت نتیجه می‌شود که مستطیل مرکب از مربعات داخلی باید ۴×۱، ۲×۲، یا ۱×۴ باشد، بنابراین (m,n) باید مساوی (۳,۶)، (۴,۴) ، یا (۶,۳) باشد. اولین این وضعیتها را در شکل ۳ تصویر کرده‌ایم.

+1	0	0	0	0	+1
0	−1	−1	−1	−1	0
+1	0	0	0	0	+1

شکل ۳. حالت (m , n) = (۳ , ۶)

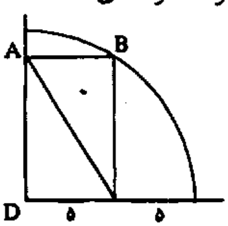
تفریح اندیشه ۳

اندازه قطر را حدس بزنید

(از: Mathematical Puzzles and Diversions. Martin Gardner)

مستطیلی چنانکه در شکل زیر نشان داده شده در ربع دایره‌ای محاط است. آیا می‌توانید با استفاده از اندازه‌های داده شده طول قطر AC را حساب کنید؟

مدت: یک دقیقه!



جواب در صفحهٔ ۹۶

طرح و حلّ مسائل اساسی ریاضی (۱)

به روشهای مقدماتی

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

الف: درمورد هر مجموعهٔ متناهی S، فرض می‌کنیم $n(S)$ (که «مرتبهٔ S» یا «عدد اصلی S» یا «اصلیت S» خوانده می‌شود) تعداد اعضای S را نمایش دهد. ثابت کنید اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ب: ثابت کنید اگر A ، B ، C مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ج: ثابت کنید اگر A_1 ، A_2 ، ... و A_m مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت:

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) &= n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_m) \\ &- n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \cdots - n(A_{m-1} \cap A_m) \\ &+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ &+ \cdots + (-1)^{m-1} n(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_m) \end{aligned}$$

سمت راستِ این فرمول به طریق زیر بنا شده است. ابتدا جمله‌های $n(A_i)$ را با $1 \le i \le m$ داریم. سپس جمله‌های $-n(A_i \cap A_j)$ را با $1 \le i < j \le m$ داریم. ($\binom{m}{2}$ جمله از چنین جمله‌هایی داریم، زیرا $\binom{m}{2}$ طریق انتخاب دو عدد صحیح i و j از اعداد ۱، ...، m موجوداست.) بعدجمله‌های $n(A_i \cap A_j \cap A_k)$ را با $1 \le i < j < k \le m$ داریم ($\binom{m}{3}$ جمله‌ازاین‌جمله‌هاداریم). سپس جمله‌های $-n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l)$ با $1 \le i < j < k < l \le m$ به میان می‌آیند. به‌همین طریق ادامه‌می‌دهیم تا عبارتمان، با رسیدن به جملهٔ $(-1)^{m-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)$ ختم شود. قسمت (الف) حالت $m=2$ و قسمت (ب) حالت $m=3$ می‌باشد. این فرمول اغلب به **اصل جمع و منع**[1] موسوم است.

حل الف: عبارت $n(A) + n(B)$ تعداد اعضای واقع در A یا B را مشخص می‌کند، امّا اعضای $(A \cap B)$ را دوبار به حساب می‌آورد. بنابراین با تفریق $n(A \cap B)$ از آن، دقیقاً تعداد اعضای واقع در $(A \cup B)$ را به دست می‌آوریم.

حل ب: عضوی مانند e را، که تنها در یکی از سه مجموعه، مثلاً A، وجود دارد، درنظر می‌گیریم. در این صورت e در عبارتِ

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad (1)$$

دقیقاً یک بار، یعنی درجملهٔ $n(A)$ به حساب آمده است. بعد عضوی

1. Principle of Inclusion and Exclusion

چون f را که دقیقاً در دو مجموعه از مجموعه‌ها، مثلاً A و B است، در نظر می‌گیریم. دراین صورت f در جملات $n(A)$ و $n(B)$ به طور مثبت، و در جملهٔ $-n(A\cap B)$ به‌طور منفی به شمارآمده است. در نتیجه به‌طور خالص ۱ = ۱ − ۱ + ۱ بار درعبارت (۱) به حساب آمده است. سرانجام فرض می‌کنیم g عضوی درهر سه مجموعهٔ A ، B و C باشد. دراین‌صورت g توسط هرجملهٔ (۱) به حساب آمده، و بنابراین به طورخالص ۱ = ۱ + ۱ − ۱ − ۱ − ۱ + ۱ + ۱ بار محسوب شده‌است. تحلیل فوق نشان‌می‌دهد که‌عبارت (۱) هرعضو $A\cup B\cup C$ را یک بار به حساب می‌آورد. از طرف دیگر اعضای غیرواقع در $A\cup B\cup C$ در هیچ یک از جملات آن به حساب نیامده‌اند، و بنابراین (۱) مساوی $n(A\cup B\cup C)$ است.

حل ج: در مورد حالت کلّی می‌توان با همان استدلالی که در قسمت (ب) به کار رفته عمل کرد. دراین‌صورت باید نشان‌دهیم که درعبارت:

$$n(A_1)+n(A_2)+\dots+n(A_m)-n(A_1\cap A_2)-n(A_1\cap A_3)-\dots-n(A_{m-1}\cap A_m)+n(A_1\cap A_2\cap A_3)+\dots+(-1)^{m-1}n(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_m) \qquad (2)$$

هر عضو $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m$ باضریب خالص ۱ به‌حساب آمده است. توجه‌داشته باشید که اعضاء غیر واقع در $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m$ به هیچ وجه توسط (۲) به حساب نیامده‌اند. فرض می‌کنیم عضوی چون e دقیقاً در $h\geq 1$ مجموعه از مجموعه‌های A_1، ...، A_m است. برای صراحت کار، فرض می‌کنیم این عضو در A_1، ...، A_h است، اما در A_{h+1}، ...، A_m نیست. در این صورت e در هر یک از h جملهٔ $n(A_1)$، ...، $n(A_h)$ از (۲) به حساب می‌آید و در $\binom{h}{2}$ جملهٔ $-n(A_i\cap A_j)$ به طور منفی محسوب می‌شود (یعنی، جملاتی که در آنها $1\leq i<j\leq h$ برقرار است. $\binom{h}{2}$ جمله از چنین جملاتی موجوداند زیرا $\binom{h}{2}$ طریق انتخاب اعدا صحیح i و j از میان اعداد ۱، ...، h وجود دارند). به همین ترتیب e متوسط $\binom{h}{3}$ جملهٔ $n(A_i\cap A_j\cap A_k)$ به حساب می‌آید، و همین طور الی آخر. بنابراین تعداد کلّ دفعاتی که e به‌حساب می‌آید عبارت است از:

$$\binom{h}{1}-\binom{h}{2}+\binom{h}{3}-\dots+(-1)^{h-1}\binom{h}{h}$$

باید نشان دهیم که این عبارت مساوی ۱ است. برای ملاحظهٔ این موضوع از قضیهٔ دو جمله‌ای

$$(a+b)^h=\binom{h}{0}a^h+\binom{h}{1}a^{h-1}b+\binom{h}{2}a^{h-2}b^2+\dots+\binom{h}{h}b^h$$

استفاده می‌کنیم. قسمت سمت چپ این رابطه، با قراردادن $a=1$ و $b=-1$ از بین می‌رود، بنابراین خواهیم داشت:

$$0=\binom{h}{0}-\binom{h}{1}+\binom{h}{2}-\dots+(-1)^h\binom{h}{h}$$

باانتقال همهٔ جملات، غیر از $\binom{h}{0}$، به سمت چپ رابطه، و استفاده از این حقیقت که $\binom{h}{0}=1$ ملاحظه می‌کنیم که:

$$\binom{h}{1}-\binom{h}{2}+\binom{h}{3}-\dots+(-1)^h\binom{h}{h}=1$$

که اثبات را کامل می‌کند.

ادب و ریاضی

تئوری مقدماتی اعداد باید یکی از بهترین موضوعها برای تعلیم اولیهٔ ریاضیات باشد. چندان اطلاع قبلی نمی‌خواهد؛ موضوعش ملموس و مأنوس است؛ طریقه‌های استدلال که به کار می‌گیرد، ساده، کلی، و تعدادشان کم است؛ و از لحاظ تحریک کنجکاوی طبیعی آدمی در علوم ریاضی مانند ندارد. یک ماه تعلیم فهیمانه در تئوری اعداد دوبار آموزنده‌تر، دو بار مفیدتر، و حداقل ده بار سرگرم کننده‌تر از همان مدت تعلیم «حسابان برای مهندسین» می‌باشد.

هاردی

دکتر غلامحسین مصاحب

تئوری مقدماتی اعداد

معرفی کتابهای ریاضی

ورزیدگی در ریاضیات

مانیس کاروش

ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی، ناشر: انتشارات فاطمی

صد و چهل مسألهٔ کتاب که مسأله‌هایی ساده از هر نوع، مسأله‌هایی با زمینهٔ هندسی، مسأله‌هایی با زمینهٔ جبری، مسأله‌های فکری (استنتاجی)، و مسأله‌های گوناگون را تشکیل می‌دهند با مسأله‌هایی که معمولاً دانش‌آموزان در کلاس درس با آنها سروکار دارند، متفاوت، و چنان طرح شده‌اند که رغبت‌انگیز باشند و دانش‌آموز را به تفکر وادار کنند.

قسمت دوم کتاب به حل مسأله‌ها اختصاص دارد و در آن سعی بر این بوده که در مورد هر مسأله، در صورت امکان، بیش از یک راه حل مطرح شود، چه مطابق عقیدهٔ مؤلف دانش‌آموزان کلاسهای پایینتر بیشتر روش آزمون و خطا را (که پایهٔ مفیدی در درک عمیق مفهومهای ریاضی را فراهم می‌کند) به کار می‌برند، در حالی که دانش‌آموزان کلاسهای بالاتر می‌توانند از تحلیلهای پیچیده‌تر در حل مسأله‌ها استفاده کنند.

قسمت سوم کتاب پیوستهاست که در آن بعضی از قضایای مشهور هندسه از قبیل قضیهٔ سِوا، قضیهٔ منلائوس، مجموعه‌های همساز نقطه‌ها، نقطه‌های واقع بر یک دایره، و قضیهٔ بطلمیوس آمده است.

کتاب به عنوان یک کتاب جنب درسی می‌تواند کمک هر دبیر و قابل استفادهٔ هر دانش‌آموز دبیرستانی باشد.

نظریهٔ اعداد

ت. ه. جکسن

ترجمهٔ اکبر حسنی، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی

نظریهٔ اعداد با هندسه در این افتخار سهیم است که هر دو قدیمیترین قسمت ریاضیاتند. از زمانهای بسیار قدیم تا حدود سیصدسال پیش، اهل علم ویژگیهای عرفانی و جادویی برای اعداد قایل بودند، اما امروزه به ویژگیهای اساسیتر آنها که از مفاهیم عادی جمع و ضرب ناشی می‌شوند علاقه‌مندند. اولین پیشرفتهای چشمگیر درنظریهٔ اعداد راپس‌از یونانیان درنوشته‌های فرما (۱۶۶۵ ـ ۱۶۰۱) می‌توان یافت. پس از او ریاضیدانهای مشهوری نظیر اویلر، لاگرانژ، گاوس، هیلبرت، و هاردی روشهای جدید و توانایی ارائه دادند و آن را به راه تکامل کشاندند و هنوز هم این تکامل ادامه دارد.

هدف کتاب معرفی مقدماتی مفاهیم و قضایای نظریهٔ اعداد است و دراین مسیر به مباحث صرفاً کلاسیک می‌پردازد.

فصل اول کتاب در مفاهیم اساسی است و فصل دوم آن در همنهشتیها و معادلات و فصل سوم آن در همنهشتیهای غیرخطی و فصل چهارم آن در مجموعهای رشته‌های اعداد صحیح. پیوستی هم دارد که در آن به جوابهای تمرینات پرداخته است.

کتاب همان گونه که در مقدمهٔ آن آمده برای مطالعهٔ انفرادی دانش‌آموزان و دانشجویان مبتدی مناسب است.

ریاضیات مقدماتی

دوروفیف، پوتاپوف، روزوف

ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور، ناشر: انتشارات مولوی

به طور سنتی، به ریاضیات پیش از نیوتون و لایب‌نیتس، یعنی پیش از کشف محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی، وقتی که ریاضیات با کمیتهای ثابت سروکار داشت، «ریاضیات مقدماتی» می‌گویند که شامل حساب، جبر و هندسهٔ اقلیدسی (و برخی از مقدمات هندسهٔ تحلیلی) است. ولی همان‌طور که مؤلفان کتاب، به درستی یادآوری کرده‌اند «دورهٔ ریاضیات مقدماتی، اساس تمام معرفتهای ریاضی است و بدون بهرهٔ کافی از این دورهٔ زیربنایی، مسألهٔ مهارت یافتن در قسمتهای عالیتراین موضوع، نیز به‌کاربردن ریاضیات در علوم عملی و تکنیکی، به دست نمی‌آید.»

کتاب، بسیار هوشمندانه تنظیم شده و با آغاز از ساده‌ترین موضوعها، خود را به مسأله‌های دشوار و کلیدی رسانده است. به‌خصوص بخشهای مربوط به عددهای مختلط، لگاریتم و نابرابریها، برای دانش‌آموزان ما بسیار سودمند است زیرا دقیقتر و مفصلتر از کتابهای درسی ما، به آنها پرداخته است.

کتاب «ریاضیات مقدماتی»، ضمن حل و ارائهٔ مسأله‌های فراوان و توضیح روشهای حل آنها، بیش از همه روی درک مفهومهای اصلی ریاضیات و قانع کردن خواننده به درستی استنتاجها تکیه کرده است و از آن جا که به خاطر پیروی از «برنامه» ناچار به پاره پاره‌کردن بخشهای مختلف نشده است، به صورت کتابی منظم، منسجم و آموزنده درآمده است که می‌تواند برای هر دانش‌آموز و هر دبیری مددکار باشد.

ترجمه و چاپ کتاب پاکیزه است و به ندرت می‌توان به اشتباه چاپی در آن برخورد کرد. توفیق مترجم و ناشر را، وقتی که کارچاپ کتاب (و به خصوص کتابهای سالم علمی) روز به روز دشوارتر می‌شود، خواهانیم و امیدواریم، همان طور که وعده داده‌اند، شاهد انتشار جلد دوم کتاب باشیم.

نابرابریهای هندسی

نیکولاس د. کازارینوف

ترجمهٔ محمد حسن بیژن‌زاده، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی

ناشر چنان که در مقدمهٔ کتاب متذکر شده کتاب مورد بحث را، که یکی از کتابهای متعددی است که به چاپ رسانیده یا در کار نشر آن است، برای ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش دانشگاهی مفید دانسته است.

به قول مؤلف کتاب هنوز هم در برنامهٔ درسی دبیرستانهای امروزی مبحث نابرابریها جدی گرفته نمی‌شود. مع هذا همهٔ ریاضیدانان می‌دانند که نابرابریها در تمام شاخه‌های ریاضیات اهمیت دارند، حتی گاهی از برابریها هم مهمترند.

اما نابرابریهای هندسی بدین علت که احکام آنها را به آسانی می‌توان فهمید جذابیت خاصی دارند؛ در عین حال مقدمه‌ای بسیار خوب برای آشنایی با روح ریاضیات جدید و اندیشهٔ خلاق ریاضی هستند.

درک نابرابریهای کتاب برای دانش‌آموزان دبیرستان به آسانی ممکن است، و غیر از مطالب معمول جبر و هندسه و مثلثات به ذهنی روشن نیازمند است.

کتاب چهارفصل دارد که به ترتیب عبارتند از: میانگینهای حسابی و هندسی، قضیه‌های برابر محیطی، اصل بازتاب، و راهنمایی و حل مسائل.

کتاب می‌تواند به عنوان مأخذی پیش دانشگاهی به‌کار دانش‌آموز علاقه‌مند بیاید و دانش و بینش او را در زمینهٔ نابرابریهای هندسی افزایش دهد.

همه چیز دربارهٔ سه جمله‌ای درجه دوم

تألیف: پرویز شهریاری، ناشر: انتشارات تهران

کتاب همان طور که از نامش پیداست به سه جمله‌ای درجه دوم، که بنا به عقیدهٔ مؤلف محترم آن، در مرکز جبر مقدماتی قرار دارد، می‌پردازد و در آن گرچه از دستورهای عادی و آشنا، یاد شده تکیه بر جنبه‌هایی است که برای خواننده تازگی دارد.

ریاضیات دبیرستانی همان گونه که در مقدمهٔ کتاب هم به آن اشاره شده سرچشمهٔ خروشانی است برای حل بسیاری از مسأله‌ها، و برخلاف آنکه گاهی تصور می‌شود، این سر چشمه هنوز هم از خروش نیفتاده و خشک نشده است. ریاضیات دبیرستانی، می‌تواند برای دانش‌آموزانی که می‌خواهند ذهنی خلاق داشته باشند، صحنه‌ای بدیع برای کارآموزی باشد و کتاب متعهد به تصویر آوردن چنین صحنه‌هایی است.

در کتاب علاوه بر این که اعداد مختلط مطرح شده و فورمول «دموآور» آمده، از یادداشتهای تاریخی نیز غفلت نشده است. فصلی از کتاب به هندسه و هندسهٔ تحلیلی اختصاص یافته و دو ضمیمهٔ آن به محاسبهٔ تقریبی ریشه‌ها و بررسی سه جمله‌ای درجه دوم در حوزهٔ عددهای مختلط پرداخته است.

کتاب علاوه بر مثالهای متعدد ۱۵۳ مسأله دارد که در پایان آن به تمامی حل شده‌اند، و علاوه بر آنکه راهنمایی برای دبیر ریاضی در برخورد با مسائل درسی است مشاوری امین برای دانش‌آموز علاقه‌مند است.

ماشین امیل پست

ولادیمیر آندره یه ویچ اوسپنسکی

ترجمهٔ پرویز شهریاری، ناشر: انتشارات تهران

بیش از پنجاه سال پیش، امیل پست[1]، ریاضیدان نام‌آور آمریکایی، مقاله‌ای زیر عنوان «روندهای ترکیبی متناهی، تنظیم ۱»[2] در «مجلهٔ منطق نمادی»[3] چاپ کرد. در این مقاله برای نخستین بار برخورد دقیقی با مفهوم «آلگوریتم» شده است، مفهومی که از اساسی‌ترین و مرکزی‌ترین مفهومها در منطق ریاضی و دانش انفورماتیک است و نقشی بسیار مهم در «خود کارکردن» و، بنابراین، در تمامی زندگی امروزی بشر دارد.

در این کتاب کوچک، روشن کردن مفهوم آلگوریتم، به کمک طرح پُست، مورد نظر بوده است. کتاب همان طور که در مقدمهٔ آن آمده برای دانش‌آموزان تهیه شده است، و در سه فصل نخست آن، تقریباً هیچ مطلبی وجود ندارد که یادگیری آن، مستلزم آگاهیهای جدی از ریاضیات باشد، به این ترتیب حتی نوجوانان هم می‌توانند دو فصل اول کتاب را به راحتی ملاحظه کنند.

کتاب با این که کوچک است غنی است و خواننده را به افقهای تازه رهنمون می‌شود.

1. Emil L. Post
2. Finite Combinatory Processes Formulation 1
3. The Journal of Symbolic Logic

ادب ریاضی

بکوش تا در صناعت خویش کامل شوی و متذوّق* مباش، چه متذوّق را سیری نیست.

از تعلیمات علی‌ابن احمد نسوی به شاگردانش

نسوی نامه، ترجمهٔ ابوالقاسم قربانی

* کسی که در علمی متخصص نیست و از هر چمن گلی بر می‌چیند.

مسائل مسابقه‌ای

سید حسین سید موسوی

۱) ثابت‌کنید از میان هر ۵ عدد متوالی عددی وجود دارد که نسبت‌به چهار عدد دیگر اول است.

۲) ثابت‌کنید وارون هرماتریس بالا مثلثی (در صورت وجود) ماتریسی‌بالا مثلثی است.

مسئله‌ای از المپیادهای ریاضی

۱۹۷۲/۳– فرض می‌کنیم m و n اعدادصحیح‌نامنفی‌دلخواه باشند ، ثابت‌کنیدکه :

$$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$$

یك عدد صحیح است ($0! = 1$) .

کریم و کرام و کرم، نه لزوماً به‌همین ترتیب، حسابدار، فروشندهٔ لوازم خانگی، و فروشندهٔ دوره گرد شرکتی هستند.

دوره گرد، که عزب است، کوتاهترین آن سه‌است.

کریم که داماد کرام است، از فروشندهٔ لوازم خانگی بلندتراست.

شغل هریک چیست؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

مسائل برای حل

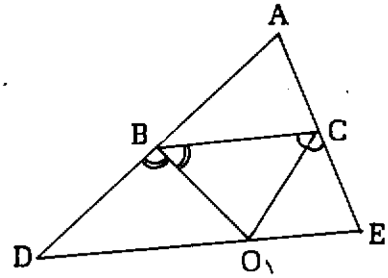
(مورد استفادهٔ دانش آموزان سالهای اول تا چهارم دبیرستان)

● هندسه: محمد هاشم رستمی ● ریاضیات جدید: حمید رضا امیری
● جبر و مثلثات: محمد رضا هاشمی و محمد هاشم رستمی

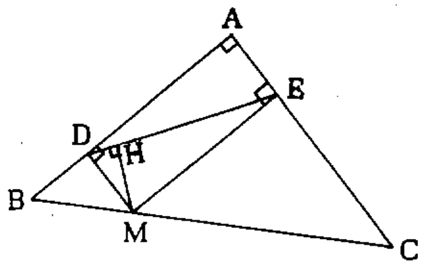
مسائل ریاضیات سال اول

۱ـ نیمسازهای زوایای خارجی B و C ازمثلث ABC یکدیگر را در نقطهٔ $O_۱$ قطع می‌نمایند. از نقطهٔ $O_۱$ خطی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم تا امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط D و E قطع کند. ثابت کنید:

$$DE=BD+CE$$



۲ـ در مثلث قائم الزاویه و متساوی‌الساقین ABC از نقطهٔ M واقع بر وتر BC عمودهای MD و ME را بر دوساق مثلث فرود می‌آوریم و از نقطهٔ M عمود MH را بر DE رسم می‌کنیم. ثابت کنید وقتی نقطهٔ M روی وتر مثلث تغییر کند، عمود MH همواره از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



۳ـ اگر ارزش گزارهٔ

$$(p \Longrightarrow \sim q) \Longleftrightarrow (r \Longleftrightarrow s)$$

نادرست و q نیز نادرست باشد ارزش گزارهٔ

$$(r \Longrightarrow \sim s) \Longleftrightarrow (r \wedge s)$$

را تعیین کنید.

۴ـ عمل تفاضل متقارن بین دو مجموعهٔ A و B را با نماد «Δ» نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \,\Delta\, B=(A-B)\cup(B-A)$$

اولاً ثابت کنید این عمل خاصیت جا به‌جایی داشته و ثانیاً درستی تساویهای زیر را بررسی کنید.

الف) $A\,\Delta\, M=A'$ (M مجموعه مرجع است)

ب) $A\,\Delta\, A'=M$

ج) $A\,\Delta\, A=\varnothing$

د) $(A\,\Delta\, B)\cap B'=A-B$

(راهنمایی: از رابطهٔ

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

استفاده کنید.)

۵ـ حاصل عبارت:

$$\frac{\sqrt[5]{8}+1}{\sqrt[5]{16}-1}\times\frac{\sqrt[5]{4}+1}{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{4}+1}\times\frac{\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1}{\sqrt[5]{2}+1}$$

را به دست آورید.

۶ـ دستگاه :

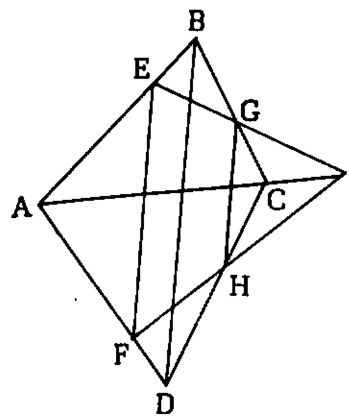
$$\begin{cases} m^2x - y = 2 \\ 2y + mx = 1 \end{cases}$$

اولاً: به ازای چه مقادیری از m جواب ندارد .

ثانیاً: دستگاه را به ازای $m = 1$ حل کنید.

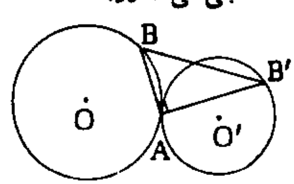
ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ـ چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. خطی موازی قطر



BD ، اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط E و F و خط دیگری موازی قطر BD ، اضلاع BC و CD را به ترتیب در نقاط G و H قطع می‌کند. ثابت کنید که خطوط EG و AC و FH متقارب‌اند.

۲ـ دو دایرهٔ مماس در نقطهٔ A مفروضند. دو وتر AB و AB' را دردو دایره چنان رسم می‌کنیم که $B\hat{A}B' = 90^\circ$ باشد. ثابت کنید که وقتی زاویهٔ BAB' حول رأس A دوران کند خط BB' ازنقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

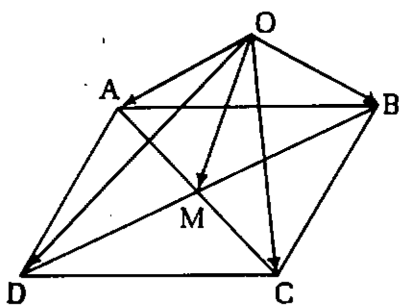


۳ـ هرگاه مجموعه‌های A و B هردو زیر مجموعهٔ M باشند ثابت کنید:

$$(A\times B)' = (A\times B')\cup(A'\times B)\cup(A'\times B')$$

۴ـ ازطریق برداری ثابت کنید در هرمتوازی الاضلاع مانند $ABCD$ و به ازای هرنقطه درصفحهٔ آن مانند O داریم:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OM}$$



۵ـ اگر G یك گروه و اگر برای هر $x,y\in G$ داشته باشیم $(xy)^2 = x^2y^2$ ثابت کنید G یك گروه آبلی است.

۶ـ با شرط $A+B+C=0$ ثابت کنید:

$$A^3+B^3+C^3 = 3ABC$$

و ازآنجا معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$(x^2+3x+2)^3+(x^2-3x+1)^3 = (2x^2+3)^3$$

۷ـ ثابت کنید اعداد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ نمی‌توانند جملاتی ازیك تصاعد حسابی باشند.

۸ـ هرگاه داشته باشیم :

$$\begin{cases} x = r\,\sin\alpha\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\alpha\,\sin\theta \\ z = r\,\cos\alpha \end{cases}$$

رابطه‌ای مستقل از α و θ بیابید.

۹ـ ثابت کنید :

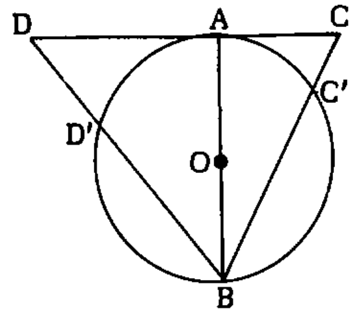
$$1)\qquad \frac{\sec^2\theta + 2\,tg\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2} = \sec^2\theta$$

۲) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin(\beta-\theta)}{\cos\beta\cos\theta}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha}=0$

۳) $\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta-\sin\theta+1}=tg\,\frac{\theta}{2}$

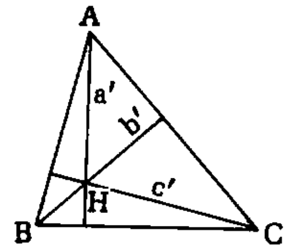
مسائل ریاضیات سوم ریاضی

۱ـ دایرهٔ به قطر AB مفروض است. روی خط مماس درنقطهٔ A براین دایره، دونقطهٔ C و D را درنظر گرفته، نقاط تقاطع CB و DB با دایره رابه ترتیب C' و D' می‌نامیم. ثابت کنیدکه چهارضلعی $DCC'D'$ محاطی است.



۲ـ در مثلث ABC فاصلهٔ نقطه برخورد ارتفاعات مثلث از رئوس A و B و C رابه ترتیب a' و b' و c' وشعاع دایرهٔ محیطی مثلث را R می‌نامیم. ثابت کنید رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{a'}{bc}+\frac{b'}{ac}+\frac{c'}{ab}=\frac{1}{R}$$



۳ـ هرگاه V یک فضای برداری باشد دراین‌صورت U را یک زیر فضای نابدیهی V می‌نامیم. اگر،

$$U\neq\{0\} \quad \text{و} \quad U\neq V$$

با توجه به تعریف قبل ثابت کنید فضای برداری IR روی خودش زیر فضای نابدیهی ندارد.

۴ـ درجعبهٔ A ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ودرجعبهٔ B ارقام ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ وجود دارند.

الف) تعداد اعداد ۵ رقمی که ۲ رقم آنها ازجعبه A و ۳ رقم آنها ازجعبه B انتخاب‌شده‌باشد را حساب کنید.

ب) چه تعدادی از این اعداد ۵ رقمی شامل رقم ۷ است؟

ج) چه تعداد از این اعداد ۵ رقمی با ۲ شروع و به ۵ ختم می‌شوند؟

۵ـ معین کنید از بین ۲۴ دانش‌آموز

الف) به چندصورت می‌توان تیمهای ۶نفره از بین آنها انتخاب کرد؟

ب) به چند صورت می‌توان ۴ تیم ۶ نفره از بین آنها انتخاب کرد؟

۶ـ ثابت کنید عبارت:

$$f(x)=x^{999}+x^{888}+\dots+x^{111}+1$$

بر عبارت:

$$g(x)=x^{9}+x^{8}+\dots+x+1$$

بخش‌پذیر است.

۷ـ به ازای چه مقادیری از $n\in N$ و $n<120$ بسط دو جمله‌ای $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^{2}}}\right)^{n}$ دارای جملات مستقل از x می‌باشد (N مجموعهٔ اعداد طبیعی است).

۸ـ حد زیررا محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{tg\left(\sin\left(\frac{1}{x^{2}+x+1}\right)\right)}{\sin\left(tg\left(\frac{1}{x^{2}+x+1}\right)\right)}$$

۹ ـ در صورتی که

$$a\sin\alpha\sin\beta+b\cos\alpha\cos\beta=0$$

باشد ثابت کنید که عبارت

$$A=\frac{1}{a\sin^2\alpha+b\cos^2\alpha}+\frac{1}{a\sin^2\beta+b\cos^2\beta}$$

به مقادیر α و β بستگی ندارد.

۱۰ـ درستی برابری زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sin 4\alpha}+\cot g\,4\alpha=\frac{1}{2}(\cot g\,\alpha-tg\,\alpha)$$

۱۱ـ معادله زیر را حل کنید:

$$\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin 5x=2\cos\frac{3x}{3}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}$$

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ معادلهٔ تصویر خط

$$D:\begin{cases}x=2t-1\\ y=t+2\\ z=-3t\end{cases}$$

روی صفحهٔ $P: x+2y+z-1=0$ را پیدا کنید.

۲ـ نقطه‌ای روی محور zها تعیین کنید که از دو نقطهٔ

$$A(2,-1,1)\ ,\ B(0,3,5)$$

به یک فاصله باشد.

۳ـ مطلوب است معادلهٔ یک بیضی که از نقطهٔ $M(1,4)$ می‌گذرد، محورهایش منطبق برمحورهای مختصات و خط به معادلهٔ $y+4x=10$ مماس بر آن باشد.

۴ـ ثابت کنید:

$$p\Leftrightarrow q\equiv(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$$

و با استفاده از این هم‌ارزی ثابت کنید:

$$\sim[(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)\equiv(\sim p\vee q)$$

$$\Rightarrow(\sim p\wedge q)$$

۵ـ در حلقهٔ یکدار R ثابت کنید اگر عضوی چون a مقسوم‌علیه صفر باشد، وارون‌پذیر نیست (آیا عکس مطلب بالا برقرار است؟)

۶ـ هرگاه p و q دو عدد اول متمایز باشند ثابت کنید:

$$p^{q-1}+q^{p-1}\overset{pq}{\equiv}1$$

۷ـ حدود زیر را محاسبه کنید (درصورتی که N مجموعه اعداد طبیعی باشد و داشته باشیم $n\in N$):

الف) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[2n]{x^{2n}+4nx^{2n-1}+m}+x\right)$$

ب) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin^n\left(tg^n\left(\sin\left(\frac{1}{x^4+x^2+5}\right)^n\right)\right)}{tg^n\left(\sin^n\left(tg\left(\frac{1}{x^3+x^2+1}\right)^n\right)\right)}$$

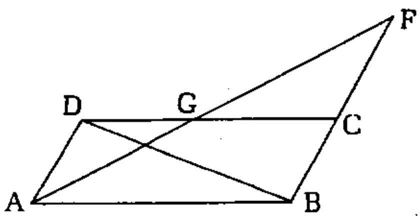
۸ـ در تابع

$$f(x)=\begin{cases}2x^3 & x\leqslant-1\\ Ax^2+B & x>-1\end{cases}$$

مقادیر A و B را چنان تعیین کنید که تابع در نقطهٔ $x_0=-1$ مشتق‌پذیر باشد.

مسائل ریاضیات دوم تجربی

۱ـ متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. از رأس A قاطعی رسم می‌کنیم که قطر BD را در نقطهٔ E و اضلاع BC

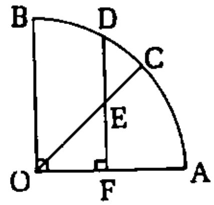


و CD را در نقاط F و G قطع کند. ثابت کنید که:

$$EA^2 = EF \cdot EG$$

۲ـ ربع دایرهٔ AOB و OC نیمساز زاویهٔ AOB مفروض‌اند. از نقطهٔ D واقع بر کمان $\widehat{AB}$ عمود DF را بر OA فرود می‌آوریم تا OC را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید که:

$$OA^2 = DF^2 + EF^2 \; .$$



۳ـ به ازای چه مقادیری از x تساوی زیر برقرار است:

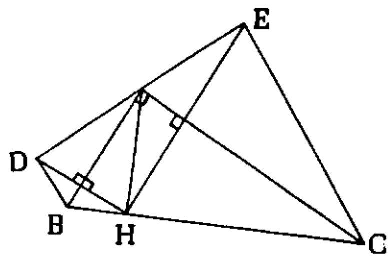
$$\log_2(x-1)+\log_2 x+\log_2(x+1)=3\log_2 x-1$$

۴ـ درصورتی که جملهٔ پنجم یك تصاعد حسابی برابر ۲۳ و مجموع ده جملهٔ اول آن برابر ۲۵۵ باشد جملهٔ بیستم آن را مشخص کنید.

۵ـ اگر $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}$ باشد، اندازهٔ $tg\frac{x}{4}$ را محاسبه کنید.

مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ـ در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر نقاط D و E قرینه‌های نقطهٔ H



نسبت به اضلاع AB و AC باشند ثابت کنید که:

۱) نقاط D و A و E بر یك استقامت‌اند.

۲) چهار ضلعی BDEC ذوزنقه است.

۲ـ خط $\Delta : 3x-2y+6=0$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اندازهٔ بردار مکان محل تلاقی میانه‌های مثلث OAB را به دست آورید.

۳ـ درصورتی که داشته باشیم:

$$g(x)=\sqrt{x} \quad \text{و} \quad fog(x)=\frac{1}{x-1}$$

مطلوب است دامنه و برد تابع $f(x)$ $(D_f \, , \, R_f)$.

۴ـ معادلهٔ خط قائم برمنحنی نمایش تابع:

$$y=(2x^3-1)^{71}\sin^3 2x^2+\sqrt[5]{x^3+1}$$

را در نقطه‌ای به طول $x=0$ به دست آورید.

۵ـ مقدار m را در تابع:

$$y=\begin{cases} mx^2-1 & x\geqslant -1 \\ \dfrac{3x+3}{x^3+1} & x<-1 \end{cases}$$

چنان تعیین کنید، که تابع در نقطه‌ای به طول $x=-1$ دارای حد باشد. سپس تعیین کنید که آیا تابع در این نقطه پیوسته است؟

۶ـ ثابت کنید:

$$Arctg\frac{1}{4}+Arctg\frac{1}{5}+Arctg\frac{1}{8}+Arctg\frac{2}{9}=\frac{\pi}{4}$$

۷ـ حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$Arc\sin\left(-\frac{1}{2}\right)+Arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)+Arctg\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$+Arc\,cotg\left(-\frac{1}{2}\right)$$

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ تابع هموگرافیك $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را چنان تعیین که

اولاً: مرکز تقارن منحنی $\omega\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right.$ باشد. ثانیاً: منحنی از نقطه تقاطع دوخط $y=4x-3$ و $y=2x-1$ عبور کند. پس از تعیین پارامترها معادلهٔ خط قائم و زاویهٔ بین منحنی فوق‌را در محل تلاقی با منحنی نمایش تابع $y=\frac{1}{x}$ به دست آورید.

۲ـ تابع درجهٔ سومی بنویسید که اولاً: مجموع وحاصل‌ضرب طولهای اکسترمم آن (ماکزیمم و می‌نیمم آن) به ترتیب برابر $\frac{-10}{3}$ و ۱ باشد. ثانیاً: عرضها نقطهٔ عطف آن برابر $\frac{250}{27}$ باشد. ثالثاً: محور عرضهارا در $y=5$ قطع کند.

۳ـ معادلهٔ یك هذلولی‌را بنویسید که مجانبهایش

$y=\pm\sqrt{2}x$

باشند و محور طولهارا در $x=-3$ قطع کند.

۴ـ حجم حادث ازدوران سطح محصور بین‌منحنی‌نمایش تابع $y=x^2-\sqrt[3]{x^2}$ و محور طولهارا حول محور xهـا محاسبه کنید.

۵ـ اگر $\frac{5\pi}{16}<\frac{x}{8}<\frac{3\pi}{8}$ باشد حاصل عبارت

$$\frac{\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|}{2}+\frac{\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|}{2}$$

را به دست آورید.

۶ـ هریك از معادلات زیر را حل کنید:

الف) $2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos 2x=\sin^2 x+\cos^2 x$

ب) $\sqrt{2}(\sin 2x-\cos 2x)+\sin 4x=\sqrt{2}$

ج) $Arc\sin(2x-1)+Arc\cos\frac{1}{2}=$

$2\,Arc\,tg(-1)$

۷ـ معادلهٔ $(m-1)tg x+m\,cotg\,x=2(m-3)$ مفروض است.

اولاً: حدود m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ فوق‌ریشه داشته باشد.

ثانیاً: مقدار m را به قسمی بیابید که

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

باشد.

ثالثاً: مقدار m راچنان‌تعیین‌کنید که $4tg\,2x=3$ باشد.

۸ـ نوع مثلثی‌را تعیین کنید که در آن رابطهٔ

$$\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$$

برقرار است.

۹ـ ثابت کنید اگر در مثلثی رابطهٔ

$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$

برقرار باشد یك زاویهٔ آن مثلث ۶۰° است.

حل مسائل مسابقه‌ای شمارهٔ ۲

۱ـ ابتدا طرفین معادله‌را در $x-1$ ضرب می‌کنیم.

$$(x-1)(x^n+x^{n-1}+\dots+1)=0$$

ریشه‌های معادله در معادلهٔ:

$$x^{n+1}-1=0 \Longrightarrow x^{n+1}=1$$

نیز صدق می‌کنند، بنابراین داریم:

$$x_1^{n+1}=1\ ,\ x_2^{n+1}=1\ ,\ \dots\ ,\ x_n^{n+1}=1$$

ازطرفی S را می‌توان چنین نوشت:

$$S=\sqrt[n]{\frac{x_1^{n+1}}{x_2^{n+1}}}+\sqrt[n]{\frac{x_2^{n+1}}{x_3^{n+1}}}+\dots+\sqrt[n]{\frac{x_{n-1}^{n+1}}{x_n^{n+1}}}$$

$$S=\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{(n-1)\ \text{مرتبه}}=n-1$$

$$\Longrightarrow \boxed{S=n-1}$$

و مقدار P چنین است:

$$P=1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n\times n!$$

$$P=1\times 1!+2\times 2!+\dots+(n+1-1)n!$$

$$(n+1-1)n!=(n+1)n!-n!=(n+1)!-n!$$

$$n\times n!=(n+1)!-n!$$

$$1\times 1!=2!-1!$$

$$2\times 2!=3!-2!$$

$$3\times 3!=4!-3!$$

$$\dots\dots\dots$$

$$n\times n!=(n+1)!-n!$$

$$(\text{ازجمع روابط})\ \therefore P=(n+1)!-1!=(n+1)!-1$$

$$\Longrightarrow \boxed{P=(n+1)!-1}$$

۲ـ حل معادلهٔ : $8^{\cos x}+\sqrt[n]{4}=8^{\sin x}$

$$2^{3\cos x}+2^{\frac{2}{n}}=2^{3\sin x} \Longrightarrow 2^{3\sin x}-2^{3\cos x}=2^{\frac{2}{n}}$$

$$\frac{2^{3\sin x}}{2^{\frac{2}{n}}}-\frac{2^{3\cos x}}{2^{\frac{2}{n}}}=1 \Longrightarrow$$

$$2^{3\sin x-2/n}-2^{3\cos x-2/n}=1$$

* اگر $2^x-2^y=1$ باشد یك جواب معادلـه چنین است: $x=1$ و $y=0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3\sin x-\dfrac{2}{n}=1 \\ 3\cos x-\dfrac{2}{n}=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x=\dfrac{n+2}{3n} \\ \cos x=\dfrac{2}{3n} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x=1):\ \left(\frac{n+2}{3n}\right)^2+\left(\frac{2}{3n}\right)^2=1$$

$$(n+2)^2+4=9n^2 \Longrightarrow$$

$$n^2+4n+4+4=9n^2$$

$$8n^2-4n-8=0 \Longrightarrow 2n^2-n-2=0 \Longrightarrow$$

$$\boxed{n=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}}$$

$$\cos x = \frac{۲}{۳n} = \frac{۲\times۴}{۳(۱\pm\sqrt{۱۷})} = \frac{۸(۱+\sqrt{۱۷})}{۳(۱-۱۷)} = \frac{۱\pm\sqrt{۱۷}}{-۳\times۲}$$

$$\cos x = \frac{-۱\pm\sqrt{۱۷}}{۶} \Longrightarrow |\cos x| < ۱ \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۶} = ۰/۵۲ \\ \cos x = \frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۶} = -۰/۸۵ \end{cases}$$

جوابهای معادله:

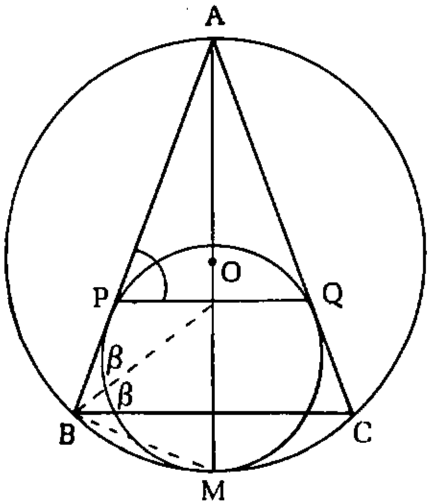
$$\begin{cases} x_۱ = ۵۸°/۶۳ \\ x_۲ = ۱۴۸°/۶۳ \end{cases}$$ جوابهای اختصاصی

$x_۱ = ۲k\pi \pm ۵۸°/۶۳$ (جوابهای عمومی)

$x_۲ = ۲k\pi \pm ۱۴۸°/۶۳$

حل مسألهٔ المپیاد شمارهٔ ۲

از آنجاکه $AB = AC$ است، شکل‌مان نسبت به قطر AM، که‌در آن M نقطهٔ تماس دودایره می‌باشد، متقارن‌است. AM زاویهٔ A، زاویهٔ PMQ و پاره‌خط PQ را،که موازی BC است و وسطش را به I نمایش می‌دهیم، نصف می‌کند. با



قرار دادن: $\angle APQ = ۲\beta$ ، $\angle ABC$ را نیز مساوی ۲β خواهیم داشت. از این گذشته:

$$\angle PMQ = \angle APQ = ۲\beta$$

است، زیرا اندازهٔ هردو نصف‌کمان PQ است. به این ترتیب داریم :

$$\angle PMI = \frac{۱}{۲}\angle PMQ = \beta$$

از آنجاکه $\angle ABM$ و $\angle MIP$ زوایایی قائمه‌اند ، $BMIP$ می‌تواند در دایره‌یی‌که در آن زوایای PBI وPMI روبه‌روی یک کمان قرار می‌گیرند ، محاط شود. در نتیجه نیمسازهای زوایای AوB از ΔABC در I متقاطع می‌شوند، وبنابراین I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ΔABC است.

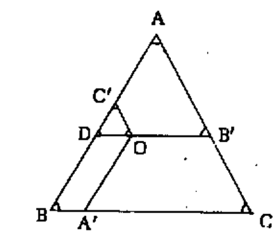
حل مسائل

حل مسائل برهان شمارهٔ ۲

حل مسائل هندسهٔ سال اول دبیرستان

۱ـ یکی از پاره‌خطهای OA'، OB' یا OC'، مثلاً OB' را امتداد می‌دهیم تا ضلع AB را در نقطهٔ D قطع کند. مثلث ODC' متساوی الاضلاع است:

$$(\hat{O}=\hat{D}=\hat{C}'=۶۰^\circ)$$



پس $OC'=DC'$ است. از طرفی چهار ضلعی $ODBA'$ متوازی‌الاضلاع و چهارضلعی $OC'AB'$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است لذا $OB'=AC'$ و $OA'=DB$ است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$OA'+OB'+OC'=DB+DC'+AC'=AB=a=cte$$

۲ـ از رأس A مماس AT را بر دایرهٔ محیطی مثلث رسم می‌کنیم داریم:

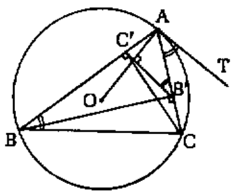
$$C\hat{A}T=C\hat{B}A=\frac{\widehat{AC}}{۲}$$

از طرفی چهارضلعی $BCB'C'$ محاطی است پس:

$$C\hat{B}A=A\hat{B}'C'$$

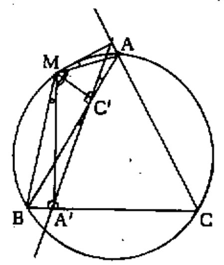
از آنجا خواهیم داشت $C\hat{A}T=A\hat{B}'C'$، در نتیجه

$$B'C' \parallel AT$$



وچون OA عمود بر AT می‌باشد پس بر موازیش یعنی $B'C'$ نیز عمود است.

۳ـ تصویر نقطهٔ M از دایرهٔ محیطی مثلث روی اضلاع BC و AC و AB یا امتدادآنهارا A' و B' و C' می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که سه‌نقطهٔ A' و B' و C' روی یك‌خط راست قرار دارند. از نقطهٔ M به‌نقاط A و B وصل می‌کنیم.



چهار ضلعیهای $MBA'C'$ و $MC'AB'$ و $MA'CB'$ و $MACB$ محاطی‌اند و داریم:

محاطی $MBA'C' \Rightarrow \hat{C}'_1=\hat{M}_1$ (۱)

محاطی $MC'AB' \Rightarrow \hat{C}'_2=\hat{M}_2$ (۲)

محاطی $MA'CB' \Rightarrow \hat{M}_2+\hat{M}_3+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ (۳)

محاطی $MACB \Rightarrow \hat{M}_1+\hat{M}_3+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ (۴)

از روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که:

$\hat{M}_1=\hat{M}_2$ (۵)

واز روابط (۱) و (۲) و (۵) نتیجه می‌گردد که

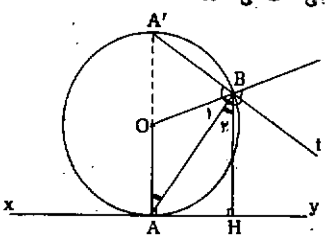
$$\hat{C}'_1=\hat{C}'_2$$

است که چون $AC'B$ خطی راست است، پس نقاط A' و B' و C' روی یك خط راست قرار دارند که خط سمسن[1] نظیر نقطهٔ M نامیده می‌شود.

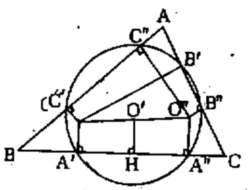
۴ـ از A به B وصل می‌کنیم. AB نیمساز زاویهٔ OBH است. زیرا $\hat{A}_1=\hat{B}_1$ و $\hat{A}_1=\hat{B}_2$ است پس $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ می‌باشد. از طرفی Bt نیمساز زاویهٔ مجاور و مکمل OBH می‌باشد، لذا Bt عمود بر AB، یعنی $A\hat{B}t=۹۰^\circ$ است. پس اگر نقطهٔ دیگر تقاطع Bt با دایره را A' بنامیم، زاویهٔ

$$A\hat{B}A'=۹۰^\circ$$

می‌باشد یعنی Bt از نقطه A' انتهای دیگر قطرمار بر نقطهٔ A که نقطهٔ ثابتی است می‌گذرد.



۵ـ از نقطهٔ O به نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ وصل می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع عمود مرسوم بر BC در A'' با OO' را نقطهٔ O'' می‌نامیم. چهار ضلعی $OA'A''O''$ ذوزنقه است ($OA' \parallel O''A''$). از نقطهٔ O' مرکز دایره، عمود $O'H$ را بر وتر $A'A''$ فرود می‌آوریم $O'H$ عمود منصف $A'A''$ است (قطر عمود بر وتر). لذا $O'H$ با قاعده‌های ذوزنقه



موازی است وچون H وسط $A'A''$ است، پس نقطهٔ O' وسط OO'' می‌باشد یعنی نقطهٔ O'' قرینهٔ نقطهٔ O نسبت به نقطهٔ O' مرکز دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ می‌باشد، یعنی نقطه‌ای است ثابت. پس عمودی که در نقطهٔ A'' بر ضلع BC اخراج می‌شود از نقطهٔ ثابت O'' می‌گذرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که عمودهای مرسوم از B'' و C'' بر اضلاع مثلث نیز از نقطهٔ O'' می‌گذرند. پس عمودهای مرسوم بر اضلاع مثلث در نقاط A'' و B'' و C'' متقارب‌اند.

1– Robert Simson (۱۶۸۷ – ۱۷۶۸)

جواب تشریحی تستها

۱-(۳) $\frac{\alpha+\beta}{2}=65^\circ \Longrightarrow \alpha+\beta=130^\circ$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=130^\circ\\ \alpha-\beta=50^\circ\end{cases} \Longrightarrow \alpha=90^\circ$$ زاویهٔ بزرگتر

۲-(۴) $8>5+2=7 \Longrightarrow \hat{A}>90^\circ$

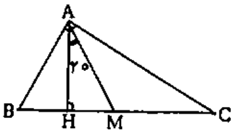
۳-(۳)

$$AM<\frac{AB+AC}{2} \Longrightarrow AM<\frac{12+8}{2}$$
$$\Longrightarrow AM<10$$

۴-(۴)، اندازهٔ زاویهٔ بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر در هر مثلث قائم‌الزاویه مساوی تفاضل دو زاویهٔ حادهٔ مثلث است.

$$\hat{A}=90^\circ \Longrightarrow H\hat{A}M=|\hat{B}-\hat{C}| \Longrightarrow$$
$$|\hat{B}-\hat{C}|=20^\circ \text{ و } \hat{B}+\hat{C}=90^\circ \Longrightarrow \hat{C}=35^\circ.$$

اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ کوچکتر



۵-(۳)

$$\gamma=\beta+180-\alpha=\beta+2\alpha+\beta-\alpha=\alpha+2\beta$$
$$\Longrightarrow \gamma=\alpha+2\beta$$

۶-(۴)

۷-(۳)

قائمه $(2n-4)$ = مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب

= مجموع زوایای داخلی ۷ ضلعی محدب $\Longrightarrow$

قائمه ۱۰ = قائمه $(2\times7-4)$

$3\times10=30$ قائمه

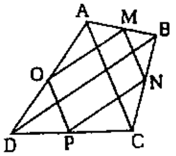
$(2n-4)$ قائمه = ۳۰ قائمه $\Longrightarrow$

$2n-4=30 \Longrightarrow n=17$ عدهٔ اضلاع n ضلعی مطلوب

تعداد قطرهای n ضلعی $=\frac{n(n-3)}{2} \Longrightarrow$

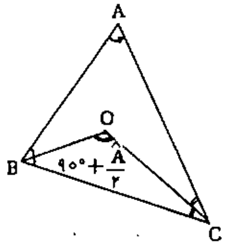
تعداد قطرهای ۱۷ ضلعی $=\frac{17(17-3)}{2}=119$

۸-(۴)، چهارضلعی حاصل از وصل کردن اوساط اضلاع متوالی یک چهارضلعی، همواره متوازی‌الاضلاعی است که اندازهٔ اضلاعش نصف اندازهٔ قطرهای چهارضلعی مفروض است و زوایای آن نیز مساوی زوایای بین دو قطر چهارضلعی مفروض است که به این متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع وارینیون چهارضلعی مفروض می‌گویند. پس اگر در چهارضلعی داده‌شده، اقطار متساوی و برهم عمود باشند، متوازی‌الاضلاع وارینیون[1] به مربع تبدیل می‌شود.

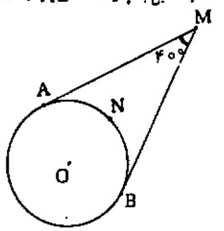


۹-(۳)، اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای درونی دو زاویه از یک مثلث برابر است با 90° به‌اضافه نصف زاویهٔ سوم مثلث. پس اگر نقطهٔ O محل تلاقی نیمسازهای درونی زوایای B و C باشند داریم:

$$B\hat{O}C=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$$
$$B\hat{O}C=90^\circ+\frac{70^\circ}{2}=125^\circ$$



۱۰-(۳)، خط d که به‌فاصلهٔ ۲cm از پاره‌خط AB واقع است کمان درخور زاویهٔ 60° مقابل به پاره‌خط AB را در دو نقطه قطع می‌کند.



۱۱-(۳)

$$\widehat{ANB}=\alpha \Longrightarrow 40^\circ=\frac{360-\alpha-\alpha}{2} \Longrightarrow$$
$$40^\circ=180^\circ-\alpha \Longrightarrow \alpha=140^\circ$$

۱۲-(۳)

$$\hat{A}+\hat{C}=180^\circ \Longrightarrow 3\alpha+10^\circ+\alpha-30^\circ=180^\circ$$
$$\Longrightarrow \alpha=50^\circ \Longrightarrow \hat{A}=160^\circ$$

حل مسائل هندسهٔ سال‌دوم ریاضی

۱- رابطهٔ $AE^2+BF^2=AB^2$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

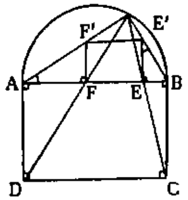
$$(AF+FE)^2+(BE+EF)^2=(AF+FE+EB)^2$$

که پس از ساده‌کردن خواهیم داشت:

$$EF^2=2AF\cdot EB$$

1- Pierre - Varignon(1654 - 1722)

(صورت دیگر مسئله). برای اثبات برقراری این رابطه، از نقاط E و F عمودهایی بر AB اخراج می‌کنیم تا به ترتیب NB و NA را در نقاط E′ و F′ قطع نمایند. از E′ به F′ وصل می‌کنیم EE′F′F مستطیلی متشابه با مستطیل ABCD است. (دو مستطیل مجانس یکدیگرند).



داریم:

$$\frac{NF'}{NA}=\frac{FF'}{AD}=\frac{NF}{ND}=\frac{FE}{DC}=\frac{NE}{NC}=\frac{EE'}{BC}=\frac{NE'}{NB}$$

پس $EE'=FF'$ و $\frac{EF}{FF'}=\frac{AB}{AD}=\frac{2R}{R\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ است. از طرفی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AFF' و BEE' متشابه می‌باشند $(\hat{A}=\hat{E}'$ و $\hat{F}=\hat{E}=90^\circ)$. لذا:

$$\frac{FF'}{EB}=\frac{AF}{EE'}$$

یا $FF'\cdot EE'=EB\cdot AF$ و یا $FF'^2=EB\cdot AF$ اما $FF'=\frac{EF}{\sqrt{2}}$ است، پس $\frac{EF^2}{2}=BE\cdot AF$ و یا

$$EF^2=2AF\cdot BE$$

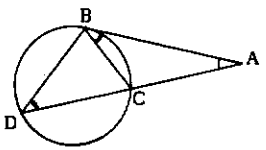
است لذا رابطهٔ فوق برقرار است.

۲- دو مثلث ABC و ABD متشابه می‌باشند زیرا زاویهٔ A در هر دو مثلث مشترک است و $\hat{B}=\hat{D}=\frac{\widehat{BC}}{2}$ است. پس داریم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AB}$$

از آنجا می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{BC}\quad(1)\quad,\quad\frac{AD}{AB}=\frac{BD}{BC}\quad(2)$$



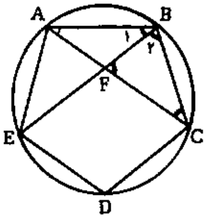
از ضرب روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{BD^2}{BC^2}$$

و از آنجا:

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC^2}{BD^2}$$

۳ـ پنج‌ضلعی منتظم ABCDE محاط در دایرهٔ O را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ تقاطع دو قطر AC و BE را F می‌نامیم. دو مثلث AFB و AEC متشابهند زیرا زاویهٔ $\hat{A}_1$ در هر دو مثلث مشترک و $\hat{B}_1=\hat{C}_1=36°$ است پس $\frac{AF}{AB}=\frac{AB}{AC}$ است و از آنجا $AB^2=AF\cdot AC$ می‌باشد اما $AB=FC$ است زیرا



$AB=BC$ و مثلث BFC که در آن زوایای

$\hat{B}_2=F=72°$

می‌باشند متساوی‌الساقین است پس خواهیم داشت:

$FC^2=AF\cdot AC$

و این رابطه نشان می‌دهد که نقطهٔ F قطر AC را به نسبت طلایی یا به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم نموده است. همچنین با توجه به اینکه

$AC=BE$ و $FC=FE$ و $AF=FB$

است $EF^2=BE\cdot BF$ خواهد بود یعنی نقطهٔ F قطر BE را نیز به نسبت طلایی تقسیم نموده‌است. به همین ترتیب برای قطرهای دیگر مطلب قابل اثبات است.

جواب تشریحی تستها

۱- (۲)

$$\frac{3a+2b}{2a+3b}=\frac{4}{5}\Longrightarrow 15a+10b=8a+12b$$

$$\Longrightarrow 7a=2b\Longrightarrow \frac{b}{a}=\frac{7}{2}$$

۲- (۳)

$$2BC=3DE\Longrightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{2}{3}=\frac{AD}{AB}\Longrightarrow$$

$$\frac{AB-AD}{AB}=\frac{3-2}{3}\Longrightarrow \frac{DB}{AB}=\frac{1}{3}$$

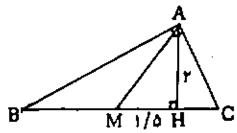
$$\Longrightarrow \frac{4}{AB}=\frac{1}{3}\Longrightarrow AB=12$$

۳- (۱)

۴- (۴)

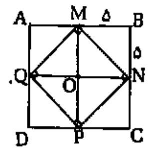
$$AM=\sqrt{4+2/25}=\sqrt{6/25}=2/5\Longrightarrow$$

$$BC=2AM=5$$



۵- (۲)

$$AB=10\Longrightarrow MB=BN=5\Longrightarrow MN=5\sqrt{2}$$

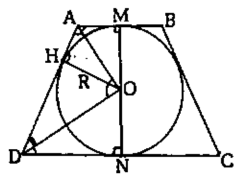


۶- (۴)

$AH=AM=\frac{AB}{2}$ و $DH=DN=\frac{CD}{2}$

$OH=R$ و $A\hat{O}D=90°\Longrightarrow AH\cdot HD=OH^2$

$$\Longrightarrow \frac{AB}{2}\cdot\frac{CD}{2}=R^2\Longrightarrow AB\cdot CD=4R^2$$



۷- (۳)

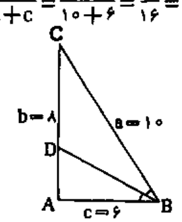
$S=\pi R^2-\pi R'^2$ بین دو دایره به شعاعهای R و R'

$\Longrightarrow S=9\pi-4\pi=5\pi$ بین دو دایره

$$\frac{S_{\text{بین دو دایره}}}{S_{\text{دایره اولی}}}=\frac{5\pi}{9\pi}=\frac{5}{9}$$

۸- (۲)

$$DC=\frac{b\cdot a}{a+c}=\frac{8\times 10}{10+6}=\frac{80}{16}=5$$



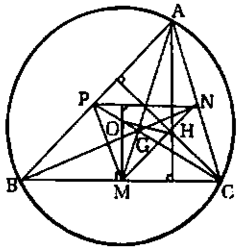
۹- (۱)

$$C'_3=2R\sqrt{3}\Longrightarrow C'_3=16\sqrt{3}$$

حل مسائل هندسهٔ سال سوم ریاضی

۱ـ نقاط M و N و P را که به ترتیب اوساط اضلاع BC و AC و AB از مثلث ABC می‌باشند به هم وصل می‌کنیم. با توجه به اینکه نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC است، داریم:

$$\frac{\overline{GM}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{GN}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{GP}}{\overline{GC}}=-\frac{1}{2}$$



این رابطه نشان می‌دهد که نقاط M و N و P به ترتیب مجانس نقاط A و B و C نسبت به مرکز تجانس G و با نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ می‌باشند یعنی مثلث MNP مجانس مثلث ABC در تجانس فوق است. از طرفی نقطهٔ O که محل تلاقی عمود منصفهای اضلاع مثلث ABC است نقطهٔ تقاطع ارتفاعات مثلث MNP می‌باشد زیرا عمود منصفهای اضلاع مثلث ABC ارتفاعات مثلث MNP می‌باشند. به عنوان مثال:

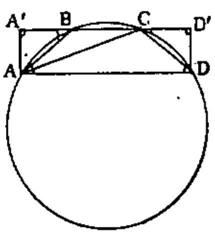
$$PN\parallel BC\ ,\ MO\perp BC\Longrightarrow MO\perp NP$$

پس نقطهٔ H (محل برخورد ارتفاعات مثلث ABC) و نقطهٔ O (محل تلاقی ارتفاعات مثلث MNP) که دو نقطهٔ متناظر از دو مثلث متجانس ABC و MNP می‌باشند مجانس یکدیگرند. پس:

$\overline{GH}=-2\overline{GO}$ و یا $\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}}=-\frac{1}{2}$

۲ـ درستی رابطه برای مثلث متساوی‌الاضلاع (۳ضلعی منتظم) و مربع (چهارضلعی منتظم) روشن است. اگر $n>4$ باشد از نقاط A و D عمودهای AA' و DD' را بر امتداد ضلع BC فرود می‌آوریم. چهارضلعی $ADD'A'$ مستطیل است و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'B$ و $DD'C$ با هم برابرند پس:

$A'B=CD'$ و $A'D'=AD$



از طرفی در مثلث ABC، $A\hat{B}C>90°$ است پس داریم:

$$AC^2=AB^2+BC^2+2BC\cdot A'B\Longrightarrow$$

$$AC^2-AB^2=BC(BC+2A'B)\Longrightarrow$$

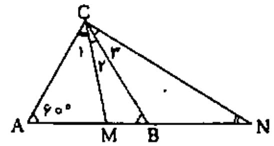
$$AC^2-AB^2=BC(BC+A'B+CD')=$$

$$BC\cdot AD$$

$$\Longrightarrow AC^2-AB^2=BC\cdot AD$$

۳ـ اولاً: در دو مثلث متشابه AMC و ANC که در زاویهٔ $\hat{A}=۶۰°$ مشترک می‌باشند زاویهٔ $\hat{C}_1=\hat{N}$ است. پس دایرهٔ محیطی مثلث MNC برضلع AC مماس است.

ثانیاً: در مثلث MCN، BC نیمساز زاویهٔ MCN



است. زیرا:

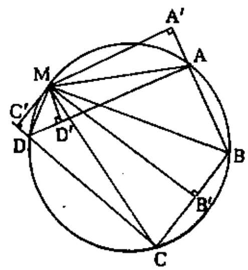
$$\hat{C}_۲=۶۰°-\hat{N}\ ,\ \hat{C}_۳=A\hat{C}B-\hat{C}_۱=۶۰°-\hat{N}$$

$$\Longrightarrow \hat{C}_۲=\hat{C}_۳$$

پس بنا به خاصیت نیمساز خواهیم داشت:

$$\frac{BM}{BN}=\frac{CM}{CN} \Longrightarrow BM\cdot NC=BN\cdot MC$$

۴ـ اگر شعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی را R فرض کنیم، در مثلثهای MAB و MBC و MCD و MDA روابط زیر را می‌توان نوشت. (بنا به قضیهٔ حاصلضرب اندازه‌های دوضلع هرمثلث برابر است باحاصلضرب قطردایرهٔ محیطی مثلث در اندازهٔ ارتفاع وارد برضلع سوم آن مثلث.)



$\Delta MAB: MA\cdot MB=MA'\cdot ۲R \qquad (۱)$

$\Delta MBC: MB\cdot MC=MB'\cdot ۲R \qquad (۲)$

$\Delta MCD: MC\cdot MD=MC'\cdot ۲R \qquad (۳)$

$\Delta MDA: MD\cdot MA=MD'\cdot ۲R \qquad (۴)$

با توجه به اینکه (۴)·(۲)=(۳)·(۱) است خواهیم داشت:

$$MA\cdot MB\cdot MC\cdot MD=MA'\cdot MC'\cdot ۴R^۲$$
$$=MB'\cdot MD'\cdot ۴R^۲ \Longrightarrow$$
$$MA'\cdot MC'=MB'\cdot MD'$$

جواب تشریحی تستها

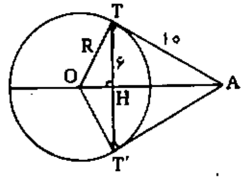
۱- (۲)

$$TT'=۱۲ \Longrightarrow HT=۶ \text{ و } AT=۱۰ \Longrightarrow$$

$$AH=۸\ ,\ OH\times AH=HT^۲$$

$$OH\times ۸=۳۶ \Longrightarrow OH=\frac{۹}{۲}$$

$$OT=R=\sqrt{۳۶+\frac{۸۱}{۴}}=\frac{۱۵}{۲}$$



۲- (۳)

$$MT^۲=MA\cdot MB=۳\times ۱۲=۳۶ \Longrightarrow MT=۶$$

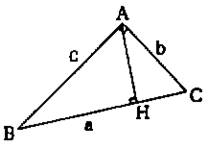
۳- (۳)، ۵و۱۲و۱۳ یک‌دسته ازعددهای فیثاغورثی می‌باشند.

$(۱۳^۲=۱۲^۲+۵^۲)$

پس مثلثی با این اضلاع قائم‌الزاویه‌است وارتفاع وارد بروتر ارتفاع موردنظر است، اما داریم:

$$\hat{A}=۹۰° \Longrightarrow a\cdot h_a=b\cdot c \Longrightarrow$$

$$۱۳\times h_a=۱۲\times ۵ \Longrightarrow h_a=\frac{۶۰}{۱۳}$$



۴- (۴)

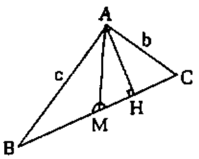
$$\hat{A}=۹۰°\ ،\ b=۵ \text{ و } c=۱۲ \Longrightarrow$$

$$S=\frac{۱}{۲}bc=۳۰ \Longrightarrow d'_a=$$

$$\frac{۲S\sqrt{۲}}{|b-c|}=\frac{۶۰\sqrt{۲}}{|۱۲-۵|}=\frac{۶۰\sqrt{۲}}{۷}$$

۵- (۱)، بنا به قضیهٔ: $b^۲-c^۲=۲a.MH$، داریم:

$$۲۴=۲\times ۶\times MH \Longrightarrow MH=۲$$



۶- (۲)، ترکیب‌دو تقارن محوری با محورهای‌موازی، انتقال است که قدرمطلق بردارانتقال، مساوی‌دوبرابر فاصلهٔ بین‌دومحور تقارن است.

۷- (۴)

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=\frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{\overline{SA''}}{\overline{SA}}=-\frac{۳}{۴} \Longrightarrow$$

$$\frac{\overline{SA''}}{\overline{SA'}}=-\frac{۳}{۴}\div\frac{۲}{۳}=-\frac{۹}{۸}$$

۸- (۲)

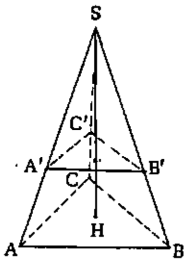
$$S+F=A+۲ \text{ (رابطهٔ اولر)} \Longrightarrow$$

$$S+۱۲=۳۰+۲ \Longrightarrow S=۲۰$$

۹- (۳)، اگرارتفاع هرم‌را h، حجم‌هرم ایجادشده به وسیله صفحه‌را $v_۱$ (حجم‌هرم بالایی درشکل زیر) وحجم هرم ناقص ایجادشده‌را $v_۲$ بنامیم، داریم:

$$\frac{v_۱}{v}=\left(\frac{\frac{۲}{۳}h}{h}\right)^۳=\frac{۸}{۲۷} \Longrightarrow \frac{v-v_۱}{v}=\frac{۲۷-۸}{۲۷}=\frac{۱۹}{۲۷}$$

$$\Longrightarrow \frac{v_۲}{v}=\frac{۱۹}{۲۷}$$



۱۰- (۲)

۱۱- (۳)

$$n\in N\ ,\ n\geqslant ۳\ ,\ n\times ۴۵°<۳۶۰°$$

$$\Longrightarrow n<۸ \Longrightarrow n=۳\ ,\ n=۴\ ,\ n=۵\ ,$$

$$n=۶\ ,\ n=۷$$

۱۲- (۴)

راه‌اول: سطح‌قاچ $\alpha°$ درکره‌ای به‌شعاع R $=\frac{\pi R^۲\alpha}{۹۰}$

$$\Longrightarrow ۳/۶\pi=\frac{\pi R^۲\times ۳۶}{۹۰} \Longrightarrow R=۳$$

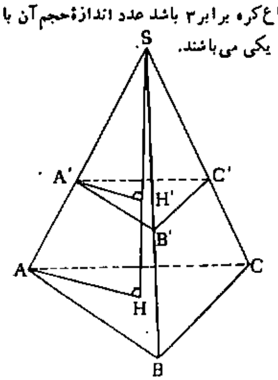
کره $v=\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳=۳۶\pi$

راه‌دوم: $۳۶°=\frac{۱}{۱۰}\times ۳۶۰° \Longrightarrow$

کره $S=۳/۶\pi\times ۱۰=۳۶\pi=۴\pi R^۲$

$\Longrightarrow R=۳ \Longrightarrow$ کره $v=۳۶\pi$ واحد حجم

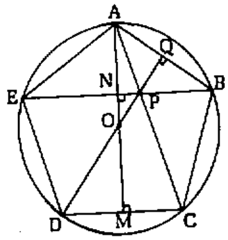
نکته: اگرشعاع‌کره برابر۳ باشد عدد اندازهٔ‌حجم‌آن با عدد اندازهٔ سطح‌آن یکی می‌باشد.



حل مسائل هندسهٔ سال چهارم ریاضی

۱ـ نقطهٔ تقاطع اقطار AC و BE را P می‌نامیم. عمود منصف ضلع AB از نقاط P و O (مرکز دایره) و D (رأس پنج‌ضلعی) می‌گذرد. دو مثلث ONP و OMD متشابهند پس:

$$\frac{ON}{OM}=\frac{PN}{MD} \qquad (1)$$



از طرفی در مثلث AMC، $NP \parallel MC$ است، پس:

$$\frac{NA}{MA}=\frac{NP}{MC} \qquad (2)$$

چون AM عمود منصف ضلع CD است لذا:

$$MD=MC \qquad (3)$$

می‌باشد.

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌گردد:

$$\frac{NO}{NA}=\frac{MO}{MA} \quad \text{یا} \quad \frac{ON}{OM}=\frac{NA}{MA}$$

و با توجه به اندازهٔ جبری پاره‌خطها می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{NO}}{\overline{NA}}=-\frac{\overline{MO}}{\overline{MA}}$$

پس نقاط M و N پاره خط AB را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند.

۲ـ راه اول: اگر نقطهٔ $M'(x_1,y_1,z_1)$ قرینه نقطهٔ M نسبت به صفحهٔ P باشد، اولاً ـ نقطهٔ H وسط پاره‌خط MM' روی صفحهٔ P قرار دارد. ثانیاً ـ بردار $\overrightarrow{MM'}$ با $\vec{v}$ (بردار عمود برصفحه) موازی است. پس داریم:

$$M(-2,1,3) \text{ و } M'(x_1,y_1,z) \Longrightarrow$$

$$MM' \text{ وسط } H\left(\frac{x_1-2}{2},\ \frac{y_1+1}{2},\ \frac{z_1+3}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحهٔ P}} 2\left(\frac{x_1-2}{2}\right)-3\left(\frac{y_1+1}{2}\right)+\left(\frac{z_1+3}{2}\right)+1=0 \Longrightarrow$$

$$2x_1-3y_1+z_1=2 \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{MM'}(x_1+2\ ,\ y_1-1\ ,\ z_1-3)$$

$$\vec{v}(2,-3,1) \text{ و } \overrightarrow{MM'} \parallel \vec{v} \Longrightarrow$$

$$\frac{x_1+2}{2}=\frac{y_1-1}{-3}=\frac{z_1-3}{1} \Longrightarrow$$

$$3x_1+2y_1=-4 \qquad (2)$$

$$x_1-2z_1=-8 \qquad (3)$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}2x_1-3y_1+z_1=2\\3x_1+2y_1=-4\\x_1-2z_1=-8\end{cases} \Longrightarrow$$

$$M'\left(\frac{-8}{7}\ ,\ \frac{-2}{7}\ ,\ \frac{24}{7}\right)$$

راه دوم: معادلهٔ خط $M'M$ را نوشته با معادلهٔ صفحه P قطع می‌دهیم تا مختصات نقطهٔ H به دست آید. آنگاه با معلوم بودن مختصات نقطهٔ H وسط پاره خط MM' و مختصات نقطهٔ M، مختصات نقطهٔ M' محاسبه می‌شود.

$$\vec{v}(2,-3,1) \quad P \text{ بردار عمود برصفحهٔ}$$

$$\vec{v} \parallel \overrightarrow{MM'} \Longrightarrow$$

$$MM' \text{ معادلهٔ} \quad \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{1}$$

$$\begin{cases}\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{1}=t\\2x-3y+z+1=0\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\left|\begin{matrix}x=2t-2\\y=-3t+1\\z=t+3\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{در معادله صفحه}}$$

$$4t-4+9t-3+t+3+1=0$$

$$\Longrightarrow t=\frac{3}{14} \Longrightarrow H\left(\frac{-11}{7}\ ,\ \frac{5}{14}\ ,\ \frac{45}{14}\right)$$

$$MM' \text{ وسط پاره خط } H \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x_M+x_{M'}=2x_H\\y_M+y_{M'}=2y_H\\z_M+z_{M'}=2z_H\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}-2+x_{M'}=2\left(\frac{-11}{7}\right)\\1+y_{M'}=2\left(\frac{5}{14}\right)\\3+z_{M'}=2\left(\frac{45}{14}\right)\end{cases} \Longrightarrow \left|\begin{matrix}x=\frac{-8}{7}\\y=\frac{-2}{7}\\z=\frac{24}{7}\end{matrix}\right.$$

۳ـ اولاً: خط‌المرکزین دو دایرهٔ (c) و (c') محور xها و محور اصلی آنها محور yها است پس معادلهٔ دسته‌دایره‌ای که این دو دایره دوایر مبنای آن می‌باشند به صورت:

$$x^2+y^2-mx+3=0$$

است.

ثانیاً: در دایرهٔ به معادلهٔ

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

اندازه شعاع برابر $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ می‌باشد پس:

$$4=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+0-12} \Longrightarrow \sqrt{m^2-12}=8$$

$$\Longrightarrow m^2=76 \Longrightarrow m=\pm 2\sqrt{19}$$

$$\Longrightarrow c_1: x^2+y^2-2\sqrt{19}x+3=0$$

$$c_2: x^2+y^2+2\sqrt{19}x+3=0$$

دوایر به شعاع ۴ دسته دایره

ثالثاً، دوایر به شعاع صفر دسته دایره (نقاط پونسله دسته دایره)

$$R=0 \Longrightarrow \sqrt{m^2-12}=0 \Longrightarrow m=\pm 2\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow c'_1: x^2+y^2-2\sqrt{3}x+3=0 \Longrightarrow$$

$$(x-\sqrt{3})^2+y^2=0 \Longrightarrow M_1(\sqrt{3},0)$$

$$c'_2: x^2+y^2+2\sqrt{3}x+3=0 \Longrightarrow$$

$$(x+\sqrt{3})^2+y^2=0 \Longrightarrow M_2(-\sqrt{3},0)$$

رابعاً: معادلهٔ دستهٔ دایرهٔ مزدوج دسته دایرهٔ فوق به‌صورت

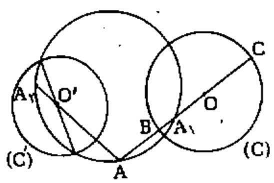
$$x^2+y^2-m'y-3=0$$

است.

۴ـ دایره‌ای که از نقطهٔ A بگذرد و بر دایرهٔ C(O,R) عمود باشد از نقطهٔ A_1 مزدوج توافقی نقطهٔ A نسبت به نقاط B و C (دوسر قطری از دایرهٔ (C) که از نقطهٔ A می‌گذرد) نیز باید بگذرد. همچنین دایره‌ای که از نقطهٔ A گذشته و دایرهٔ

$C'(O'\ ,\ R')$

را نصف می‌کند از نقطهٔ A_2 واقع برخط AO' می‌گذرد به قسمی که $\overline{O'A}\cdot\overline{O'A_2}=-R'^2$ باشد، پس دایرهٔ جواب



مسئله دایره‌ای است که برسه نقطهٔ A و A_1 و A_2 مرور می‌کند. مسئله درصورتی تنها یک جواب دارد که سه نقطهٔ A و A_1 و A_2 متمایز باشند و روی یک خط راست قرار نداشته باشند.

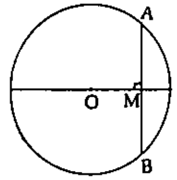
۵ـ نقطهٔ M داخل دایره واقع است، پس قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ داده‌شده مساوی با منهای مجذور نصف وتر به‌طول مینیممی است که از آن نقطه در دایره رسم می‌شود.

$$P\frac{M}{C}=C(1,2)=1+4-4-16+10=-5$$

$$\Longrightarrow -MA^2=-5 \Longrightarrow MA^2=5 \Longrightarrow$$

$MA=\sqrt{۵} \Longrightarrow AB=۲\sqrt{۵}$

(وتری از دایره که نقطهٔ M وسط آن است همان وتر به طول مینیمم است که از نقطهٔ M در دایره رسم می‌شود.)



جواب تشریحی تستها

۱- (۲)

$\overrightarrow{v_2}(۱,۰,۳)\ ,\ \overrightarrow{v_1}(۲,-۳,۱)$

و

$(۲\overrightarrow{v_1})\wedge(-۳\overrightarrow{v_2})=-۶(\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2})$

است. از طرفی تصویر بردار $(\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2})$ روی محور zها برابر است با:

$Z=X_1Y_2-Y_1X_2=۳$

پس جواب موردنظر $-۱۸=۳\times-۶$ است.

۲- (۱)

$$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}} \Longrightarrow$$

$$۵=\frac{|۲a-۲a+۱+۶a-۴|}{\sqrt{۴+۱+۴}} \Longrightarrow$$

$|۶a-۳|=۱۵ \Longrightarrow |۲a-۱|=۵ \Longrightarrow$

$a=۳$ و $a=-۲$

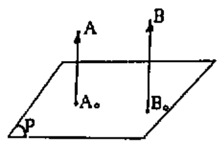
۳- (۱)،

$P(A)\cdot P(B)=$

$(-۲+۴-۰+۱)(۶-۴-۴+۱)=$

$(+۳)(-۱)=-۳<۰ \Longrightarrow$

نقاط A و B در دوطرف صفحهٔ P قرار دارند.



یادآوردی: با استفاده از فرمول اندازهٔ جبری فاصلهٔ یك نقطه از یك صفحه

$$\overline{A_0A}=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=\frac{P(A)}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

و با توجه به اینکه $\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$ مقداری مثبت است، برای

تعیین وضع دو نقطهٔ A و B نسبت به صفحه $P(x,y,z)=۰$ کافی است اندازهٔ $P(A)\cdot P(B)$ را محاسبه نماییم، هرگاه:

$P(A)\cdot P(B)>۰$

باشد نقاط A و B در یك طرف صفحهٔ P واقع‌اند ($\overrightarrow{B_0B}$ و $\overrightarrow{A_0A}$ هم‌جهت‌اند) و اگر $P(A)\cdot P(B)<۰$ باشد نقاط A و B در دوطرف صفحهٔ P قرار دارند (بردارهای $\overrightarrow{B_0B}$ و $\overrightarrow{A_0A}$ مختلف‌الجهت‌اند) و در صورتی که:

$P(A)\cdot P(B)=۰$

باشد بنابر آن که $P(A)=۰$ یا $P(B)=۰$ یا:

$P(A)=P(B)=۰$

باشد به ترتیب نقطهٔ A یا نقطهٔ B یا هر دو نقطهٔ A و B روی صفحهٔ P واقع می‌باشند.

۴- (۱)

$P: x+۳y-z-۱=۰$

$P': ۲x+z-۳=۰$

$A(۰,۱,۲)$ و $B(-۳,۱,-۱)$

$P(A).P(B)=(۰+۳-۲-۱).(-۳+۳+۱-۱)$

$=۰\times۰=۰ \Longrightarrow$

$A\in P$ و $B\in P$

۵- (۲)

$P: ۳x+y+۳z-۱=۰ \Longrightarrow$

بردار نرمال صفحه $\vec{v}(۳,۱,۳) \Longrightarrow$

$(a=۳\ ,\ b=۱\ ,\ c=۳)$

$D: ۳x=۲\left(y-\frac{۱}{۲}\right)=(۲a-۱)z \Longrightarrow$

$$\frac{x}{۲}=\frac{y-\frac{۱}{۲}}{۳}=\frac{z}{\frac{۶}{۲a-۱}} \Longrightarrow$$

$$\left(p=۲\ ,\ q=۳\ ,\ r=\frac{۶}{۲a-۱}\right)$$

شرط موازی‌بودن خط و صفحه: $ap+bq+cr=۰$

$$\Longrightarrow ۶+۳+\frac{۱۸}{۲a-۱}=۰ \Longrightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۶- (۴)

$$D:\begin{cases}x=۲t-۱\\ y=t\\ z=-۲t+۳\end{cases} \Longrightarrow$$

معادلهٔ کانونیك خط D: $D:\frac{x+۱}{۲}=\frac{y}{۱}=\frac{z-۳}{-۲}$

$$\Longrightarrow D:\begin{cases}x-۲y+۱=۰\\ x+z-۲=۰\end{cases} \Longrightarrow$$

$\alpha(x-۲y+۱)+\beta(x+z-۲)=۰ \Longrightarrow$

$(\alpha+\beta)x-۲\alpha y+\beta z+\alpha-۲\beta=۰$

معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر D

$P: ۲x+y-z+۱=۰$

شرط عمود بودن دو صفحه $aa'+bb'+cc'=۰$

$\Longrightarrow ۲\alpha+۲\beta-۲\alpha-\beta=۰ \Longrightarrow \beta=۰ \Longrightarrow$

$x-۲y+۱=۰$

معادلهٔ صفحه‌ای که از خط D می‌گذرد و بر صفحهٔ P عمود است.

$$\begin{cases}x-۲y+۱=۰\\ ۲x+y-z+۱=۰\end{cases} \Longrightarrow ۵x-۲z+۳=۰$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}x=۲y-۱\\ x=\frac{۲z-۳}{۵}\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\boxed{x=۲y-۱=\frac{۲z-۳}{۵}}$$

۷- (۲)، راه اول: معادلهٔ صفحه‌ای که بر محور yها می‌گذرد به صورت:

$ax+cz+d=۰$

است، یعنی در معادله آن به علت صفر بودن b ، y وجود ندارد و فقط گزینهٔ (۲) چنین وضعی دارد. پس این گزینه جواب است.

راه دوم:

$M(۲,۲,۲) \Longrightarrow \overrightarrow{OM}(۲,۲,۲)$

نقطه‌ای دلخواه $N\in y'y$ ، $N(۰,۱,۰) \Longrightarrow$

$\overrightarrow{ON}(۰,۱,۰) \Longrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}(-۲,۰,۲)$

بردار نرمال صفحهٔ مطلوب

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=۰ \Longrightarrow$

$-۲(x-۲)+۰(y-۲)+۲(z-۲)=۰ \Longrightarrow$

$\boxed{x-z=۰}$

۸- (۱)

$C-C'=۰ \Longrightarrow (a+۲)x+۱=۰$

$\Longrightarrow (a+۲)(-\frac{۱}{۳})+۱=۰ \Longrightarrow a=۱$

۹- (۳)، راه اول: مرکز دایرهٔ اصلی بیضی بر مرکز بیضی منطبق است. مرکز بیضی داده‌شده نقطهٔ $C(۱,-۱)$ است. زیرا:

$$\begin{cases}f'_x=۲x-۲=۰ \Longrightarrow x=۱\\ f'_y=۸y+۸=۰ \Longrightarrow y=-۱\end{cases} \Longrightarrow$$

مرکز بیضی $C\left|\begin{array}{l}\alpha=۱\\ \beta=-۱\end{array}\right.$

پس گزینهٔ (۳) جواب است. زیرا فقط در این گزینه مختصات مرکز دایرهٔ $(۱,-۱)$ می‌باشد.

راه دوم: مرکز دایرهٔ اصلی بیضی برمرکز بیضی منطبق می‌باشد وشعاعش مساوی a است، پس اگر ازمعادلهٔ بیضی داده شده مختصات مرکزونصف‌قطر بزرگ‌را به دست‌آوریم خواهیم داشت:

$$x^2+4y^2-2x+8y+1=0 \Longrightarrow$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{1}=1 \Longrightarrow$$

$C\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.$ و $a^2=4 \Longrightarrow a=2 \Longrightarrow$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Longrightarrow$$

معادلهٔ دایرهٔ اصلی بیضی $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

۱۰- (۴)، راه اول:

$F\left|\begin{matrix}\alpha=2\\ \beta+c=1\end{matrix}\right.$ ؛ $3(2)+y=2 \Longrightarrow y=-4$

$\Longrightarrow$ مرکز $C\left|\begin{matrix}\alpha=2\\ \beta=-4\end{matrix}\right.$

$$-4+c=1 \Longrightarrow c=5$$

مجانبها $m=\pm 3=\pm\frac{a}{b} \Longrightarrow a=3b$

$$c^2=a^2+b^2 \Longrightarrow 25=9b^2+b^2=10b^2 \Longrightarrow$$

$$b^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2} \longrightarrow b=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2} \Longrightarrow$$

$$a=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{\frac{3\sqrt{10}}{2}}=\frac{10}{3\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

راه دوم: چون محورکانونی هذلولی‌موازی‌محورعرضها است پس $m=\pm\frac{a}{b}=\pm 3$ مجانبها است. از آنجا:

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$$

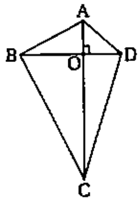
می‌باشد اما:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

حل‌مسائل هندسهٔ سال دوم علوم تجربی

۱- نقطهٔ برخورد اقطار چهارضلعی را O می‌نامیم. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAB و OBC و OCD و ODA



می‌توان نوشت:

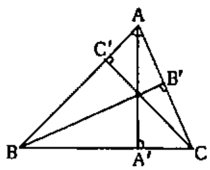
$$\begin{cases}AB^2=OA^2+OB^2\\ BC^2=OB^2+OC^2\\ CD^2=OC^2+OD^2\\ DA^2=OD^2+OA^2\end{cases}\Longrightarrow$$

$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2=$$

$$OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$$

۲- ۱) دومثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABB' و ACC' متشابهند پس داریم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$$



۲) روابط زیر در مثلث ABC برقراراند:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}\quad(1)\qquad \frac{AC}{CB}=\frac{CA'}{CB'}\quad(2)$$

$$\frac{BC}{AB}=\frac{BC'}{BA'}\quad(3)$$

ازضرب این روابط خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{AC}\times\frac{AC}{CB}\times\frac{BC}{AB}=\frac{AB'}{AC'}\times\frac{CA'}{CB'}\times\frac{BC'}{BA'}$$

$$\Longrightarrow \frac{AB'\cdot CA'\cdot BC'}{AC'\cdot CB'\cdot BA'}=1 \Longrightarrow$$

$$AB'\cdot CA'\cdot BC'=AC'\cdot CB'\cdot BA'$$

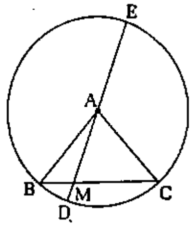
۳- دایره‌ای به مرکز A و به شعاع AB=AC رسم می‌کنیم. نقاط برخورد AM با این دایره‌را D و E می‌نامیم. باتوجه به اینکه

$$AE=AD=AB$$

$$ME=AE+AM=AB+AM$$

$$MD=AD-AM=AB-AM$$

است داریم:



$$MB\cdot MC=MD\cdot ME \Longrightarrow$$

$$MB\cdot MC=(AB-AM)\cdot(AB+AM) \Longrightarrow$$

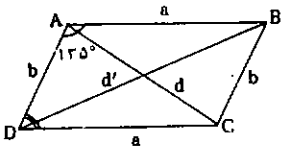
$$MB\cdot MC=AB^2-AM^2$$ یا

$$AB^2-AM^2=MB\cdot MC$$

۴- اگر زاویهٔ $\hat{D}$ از متوازی‌الاضلاع ABCD مساوی $45°$ باشد زاویهٔ $D\hat{A}B=135°$ خواهدبود. با فرض:

$BD=d'$ و $AC=d$

روابط زیر را می‌توان نوشت:



$$\Delta ADC: d^2=a^2+b^2-2ab\cos 45°$$

$$=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$$

$$\Delta ABD: d'^2=a^2+b^2-2ab\cos 135°$$

$$=a^2+b^2+\sqrt{2}ab$$

$$d^2\cdot d'^2=(a^2+b^2-\sqrt{2}ab)(a^2+b^2+\sqrt{2}ab)$$

$$=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$

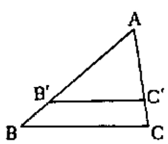
$$d^2\cdot d'^2=a^4+b^4$$

جواب تشریحی تستها

۱- (۲) $B'C'=\frac{3}{4}BC \Longrightarrow \frac{B'C'}{BC}=\frac{3}{4}$

$$B'C'\parallel BC \Longrightarrow \frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{3}{4} \Longrightarrow$$

$$\frac{CC'}{AC}=\frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{3}{AC}=\frac{1}{4} \Longrightarrow AC=12$$



۲- (۳)

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{a+b+c}{a'+b'+c'} \Longrightarrow$$

$$\frac{7}{a'}=\frac{8}{b'}=\frac{9}{c'}=\frac{7+8+9}{72}=\frac{24}{72}=\frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow a'=21$$

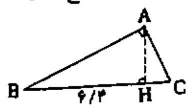
۳- (۱) $\frac{r}{r'}=\frac{R}{R'}=\frac{2R}{2R'}=\frac{2}{3}$

۴- (۳) $BC=10$ و $BH=6/4 \Longrightarrow$

$CH=10-6/4=3/6$

$AC^2=CH\cdot BC=3/6\times10=36 \Longrightarrow$

$AC=6$ ضلع دیگر



۵- (۱)، چهارضلعی MNPQ مربعی است به ضلع y، پس مساحت آن برابر y^2 است.

۶- (۳) اندازهٔ قطر مربع $=a\sqrt{2}=4\sqrt{2} \Longrightarrow$

$a=4 \Longrightarrow S_{\text{مربع}}=16cm^2$

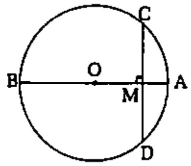
۷- (۴)، مثلثی با اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ سانتیمتر (یک دسته عدد فیثاغورثی) قائم‌الزاویه است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\times8\times6=24$$

۸- (۲)، وتر به‌طول مینیمم مرسوم از یک نقطه در یک دایره وتری است که در آن نقطه عمود بر قطری از دایره است که از آن نقطه می‌گذرد. پس:

$$MC^2=MA\cdot MB=3\times12=36 \Longrightarrow$$

$$MC=6 \Longrightarrow CD=12cm$$



حل مسائل هندسهٔ سال سوم علوم تجربی

۱- مختصات مرکز ثقل مثلث را محاسبه و فاصلهٔ آن را تا مبدأ مختصات به دست می‌آوریم:

G مرکز ثقل مثلث

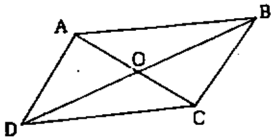
$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{-2+4+7}{3}=3$$

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{1-5-2}{3}=-2$$

$$OG=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13} \Longrightarrow$$

$$OG=\sqrt{13}$$

۲- اقطار متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند پس روابط زیر را می‌توان نوشت:



$\vec{AO}+\vec{CO}=\vec{0}$ و $\vec{BO}+\vec{DO}=\vec{0} \Longrightarrow$

$\vec{AO}+\vec{BO}+\vec{CO}+\vec{DO}=\vec{0} \quad (1)$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases}\vec{MO}=\vec{MA}+\vec{AO}\\ \vec{MO}=\vec{MB}+\vec{BO}\\ \vec{MO}=\vec{MC}+\vec{CO}\\ \vec{MO}=\vec{MD}+\vec{DO}\end{cases}$$

از جمع این روابط با توجه به رابطه (۱)، نتیجه می‌شود:

$$4\vec{MO}=\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}$$

۳-

حجم کره $v=\frac{4}{3}\pi R^3$ ، مساحت سطح کره $S=4\pi R^2$

$S=3v \Longrightarrow 4\pi R^2=3\times\frac{4}{3}\pi R^3 \Longrightarrow$

$R=1$ شعاع کره

منطقهٔ به ارتفاع h $S=2\pi Rh \Longrightarrow$

منطقه $S=2\pi\times1\times\frac{1}{2}=\pi \Longrightarrow$

منطقه $S=\pi$ واحد سطح

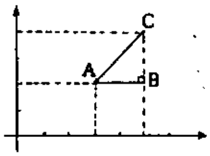
جواب تشریحی تستها

۱- (۴)، قرینهٔ محوری هر شکل با خود آن شکل برابر است.

۲- (۳)، نقطهٔ S وسط خط‌المرکزین دو دایرهٔ متساوی، مرکز تقارن شکل حاصل از آن دو دایره است، پس وترهای ایجادشده در دو دایره به وسیله قاطعی که از نقطهٔ S می‌گذرد باهم برابرند، لذا نسبت آنها مساوی ۱ است.

۳- (۴)، با توجه به اینکه $AB\parallel x'x$ و $BC\parallel y'y$ است. پس مثلث ABC در رأس B قائم‌الزاویه است. لذا نقطهٔ تلاقی ارتفاعات این مثلث همان رأس B است پس:

$$OB=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$



۴- (۴) $\vec{b}=\frac{-\vec{a}}{2} \Longrightarrow \vec{a}+2\vec{b}=\vec{0}$

$\Longrightarrow \vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=0$

۵- (۱)، با پنج‌ضلعی منتظم فقط ۱۲ وجهی منتظم ساخته می‌شود.

۶- (۲) $S+F=A+2 \Longrightarrow 5+5=A+2$

$\Longrightarrow A=8$ تعداد یالها

۷- (۱)، حجم چهاروجهی منتظم به ضلع a برابر است با:

$$v=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

پس داریم:

$$v=\frac{(6\sqrt{2})^3\cdot\sqrt{2}}{12}=72$$

۸- (۱)، اگر شعاع قاعدهٔ استوانه را R و ارتفاع مشترک استوانه و منشور را h فرض کنیم داریم:

سطح جانبی استوانه $=2\pi Rh$

ضلع قاعدهٔ منشور $=R \Longrightarrow$

سطح جانبی منشور $=6R\cdot h \Longrightarrow$

$$\frac{S_{\text{جانبی استوانه}}}{S_{\text{جانبی منشور}}}=\frac{2\pi Rh}{6R\cdot h}=\frac{\pi}{3}$$

۹- (۲) سطح قاچ $\alpha^\circ=\frac{\pi R^2\alpha}{90} \Longrightarrow$

$36\pi=\frac{\pi R^2\times90}{90}=\pi R^2 \Longrightarrow R^2=36$

$\Longrightarrow R=6$ شعاع کره

حجم کره $v=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times216=288\pi$ واحد حجم

حل مسائل ریاضیات جدید سال اول

۱- می‌خواهیم عکس‌نقیض گزارهٔ (فرد بودن عدد صحیح a شرط کافی برای فرد بودن a^2 است) را بنویسیم. ابتدا آن را به صورت $p \Longrightarrow q$ درآورده داریم:

«اگر عدد صحیح a فرد باشد آنگاه a^2 فرد است» که عکس نقیض گزارهٔ بالا به صورت: «اگر عدد صحیح a^2 فرد نباشد آنگاه a فرد نیست» بیان می‌شود یا «فرد نبودن عدد a شرط لازم است برای فرد نبودن a^2» و یا «فرد نبودن عدد a^2 شرط کافی است برای فرد نبودن a».

۲- چون گزارهٔ $(r\wedge\sim s) \Longleftrightarrow (p\vee\sim q)$ درست است لذا گزارهٔ $(p\vee\sim q)$ و گزارهٔ $(r\wedge\sim s)$ هم‌ارز هستند و چون گزارهٔ s درست است پس s~ نادرست است و بنابراین $(r\wedge\sim s)$

نادرست پس باید $(p\vee\sim q)$ نیز نادرست باشد.

$(p\vee\sim q)\equiv F \Rightarrow p\equiv F$ و $\sim q\equiv F \Rightarrow q\equiv T$

$\Rightarrow (p\Rightarrow r)\equiv(F\Rightarrow r)\equiv T$

$(q\vee p)\equiv(T\vee F)\equiv T \Rightarrow$

$(p\Rightarrow r)\Leftrightarrow(q\vee p)\equiv(T\Leftrightarrow T)\equiv T$

۳ـ حال ثابت می‌کنیم گزارهٔ شرطی زیر همواره درست است $([(q\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow q)$

p	q	$\sim p$	$p\Rightarrow q$	$\sim p\vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

$[(p\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow q\equiv[(\sim p\wedge q)\wedge p]\Rightarrow$

$q\equiv[(\sim p\wedge p)\vee(q\wedge p)]\Rightarrow q\equiv[F\vee(p\wedge q)]$

$\Rightarrow q\equiv(p\wedge q)\Rightarrow q\equiv\sim(p\wedge q)\vee q$

$\equiv(\sim p\vee q)\vee q\equiv\sim p\vee(\sim q\vee q)\equiv\sim p\vee T\equiv T$

۴ـ می‌خواهیم ثابت کنیم:

$[(A-B)\cup(B-A)]\cap(A\cap B)=\varnothing$

در مثالهای کتاب‌درسی ثابت شد:

$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

$\Rightarrow[(A\cup B)-(A\cap B)]\cap(A\cap B)$

$=[(A\cup B)\cap(A\cap B)']\cap(A\cap B)$

$=(A\cup B)\cap[(A\cap B)'\cap(A\cap B)]$

$=(A\cup B)\cap\varnothing=\varnothing$

جواب تشریحی تستها

۱ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

$p\Rightarrow(q\vee\sim p)\equiv F\Rightarrow p\equiv T$ و $q\equiv F\Rightarrow$

$(q\Rightarrow\sim p)\equiv T$

۲ـ گزینهٔ (الف) صحیح است زیرا:

$p\equiv T\Rightarrow(q\Rightarrow p)\equiv T\Rightarrow$

$[(t\Rightarrow r)\Rightarrow(\overbrace{q\Rightarrow p}^{T})]\equiv T$

۳ـ گزینهٔ (د) صحیح‌است زیرا:

عکس نقیض گـزارهٔ شرطی $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ بـه صورت زیر بیان می‌شود:

$\sim(q\Rightarrow r)\Rightarrow\sim p\equiv\sim(\sim q\vee r)\Rightarrow\sim p$

۴ـ گزینهٔ (ج) جواب تست است زیرا:

اگر p و q هردو ارزش درست داشته باشند لذا ارزش $(p\wedge q)$ درست‌است پس $f(p\wedge q)=۱$ ازطرفی:

$f(q)=۱$ و $f(p)=۱$

درصورتی که در گزینهٔ (ج) داریم:

$f(p\wedge q)=f(p)+f(q)\Rightarrow ۱=۱+۱$

$\Rightarrow ۱=۲$

۵ـ گزینهٔ (د) صحیح‌است زیرا:

مجموعهٔ A دارای ۳ عضو است‌پس $۸=۲^۳$ زیرمجموعه دارد.

۶ـ گزینهٔ (ج) صحیح‌است زیرا:

با توجه به تعریف زیر مجموعه هرعضو مجموعهٔ $\{x\}$ یعنی x عضو مجموعهٔ $\{x,\{x\}\}$ می‌باشد.

۷ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

با توجه به تعریف $P(A)$ ، اگر A دارای n عضو باشد $P(A)$ دارای ۲^n (تعداد زیرمجموعه‌های A) عضو است پس $P(A)$ دارای $۲=۲^۱$ عضو است و $P(P(A))$ دارای $۴=۲^۲$ عضو و $P(P(P(A)))$ دارای $۱۶=۲^۴$ عضو است.

۸ـ گزینهٔ (ج) صحیح‌است زیرا:

طبق‌فرض $\rightarrow (A-B)=(A\cup B)\Rightarrow$

$(A\cap B')=(A\cup B)\Rightarrow(A\cap B')\cap B$

$=\overbrace{(A\cup B)\cap B}^{\text{قانون‌جذب}}\Rightarrow A\cap(B'\cap B)=B\Rightarrow$

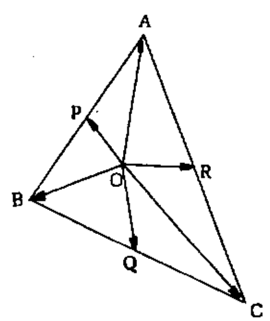
$A\cap\varnothing=B\Rightarrow\varnothing=B$

حل مسائل ریاضیات جدید دوم ریاضی

۱ ـ P و Q و R اوساط اضلاع مثلث ABC هستند. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$

چون P وسط AB است پس $-\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}$.



بنابراین خواهیم داشت:

$\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}\\ OB+BP=\overrightarrow{OP}\end{cases}\Rightarrow$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overbrace{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}}^{\bar{O}}=۲\overrightarrow{OP}\Rightarrow$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=۲\overrightarrow{OP}\quad(۱)$

و به همین‌قیاس در روی‌اضلاع دیگر می‌توان ثابت کرد که:

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=۲\overrightarrow{OQ}\quad(۲)$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=۲\overrightarrow{OR}\quad(۳)$

حال روابط (۱) و (۲) و (۳) را با هم جمع می‌کنیم خواهیم داشت:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=$

$۲\overrightarrow{OP}+۲\overrightarrow{OQ}+۲\overrightarrow{OR}\Rightarrow$

$۲(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=۲(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})$

$\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$

۲ ـ فرض‌کنیم:

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}$

دو ماتریس ۲×۲ باشند و فرض‌کنیم $AB-BA=I$. حال به تناقض می‌رسیم!

$AB=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix}ae+fc & eb+fd\\ ag+hc & gb+hd\end{bmatrix}$

$AB-BA=\begin{bmatrix}bg-cf & (af+bh)-(eb+fd)\\ (ce+dg)-(ag+hc) & cf-bg\end{bmatrix}$

حال اگر $AB-BA=I$ پس باید:

$AB-BA=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} bg-cf=۱ \\ cf-bg=۱ \\ af+bh-eb-fd=۰ \\ ce+dg-ag-hc=۰ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} bg-cf=۱ & (۱) \\ cf-bg=۱ & (۲) \\ f(a-d)+b(h-e)=۰ \\ g(d-a)+c(e-h)=۰ \end{cases}$$

(۱) و $(۲) \xrightarrow{\text{جمع ۲ رابطه}} (bg-cf)+(cf-bg)$
$=۱+۱$

$\Longrightarrow ۰=۲$ و این تناقض است

۳ ـ داریم:

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

حال اگر $AX=B$ پس:

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

وبا توجه به تعریف‌ضرب‌ماتریسها، ماتریس X باید یک‌ماتریس ۲×۱ باشد لذا خواهیم داشت: پس: $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -x+۲y=۳ \\ ۳x+۵y=۲ \end{cases}$$

و ازحل دستگاه معادلات فوق خواهیم داشت:

$x=-۱ \ , \ y=۱$

پس: $X=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$

۴ ـ اگر قرار دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۲\sqrt{۲} & -۲\sqrt{۲} \\ ۲\sqrt{۲} & ۲\sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ $A^{۹۶}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۲\sqrt{۲} & -۲\sqrt{۲} \\ ۲\sqrt{۲} & ۲\sqrt{۲} \end{bmatrix}=۴\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$=۴\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{۴} & -\sin\frac{\pi}{۴} \\ \sin\frac{\pi}{۴} & \cos\frac{\pi}{۴} \end{bmatrix}$$

ازطرفی $\rightarrow A^{۸}=۴^{۸}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{۴} & -\sin\frac{\pi}{۴} \\ \sin\frac{\pi}{۴} & \cos\frac{\pi}{۴} \end{bmatrix}^{۸}$

$$=۴^{۸}\begin{bmatrix} \cos ۲\pi & -\sin ۲\pi \\ \sin ۲\pi & \cos ۲\pi \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^{۸}=۴^{۸}\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}}_{I} \Longrightarrow$$

$$A^{۹۶}=(A^{۸})^{۱۲}=(۴^{۸})^{۱۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{۱۲}$$

$$\Longrightarrow A^{۹۶}=۴^{۹۶}I \Longrightarrow A^{۹۶}=\begin{bmatrix} ۴^{۹۶} & ۰ \\ ۰ & ۴^{۹۶} \end{bmatrix}$$

جواب تشریحی تستها

۱ ـ گزینهٔ (ب) صحیح‌است زیرا:

تابع یک‌تابع دوضابطه‌ای است‌که در هرضابطه‌اش یک به‌یک‌است و بردهای دوضابطه‌نقطهٔ مشترکی‌ندارند پس‌یک به‌یک است. ازطرفی چون $۰\neq|x|+۱$ لذا تابع نمی‌تواند عدد صفررا در IR بپوشاند.

۲ ـ گزینهٔ (ب) صحیح‌است (تعریف‌ضرب وتساوی‌دو ماتریس).

۳ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا:

ماتریس A ماتریس‌دوران‌حول مبدأ به‌اندازهٔ زاویهٔ ۳۰° می‌باشدکه اگر به توان ۶ برسانیم یعنی ۶ مرتبه‌دوران‌به‌اندازهٔ ۳۰° که حاصل ماتریس دوران‌به اندازهٔ ۱۸۰° است پس:

$$A^{۶}=\begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

۴ ـ گزینهٔ (الف) صحیح است زیرا:

همان‌طورکه مشاهده می‌شود در تبدیل M به M'، طول و عرض‌نقطهٔ M قرینه‌شده‌اند پس ماتریس‌تبدیل باید ماتریس تقارن نسبت‌به مبدأ مختصات باشد.

۵ ـ گزینهٔ (ب) جواب تست است زیرا:

به راحتی قابل تحقیق است که

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس $A^{۲}\neq I$.

۶ ـ گزینهٔ (الف) صحیح‌است (تعریف گروه).

۷ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

$[(۳*۵)*۶]+[۳*(۵*۶)]=$

$$\overbrace{[(\mathrm{Max}\{۳,۵\}-۲)*۶]}^{۳}+[۳*\overbrace{(\mathrm{Max}\{۵,۶\}-۲)}^{۴}]$$

$=(\mathrm{Max}\{۳,۶\}-۲)+(\mathrm{Max}\{۳,۴\}-۲)$

$=۴+۲=۶$

۸ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

$x*e=x \Longrightarrow x+e+۵=x \Longrightarrow$

$e+۵=۰ \Longrightarrow e=-۵$

۹ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا:

اعداد طبیعی، اعداد اول و اعداد فرد هیچ‌کدام عضو خنثی‌جمع یعنی‌صفررا نداشته و نمی‌توانند باعمل جمع تشکیل گروه دهند.

۱۰ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

باتوجه به جدول مشاهده می‌شودکه ۳ ازچپ و راست خنثی‌است وچون دوطرف قطراصلی جدول‌تقارن‌دارند جابه‌جایی نیز هست.

حل مسائل ریاضیات‌جدید سال سوم ریاضی

۱ ـ اگرهرخواهر وبرادر را ۱ نفر فرض‌کنیم‌که روبه روی‌هم‌نشسته‌اند پس‌در وهلهٔ‌اول ۳! طریق‌جابه‌جایی‌منظم‌دارند و هرخواهر با برادرش‌که روبه‌روی هم هستند نیز می‌توانند جابه‌جا شوند پس‌درکل، پاسخ مسأله به صورت:

$$۳!\times۲!\times۲!\times۲!=۴۸$$

می‌باشد.

۲ ـ می‌دانیم به طورکلی n شیئی متمایزبه $(n-۱)!$ طریق می‌توانند دوریك میزگرد قرار بگیرند. (۱ شیئی‌را ابتدا قرار می‌دهیم و $(n-۱)$ شیئی‌بقیه‌به $(n-۱)!$ طریق مختلف می‌توانند‌درکنارآن واقع‌شوند.) حال‌هرزن وشوهرراچون باید درکنار هم‌باشند می‌توان ۱ نفر فرض‌کرد پس این تعداد زن و شوهررا ۵نفرفرض‌کرده‌که‌به $(۵-۱)!$ طریق‌می‌توانند‌دوریك میز قراربگیرند. ازطرفی‌هرزن می‌تواندجای‌خودرا باشوهرش عوض‌کند پس‌جواب مسأله‌به صورت:

$$(۵-۱)!\times۲!\times۲!\times۲!\times۲!\times۲!$$

می‌باشد.

۳ ـ مسأله‌را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

یا رقم سمت‌چپ‌عددی‌فرداست یا عددی‌زوج‌اگرعددی فرد باشد:

$$\begin{array}{cccc} \text{فرد} & \text{فرد} & \text{زوج} & \text{زوج} \\ \boxed{۵} & \boxed{۵} & \boxed{۵} & \boxed{۵} \end{array}=۵^{۴}$$

وچون عددفرد خانه دوم در دوخانهٔ دیگر نیز می‌تواند باشد درکل داریم: 3×5^4 و اگر عدد سمت‌چپ زوج باشد چون صفرنمی‌تواند باشد داریم:

زوج	زوج	فرد	فرد	
$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$=4\times5^3$

وچون عددزوج خانهٔدوم در دوخانهٔ دیگرنیزمی‌تواندباشد لذا خواهیم داشت:

$$3\times4\times5^3=12\times5^3$$

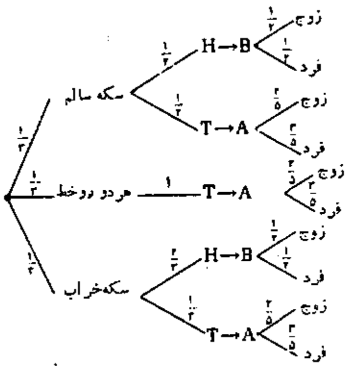
و درکل تعدادچنین اعدادی عبارت است از:

$$3\times5^4+12\times5^3=5^3(3\times5+12)=27\times5^3$$

۴ ـ درحقیقت مسأله‌به این شکل است‌که به چند طریق می‌توان تیمهای k عضوی از بین n عضو بـه‌وجود آورد (در مجموعه‌ها جابه‌جایی‌عضوی‌بی‌اثر است) پس:

$$\text{تعدادزیرمجموعه‌های k عضوی}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

۵ ـ این‌مسأله و مسائل‌شبیه به‌این‌را با استفاده از اصل ضرب احتمالات وباروش‌نمودار درختی‌می‌توان‌حل‌کرد ومثلاً دراین مسأله‌برای هرحالت شاخه‌ای‌ازنمودار‌را درنظرمی‌گیریم که به عددفرد منتهی‌شود واعداد روی‌آن‌شاخه‌را درهم ضرب کرده و با حالتهای‌بعدی‌جمع می‌کنیم (شیررابانماد H وخط‌را با نماد T نمایش می‌دهیم).



$$P(A)=\left(\tfrac13\times\tfrac12\times\tfrac12\right)+\left(\tfrac13\times\tfrac12\times\tfrac35\right)+$$
$$\left(\tfrac13\times1\times\tfrac35\right)+\left(\tfrac13\times\tfrac23\times\tfrac12\right)+\left(\tfrac13\times\tfrac13\times\tfrac35\right)$$

$A: x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n$ داده‌های اولیه

$B: Kx_1, Kx_2, \dots, Kx_n$ داده‌های‌جدید

$$\overline{X}_B=\frac{Kx_1+Kx_2+\dots+Kx_n}{n}=$$
$$k\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=K\overline{X}_A$$

ثابت شد $\boxed{\overline{X}_B=K\overline{X}_A}$

از طرفی می‌دانیم:

$$\text{واریانس داده‌های جدید}=S^2_B=\frac{\sum(Kx_i-\overline{X}_B)^2}{n-1}$$

$$\text{انحراف معیار}=S_B=\sqrt{S^2_B}$$

وچون ثابت کردیم $\overline{X}_B=K\overline{X}_A$ پس:

$$S^2_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}(Kx_i-K\overline{X}_A)^2}{n-1}$$

$$\Rightarrow S^2_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}[K(x_i-\overline{X}_A)]^2}{n-1}$$

$$\Rightarrow S^2_B=\frac{K^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X}_A)^2}{n-1}$$

$$\Rightarrow S^2_B=K^2S^2_A\Rightarrow\boxed{S_B=KS_A}$$

جواب تشریحی تستها

۱ ـ گزینهٔ (د) صحیح‌است: زیرامی‌دانیم اگردوبردار مضربی ازیکدیگر باشند وابسته خطی‌اند پس چون مؤلفهٔ اول $(2,a)$ ، -3 برابر شده پس باید:

$$-3a=a+1\Rightarrow -4a=1\Rightarrow a=\frac{-1}{4}$$

۲ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

(برای‌تعیین احتمال همرنگ‌نبودن ۴ مهره به ترتیب زیرعمل می‌کنیم)

$$\text{احتمال اینکه هر ۴ مهره همرنگ‌باشند}=\frac{\binom44+\binom54}{\binom94}$$

$$=\frac{1+5}{126}=\frac{6}{126}$$

$$\text{احتمال اینکه هر ۴ مهره همرنگ نباشند}=1-\frac{6}{126}$$

$$=\frac{120}{126}=\frac{20}{21}$$

۳ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا اگر IR زیرفضای ناتبدیهی مانند U داشته‌باشد باتوجه به بسته بودن U نسبت به ضرب اسکالر به راحتی می‌توان نتیجه‌گرفت‌که $1\in U$ و اگر $1\in U$ دوباره با استفاده ازبسته‌بودن U نسبت‌به ضرب اسکالر داریم:

$$\forall x\in IR\ ,\ x\cdot1\in U\Rightarrow x\in U\Rightarrow IR\subseteq U$$

و چـون همـواره $U\subset IR$ پس $U=IR$ یعنی U نمی‌توانـد ناتبدیهی باشد.

۴ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا ازکل حالات یعنی $6!$ تعدادحالتهایی که۲مهره مخصوص درکنارهم‌هستندکم‌می‌کنیم خواهیم داشت:

$$6!-5!\times2$$

۵ ـ گزینهٔ (الف) صحیح است زیرا:

در این کمیسیون حتماً بایدحداقل ۱ شیرازی‌باشد. پس داریم:

$$\binom41\times\binom{11}{3}=4\times165=660$$

۶ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

$$\text{میانگین‌واقعی}=\frac{16\times50-(19-9)}{50}=$$

$$\frac{800-10}{50}=\frac{790}{50}=15/8$$

۷ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا:

$$4+2+1=7\Rightarrow a^4b^2c\ \text{ضریب‌جملهٔ}$$

$$=\frac{7!}{4!\times2!\times1!}=105$$

۸ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا داریم:

$$\text{تعدادحالات ممکن}=\underbrace{\binom53\times\binom41}_{\text{۳ آبی و ۱ قرمز}}+\underbrace{\binom54}_{\text{۴ آبی}}$$

$$=20+5=25$$

۹ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا اگر مثلاً خط

$$3x+2y=6$$

را رسم کنیم و به موازات‌خود حرکت دهیم آخرین نقطه‌ای‌که منطقهٔ هاشورخورده‌را قطع‌می‌کند نقطهٔ‌برخورد دوخط است‌که باتوجه به مختصات محل برخوردآنها با محورها معادلات‌آن دوخط عبارت‌انداز: $(x+y=5\ ,\ 2y+6x=22)$ پس:

$$\begin{cases}2y+6x=24\\x+y=5\end{cases}\Rightarrow x=2\ ,\ y=3\Rightarrow$$

$$\text{بیشینه}=(3\times2)+(2\times3)=12$$

حل مسائل ریاضیات جدید سال چهارم ریاضی

۱ ـ فرض کنیم:

$$(2a+b\ ,\ a+2b)=d$$

ثابت می‌کنیم $d=3$ یا $d=1$.

$$d|2a+b\ ,\ d|a+2b\Rightarrow$$

$$d|(2a+b)+(a+2b)\Rightarrow d|3(a+b)$$

حال ثابت می‌کنیم $(d,(a+b))=1$.

اگر $(d,(a+b))=d_1$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}d_1|d\\d_1|a+b\end{cases}\Rightarrow d_1|a+2b\ ,\ d_1|a+b\Rightarrow$$

$d_1|(a+2b)-(a+b) \Longrightarrow d_1|b$

و به همین قیاس می‌توان ثابت کرد $d_1|a$ و چون $(a\ ,\ b)=1$

پس $d_1|1$ بنابراین $d_1=1$.

پس $\to (d\ ,\ (a+b))=1\ ,\ d|3(a+b) \xRightarrow{\text{لم اقلیدس}}$

$d|3 \Longrightarrow d=1$ یا $d=3$

۲ ـ برای یافتن دو رقم سمت راست عدد 13^{10} باید تحقیق کنیم که این عدد به سنج ۱۰۰ با چه عددی هم‌نهشت است.

$13^3=2197$

$\Longrightarrow 13^3 \overset{100}{\equiv} 97 \overset{100}{\equiv} -3 \Longrightarrow (13^3)^3 \equiv (-3)^3$

$\Longrightarrow 13^9 \overset{100}{\equiv} -27 \overset{100}{\equiv} 73$

$\Longrightarrow 13^9\times 13 \overset{100}{\equiv} 73\times 13 \Longrightarrow 13^{10}\overset{100}{\equiv} 949$

$\Longrightarrow 13^{10}\overset{100}{\equiv}49$

پس دو رقم سمت‌راست عدد 13^{10} برابر با ۴۹ می‌باشد.

۳ـ

$2^4=16\overset{17}{\equiv}-1 \Longrightarrow 2^4\overset{17}{\equiv}-1 \Longrightarrow$

$(2^4)^{284}\overset{17}{\equiv}(-1)^{284}$

$2^{1136}\overset{17}{\equiv}1 \Longrightarrow 2^{1137}\overset{17}{\equiv}1\times 2 \Longrightarrow 2^{1137}\overset{17}{\equiv}2$

لذا طبق قضیه باقیماندهٔ تقسیم 2^{1137} بر ۱۷ با باقیمانده تقسیم ۲ بر ۱۷ برابر است که باقیمانده تقسیم ۲ بر ۱۷، عدد ۲ می‌باشد.

۴ ـ می‌خواهیم بدون بسط ثابت کنیم:

$$\begin{vmatrix} m & a-d & mb+mc \\ m & b-d & ma+mc \\ m & c-d & ma+mb \end{vmatrix}=0$$

$$\text{طرف اول}=m^2\begin{vmatrix} 1 & a-d & b+c \\ 1 & b-d & a+c \\ 1 & c-d & a+b \end{vmatrix}=$$

$$m^2\begin{vmatrix} 1 & a-d & a+b+c-d \\ 1 & b-d & a+b+c-d \\ 1 & c-d & a+b+c-d \end{vmatrix}=$$

$$m^2(a+b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & a-d & 1 \\ 1 & b-d & 1 \\ 1 & c-d & 1 \end{vmatrix}=$$

$m^2(a+b+c-d)\times 0=0$

۵ ـ برای به دست آوردن ماتریس تقارن نسبت به خط

$3x-2y=0$

به‌طریق زیر عمل می‌کنیم:

$3x-2y=0 \Longrightarrow y=\frac{3}{2}x \Longrightarrow m=tg\alpha=\frac{3}{2}$

از طرفی $\to \cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1-\frac{9}{4}}{1+\frac{9}{4}}=-\frac{5}{13}$

$\sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{2\times\frac{3}{2}}{1+\frac{9}{4}}=\frac{12}{13}$

ماتریس تقارن نسبت به خط $y=mx$ یا خط $y=tg\alpha\times x$ $=\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$

پس ماتریس تقارن نسبت به خط $y=\frac{3}{2}x$ برابر است با

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

جواب تشریحی تستها

۱ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

$(p \Longrightarrow q)\vee[p \Longrightarrow (q\wedge r)]\equiv$

$(p \Longrightarrow q)\vee[(p \Longrightarrow q)\wedge(p \Longrightarrow r)]$

$\overset{\text{قانون جذب}}{\equiv}(p \Longrightarrow q)$

۲ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

$[p \Longrightarrow (q\vee r)]\wedge(\sim p\wedge r)\equiv$

$[\sim p\vee(q\vee r)]\wedge(\sim p\wedge r)$

$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{\equiv}([\sim p\vee(q\wedge r)]\wedge\sim p)\wedge r \overset{\text{قانون جذب}}{\equiv}\sim p\wedge r$

۳ ـ گزینه (الف) صحیح است زیرا:

اولاً ـ خواص حلقه تعویض‌پذیر برای U به‌راحتی قابل تحقیق‌است. ثانیاً ـ گزینه (ب) غلط است چون $1\notin U$ و گزینه (ج) غلط‌است زیرا U مقسوم علیه‌صفر ندارد و گزینه (د) غلط است زیرا اعضای غیرصفر در U وارون‌ضربی ندارند.

۴ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

می‌دانیم مقدمات یك استنتاج همواره دارای ارزش درست هستند:

$\sim p\wedge s\equiv T \Longrightarrow \sim p\equiv T\wedge s\equiv T$

$p\vee q\equiv\sim p \Longrightarrow q\wedge$

از طرفی $\sim p$

$\therefore q$ قانون انتزاع

بنابراین گزاره‌های s و $\sim p$ و q هرسه ارزش درست دارند

در نتیجه:

$s\vee q\equiv T$ و $q\wedge\sim p\equiv T$ و $s\wedge q\equiv T$

۵ ـ گزینه (ج) صحیح است زیرا:

$2\in I\ ,\ \frac{1}{2}\in Q \Longrightarrow 2\times\frac{1}{2}\in I \Longrightarrow 1\in I$

$\Longrightarrow I=Q$

۶ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

حلقهٔ R را حوزهٔ درست گوییم هرگاه تعویض‌پذیر بوده و فاقد مقسوم علیه‌صفر باشد درصورتی‌که $(Z_8\ ,\ \oplus\ ,\ \otimes)$ دارای مقسوم علیه‌صفر است $(2\times4=0)$

۷ ـ گزینهٔ (ج) صحیح‌است زیرا:

$A\ ,\ B \Longrightarrow$ پاد متقارن و تعویض‌پذیر

$A'=-A$ و $B'=-B$ و $AB=BA$

$(\underline{AB})'=(BA)'=A'B'=(-A)(-B)=\underline{AB}$

۸ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

به طور کلی مقادیر ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از معادلهٔ

$k^2-(a+d)k+ad-bc=0$

به‌دست می‌آید. پس داریم:

$a+d=(-1)+(-1)=-2$ و $ad-bc=-3$

$\Longrightarrow k^2+2k-3=0 \Longrightarrow k=1$ یا $k=-3$

۹ ـ گزینهٔ (الف) صحیح‌است زیرا:

می‌دانیم اگر A یك‌ماتریس متعامد باشد همواره

$A^{-1}=A'$

پس: $(A^{-1})'=(A')'=A$

۱۰ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

$11^{10}-1=(11-1)(11^9+11^8+\cdots+1)$

$=10(11^9+11^8+\cdots+1)$

از طرفی $11^n\overset{10}{\equiv}1$ پس خواهیم داشت:

$\overbrace{11^9+11^8+\cdots+1}^{\text{۱۰ مرتبه}}\overset{10}{\equiv}1+1+\cdots+1=10$

$\Longrightarrow 11^{10}-1=10(10k)=100k$

۱۱ ـ گزینهٔ (الف) صحیح است زیرا:

$2x\overset{7}{\equiv}1 \Longrightarrow 2x\overset{7}{\equiv}7+1 \Longrightarrow 2x\overset{7}{\equiv}8$

$\Longrightarrow x\overset{7}{\equiv}4 \Longrightarrow x=7k+4$

۱۲ ـ گزینهٔ (ب) صحیح‌است زیرا:

$2^3\overset{7}{\equiv}1$ و $12\overset{7}{\equiv}-1 \Longrightarrow$

$$2^{3n+1}+13^{2n+1}\equiv(2^3)^n\times 2+(13)^{2n}\times 13$$

$$\Rightarrow 2^{3n+1}+13^{2n+1}\overset{7}{\equiv}2-1=1$$

حل مسائل جبر سال اول

-۱

A)
$$\begin{cases}\left(\sqrt[7]{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt[7]{2+\sqrt{3}}\right)=\sqrt[7]{4-\sqrt{9}}\\ =\sqrt[7]{4-3}=\sqrt[7]{1}=1\\ a\sqrt[4]{a^{-4}}=a\times a^{\frac{-4}{4}}=a\times a^{-1}=a^{1-1}=a^{0}=1\end{cases}$$

بنابراین حاصل : $\xRightarrow{\text{حاصل}} 1-1=0$

B)
$$\begin{cases}\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}=\sqrt[5]{\sqrt{2}\sqrt[3]{\sqrt{8}}}=\sqrt[5]{2\sqrt[6]{8}}\\ =\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^6\times 8}}=\sqrt[30]{2^6\times 2^3}=\sqrt[30]{2^9}=2^{\frac{9}{30}}\\ =2^{\frac{3}{10}}=2^{0/3}\\ \left(\sqrt{\sqrt[5]{2}}\right)^3=\left(\sqrt[10]{2^3}\right)=2^{\frac{3}{10}}=2^{0/3}\end{cases}$$

$$\sqrt[10]{8}=\sqrt[10]{2^3}=2^{\frac{3}{10}}=2^{0/3}$$

بنابراین حاصل:

$$\xRightarrow{\text{حاصل}} 2^{0/3}+2^{0/3}-2^{0/3}-2^{0/3}=0$$

C) $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=?$

به‌طور کلی اگر داشته باشیم $A^2-B=C^2$ داریم:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

بنابراین داریم : $4^2-7=16-7=9$

و در نتیجه داریم:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{4+3}{2}}+\sqrt{\frac{4-3}{2}}$$

$$\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{4+3}{2}}-\sqrt{\frac{4-3}{2}}$$

$$\xRightarrow{\text{حاصل}}\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}$$

$$=2\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}=0$$

-۲

A) $$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$$

B) $$\frac{5}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{2\times 7}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{2\times 7}+\sqrt[3]{2^2}}$$

$$=\frac{5(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})}{5}=\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}$$

C) $$\frac{C}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}=\frac{c(\sqrt[3]{a}-\sqrt{b})}{\sqrt[3]{a^2}-b}\times$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^4}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2}{\sqrt[3]{a^4}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2}=$$

$$\frac{c(\sqrt[3]{a}-\sqrt{b})(a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2)}{a^2-b^3}$$

D) $$\frac{6}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}\times$$

$$\frac{(1+\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6})}{(1+\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6})}=$$

$$\frac{6(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6})}{1+2+3-3\sqrt[3]{1\times 2\times 3}}=$$

$$\frac{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}}{1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}$$

(در قسمت D از اتحاد:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=$$
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

استفاده شد).

$$=\frac{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}}{1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}\times$$

$$\frac{1+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}+\sqrt[3]{\frac{9}{16}}}{1+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}+\sqrt[3]{\frac{9}{16}}}=$$

$$\frac{(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6})\left(1+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}+\sqrt[3]{\frac{9}{16}}\right)}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6})$$
$$(4+\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{36})$$

۳ ـ برای به دست آوردن ریشه‌های معادله کافی است هریک از عامل‌ها را مساوی صفر قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$2x^2+5=0\Rightarrow x^2=\frac{-5}{2}$$ (ریشهٔ حقیقی ندارد)

$$x^3-1=0\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$$

$$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

$$x^2-3x+2=0\Rightarrow(x-1)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\Rightarrow x=1\\ x-2=0\Rightarrow x=2\end{cases}$$

$$2x-1=0\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب چنین است:

$$R=\left\{x\,|\,x=1(\text{ریشهٔ سه گانه}),x=-1,x=\frac{1}{2},x=2\right\}$$

$$x\in\left\{-1,\frac{1}{2},1,2\right\}$$

-۴

$$\begin{cases}\frac{(xy)^2}{x^2+y^2}=\frac{8}{9}\\ \frac{x^2-y^2}{(xy)^2}=\frac{7}{8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{9}{8}\\ \frac{x^2-y^2}{x^2y^2}=\frac{7}{8}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{9}{8}\\ \frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{7}{8}\end{cases}$$

از جمع دو رابطهٔ دستگاه داریم:

$$\Rightarrow\frac{2}{y^2}=\frac{9+7}{8}\Rightarrow y^2=\frac{16}{16}\Rightarrow y^2=1$$

$$\Rightarrow\boxed{y=1}$$ و $$1+\frac{1}{x^2}=\frac{9}{8}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^2}=\frac{9}{8}-1\Rightarrow\frac{1}{x^2}=\frac{1}{8}\Rightarrow$$

$$x^3=8\Rightarrow\boxed{x=2}$$

-۵

$$\begin{cases}1:\ \frac{2x-1}{2}+\frac{2x+1}{3}>\frac{x-1}{6}\\ 2:\ \frac{5x-1}{3}-\frac{x+2}{4}<\frac{2x-1}{12}\end{cases}$$

$$1:\ \frac{2x-1}{2}+\frac{2x+1}{3}>\frac{x-1}{6}\Rightarrow$$

$$\frac{3(2x-1)+2(2x+1)}{6}>\frac{x-1}{6}$$

$$9x-3+4x+2>x-1 \Rightarrow$$

$$13x-1>x-1 \Rightarrow 13x-x>0 \Rightarrow$$

$$12x>0 \Rightarrow \boxed{x>0}$$

$$\frac{5x-1}{3}-\frac{x+2}{4}<\frac{2x-1}{12} \Rightarrow$$

$$\frac{4(5x-1)-3(x+2)}{12}<\frac{2x-1}{12}$$

$$20x-4-3x-6<2x-1 \Rightarrow$$

$$17x-10<2x-1 \Rightarrow 15x<9 \Rightarrow$$

$$\boxed{x<\frac{3}{5}} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$0<x<\frac{3}{5}$ (جواب نامعادله)

$0 \quad <x<\frac{3}{4}$

جواب تشریحی تستها

۱ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا داریم:

$$m(mx-1)=2x$$

$$m^2x-m=2x \Rightarrow m^2x-2x=m \Rightarrow$$

$$x=\frac{m}{m^2-2} \Rightarrow m^2-2=0 \Rightarrow$$

$$m^2=2 \begin{cases} m=\sqrt{2} \\ m=-\sqrt{2} \end{cases}$$

۲ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است. زیرا اگر درجهٔ مقسوم را به n و درجهٔ مقسوم‌علیه را به m نمایش دهیم. بدیهی است درجهٔ خارج‌قسمت $n-m$ است و درجهٔ باقی‌مانده حداقل یك درجه از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر است که در این صورت درجهٔ باقی‌مانده $m-1$ می‌شود. بنابراین اگر درجهٔ خارج‌قسمت و باقی‌مانده باهم برابر باشند، خواهیم داشت:

$$n-m=m-1 \Rightarrow 2m=n+1$$

$$\Rightarrow m=\frac{n+1}{2}$$

۳ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$(x-3y)^8+(y^2-2x)^6=0 \Rightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ y^2-2x=0 \end{cases}$$

$$x=3y \Rightarrow y^2-2(3y)=0 \Rightarrow y^2-6y=0$$

$$\Rightarrow y(y-6)=0 \begin{cases} y=0 \to x=0 \\ y=6 \to x=18 \end{cases}$$

۴ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا داریم:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-2}=\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{3+2-2\sqrt{6}}=\frac{1}{5-2\sqrt{6}}\times\frac{5+2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{5+2\sqrt{6}}{25-24}=5+2\sqrt{6}$$

۵ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا در صورتی عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد. بنابراین مقادیری برای x و y قابل‌قبول است که اولاً در رابطهٔ

$$2x+3y=21$$

صدق کنند و ثانیاً مجموع ارقام عدد $\overline{34x3y}$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد یعنی:

$$3+4+x+3+y=10+x+y=9k \Rightarrow$$

$$x+y=9K-10 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

۶ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^3-27}}}=\sqrt[60]{x^3-27} \Rightarrow$$

$$x^3-27\geqslant 0 \Rightarrow x^3\geqslant 27 \Rightarrow x\geqslant 3$$

۷ ـ گزینهٔ (د) صحیح است. زیرا دستگاه در حالت کلی:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

وقتی جواب ندارد که داشته باشیم: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ بنابراین

دستگاه $\begin{cases} 3x-2my=2 \\ 2y+x+4=0 \end{cases}$ وقتی جواب ندارد که داشته باشیم:

$$\frac{3}{1}=\frac{-2m}{2}$$

و از این تساوی نتیجه می‌شود:

$m=\frac{-9}{3}$ یا $m=-3$

۸ ـ گزینهٔ (د) صحیح است. زیرا داریم:

$$\frac{(x^4-1)(x^4+x^2+1)}{x(x^2+1)(x^6-1)}$$

$$=\frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+x^2+1)}{x(x^2+1)(x^6-1)}$$

$$=\frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x(x^6-1)}=\frac{x^6-1}{x(x^6-1)}=\frac{1}{x}$$

۹ ـ گزینهٔ (د) صحیح است. زیرا داریم:

$$(x^2+y^2-2xy)(1-\frac{2xy}{x^2+y^2})\times$$

$$(x^2+y^2)^2(x^2+y^2+2xy)(1-\frac{2xy}{(x+y)^2})$$

$$=(x-y)^2(\frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2})\times$$

$$(x^2+y^2)^2(x+y)^2[\frac{(x+y)^2-2xy}{(x+y)^2}]$$

$$=(x-y)^2(x-y)^2(x^2+y^2)(x^2+y^2)$$

$$=(x-y)^4(x^2+y^2)^2$$

۱۰ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا داریم:

$$\frac{x^2}{4}+4y^2 : \frac{x^2}{4}\pm\cdots+4y^2$$

$$=(\frac{x}{2}\pm 2y)^2 : \frac{x^2}{4}\pm 2xy+4y^2$$

بنابراین اگر عبارت $\pm 2xy$ را اضافه کنیم عبارت فوق مربع کامل می‌شود.

حل مسائل جبر دوم ریاضی

۱ ـ

A) $$\sqrt[2]{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt[2]{2+\sqrt{3}}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(\sqrt[2]{2+\sqrt{3}})^x}+(\sqrt[2]{2+\sqrt{3}})^x=2$$

$$(\sqrt[2]{2+\sqrt{3}})^x=y \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}+y=2 \Rightarrow 1+y^2=2y \Rightarrow$$

$$y^2-2y+1=0$$

$$(y-1)^2=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$$

$$(\sqrt[2]{2+\sqrt{3}})^x=1 \Rightarrow$$

$\boxed{x=0}$ (جواب معادله)

B) $$\frac{x+1}{x}=y \Rightarrow y^2+\frac{1}{y^2}=2 \Rightarrow$$

$$y^4+1=2y^2 \Rightarrow y^4-2y^2+1=0$$

$(y^2-1)^2=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

$\Rightarrow \frac{x+1}{x}=\pm 1 \Rightarrow x+1=\pm x$

$\Rightarrow \left|\begin{matrix} x+1=x \Rightarrow 1=0 \quad \text{غیرممکن} \\ x+1=-x \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow \end{matrix}\right.$

$\boxed{x=-\frac{1}{2}}$ (جواب معادله)

C) $x^3-3x^2+3x-6=0 \Rightarrow$

$x^3-3x^2+3x-1-5=0$

$(x-1)^3=5 \Rightarrow x-1=\sqrt[3]{5} \Rightarrow$

$\boxed{x=1+\sqrt[3]{5}}$

D) بافرض: $x^2-x=y \Rightarrow \sqrt{y+1}+\sqrt{y+2}=3$

$\Rightarrow \sqrt{y+1}=3-\sqrt{y+2}$

$y+1=9+y+2-6\sqrt{y+2} \Rightarrow$

$6\sqrt{y+2}=10 \Rightarrow 3\sqrt{y+2}=5$

$9(y+2)=25 \Rightarrow y+2=\frac{25}{9} \Rightarrow$

$y=\frac{25}{9}-2=\frac{25-18}{9}=\frac{7}{9} \Rightarrow y=\frac{7}{9}$

$x^2-x=\frac{7}{9} \Rightarrow x^2-x-\frac{7}{9}=0 \Rightarrow$

$9x^2-9x-7=0 \Rightarrow$

$x=\frac{9\pm\sqrt{81+4\times 7\times 9}}{18}$

$\Rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{333}}{18} \Rightarrow$

$\left|\begin{matrix} x_1=\frac{9+\sqrt{333}}{18}\approx 1/514 \\ x_2=\frac{9-\sqrt{333}}{18}\approx -0/514 \end{matrix}\right.$

(ریشه‌های معادله)

۲ -

A) $2mx+(10m-3)y+9-26m=0$

از m فاکتور می‌گیریم ونتیجه می‌شود:

$m(2x+10y-26)+9-3y=0$

$\Rightarrow \left|\begin{matrix} 2x+10y-26=0 \\ 9-3y=0 \Rightarrow \boxed{y=3} \end{matrix}\right.$

$\Rightarrow 2x+10\times 3-26=0 \Rightarrow$

$2x=-4 \quad \boxed{x=-2} \Rightarrow M\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$

M نقطه‌ای است که به ازای جمیع مقادیر m خط فوق از آن می‌گذرد.

B) $(4m^2-1)x+(12m^2+4m+1)y-20m^2-8m-3=0$

از m و m^2 فاکتور می‌گیریم و داریم:

$m^2(4x+12y-20)+m(4y-8)+(y-x-3)=0$

$\Rightarrow \left|\begin{matrix} 4x+12y-20=0 \\ 4y-8=0 \\ y-x-3=0 \end{matrix}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y=2 \\ x=-1 \end{matrix}}$

$\Rightarrow M\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$

دستگاه‌اخیر سه‌معادله ودومجهول است. از دومعادلهٔ‌اول دستگاه y و x را محاسبه کرده‌ایم و در معادلهٔ‌سوم دستگاه قرار داده‌ایم، چون مقادیر به‌دست آمده درمعادلهٔ‌سوم‌نیز صدق‌می‌کند بنا براین‌دستگاه ساز گار است و درنتیجه نقطهٔ موردنظر نقطه‌ای است که به‌ازای‌جمیع مقادیر m خط فوق از آن عبور می‌کند.

۳ - a و b را باید طوری تعیین کنیم که

$\left|\begin{matrix} D: ax+y=-1 \\ D': ay+bx=1 \\ D'': 2x-y=b \end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix} \text{اولاً:}\ D'\perp D'' \\ \text{ثانیاً:}\ D'\parallel D \end{matrix}\right\}$

ضریب‌زاویه‌های خطوط چنین است:

$m_{D''}=2$ و $m_{D'}=\frac{-b}{a}$ ، $m_D=-a$

$\begin{cases} D'\perp D'' \Rightarrow m_{D'}\cdot m_{D''}=-1 \\ D'\parallel D \Rightarrow m_{D'}=m_D \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \left(\frac{-b}{a}\right)(2)=-1 \\ \left(\frac{-b}{a}\right)=-a \end{cases} \Rightarrow \left|\begin{matrix} a=2b \\ ab\neq 0 \\ b=a^2 \end{matrix}\right.$

$\Rightarrow \left|\begin{matrix} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{4} \end{matrix}\right.$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ دوخط D و D' ابتدا یك نقطه‌دلخواه از D یا D' انتخاب کرده و سپس فاصلهٔ این نقطه که مثلاً روی خط D است را ازخط D' محاسبه می‌کنیم. این‌فاصله در واقع فاصلهٔ دوخط موازی D و D' است. نقطه‌ای مانند A را روی خط D درنظر می‌گیریم:

$D: \frac{1}{2}x+y+1=0 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$

$D': \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-1=0$

فاصلهٔ AD' در واقع فاصلهٔ دو خط موازی D و D' است و داریم:

$$AD'=\frac{\left|\frac{1}{4}x_A+\frac{1}{2}y_A-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{4}(0)+\frac{1}{2}(-1)-1\right|}{\frac{\sqrt{5}}{4}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

برای‌تعیین خط: $y=mx+h$ که از نقطهٔ تقاطع D' و D'' بگذرد و با خط :

$2x+3y+1=0$

موازی‌باشد. ابتدا باید نقطهٔ‌تلاقی دوخط D' و D'' رابه‌دست آورد:

$\begin{matrix} D': \\ D'': \end{matrix}\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-1=0 \\ 2x-y-\frac{1}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\left|\begin{matrix} \frac{1}{2}x+y-2=0 \\ 2x-y-\frac{1}{4}=0 \end{matrix}\right. \Rightarrow 2x+\frac{1}{2}x-2-\frac{1}{4}=0$

$\Rightarrow \frac{5}{2}x=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\frac{9}{10} \Rightarrow$

$x=0/9$ و $y=\frac{31}{20}=1/55$

خط مفروض‌باید ازنقطهٔ $B\left|\begin{matrix}0/9\\1/55\end{matrix}\right.$ یعنی نقطهٔ تلاقی دو خط D' و D'' بگذرد و با خطی‌باضریب زاویه‌ای $m=\frac{-2}{3}$ موازی باشد. بنا براین نقطهٔ $B\left|\begin{matrix}0/9\\1/55\end{matrix}\right.$ باید درخط مفروض صدق کند وضریب زاویهٔ خط مفروض‌باید برابر $m=\frac{-2}{3}$ باشد.

$\left|\begin{matrix} 0/9m+h=1/55 \\ m=-\frac{2}{3} \end{matrix}\right. \Rightarrow$

$$0/9\left(-\frac{2}{3}\right)+h=1/55 \Longrightarrow h=2/15$$

$$\Longrightarrow y=-\frac{2}{3}x+2/15$$ (خط مطلوب)

-۴

$$\frac{2^n-3}{2^{n+1}}=\frac{61}{16} \Longrightarrow 16(2^n-3)=2^{n+1}\times 61$$

$$16\times 2^n-3\times 16=61\times 2\times 2^n \Longrightarrow$$

$$16(2^n)^2-122(2^n)-48=0$$

$$8(2^n)^2-61(2^n)-24=0 \Longrightarrow$$

$$2^n=\frac{61\pm\sqrt{61^2+4\times 8\times 24}}{16}$$

$$2^n=\frac{61+67}{16}=\frac{128}{16}=8=2^3 \Longrightarrow$$

(جواب قابل قبول)

$\boxed{n=3}$ (سومین جمله)

-۵

$$\begin{cases} a_K=a_1+(K-1)d=S \\ a_R=a_1+(R-1)d=P \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} (K-1)d+a_1=S \\ (R-1)d+a_1=P \end{array} \right.$$

از تفاضل دومعادلهٔ دستگاه داریم:

$$(K-1)d-(R-1)d=S-P$$

$$\Longrightarrow (K-R)d=S-P \Longrightarrow$$

(قدرنسبت تصاعد) (جمله‌اول تصاعد)

$$d=\frac{S-P}{K-R} \quad \text{و} \quad a_1=S-(K-1)\frac{S-P}{K-R}$$

-۶

$$\begin{cases} t_p=t_1q^{p-1}=R \\ t_s=t_1q^{s-1}=T \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} t_1q^{p-1}=R \\ t_1q^{s-1}=T \end{array} \right.$$

از تقسیم دو معادلهٔ دستگاه داریم:

$$\frac{t_1q^{p-1}}{t_1q^{s-1}}=\frac{R}{T} \Longrightarrow q^{p-s}=\frac{R}{T}$$

$$\Longrightarrow q=\sqrt[p-s]{\frac{R}{T}} \quad \text{و} \quad t_1q^{p-1}=R \Longrightarrow$$

$$t_1=Rq^{1-p}=R\left(\frac{R}{T}\right)^{\frac{p-1}{s-p}}$$

(قدر نسبت تصاعد) $q=\left(\frac{R}{T}\right)^{\frac{1}{p-s}}$

$t_1=R\left(\frac{R}{T}\right)^{\frac{p-1}{s-p}}$ (جمله اول تصاعد)

۷ ـ اگر اعداد $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ تشکیل تصاعد هندسی بدهند داریم:

$$\dots,\sqrt{3},\dots,\sqrt{5},\dots,\sqrt{7},\dots \Longrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=q^k \\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=q^s \end{array} \right. \quad (k,s\in Z) \quad (q \text{ قدر نسبت})$$

از تقسیم دو رابطهٔ اخیر داریم:

$$\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{\sqrt{\frac{7}{5}}}=\frac{q^k}{q^s} \Longrightarrow \sqrt{\frac{25}{21}}=\frac{k}{s}$$

$$\Longrightarrow \frac{k}{s}=\frac{5}{\sqrt{21}} \Longrightarrow \sqrt{21}=\frac{5s}{k}$$

(غیرممکن)

k و s اعدادصحیح می‌باشند. بنابراین $\sqrt{21}$ برابر یک عدد گویا شده است که غیرممکن است. به‌طریق مشابه (برای تصاعد حسابی) نیز ثابت می‌شود که اعداد $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ نمی‌توانند جملاتی از یک تصاعد حسابی باشند.

-۸

A) $2^x-2^{5-x}=4 \Longrightarrow 2^x-2^5\times 2^{-x}=4$

طرفین رابطهٔ اخیر را در 2^x ضرب می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$2^{2x}-2^5=4\times 2^x \Longrightarrow (2^x)^2-4(2^x)-32=0$$

$$\Longrightarrow 2^x=\frac{4\pm\sqrt{16+128}}{2}=\frac{4\pm 12}{2}$$

$$\Longrightarrow 2^x=\frac{4+12}{2}=\frac{16}{2}=8$$

$2^x=2^3 \Longrightarrow \boxed{x=3}$ (جواب قابل قبول)

B) $3^{4+8+12+\dots+4x}=81 \Longrightarrow$

$$3^{4(1+2+3+\dots+x)}=3^4$$

$$4(1+2+3+\dots+x)=4 \Longrightarrow$$

$$1+2+3+\dots+x=1$$

$$\frac{x(x+1)}{2}=1 \Longrightarrow x(x+1)=2$$

$$\Longrightarrow x^2+x-2=0$$

$$(x-1)(x+2)=0 \Longrightarrow \boxed{x=1}$$

(جواب قابل قبول)

C) $25^x=20^x+16^x \Longrightarrow 5^{2x}=(4\times 5)^x+4^{2x}$

$$\Longrightarrow \frac{4^{2x}+4^x\times 5^x}{5^{2x}}=1 \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x=y \Longrightarrow y^2+y-1=0$$

$$\Longrightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow$$

$\boxed{x=\log_{\frac{4}{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ (جواب قابل قبول)

D) $2^{\log x}+x^{\log 2}=2 \Longrightarrow$ (می‌دانیم: $x^{\log 2}=2^{\log x}$)

با توجه به تساوی اخیر داریم:

$$2^{\log x}+2^{\log x}=2$$

$$2\times 2^{\log x}=2 \Longrightarrow 2^{\log x}=1 \Longrightarrow$$

$$\log x\ \log 2=\log 1$$

$$\log x\ \log 2=0 \Longrightarrow \log x=0 \Longrightarrow \boxed{x=1}$$

E) $\log^x_{\sqrt{2}}+\log^x_{\sqrt[3]{3}}+\dots+\log^x_{\sqrt[n]{n}}=1 \Longrightarrow$

(می‌دانیم: $\log^x_a=\log^{x^n}_{a^n}$)

با توجه به تساوی اخیر داریم:

$$\log_2^{x^2}+\log_3^{x^3}+\dots+\log_n^{x^n}=1$$

$$\frac{\log x^2}{\log 2}+\frac{\log x^3}{\log 3}+\dots+\frac{\log x^n}{\log n}=1$$

$$\Longrightarrow \frac{2\log x}{\log 2}+\frac{3\log x}{\log 3}+\dots+\frac{n\log x}{\log n}=1$$

$$\Longrightarrow \log x\left[\frac{2}{\log 2}+\frac{3}{\log 3}+\dots+\frac{n}{\log n}\right]=1$$

$$\Longrightarrow \log x=\frac{1}{\left(\frac{2}{\log 2}+\frac{3}{\log 3}+\dots+\frac{n}{\log n}\right)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x=10^{\left(\frac{2}{\log 2}+\frac{3}{\log 3}+\dots+\frac{n}{\log n}\right)^{-1}}}$$

۹ ـ از $\log_{\frac{4}{3}}(x^2-1)\geqslant -2$ نتیجه می‌شود:

$$x^2-1\geqslant\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \Longrightarrow x^2\geqslant 1+\frac{9}{16}$$

$$\Longrightarrow x^2\geqslant\frac{25}{16} \Longrightarrow \begin{cases} x\geqslant\frac{5}{4} \\ \text{یا} \\ x\leqslant -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{|x|\geqslant\frac{5}{4}}$$

۱۰ - با فرض:

$$\log x=\log y=\log z=k$$

عبارت:

$$P=\sqrt[7]{\frac{x^5\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[5]{x^3y^2z}}}$$

چنین است:

$$\log P=\log\left(\sqrt[7]{\frac{x^5\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[5]{x^3y^2z}}}\right)$$

$$\Rightarrow \log P=\frac{1}{7}\left[5\log x+\frac{2}{3}\log y-\frac{3}{5}\log x-\frac{2}{5}\log y-\frac{1}{5}\log z\right]$$

$$\log P=\frac{1}{7}\left[5k+\frac{2}{3}k-\frac{3}{5}k-\frac{2}{5}k-\frac{1}{5}k\right]$$

$$\log P=\frac{k}{7}\left[5+\frac{2}{3}-\frac{6}{5}\right]$$

$$\log P=\frac{k}{7}\left(\frac{75+10-18}{15}\right)=\frac{67k}{105}$$

$$\log P=\frac{67k}{105}\Rightarrow \boxed{P=10^{\frac{67k}{105}}}$$

جواب تشریحی تستها

۱ - گزینهٔ (ج) صحیح‌است. زیرا داریم:

$$\begin{cases}x'+x''=-2m\\ x'x''=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log a+\log b=-2m\\ \log a\log b=-3\end{cases}$$

$$\frac{\log(ab)}{\log a\log b}=\frac{\log a+\log b}{\log a\log b}=\frac{-2m}{-3}=\frac{2m}{3}$$

۲ - گزینهٔ (ب) صحیح‌است، زیرا اگر یك ریشهٔ معادلهٔ

$$ax^2+bx+c=0$$

به شکل گنگ $p+\sqrt{q}$ باشد وضرایب a و b و c گویاباشند، ریشهٔ دیگرمعادله $p-\sqrt{q}$ است. پس اگر یك ریشهٔ معادله $2-\sqrt{3}$ باشد ریشهٔ دیگر معادله $2+\sqrt{3}$ است که برابر $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ می‌شود.

۳- گزینه (ب) صحیح‌است، زیرا باتوجه به اتحاد:

$$(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC)=A^3+B^3+C^3-3ABC$$

داریم:

$$x^6+y^6+z^6=3x^2y^2z^2\Rightarrow$$
$$(x^2)^3+(y^2)^3+(z^2)^3-3(x^2)(y^2)(z^2)=0$$

$$(x^2+y^2+z^2)\times$$
$$(x^4+y^4+z^4-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x=0\\ y=0\\ z=0\end{vmatrix}\\ \text{یا}\\ x^4+y^4+z^4-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2=0\end{cases}$$

$$x^4+y^4+z^4-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2\equiv$$
$$\frac{1}{2}[(x^2-y^2)^2+(x^2-z^2)^2+(y^2-z^2)^2]=0$$

از تساوی اخیر داریم: $x^2=y^2=z^2$

پس عبارت $\frac{\sqrt[6]{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{y^2}+\sqrt[6]{z^2}}$ برابر است با:

$$\frac{\sqrt[6]{x^2+x^2+x^2}}{\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x^2}}=\frac{\sqrt[6]{3x^2}}{3\sqrt[6]{x^2}}=\frac{\sqrt[6]{3}}{3}$$

(به‌ازای جواب $x=y=z=0$ عبارت مبهم است).

۴ - گزینه (ج) صحیح‌است. زیرا داریم:

$$\frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{x^n+1+\frac{1}{x^n}}=\frac{1}{4}$$

$$x^n+\frac{1}{x^n}+1=4\Rightarrow x^n+\frac{1}{x^n}=3$$

و
$$\frac{x^{2n}}{x^{4n}+x^{2n}+1}=\frac{1}{x^{2n}+1+\frac{1}{x^{2n}}}$$

$$=\frac{1}{x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}+1}=\frac{1}{(x^n+\frac{1}{x^n})^2-2+1}$$

$$=\frac{1}{(x^n+\frac{1}{x^n})^2-1}=\frac{1}{(3)^2-1}=\frac{1}{8}$$

۵ - گزینه (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$\sqrt{\log(x^2-3)}\Rightarrow\log(x^2-3)\geqslant 0$$

$$\log(x^2-3)\geqslant\log 1\Rightarrow x^2-3\geqslant 1\Rightarrow$$

$$x^2\geqslant 4\Rightarrow x\geqslant 2\quad\text{یا}\quad x\leqslant -2$$

۶ - گزینه (د) صحیح است. زیرا داریم:

$$\frac{n}{\log_2 n+1}+\frac{n}{\log_{\frac{3}{2}} n+1}+\dots+\frac{n}{\log_{\frac{n+1}{n}} n+1}$$

$$=n\log_{n+1}2+n\log_{n+1}\frac{3}{2}+\dots+n\log_{n+1}\frac{n+1}{n}$$

$$=n(\log_{n+1}2+\log_{n+1}\frac{3}{2}+\dots+\log_{n+1}\frac{n+1}{n})$$

$$=n\log_{n+1}(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\dots\times\frac{n+1}{n})$$

$$=n\log_{n+1}n+1=n$$

۷ - گزینه (ب) صحیح است. زیرا مجموع جملات یك تصاعدحسابی با قدرنسبت d وجمله اول a برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

و یا:

$$S_n=an+\frac{n(n-1)d}{2}$$

و یا:

$$S_n=\frac{dn^2}{2}+(a-\frac{d}{2})n\equiv 6n^2+9n\log_n\frac{1}{n}$$

$$=6n^2-9n\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{2}=6\Rightarrow d=12\\ a-\frac{d}{2}=-9\end{cases}$$

$$a-6=-9\Rightarrow a=-3$$

۸ - گزینه (ج) صحیح‌است. زیرا داریم:

$$x'+x''=\frac{m}{2}\ \text{و}\ x'x''=\frac{4}{2}=2$$

$\frac{m}{2}$ واسطه حسابی بین اعداد ۲ و ۵ است پس:

$$\frac{m}{2}=\frac{5+2}{2}\Rightarrow m=7$$

۹ - گزینه (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$\left[(1-\frac{1}{3})^2(1-\frac{1}{4})^2(1-\frac{1}{5})^2\dots(1-\frac{1}{n})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[(\frac{2}{3})^2(\frac{3}{4})^2(\frac{4}{5})^2\dots(\frac{n-1}{n})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\dots\times\frac{n-1}{n})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{4}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{n}$$

۱۰ - گزینه (ب) صحیح است. زیرا داریم:

$$\log 5^{25}=25\log 5=25\log\frac{10}{2}=25[\log 10-\log 2]$$

$$=25[1-\log 2]=25[1-0.301]$$

$$=25\times 0.699=17.475\Rightarrow$$

$\log 5^{25} = 17/475$

می‌دانیم مفسر لگاریتم هرعدد بهاضافه یك، تعداد ارقام عدد را نتیجه می‌دهد ودرنتیجه تعداد ارقام عدد 5^{25} برابراست با: $17+1=18$ پس ۱۸ رقمی است.

حل مسائل جبر سوم ریاضی

-۱

$$\lim_{x\to 1}(3x-2)=$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<|x-1|<\delta \Longrightarrow |3x-2-1|<\varepsilon$$

$$|3x-2-1|=|3x-3|=3|x-1|<\varepsilon \Longrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow \delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

اگر $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ اختیارشود رابطه شرطی یك گزاره همیشه‌درست است ودر واقع‌یك‌رابطه‌شرطی همیشه‌درست‌است که‌یك‌استلزام منطقی می‌باشد زیرا:

$$0<|x-1|<\delta<\frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Longrightarrow 3|x-1|<\varepsilon$$

$$|3x-3|<\varepsilon \Longrightarrow |3x-2-1|<\varepsilon$$

-۲

A) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{0}{0}$ مبهم $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)}{(x-1)}=$$ (رفع ابهام)

$$\lim_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)=n$$

رفع ابهام می‌کنیم یعنی عامل ابهام $(x-1)$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم.

B) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^n-1)}{x^2-1} \Longrightarrow$

$$x-1=t \Longrightarrow \underset{x\to 1\ \ t\to 0}{x=t+1} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin[t((t+1)^{n-1}+(t+1)^{n-2}+\dots+1)]}{t(t+2)}$$

$$\equiv \lim_{t\to 0}\frac{t[(t+1)^{n-1}+(t+1)^{n-2}+\dots+1]}{t(t+2)}=$$

رفع ابهام:

$$\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^{n-1}+(t+1)^{n-2}+\dots+1}{t+2}=\frac{n}{2}$$

C) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{0}{0} \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$ رفع ابهام:

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=-\frac{1}{2}$$

-۳

A) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=$

(حالت مبهم $\infty-\infty$)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}\right)=$$ رفع ابهام:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}\right)=\frac{1}{4}$$

B) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\,tg\frac{\pi x}{2}=0\times\infty$ حالت مبهم

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{cotg\frac{\pi x}{2}}=\frac{0}{0} \Longrightarrow$$ قاعده هوپیتال $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-2x}{-\frac{\pi}{2}(1+cotg^2\frac{\pi x}{2})}=\frac{4}{\pi}$$

C) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgtgtgtg\,x\ tg\,mx}{\sin\sin\sin x\ \sin nx}\right) \overset{\text{همارزی}}{\equiv}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\times mx}{x\times nx}=\frac{m}{n}$$

۴- شرط پیوستگی تابع درنقطهٔ $x_0=-1$ چنین‌است.

$$f(x)=\begin{cases}5-k^2x^2 & x>-1\\ x+2 & x\leqslant -1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^-}f(x)=f(-1)=1$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x+2)=1\\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(5-k^2x^2)=5-k^2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow 5-k^2=1 \Longrightarrow k^2=4 \Longrightarrow k=\pm 2$$

-۵

A) $y=\frac{x^{100}+3x^{75}+x^{51}}{x^{50}} \Longrightarrow$

$$y'=\frac{(100x^{99}+225x^{74}+51x^{50})x^{50}-50x^{49}(x^{100}+3x^{75}+x^{51})}{(x^{50})^2}$$

$$\Longrightarrow y'=\frac{x^{100}(100x^{49}+225x^{24}+51-50x^{49}-150x^{24}-50)}{x^{100}}$$

$$\Longrightarrow y'=50x^{49}+75x^{24}+1$$

(روش ساده‌تر: کسررا تفکیك می‌کنیم و سپس مشتق می‌گیریم)

B) $y=\sqrt[5]{x^3+x+1} \Longrightarrow$

$$y'=\frac{3x^2+1}{5\sqrt[5]{(x^3+x+1)^4}}$$

۶- معادله خط‌قائم برمنحنی‌نمایش تابع $y=\frac{x-1}{x+1}$ درنقطه‌ای به طول $x_0=1$ چنین است:

$$y(1)=\frac{1-1}{1+1}=0$$

$$y'=\frac{2}{(x+1)^2} \Longrightarrow m=\frac{2}{(1+1)^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow m'=-2$ ضریب زاویه خط قائم

$$y-0=-2(x-1) \Longrightarrow$$

معادله خط قائم: $\boxed{y=-2x+2}$

۷- همان طورکه می‌دانیم محل تلاقی مجانب‌های افقی و قائم منحنی هموگرافیك مرکز تقارن منحنی است. بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Longrightarrow \text{مرکز تقارن } \omega \left| \begin{array}{l} x=-\frac{d}{c} \\ y=\frac{a}{c} \end{array}\right.$$

$$\omega \left| \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \\ 2 \end{array}\right. \text{ و } \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} -\frac{d}{c}=-\frac{2}{3} \\ \frac{a}{c}=2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow d=\frac{2}{3}c \quad \text{و} \quad a=2c$$

از طرفی منحنی هموگرافیك بـر خط $y=x-1$ باید مماس باشد.

بنابراین معادله درجه دومی که از قطع دومنحنی حاصل می‌شود باید ریشه مضاعف داشته باشد. یعنی:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d} \\ y=x-1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{ax+b}{cx+d}=x-1 \Longrightarrow$$

$$cx^2+(d-c-a)x-(b+d)=0$$

$$\Delta=(d-c-a)^2+4c(b+d)=0 \Longrightarrow$$

$$(c\overset{\text{فرض}}{\neq}0) \Longrightarrow b=-\frac{73}{36}c$$

$$f(x)=\frac{2cx-\frac{73}{36}c}{cx+\frac{2}{3}c}=\frac{2x-\frac{73}{36}}{x+\frac{2}{3}}=\frac{72x-73}{36x+24}$$

جواب تشریحی تستها

۱ ـ گزینه (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$P(x)=(x^{990})x^9+(x^{880})x^8+\dots+(x^{110})x+1$$

$$g(x)=\frac{(x-1)(x^9+x^8+\dots+x+1)}{x-1}$$

$$=\frac{x^{10}-1}{x-1}=0 \Longrightarrow x^{10}-1=0 \Longrightarrow x^{10}=1$$

$$P(x)=(x^{10})^{99}x^9+(x^{10})^{88}x^8+\dots+$$
$$(x^{10})^{11}x+1$$

$$R(x)=1^{99}\times x^9+1^{88}\times x^8+\dots+$$
$$1^{11}\times x+1=x^9+x^8+\dots+x+1$$

چون $R(x)=g(x)$ پس: $R=0$

۲ ـ گزینه (الف) صحیح است. زیرا داریم:

$$\text{جمله عمومی بسط}=\binom{k}{n}X^{n-k}Y^k$$

$$\text{جمله } k+1 \text{ ام}=\binom{k}{n}(\sqrt[3]{x^2})^{n-k}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right)^k$$

$$=\binom{k}{n}x^{\frac{2(n-k)}{3}}\times x^{-\frac{3k}{5}}=\binom{k}{n}x^{\frac{2(n-k)}{3}-\frac{3k}{5}}$$

$$\text{جمله } k+1 \text{ ام}=\binom{k}{n}x^{\frac{10(n-k)-9k}{15}}$$

$$=\binom{k}{n}x^{\frac{10n-19k}{15}} \xRightarrow{(\text{مستقل از } x)}$$

$$10n-19k=0 \Longrightarrow n=\frac{19k}{10}$$

$$n\in N \Longrightarrow k=10m \Longrightarrow$$

$$n=\frac{19(10m)}{10}=19m \Longrightarrow n=19k$$

۳ ـ گزینه (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$x\in(0,1) \Longrightarrow 0<x<1 \Longrightarrow 1<x+1<2$$

$$\Longrightarrow [x+1]=1 \Longrightarrow f([x+1]\log x)=f(\log x)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \log x=0 \to x=1 \\ \log x=1 \to x=10 \end{cases} \Longrightarrow x\in(1,10)$$

۴ ـ گزینه (الف) صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}\right)$$

$$\overset{\text{هم‌ارزی}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}\right)$$

$$\overset{\text{هوپیتال}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}\overset{\text{هوپیتال}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x}{24x}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=}\frac{-8}{24}=-\frac{1}{3}$$

۵ ـ گزینه (ب) صحیح است.

$$y=x^2+\cos x$$

$$y'=2x-\sin x \Longrightarrow$$

$$m=y'(0)=2\times 0-\sin 0=0 \Longrightarrow$$

$$m=0 \quad \text{ضریب زاویه خط مماس} \quad m'=\frac{1}{m}$$

$$y(0)=0+\cos 0=1 \Longrightarrow M\left|\begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}\right.$$

$$y-y_1=m'(x-x_1)$$

معادله خط مماس چنین است:

$$y-1=0$$

بنابراین خط مماس خطی است به عرض $y=1$ و موازی محور x ها است. بنابراین معادله خط قائم $x=0$ است.

حل مسائل جبر چهارم ریاضی

۱ـ حد تابع $y=\dfrac{\sin\sin\cdots\sin x}{\mathrm{tg}\,\mathrm{tg}\cdots\mathrm{tg}\,x}$ وقتی $x\to 0$ برابر است با:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin\sin\cdots\sin x}{\mathrm{tg}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{tg}\cdots\mathrm{tg}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{tg}\,x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

۲ـ پیوستگی تابع $f(x)$ درنقطهٔ $x_0=1$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{x-1}{|x-1|}+1 & \text{اگر } x\neq 1 \\ 1 & \text{اگر } x=1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{x-1}{x-1}+1 & \text{اگر } x>1 \\ 1 & \text{اگر } x=1 \\ x^2-\dfrac{x-1}{x-1}+1 & \text{اگر } x<1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{اگر } x>1 \\ 1 & \text{اگر } x=1 \\ x^2 & \text{اگر } x<1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+2)=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2)=1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x) \Longrightarrow$$

درنقطهٔ $x_0=1$ تابع حد ندارد

بنابراین چون تابع درنقطهٔ $x_0=1$ حد ندارد بنابراین تابع دراین نقطه ناپیوستگی اساسی دارد.

۳ ـ برای مشتق‌پذیری یك تابع دریك نقطه باید داشته باشیم:

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$$

$$f'_+(-3)=\lim_{x\to -3^+}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=$$

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{Ax+5+4}{x+3}=\lim_{x\to -3^+}\frac{Ax+9}{x+3}$$

$$\Longrightarrow A(-3)+9=0$$

$$f'_-(-3)=\lim_{x\to -3^-}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=$$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{Cx^2+B+4}{x+3}=\lim_{x\to -3^-}\frac{Cx^2+B+4}{x+3}.$$

$$\Longrightarrow C(-3)^2+B+4=0$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}-3A+9=0 \Longrightarrow \boxed{A=3}\\ 9C+B+4=0 \Longrightarrow \boxed{B=-9C-4}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{vmatrix}\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{3x+9}{x+3}=3\\ \lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{Cx^2-9C-4+4}{x+3}=-6C\end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow -6C=3\ \boxed{C=\frac{-1}{2}}\quad \text{و}\quad \boxed{B=\frac{1}{2}}$$

(روش ساده‌تر استفاده از شرایط پیوستگی است.)
(زیرا هر تابع مشتق‌پذیر باشد پیوسته‌نیز می‌باشد)

۴ـ مشتق دوم $f(x^3+x)$ چنین‌است:

مشتق مرتبهٔ اول:

$$[f(x^3+x)]' \Longrightarrow (3x^2+1)f'(x^3+x)$$

و مشتق مرتبهٔ دوم:

$$[(3x^2+1)f'(x^3+x)]' \Longrightarrow$$
$$(6x)f'(x^3+x)+(3x^2+1)^2f''(x^3+x)$$

۵ـ اگر منحنی‌تابع: $y=\dfrac{3x+6}{3x^2+Kx+S}$ فقط مجانب قائمی به معادلهٔ $x-2=0$ داشته‌باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم مخرج باید ریشهٔ مضاعف $x'=x''=2$ داشته باشد. بنابراین داریم:

$$3x^2+Kx+S=0$$

$$\begin{cases}\Delta=K^2-12S=0 \Longrightarrow\\ S=\dfrac{K^2}{12}=\dfrac{(-12)^2}{12}=12 \Longrightarrow \boxed{S=12}\\ x'=x''=\dfrac{-K}{2\times 3}=\dfrac{-K}{6}=2 \Longrightarrow\\ -K=12 \Longrightarrow \boxed{K=-12}\end{cases}$$

۶ـ ابتدا معادلهٔ درجهٔ سوم:

$$x^3-3x^2+4x+m=0$$

را با تبدیل $x=X+1$ به معادلهٔ ناقص تبدیل می‌کنیم.

$$(X+1)^3-3(X+1)^2+4(X+1)+m=0$$
$$X^3+3X^2+3X+1-3X^2-6X-3+4X$$
$$+4+m=0$$

پس‌از اختصار لازم داریم:

$$X^3+X+m+2=0 \Longrightarrow \Delta x=4p^3+27q^2$$
$$\Delta_X=4(1)^3+27(m+2)^2$$

همان‌طور که از مبین معادله مشخص است

$$\begin{cases}\Delta_X<0 & \text{معادله سه‌ریشهٔ حقیقی دارد.}\\ \Delta_X=0 & \text{یك‌ریشه مضاعف و یك‌ریشهٔ‌ساده}\\ \Delta_X>0 & \text{یك ریشهٔ حقیقی دارد.}\end{cases}$$

معادله همواره و به ازای هر m حقیقی یك ریشهٔ حقیقی دارد زیرا همواره $\Delta_X>0$ است. ریشهٔ معادلهٔ درجه‌سوم:

$$X^3+pX+q=0$$

درحالت $\Delta\geqslant 0$ چنین است:

$$X=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \Longrightarrow$$

$$m=2:\ X^3+X+4=0$$

بنابراین داریم:

$$X^3+X=4=0 \Longrightarrow$$

$$X=\sqrt[3]{-\frac{4}{2}+\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{4}{2}-\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3}}$$

ریشهٔ معادله:

$$X=\sqrt[3]{-2+\sqrt{4+\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{4+\frac{1}{27}}} \Longrightarrow x=X+1$$

ـ۷

$$A)\ \int\frac{x^3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}dx=\int\frac{x^3\times x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{5}}}dx=$$

$$\int x^{3+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}}dx=\int x^{\frac{46}{15}}dx=\frac{x^{\frac{46}{15}+1}}{\frac{46}{15}+1}+C$$

$$=\frac{15}{61}x^{\frac{61}{15}}+C$$

$$B)\ \frac{cotg^{100}3x}{\sin^2 3x}dx=?$$

$$\int\frac{cotg^{100}3x}{\sin^2 3x}dx=\int cotg^{100}3x(1+cotg^2x)dx$$

$$=-\frac{cotg^{101}3x}{101}+C$$

$$C)\ \int\frac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^9}dx \Longrightarrow$$

$$3x^2+2x+7=u \Longrightarrow (6x+2)dx=du$$

$$2(3x+1)dx=du \Longrightarrow (3x+1)dx=\frac{du}{2}$$

$$\int\frac{(3x+1)dx}{(3x^2+2x+7)^9}=\int\frac{\frac{du}{2}}{u^9}(u=3x^2+2x+7)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^9}=\frac{-1}{16}u^{-8}+c$$

$$=-\frac{1}{16}(3x^2+2x+7)^{-8}+c$$

۸ـ حجم‌حادث از دوران سطح محصور بین منحنی‌تابع

$$y=\sqrt{5-5x^2}$$

و محورxها چنین است:

$$v=\int_a^b \pi y^2dx$$

(نقاط تقاطع منحنی با محورxها

$$(y=0 \Longrightarrow 5-5x^2=0 \Longrightarrow x=\pm 1$$

$$v=\pi\int_{-1}^{1}(\sqrt{5-5x^2})^2dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}(5-5x^2)dx=5\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$

$$v=5\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$=5\pi\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=5\pi\left(2-\frac{2}{3}\right)$$

$$v=5\pi\left(\frac{4}{3}\right) \Longrightarrow v=\frac{20}{3}\pi$$:حجم‌حادث

۹ـ سطح محصور بین‌دومنحنی نمایش تغییرات توابع:

$$\begin{cases}y=x^2+3\\ y=-x^2+5x\end{cases}$$

چنین است:

(نقاط تقاطع دو منحنی:

$$(x^2+3=-x^2+5x \Longrightarrow$$

$$2x^2-5x+3=0 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}[(-x^2+5x)-(x^2+3)]dx=$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x^2+5x-3)dx$$

$$S=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-3x\right]_1^{\frac{3}{2}}=$$

$$\left(-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\left(\frac{3}{2}\right)\right)-\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}-3\right)$$

$$S=\frac{9}{8}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{8}+\frac{7}{6}=\frac{54+56}{48}=\frac{110}{48}$$

$\Rightarrow S=\frac{55}{24}$ واحد سطح

۱۰- چون تابع مورد نظر در $\frac{\pi}{2}$ ناپیوسته است، بنا بر این می‌توان به شکل زیر عمل کرد:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+tg^n x}$$

$$I=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{dx}{1+tg^n x}=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{dx}{1+\frac{\sin^n x}{\cos^n x}}$$

$$=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{\cos^n x\,dx}{\cos^n x+\sin^n x} \qquad (1)$$

در انتگرال (۱) با تبدیل $x\to(a-x)$ داریم:

$$I=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{\cos^n(a-x)d(a-x)}{\cos^n(a-x)+\sin^n(a-x)}$$

$$I=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx \qquad (2)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) داریم:

$$2I=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=$$

$$\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a dx=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\left(x\Big|_0^a\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$2I=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\boxed{I=\frac{\pi}{4}}$$

جواب تشریحی تستها

۱- گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا داریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{x+1}$$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\sqrt{x+1}\Longrightarrow\frac{x}{x+1}=t$$

$$\Longrightarrow x=xt+t\Longrightarrow x=\frac{t}{1-t}$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{t}{1-t}+1}=\sqrt{\frac{t+1-t}{1-t}}=\frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\Longrightarrow 1-x>0\Longrightarrow x<1$$

$$\Longrightarrow D_f=(-\infty,1)$$

۲- گزینهٔ (ج) صحیح است. زیرا قرینهٔ منحنی تابع

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$$

نسبت به نیمساز ربع اول وسوم، منحنی نمایش تابع معکوس f است. چون f یك به یك است پس معکوس‌پذیر است وضابطهٔ معکوس آن چنین است:

$$y=f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}\Longrightarrow y^3=x^3+1\Longrightarrow$$

$$x^3=y^3-1\Longrightarrow x=\sqrt[3]{y^3-1}$$

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$$

۳- گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+5}-ax-b)$$

$$\lim_{x\to+\infty}[|x-2|-ax-b]=\lim_{x\to+\infty}(x-2-ax-b)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[(1-a)x-b-2]=0\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}1-a=0\\-b-2=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}\Longrightarrow$$

$$a+b=-1$$

۴- گزینهٔ (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$\lim_{x\to-1^+}(ax^2-b)=\lim_{x\to-1^-}(ax+2b)=-1$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a-b=-1\\-a+2b=-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=-2\end{cases}$$

$$a+b=-5$$

۵- گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا هر تابع که در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد در آن نقطه پیوسته است و داریم:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to1^+}(Ax+1)=\lim_{x\to1^-}(Bx^2+2)=3$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}A+1=3\\B+2=3\end{cases}\Longrightarrow A=2 \text{ و } B=1\Longrightarrow$$

$$A-B=2-1=1\Longrightarrow A-B=1$$

حل مسائل جبر سوم تجربی

۱-

الف) $$\lim_{x\to0}\frac{1+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{1+\sin x-\cos x}=\frac{0}{0}\Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{1+\sin x-\cos x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{4}+2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{x}{4}\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{4}\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)}{2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}$$

ب) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\frac{0}{0}$$

(راه اول: با استفاده از دستور هوپیتال)

$$\Longrightarrow\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\div\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}=0\div0\right)\frac{1}{2}=0$$

راه دوم: $$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(1+\sqrt{\cos x})\times2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2(1+\sqrt{\cos x})\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\div\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2\right]\times$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{\cos x}}=1\times 0=0$$

راه سوم: استفاده از هم ارزی

ج) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\cdots\sin\frac{x}{n}}{x^n}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\times\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}\times\cdots\times\frac{\sin\frac{x}{n}}{x}\right)$$

$$=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\cdots\times\frac{1}{n}=$$

$$\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}=\frac{1}{n!}$$

تبصره: حاصل‌ضرب عددهای طبیعی از n تا ۱ را فاکتوریل n می‌نامند و به صورت $n!$ نشان می‌دهند.

$6!=6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

$5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1$ $\quad$ $4!=4\times 3\times 2\times 1$

-۲

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{a|x-1|+2x-1}{|3-x|+ax+3}=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{a(-x+1)+2x-1}{3-x+ax+3}=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(2-a)x+a-1}{(a-1)x+6}=\frac{2-a}{a-1}=\frac{3}{4}\Longrightarrow$$

$$3a-3=8-4a\Longrightarrow a=\frac{11}{7}$$

۳- شرط پیوسته بودن تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ آن است که:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$$

باشد، بنابراین داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^3+ax & , \ x>2\\ 3 & , \ x=2\\ bx+1 & , \ x<2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=2b+1=3\Longrightarrow b=1$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=8+2a=3\Longrightarrow a=\frac{-5}{2}$$

-۴

$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ ، $g(x)=tg\,x$ ،

$(fog)'(x)=f(g(x)(=\frac{2tgx}{1+tg^2x}=\sin 2x)$

$(fog)'(x)=2\cos 2x\Longrightarrow (fog)'(\frac{\pi}{8})=$

$2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

-۵

$$y=\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\Longrightarrow$$

$$y=\frac{x+b-x-a}{x^2+(a+b)x+ab}\Longrightarrow$$

$$y=\frac{b-a}{x^2+(a+b)x+ab}\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{y}=\frac{x^2+(a+b)x+ab}{b-a}\Longrightarrow$$

$$\frac{-y'}{y^2}=\frac{2x+a+b}{b-a}\Longrightarrow$$

$$\frac{-y''y^2+2y'^2y}{y^4}=\frac{2}{b-a}\Longrightarrow$$ (بافرض $y\neq 0$)

$$\frac{2y'^2-y''y}{y^3}=\frac{2}{b-a}$$

-۶

$y=x^2+ax-1$ $\quad$ $S(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$

$\Longrightarrow S(\frac{-a}{2},\frac{-4-a^2}{4})\Longrightarrow$

$-\frac{a}{2}+\frac{-4-a^2}{4}=-\frac{7}{4}\Longrightarrow$

$2a+4+a^2=7\Longrightarrow a^2+2a-3=0\Longrightarrow$

$a=1$, $a=-3$

-۷

$y=x^3+bx^2+cx-2$ ، $x+y=2$

$x=-2\Longrightarrow -2+y=2\Longrightarrow$

$y=4\Longrightarrow$ نقطهٔ تماس $(-2,4)$

$\xrightarrow{\text{در تابع}} 4=-8+4b-2c-2\Longrightarrow$

$2b-c=7$ $\quad$ (۱)

$y'=3x^2+2bx+c$ ، مماس $m=-1$ ،

به‌ازای x تماس $m=y'$ مماس ، $x=-2$ تماس

$\Longrightarrow -1=12-4b+c\Longrightarrow$

$-4b+c=-13$ $\quad$ (۲)

$$\begin{cases}2b-c=7\\ -4b+c=-13\end{cases}\Longrightarrow b=+3 \text{ و } c=-1$$

جواب تشریحی تستها

(۱)-۱

$$\frac{\overline{CA}+\overline{AB}+2\overline{BC}}{\overline{BA}+\overline{AD}+\overline{DB}+3\overline{CB}}=$$

$$\frac{\overline{CB}+2\overline{BC}}{\overline{BA}+\overline{AB}+3\overline{CB}}=\frac{\overline{BC}}{3\overline{CB}}=-\frac{1}{3}$$

۲- (۴) دستگاه دو معادلهٔ یک مجهولی

$$\begin{cases}m-1=0\\ 2m+3=0\end{cases}$$

متوافق نیست.

(۱)-۳

$A\begin{vmatrix}x=a\\ y=1-2a\end{vmatrix}$ ، $OA=\sqrt{x^2+y^2}\Longrightarrow$

$\sqrt{2}=\sqrt{a^2+(1-2a)^2}\Longrightarrow 5a^2-4a-1=0$

$\Longrightarrow a=1$, $a=-\frac{1}{5}\Longrightarrow$

$A_1\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$ و $A_2(1,-1)$

A_2 در ربع دوم نیست پس جواب نیست.

(۳)-۴

$$f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{x-1} & , \ x>0\\ x+b & , \ x\leqslant 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(2)=\frac{2a}{2-1}=2a=2\Longrightarrow a=1\\ f(-2)=-2+b=0\Longrightarrow b=2\end{cases}\Longrightarrow$$

$a+b=1+2=3$

(۲)-۵

$A(3,5)\Longrightarrow$ A_1 قرینهٔ A نسبت به نیمساز ربع اول و سوم

$A_1(5,3)\Longrightarrow AA_1$ وسط $A'(4,4)$ ، (۱)-۶

$$\lim_{x\to 0}\frac{k\sin x\sin 2x}{\cos 2x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin x\times 2\sin x\cos x}{\cos 2x\times 2\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2k\sin^2 x\cos x}{2\cos 2x\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2\cos x}{\cos 2x\times\frac{x^2}{4}}=4k$$

۷-(۲)، درجهٔ صورت کسر از درجهٔ مخرج کسر باید کمتر باشد.

(۱)-۸

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Longrightarrow$ حد : شرط پیوستگی در $x=0$

$a=4a+1\Longrightarrow a=-\frac{1}{3}$

(۳)-۹

$f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$ ، $f'''(x)=6a$

$f'(1)=0\Longrightarrow 3a+2b+c=0\quad (1)$

$f''(-2)=6\Longrightarrow -12a+2b=+6\quad (2)$

$f'''(2)=-6\Longrightarrow 6a=-6\quad (3)$

$(1)+(2)+(3)\Longrightarrow -3a+4b+c=0$

$\Longrightarrow 3a-4b-c=0$

(۴)-۱۰

$f(x)=tg(\cos\frac{x}{2})\Longrightarrow$

$f'(x)=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}(1+tg^2(\cos\frac{x}{2}))$

$f'(\pi)=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}(1+tg^2(\cos\frac{\pi}{2}))=-\frac{1}{2}$

(۴)-۱۱

$y'=3x^2+2x+5$

$y'=0\Longrightarrow 3x^2+2x+5=0$

$\Delta'=-14<0\Longrightarrow y'>0$

(۲)-۱۲

$y=x^2+ax+b$ ، $S(-2,4)$

$\frac{-a}{2}=-2\Longrightarrow a=4$ و

$\frac{4(1)(b)-a^2}{4\times 1}=4\Longrightarrow$

$4b-a^2=16\Longrightarrow b=8\Longrightarrow 2a+b=16$

(۱)-۱۳

$y=-x^2+2x$ ، $y=-3\Longrightarrow$

$-3=-x^2+2x\Longrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Longrightarrow x=3$ و $x=-1\Longrightarrow A\left|\begin{matrix}x=3\\y=-3\end{matrix}\right.$

$B\left|\begin{matrix}x=-1\\y=-3\end{matrix}\right.$ نقطهٔ مطلوب

$y'=-2x+2\Longrightarrow$ مماس در B $m=2+2=4$

$\Longrightarrow$ قائم در B $m=-\frac{1}{4}$

(۳)-۱۴

$y=x^3+ax^2+bx+1\Longrightarrow$

$y'=3x^2+2ax+b$ ، $x=-2\xrightarrow{\text{درمشتق}}$

$12-4a+b=0\Longrightarrow 4a-b=12$

حل مسائل جبر چهارم تجربی

-۱

$x^2+y^2+ax+b=0\Longrightarrow$

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}-b\Longrightarrow$

$O'\left(-\frac{a}{2},0\right)$ و $R^2=\frac{a^2}{4}-b$

$-\frac{a}{2}=1\Longrightarrow a=-2$

$O'(1,0)$ مرکز دایره و $3x-4y+12=0\Longrightarrow$

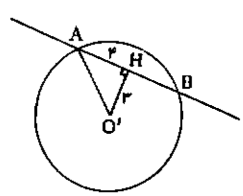
$O'H=\frac{|3+12|}{\sqrt{9+16}}=3$

$AH=\frac{AB}{2}=\frac{8}{2}=4$

$O'A^2=R^2=O'H^2+AH^2=9+16=25$

$\Longrightarrow R^2=25\Longrightarrow R=5$ شعاع دایره

$R^2=\frac{a^2}{4}-b\Longrightarrow 25=\frac{4}{4}-b\Longrightarrow b=-24$



۲- نقطهٔ تقاطع دو محور تقارن $x=2$ و $y=-1$ مرکز بیضی است.

$\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}\Longrightarrow$ مرکز بیضی $C\left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right.$

خط $x=2$ محور کانونی بیضی موازی محور عرضها است (بیضی حالت عمودی دارد).

$\begin{cases}3x+2y-10=0\\x=2\end{cases}\Longrightarrow A\left|\begin{matrix}x=2\\y=2\end{matrix}\right.$

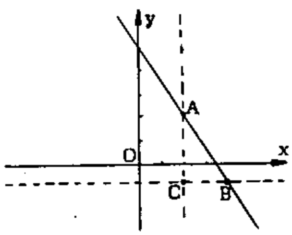
$\begin{cases}3x+2y-10=0\\y=-1\end{cases}\Longrightarrow B\left|\begin{matrix}x=4\\y=-1\end{matrix}\right.$

$CA=|y_A-y_C|=|2+1|=3=a$

$CB=|x_B-x_C|=|4-2|=2=b$

$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}+\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1\Longrightarrow$

$\boxed{\frac{(y+1)^2}{9}+\frac{(x-2)^2}{4}=1}$ معادلهٔ بیضی



-۳

$2x^2+2y^2+6x-4y-\frac{3}{2}=0\Longrightarrow$

$x^2+y^2+3x-2y-\frac{3}{4}=0\Longrightarrow$

مرکز دایره $C\left(\frac{-3}{2}, 1\right)$ و $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{9+4+3}=2\Longrightarrow R=2$

مرکز بیضی موردنظر منطبق برمرکز دایره یعنی نقطهٔ

$C\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

است و اندازهٔ قطربزرگ بیضی مساوی قطردایره‌است یعنی

$2a=2R=4$

ازآنجا $a=2$ است اما $2c=2$ پس $c=1$ است.

$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow 4=b^2+1\Longrightarrow$

$b^2=3\Longrightarrow b=\sqrt{3}$

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1\Longrightarrow$

معادلهٔ بیضی $\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$

۴-

$y^2-x^2+2x-4y+1=0 \Rightarrow$

$y^2-4y-(x^2-2x)+1=0 \Rightarrow$

$(y-2)^2-4-[(x-1)^2-1]+1=0 \Rightarrow$

$(y-2)^2-(x-1)^2=2 \Rightarrow$

$\frac{(y-2)^2}{2}-\frac{(x-1)^2}{2}=1 \Rightarrow$

مرکز هذلولی $C(1,2)$ $\quad a^2=b^2=2 \Rightarrow$

$a=b=\sqrt{2}$ هذلولی متساوی‌الساقین است.

$$\begin{cases} y^2-x^2+2x-4y+1=0 \\ y=mx+5 \end{cases} \Rightarrow$$

$(mx+5)^2-x^2+2x-4(mx+5)+1=0$

$\Rightarrow (m^2-1)x^2+2(3m+1)x+6=0$

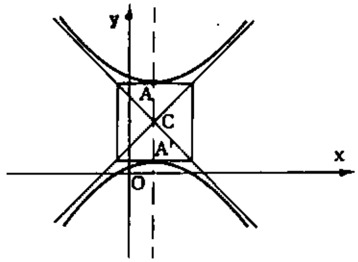
معادلهٔ طولهای نقاط تلاقی

$\Delta'=(3m+1)^2-6(m^2-1)=0 \Rightarrow$

$3m^2+6m+7=0$

$\Delta'_{\Delta}=9-21=-12<0$ و $a=3>0 \Rightarrow$

معادلهٔ تلاقی همواره دوجواب دارد یعنی خط $y=mx+5$ همواره هذلولی را در دونقطهٔ قطع می‌کند



$x_I=\frac{x'+x''}{2}=\frac{-b}{2a}=\frac{-2(3m+1)}{2(m^2-1)}=\frac{3m+1}{1-m^2}$

$\Rightarrow y_I=m(\frac{3m+1}{1-m^2})+5 \Rightarrow$

$y=\frac{3m^2+m+5-5m^2}{1-m^2}=\frac{-2m^2+m+5}{1-m^2}$

$\Rightarrow I\left(x=\frac{3m+1}{1-m^2}\right.$ و $\left.y=\frac{-2m^2+m+5}{1-m^2}\right)$

$x=\frac{3m+1}{1-m^2} \Rightarrow x-m^2x=3m+1 \Rightarrow$

$m^2x+3m+1-x=0 \Rightarrow$

$m=\frac{-3\pm\sqrt{9-4x+4x^2}}{2x}$

$$y=\frac{-2\left(\frac{-3\pm\sqrt{9-4x+4x^2}}{2x}\right)+}{1-\left(\frac{-3\pm\sqrt{9-4x+4x^2}}{2x}\right)^2}$$

$\frac{-3\pm\sqrt{9-4x+4x^2}}{2x}+5$

۵- هذلولی افقی است زیرا محور کانونی آن خط $y=2$ موازی محور طولها است، ازطرفی نقطهٔ تقاطع محور کانونی و مجانب آن مرکز هذلولی است.

$$\begin{cases} y-2=0 \\ y=7x-1 \end{cases} \Rightarrow 2=7x-1 \Rightarrow$$

$x=\frac{3}{7}$ و $y=2 \Rightarrow$

مرکز هذلولی $C\left(\frac{3}{7}\right.$ و $\left.2\right)$

$$F\left|\begin{array}{l} \alpha+c=3 \Rightarrow \frac{3}{7}+c=3 \Rightarrow \\ \beta=2 \end{array}\right.$$

$c=+\frac{18}{7}$ نصف فاصلهٔ کانونی

مجانب‌ها در حالت افقی $m=\pm7=\pm\frac{b}{a} \Rightarrow$

$b=7a$ ، $c^2=b^2+a^2 \Rightarrow$

$\left(\frac{18}{7}\right)^2=49a^2+a^2=50a^2$

$\Rightarrow a=\frac{9\sqrt{2}}{35} \Rightarrow b=\frac{9\sqrt{2}}{5}$

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \Rightarrow$

$$\frac{(x-\frac{3}{7})^2}{(\frac{9\sqrt{2}}{35})^2}-\frac{(y-2)^2}{(\frac{9\sqrt{2}}{5})^2}=1$$

۶-

(الف) $f(x)=\sin^2x\sin3x=\frac{1-\cos2x}{2}\sin3x$

$=\frac{1}{2}(\sin3x-\sin3x\cos2x)$

$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sin3x-\frac{1}{2}(\sin5x+\sin x)\right)$

$=\frac{1}{2}\sin3x-\frac{1}{4}(\sin5x+\sin x)$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\times-\frac{\cos3x}{3}-\frac{1}{4}\times$

$(\frac{-1}{5}\cos5x-\cos x)+c \Rightarrow$

$F(x)=-\frac{1}{6}\cos3x+\frac{1}{20}\cos5x+\frac{1}{4}\cos x+c$

(ب) $f(x)=\frac{\sin2x}{\sqrt[3]{(1+\cos^2x)^2}}+\frac{x+5}{x^3+3x^2+3x+1}$

$=\sin2x(1+\cos^2x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{x+5}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow f(x)=\sin2x(1+\cos^2x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{x+1+4}{(x+1)^3}$

$=\sin2x(1+\cos^2x)^{-\frac{2}{3}}+(x+1)^{-2}+$
$4(x+1)^{-3} \Rightarrow$

$F(x)=-3(1+\cos^2x)^{\frac{1}{3}}+\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+$
$\frac{4(x+1)^{-2}}{-2}+c$

$=-3\sqrt[3]{1+\cos^2x}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+c$

۷-

$F(x)=\int(x^2-x-1)^{\frac{2}{3}}dx \Rightarrow$

$F'(x)=(x^2-x-1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$

$F'(2)=(4-2-1)^{\frac{2}{3}}=1$

۸-

$$\begin{cases} y=x^3-3x \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow x^3-3x=-x \Rightarrow$$

$x^3-2x=0 \Rightarrow x(x^2-2)=0 \Rightarrow$

$x=0$ و $x=\pm\sqrt{2} \Rightarrow$

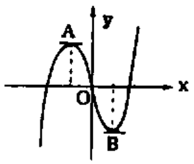
$O(0,0)$, $A(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $B(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$y_1=x^3-3x$ ، $y_2=-x \Rightarrow$

$d(x)=y_1-y_2=x^3-3x+x=x^3-2x$

$D(x)=\frac{x^4}{4}-x^2+c$

$S^{0}_{-\sqrt{2}}=\left[\frac{x^4}{4}-x^2\right]^{0}_{-\sqrt{2}}=1$ واحد سطح



جواب تشریحی تستها

۱- (۱)

$$\begin{cases} ax+y+3=0\\ 2x-y-2=0\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-y-2=0\\ y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow M\begin{vmatrix}x=1\\y=0\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{دراولی}} a+3=0 \Rightarrow a=-3$$

۲- (۲)

$$A\begin{vmatrix}x=\alpha\\ y=2\alpha+1\end{vmatrix} \text{ ، } 2=\frac{|3\alpha-8\alpha-4-1|}{\sqrt{9+16}}$$

$$\Rightarrow |-5\alpha-5|=10 \Rightarrow |\alpha+1|=2\Rightarrow$$

$$\alpha=1 \text{ و } \alpha=-3 \Rightarrow A_1\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}\quad A_2\begin{vmatrix}-3\\-5\end{vmatrix}$$

۳- (۱)

$$f(x).g(x)=1\Rightarrow$$

$$f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=0$$

۴- (۱)

$$z=f(tgx)\Rightarrow z'=(1+tg^2x)f'(tgx)$$

$$=\frac{1}{\cos^2x}\sqrt{\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}}=\frac{1}{\cos^2x}\sqrt{\cos2x}$$

۵- (۱)

$$y=-2x^3+x^2 \text{ ، } y'=-6x^2+2x$$

$$y''=-12x+2 \text{ ، } y''=0\Rightarrow$$

$x=\frac{1}{6}$ طول نقطهٔ عطف

$\Rightarrow$ مماس $m=y'$ بازای x تماس

$m=-6\left(\frac16\right)^2+2\left(\frac16\right)=\frac16$ مماس در نقطهٔ عطف

$\Rightarrow m=-6$ قائم در نقطهٔ عطف

۶- (۱)

$$y=x^3+ax^2+3x-1\Rightarrow$$

$$y'=3x^2+2ax+3 \text{ ، } 3x^2+2ax+3=0$$

$$\begin{cases}\Delta'=a^2-9<0\\3>0\end{cases}\Rightarrow a^2<9\Rightarrow$$

$$-3<a<+3$$

۷- (۱)

$$(x-1)^3+(4-2x)^3+(x-3)^3=0$$

$$(x-1)+(4-2x)+(x-3)=$$

$$2x+4-2x-4=0\Rightarrow$$

$$(x-1)^3+(4-2x)^3+(x-3)^3=$$

$$3(x-1)(4-2x)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ و } x=2 \text{ و } x=3$$

۸- (۴)

$$y=x^3-3x^2+2\Rightarrow y'=3x^2-6x$$

$$y'=0\Rightarrow x=0 \text{ و } x=2$$

$$\begin{vmatrix}x=0\\y=2\end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix}x=2\\y=-2\end{vmatrix}\Rightarrow d=|2+2|=4$$

۹- (۲)

$$y=\frac{(m-1)x+2}{x-2m}\Rightarrow O'\begin{vmatrix}x=2m\\y=m-1\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow y=\frac{x}{2}-1$$

۱۰- (۲) نقطهٔ M باید برمرکز دایره منطبق باشد یعنی:

$$\begin{cases}a-2=1\\ b+1=-\frac12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=-\frac32\end{cases}\Rightarrow a+2b=0$$

۱۱- (۳)

$$x^2+y^2=4\Rightarrow O_1\begin{vmatrix}x=0\\y=0\end{vmatrix} \text{ و } R=2$$

$$(x-4)^2+(y+3)^2=1\Rightarrow$$

$$O_2\begin{vmatrix}4\\-3\end{vmatrix} \text{ و } R=1$$

$d=O_1O_2=\sqrt{16+9}=5$ خط‌المرکزین دو دایره

$$TT'=\sqrt{d^2-(R+R')^2}=\sqrt{25-(2+1)^2}=4$$

۱۲- (۲) محور کانونی بیضی موازی محور عرضها و $a=3$ و $b=2$ است.

۱۳- (۱)

$FF'\|x'x$ مرکز بیضی $C\begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$ ، $c=2$ ، $b=1$

$$\Rightarrow a=\sqrt5 \text{ ، } AA'=2a=2\sqrt5$$

۱۴- (۴)

طول مرکز $x=\alpha=1\xrightarrow{\text{در معادلهٔ مجانب}}2y-1=3$

$$\Rightarrow y=2$$

۱۵- (۳)

مرکز هذلولی $C(1,-1)$ ، $c=\sqrt2\Rightarrow$

$$a=b=1\Rightarrow(x-1)^2-(y+1)^2=1\Rightarrow$$

$$x^2-y^2-2x-2y=1$$

۱۶- (۲) مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود برهم بر سهمی می‌توان رسم نمود خط هادی سهمی است پس:

$$(y-1)^2=-2(x+2) \text{ ، } S(\alpha=-2 \text{ ، } \beta=1)$$

$$2P=-2 \text{ ، } P=-1 \text{ ، } x=\alpha-\frac P2$$

$$\Rightarrow x=-2+\frac12\Rightarrow x=\frac{-3}{2}\Rightarrow$$

$$2x+3=0$$

۱۷- (۲)

$$f''(x)=6x\Rightarrow f'(x)=3x^2+c \text{ و } f'(1)=0$$

$$\Rightarrow c=-3\Rightarrow f'(x)=3x^2-3\Rightarrow$$

$$f(x)=x^3-3x+c_1 \text{ ، } \begin{vmatrix}x=1\\y=0\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$c_1=2\Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$$

۱۸- (۲)

$\begin{cases}y^2=2Px\\x^2=2Py\end{cases}\Rightarrow O(0,0)$ و $A(2P,2P)$ نقاط تلاقی

$$y_1=\sqrt{2Px} \text{ ، } y_2=\frac{x^2}{2P}$$

$$S_0^{2P}=\int_0^{2P}\left(\sqrt{2Px}-\frac{x^2}{2P}\right)dx=\frac43P^2$$

تبصره- P مثبت فرض شده است ولی می‌تواند منفی هم باشد.

حل مسائل مثلثات سال دوم تجربی و ریاضی

۱-

الف) $\mathrm{cosec}^4 2x-4=0\Rightarrow$

$$(\mathrm{cosec}^2 2x+2)(\mathrm{cosec}^2 2x-2)=0\Rightarrow$$

$$\mathrm{cosec}^2 2x+2\neq0\Rightarrow \mathrm{cosec}^2 2x-2=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sin^2 2x}-2=0\Rightarrow1-2\sin^2 2x=0$$

$$\Rightarrow\cos4x=0\Rightarrow4x=k\pi+\frac\pi2\Rightarrow$$

$$x=\frac{k\pi}{4}+\frac\pi8$$

ب) $\mathrm{cotg}x+tgx=\mathrm{cosec}x+\sec x\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac1{\sin x}+\frac1{\cos x}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos x}\Rightarrow$$

$\sin x+\cos x=1 \Longrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1 \Longrightarrow$

$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases} \Longrightarrow$$

$x=2k\pi$ و $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ غیر قابل قبول

ج) $2\sin^3 x+\sin^2 x-2\sin x-1=0 \Longrightarrow$

$2\sin x(\sin^2 x-1)+\sin^2 x-1=0 \Longrightarrow$

$(\sin^2 x-1)(2\sin x+1)=0 \Longrightarrow$

$\sin^2 x=1 \Longrightarrow \sin x=\pm 1=\sin(\pm\frac{\pi}{2}) \Longrightarrow$

$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ و $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

$2\sin x+1=0 \Longrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})$

$\Longrightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$ و $x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}$

د) $\sin^3 x+\cos^3 x=1 \Longrightarrow$

راه اول: $\sin^6 x+\cos^6 x+2\sin^3 x\cos^3 x=(1)^2=1$

$\Longrightarrow 1-3\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^3 x\cos^3 x=1 \Longleftarrow$

$\sin^2 x\cos^2 x(-3+2\sin x\cos x)=0 \Longrightarrow$

$\sin^2 x\cos^2 x(-3+\sin 2x)=0 \Longrightarrow$

$\sin 2x=3>1$ جواب ندارد

$\sin^2 x\cos^2 x=0 \Longrightarrow \sin x=0 \Longrightarrow$

$\boxed{x=2k\pi}$ جواب

و $x=2k\pi+\pi$ جواب خارجی

$\cos^2 x=0 \Longrightarrow \cos x=0 \Longrightarrow$

$\boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ جواب

و $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ جواب خارجی

راه دوم: $\sin^3 x+\cos^3 x=1 \Longrightarrow$

$(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)=1$

$\Longrightarrow (\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=1$

$\sin x+\cos x=z$ فرض می‌کنیم $\Longrightarrow$

$\sin x\cos x=\frac{z^2-1}{2} \xrightarrow{\text{در معادله}}$

$z(1-\frac{z^2-1}{2})=1 \Longrightarrow z^3-3z+2=0 \Longrightarrow$

$z^3-3z+2=(z-1)(z^2+z-2)=0 \Longrightarrow$

$z=1$ و $z^2+z-2=0 \Longrightarrow z=1$

$z=-2<-\sqrt{2}$ غیرقابل قبول

$z=1 \Longrightarrow \sin x+\cos x=1 \Longrightarrow$

$\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$

$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Longrightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=2k\pi \\ x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \end{array}}$$

-۳

الف) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$

$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x$

$\sin 2x(2\cos x+1)=\cos x(2\cos x+1) \Longrightarrow$

$2\cos x+1=0 \Longrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$

$\Longrightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

$\sin 2x=\cos x \Longrightarrow 2\sin x\cos x=\cos x \Longrightarrow$

$\cos x=0$ ، $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$2\sin x=1 \Longrightarrow \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \Longrightarrow$

$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ و $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

ب) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x \Longrightarrow$

$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1-\cos 6x}{2} \Longrightarrow$

$1+\cos 6x=\cos 2x+\cos 4x \Longrightarrow$

$2\cos^2 3x-2\cos 3x\cos x=0 \Longrightarrow$

$2\cos 3x(\cos 3x-\cos x)=0 \Longrightarrow$

$\cos 3x=0 \Longrightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

$\cos 3x-\cos x=0 \Longrightarrow \cos 3x=\cos x \Longrightarrow$

$3x=2k\pi\pm x \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$ و $x=k\pi$

تذکر: در قسمت (الف) از بسط $\sin x=\sin(2x-x)$ و $\sin 3x=\sin(2x+x)$ و در قسمت (ب) از بسط $\cos 4x=\cos(3x+x)$ و $\cos 2x=\cos(3x-x)$ استفاده شده است.

-۳

$$\begin{cases} \operatorname{cosec}x-\sin x=a \\ \sec x-\cos x=b \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin x}-\sin x=a \\ \frac{1}{\cos x}-\cos x=b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}=a \\ \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}=b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{\cos^2 x}{\sin x}=a \\ \frac{\sin^2 x}{\cos x}=b \end{cases} \Longrightarrow tg^3 x=\frac{b}{a} \Longrightarrow$$

$tg x=\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \Longrightarrow \frac{\cos x}{tg x}=a \Longrightarrow \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}=a$

$\Longrightarrow \cos x=\sqrt[3]{a^2 b}$ ، $tg x\sin x=b \Longrightarrow$

$\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\times\sin x=b \Longrightarrow \sin x=\sqrt[3]{ab^2}$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Longrightarrow \sqrt[3]{a^2b^4}+\sqrt[3]{a^4b^2}=1$

$\Longrightarrow a\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{a^2b}=1$

-۴

$y=a\sin x+b\cos x=a(\sin x+\frac{b}{a}\cos x)$ ،

$\frac{b}{a}=tg\alpha \Longrightarrow y=a(\sin x+tg\alpha\cos x)=$

$a(\sin x+\frac{\sin\alpha\cos x}{\cos\alpha})=a(\frac{\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha}{\cos\alpha})$

$y=\frac{a\sin(x+\alpha)}{\cos\alpha}$

$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$

$=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Longrightarrow$

$y=\pm\frac{a\sin(x+\alpha)}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\pm\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

با توجه به اینکه $-1\leqslant\sin(x+\alpha)\leqslant 1$ است پس:

$-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant y=a\sin x+b\cos x\leqslant+\sqrt{a^2+b^2}$

جواب تشریحی تستها

۱- (۴)

$\frac{2k\pi}{5}=2k'\pi \Rightarrow 2k=10k' \Rightarrow k=10$

(۱۰ و ۳ نسبت به هم اولند)

۲- (۴) $\frac{\sin\alpha}{tg\,\alpha}>0 \Rightarrow \cos\alpha>0$

۳- (۴) راه اول:

$-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant \sin x\leqslant 1$

$\sin^2 x-2\sin x=(\sin x-1)^2-1$

$Max: (-\frac{1}{2}-1)^2-1=\frac{5}{4}$

راه دوم:

$y=\sin^2 x-2\sin x \Rightarrow$

$y'=+2\sin x\cos x-2\cos x$ ، $y'=0 \Rightarrow$

$2\cos x(\sin x-1)=0$

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$x=-\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
y'	۰	$-$	۰	$+$	۰
y	۳	↗	-1	↗	۳

در فاصله $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ تابع نزولی است پس، ماگزیمم آن برابر است با:

$x=-\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\sin^2(-\frac{\pi}{6})-2\sin(-\frac{\pi}{6})=\frac{5}{4}$

۴- (۴)

$\sin\frac{217\pi}{6}=\sin(36\pi+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\cos(-\frac{217\pi}{6})=\cos\frac{217\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg(-\frac{137\pi}{6})=tg(-\frac{137\pi}{6}+24\pi)=tg\frac{7\pi}{6}=$

$tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\frac{217\pi}{6}\cos(-\frac{217\pi}{6})tg(-\frac{137\pi}{6})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{4}$

۵- (۲)

عبارت $=tg x+\cos x+\cot g x-\cos x$

$=tg x+\cot g x=\frac{2}{\sin 2x}$

۶- (۳)

$1+\cot g^2\varphi=\frac{1}{\sin^2\varphi} \Rightarrow$

$1+(m-1)^2=(m+1)^2 \Rightarrow m=\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\sin\varphi=\frac{4}{5}$ و $\cot g\varphi=\frac{-3}{4} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{-3}{5}$

۷- (۱)

$\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=1$

۱- (۸)

$\cos(2x-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{6}) \Rightarrow$

$x=\frac{4k\pi}{5}-\frac{2\pi}{15}$ و $x=\frac{4k\pi}{3}+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow$

$x_1=\frac{8\pi}{15}$ و $x_2=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{8\pi}{15}+\frac{2\pi}{3}=\frac{6\pi}{5}$

حل مسائل مثلثات سوم تجربی

۱-

الف) $2\sin x-4\sin^3 x=\cos 3x+\cos x$

$2\sin x(1-2\sin^2 x)=2\cos 2x\cos x$

$2\sin x\cos 2x=2\cos 2x\cos x \Rightarrow \cos 2x=0$

$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

$\sin x=\cos x \Rightarrow tg x=1=tg\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

ب) $1-4\cos^4(3x-\frac{\pi}{4})=\sin 6x$

$1-4\left(\frac{1+\cos(6x-\frac{\pi}{2})}{2}\right)^2=\sin 6x$

$1-4\times\frac{(1+\sin 6x)^2}{4}=\sin 6x \Rightarrow$

$1-(1+\sin^2 6x+2\sin 6x)=\sin 6x$

$\Rightarrow \sin^2 6x+3\sin 6x=0 \Rightarrow$

$\sin 6x(\sin 6x+3)=0$

$\sin 6x=0 \Rightarrow 6x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{6}$

$\sin 6x+3=0$ ریشه ندارد

ج) $Arctg\frac{x+1}{x^2+1}+2Arc\cos\frac{1}{2}-Arc\cos(-\frac{1}{2})$

$=Arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$

$Arc\,tg\frac{x+1}{x^2+1}+2(\frac{\pi}{3})-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$Arctg\frac{x+1}{x^2+1}=+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x+1}{x^2+1}=tg\frac{\pi}{4}=1$

$\Rightarrow x^2+1=x+1 \Rightarrow x=0$ و $x=1$

۲-

الف) $4\sin^2 2x\cos 3x=2\cos 3x(1-\cos 4x)$

$=2\cos 3x-2\cos 4x\cos 3x$

$=2\cos 3x-(\cos 7x+\cos x)$

$=2\cos 3x-\cos 7x-\cos x$

ب) $4\cos x\cos(60-x)\cos(60+x)$

$=2\cos x[\cos(60-x+60+x)+\cos(60-x-60-x)]$

$=2\cos x(\cos 120+\cos 2x)$

$=-\cos x+2\cos x\cos 2x$

$=-\cos x+\cos 3x+\cos x=\cos 3x$

۳-

الف) $y=\sin^2\sqrt[5]{x^2+x-1} \Rightarrow$

$y'=\frac{2(2x-1)}{5\sqrt[5]{(x^2+x-1)^4}}\cos\sqrt[5]{x^2+x-1}$

$\sin\sqrt[5]{x^2+x-1}$

ب) $y=tg\sqrt{x}+\sqrt{tg x} \Rightarrow$

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+tg^2\sqrt{x})+\frac{1+tg^2 x}{2\sqrt{tg x}}$

ج) $y=\cos\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}} \Rightarrow$

$y'=\frac{\frac{+3}{(x-1)^2}}{3\sqrt[3]{(\frac{x+2}{x-1})^2}}\sin\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}$

$=\frac{1}{(x-1)^2\sqrt[3]{(\frac{x+2}{x-1})^2}}\sin\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}$

د) $y=tg^3 2x\cdot cotg^5(x+\sqrt{x})\Rightarrow$

$y'=3\times 2(1+tg^2 2x)tg^2 2x\cdot cotg^5(x+\sqrt{x})-5\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\times$

$[1+cotg^2(x+\sqrt{x})]cotg^4(x+\sqrt{x})\cdot tg^3 2x$

۴-

$y=\sin^3 2x\cos 2x-\cos^3 2x\sin 2x$

$=\sin 2x\cos 2x(\sin^2 2x-\cos^2 2x)=$

$-\frac{1}{2}\sin 4x\cos 4x=-\frac{1}{4}\sin 8x\Rightarrow$

$y=-\frac{1}{4}\sin 8x\Rightarrow y'=-2\cos 8x\Rightarrow$

$y''=+16\sin 8x\Rightarrow y''=+16\sin 8x$

$=-64(-\frac{1}{4}\sin 8x)\Rightarrow y''=64y\Rightarrow$

$y''+64y=0$

جواب تشریحی تستها

۱- (۲)

$\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{5\pi}{8}\Rightarrow \pi<x<\frac{5\pi}{4}\Rightarrow$

$\sin x>\cos x\Rightarrow \sin x-\cos x>0\Rightarrow$

$\sin x+\cos x-(\sin x-\cos x)=2\cos x$

۲- (۴)

$-\frac{\pi}{12}<x\leqslant\frac{\pi}{12}\Rightarrow\frac{-\pi}{3}<4x\leqslant\frac{\pi}{3}\Rightarrow$

$\frac{1}{2}\leqslant\cos 4x\leqslant 1\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant 3m-2\leqslant 1$

$\Rightarrow\frac{5}{6}\leqslant m\leqslant 1$

۳- (۲)

$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos x<0\Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow tg\frac{x}{4}=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

۴- (۳)

$2\sin(3x-x)=1\Rightarrow\sin 2x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12}$ و $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$

$x_1=\frac{13\pi}{12}$ و $x_2=\frac{17\pi}{12}$

۵- (۲)

اتحاد: $tgx\,tg(60-x)tg(60+x)=tg3x$

$x=10^\circ\Rightarrow tg10\,tg50\,tg70=tg30=\frac{\sqrt{3}}{3}$

۶- (۳)

$\sin 42+\cos 72=\sin 42+\sin 18$

$=2\sin 30\cos 12=\cos 12$

۷- (۱)

$\sin[3(\frac{\pi}{4})+2(\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{3}-2(\frac{5\pi}{6})]=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

۸- (۴)

عبارت $=\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 4x-\sin 2x+$

$\sin 6x-\sin 4x+\sin 8x-\sin 6x)-\frac{1}{2}\sin 8x=0$

حل مسائل مثلثات چهارم تجربی

۱-

$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow$

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin(x+\frac{\pi}{4})\leqslant 1$

راه اول:

$\sin 2x=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\frac{1}{4}\Rightarrow$

$2\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)-1=\frac{1}{4}\Rightarrow$

$\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{5}{8}\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}$

$\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4}-x)=+\frac{\sqrt{10}}{4}$

راه دوم:

$2\sin x\cos x=\frac{1}{4}\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=\frac{5}{4}$

$\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2=\frac{5}{4}\Rightarrow 2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})=\frac{5}{4}$

$\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{10}}{4}$

۲-

$(m-2)\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=m+3$

اولاً: $a^2+b^2\geqslant c^2\Rightarrow(m-2)^2+1\geqslant(m+3)^2$

$\Rightarrow m\leqslant-\frac{2}{5}$

ثانیاً: $x=\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\text{در معادله}}(m-2)\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=m+3$

$\Rightarrow m\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=m+3$

$m(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)=3+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$

$m=\frac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}=\frac{(6+\sqrt{2})(\sqrt{2}+2)}{2-4}$

$=-(7+4\sqrt{2})$

ثالثاً: $(c+b)tg^2\frac{x}{2}-2a\,tg\frac{x}{2}+c-b=0$

$\xrightarrow{\text{در این مسئله}}(m+3+1)tg^2\frac{x}{4}-2(m-2)tg\frac{x}{4}$

$+m+3-1=0$

$(m+4)tg^2\frac{x}{4}-2(m-2)tg\frac{x}{4}+m+2=0$

$tg\frac{x}{4}=2\xrightarrow{\text{در معادله}}4(m+4)-4(m-2)$

$+m+2=0\Rightarrow 4m+16-4m+8+m+2$

$=0\Rightarrow m=-26$

۳-

الف) $\sin^2 2x-\cos(\frac{3\pi}{2}-4x)=1\Rightarrow$

$\sin 4x=1-\sin^2 2x=\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$

$\Rightarrow 2\sin 4x-\cos 4x=1\Rightarrow$

$(1-1)tg^2 2x-4tg2x+1+1=0\Rightarrow$

$tg2x=\infty=tg\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\quad\boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$ و

$-4tg2x+2=0\Rightarrow tg2x=\frac{1}{2}=tg\,\alpha$

$\Rightarrow 2x=k\pi+\alpha\Rightarrow$

$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}Arctg\frac{1}{2}$

ب) $cotg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{2}=2\sqrt{3}\Rightarrow 2cotgx=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow cotgx=\sqrt{3}=cotg\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{6}$

ج) $2\sin\frac{x}{2}+\sin x=1+2\cos\frac{x}{2}\Rightarrow$

$2(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1$

معادله کلاسیک نوع چهارم

$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = z \Longrightarrow 2z + 2\left(\frac{1-z^2}{2}\right) = 1$

$\Longrightarrow 2z + 1 - z^2 = 1 \Longrightarrow 2z - z^2 = 0 \Longrightarrow$

$z = 2 > \sqrt{2}$ جواب نیست

جواب $z = 0 \Longrightarrow \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow$

$tg\frac{x}{2} = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Longrightarrow$

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

د) $\cos 3x \cos 2x = \sin 3x \sin 2x - 1 \Longrightarrow$

$\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x = -1 \Longrightarrow$

$\cos(3x + 2x) = -1 \Longrightarrow \cos 5x = -1 = \cos\pi$

$\Longrightarrow 5x = 2k\pi + \pi \Longrightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5}$

۴-

$y = \frac{a\sin x}{a + 2\cos 2x}$ ، $x = \frac{2\pi}{3} \to a + 2\cos 2x = 0$

$\Longrightarrow a + 2\cos\frac{4\pi}{3} = 0 \Longrightarrow$

$a + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow a = 1$

۵-

$a = 10$ و $b = 4$ و $\cos C = \frac{3}{5}$

$\cos C = \frac{3}{5} \Longrightarrow \sin C = \frac{4}{5}$

$S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 \times \frac{4}{5} = 16$

$\Longrightarrow S = 16$ واحد سطح

۶-

$b = 2a\cos\hat{C} \Longrightarrow \cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Longrightarrow$

$b = 2a\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \Longrightarrow b^2 = a^2 + b^2 - c^2$

$\Longrightarrow a^2 - c^2 = 0 \Longrightarrow a^2 = c^2 \Longrightarrow a = c$

پس مثلث متساوی‌الساقین در رأس B است.

۷-

$y = \frac{\cos x}{2\cos x - 1}$ ، $y' = \frac{\sin x}{(2\cos x - 1)^2}$

$y' = 0 \Longrightarrow \sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi$

$\Longrightarrow x = 0$ و $x = \pi$ و $x = 2\pi$

$\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x = \pi \\ y = \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x = 2\pi \\ y = 1 \end{array} \right.$

x	0		π		2π
y'	0	−	0	+	0
y	1	↘	1/3	↗	1
	Max		Min		Max

مینیمم تابع‌فوق درفاصله $[0, 2\pi]$ برابر $\frac{1}{3}$ می‌باشد.

جواب تشریحی تستها

۱- (۲)

$2\pi < x < 3\pi \Longrightarrow \pi < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{2}$ و

$tg\frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3} \Longrightarrow \frac{x}{2} = \frac{13\pi}{12} \Longrightarrow x = \frac{13\pi}{6}$

$\Longrightarrow tg 4x = tg\frac{26\pi}{3} \Longrightarrow tg 4x = tg\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

۲- (۲) راه اول:

$\frac{\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x}{\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x} = \frac{2\sin 2x(1 + \cos x)}{2\cos 2x(1 + \cos x)}$

$= tg 2x$

راه دوم: با فرض $x = \frac{\pi}{3}$ داریم:

$-\sqrt{3} =$ عبارت ، و گزینه‌ها

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $-\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پس گزینهٔ (۲) درست است.

۳- (۴)

$tg\frac{x}{2} + cotg\frac{x}{2} = 4 \Longrightarrow \frac{2}{\sin x} = 4 \Longrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{array} \right. \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

۴- (۴)

$a^2 + b^2 \geqslant c^2 \Longrightarrow m^2 + (m-2)^2 \geqslant (2-m)^2$

$\Longrightarrow m^2 - 2m + 5 \geqslant 0$ ، $m^2 - 2m + 5 > 0$ همواره

۵- (۳)

راه اول: $y = 1 - \cos^2 x + 3\cos x = \sin^2 x + 3\cos x$

$\Longrightarrow y' = 2\sin x\cos x - 3\sin x$

$y' = 0 \Longrightarrow \sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi \Longrightarrow$

$x = 0$ و $x = \pi$ و $x = 2\pi$

$\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x = \pi \\ y = -3 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x = 2\pi \\ y = 3 \end{array} \right.$

راه دوم: $1 - \cos^2 x + 3\cos x = 1 - (\cos^2 x - 3\cos x)$

$= 1 - \left[\left(\cos x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] =$

$\frac{13}{4} - \left(\cos x - \frac{3}{2}\right)^2$

عبارت Max: $\cos x = 1 \Longrightarrow$ عبارت $= \frac{13}{4} - \frac{1}{4} = 3$

۶- (۲)

$T_1 = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$ و $T_2 = 2\pi \Longrightarrow T = 2\pi$

۷- (۱)

$8\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{6}\cos\frac{x}{12}\sin\frac{x}{12} = 4\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{6}$

$= 2\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3} = \sin\frac{2x}{3} = 1 \Longrightarrow$

$\frac{2x}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$

$x = 3k\pi + 3\pi = (3k+1)\pi$

اسامی تعدادی از عزیزانی که حلّ مسائل مسابقه‌ای و مسائلی برای حل را در زمان تعیین شده برای ما فرستاده‌اند.

۱ ـ امیر حسن نافعی (تهران)
۲ ـ علی‌رضا برنده فرد (قزوین)
۳ ـ مجید نمازی فر (قزوین)
۴ ـ اکبر هنرمند (تهران)
۵ ـ احمد باغبانها (قزوین)
۶ ـ لیلا اسدالهی (زنجان)
۷ ـ ارشام برومند سعید (کرمان)
۸ ـ داود خجسته (لنگرود)
۹ ـ نعمت اله کارخانه (اراک)
۱۰ ـ شانت شهبازیان (تهران)
۱۱ ـ معصومه فراهانی (تهران)
۱۲ ـ فایق رشید زاده (مهاباد)
۱۳ ـ بهمن اسماعیلی (نوشهر)
۱۴ ـ حسین سبزرو (تهران)
۱۵ ـ علی ابوالقاسمی (تهران)
۱۶ ـ حسین رحامی (اراک)
۱۷ ـ مسعود ساروی (آمل)
۱۸ ـ معصومه پریون (لاهیجان)
۱۹ ـ عباس دلدار (مرند)
۲۰ ـ سام کاوسی (تهران)
۲۱ ـ عباس زوار (تکاب)
۲۲ ـ علی محمیدی (گرمسار)

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

در صورتی که مدل مورد نیاز ۸،۰۰۰،۰۰۰ مرتبه سبکتر از برج ایفل باشد و هر دو از یک فلز ساخته شده باشند، در این صورت حجم مدل باید ۸،۰۰۰،۰۰۰ مرتبه کمتر از حجم برج واقعی باشد. می‌دانیم که احجام اشکال مشابه نسبت به یکدیگر برابر مکعبات ارتفاعاتشان است. در نتیجه، مدل مزبور باید ۲۰۰ مرتبه کوچکتر از نوع واقعیش باشد زیرا

$$۲۰۰ \times ۲۰۰ \times ۲۰۰ = ۸،۰۰۰،۰۰۰$$

ارتفاع برج واقعی ۳۰۰ متراست. بنابراین، ارتفاع مدل باید

$$۳۰۰:۲۰۰ = ۱\frac{۱}{۲} \text{ متر}$$

باشد.

به این ترتیب، مدل مورد بحث به ارتفاع در حدود قد یک انسان خواهد بود.

از: Figures for Fun
Ya. Perelman

جواب ۲

$$\forall x ;[(S(x) \wedge P(x)) \Rightarrow \sim D(x)] \Rightarrow \exists y ; (Ry \wedge A(y))$$

جواب ۳

شعاع دایره ۱۰=۵+۵ است بنابراین ۱۰=BD می‌باشد. اما BD قطر مستطیل است و در مستطیل اقطار مساوی‌اند، بنابراین AC نیز مساوی ۱۰ می‌باشد.

جواب ۴.

کریم از فروشندهٔ لوازم خانگی بلندتر است، بنابراین فروشندهٔ لوازم خانگی و فروشندهٔ دوره‌گرد نیست، پس حسابدار است.

فروشندهٔ دوره‌گرد کریم و کَرام (که متأهل است) نیست، بنابراین کرم است.

با استفاده از حذف، کَرام فروشندهٔ لوازم خانگی است.

In the name of God

Borhān

VOL. I. NO. 3

August 1992

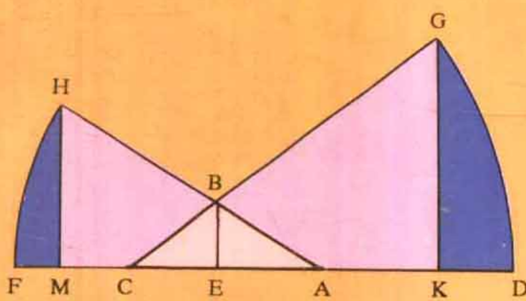
Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each is sue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e-Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents :

اثبات ابوریحان بیرونی (۳۶۲-۴۴۲ هجری قمری) از قضیهٔ سینوسها در فصل سوم کتاب «قانون مسعودی»



مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. به مرکز رأس A و به شعاع واحد کمان HF را رسم می‌کنیم تا امتداد ضلعهای AB و AC را، به ترتیب، در H و F قطع کند. به همین ترتیب، G و D به ترتیب، روی امتداد ضلعهای CB و CA اند و GD کمانی از دایرهٔ به مرکز C و شعاع واحد است. عمودهای HM ، GK و BE را بر خط راست FD فرود می آوریم. روشن است که

$|HM| = \sin\hat{A}$ و $|GK| = \sin\hat{C}$

از تشابه دو مثلث ABE و AHM به دست می آید:

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|AH|}{|HM|} = \frac{۱}{\sin\hat{A}} \qquad (۱)$$

و از تشابه دو مثلث CBE و CGK :

$$\frac{|BC|}{|BE|} = \frac{|CG|}{|GK|} = \frac{۱}{\sin\hat{C}} \qquad (۲)$$

و از تقسیم دو رابطهٔ (۱) و (۲) بر یکدیگر:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$$