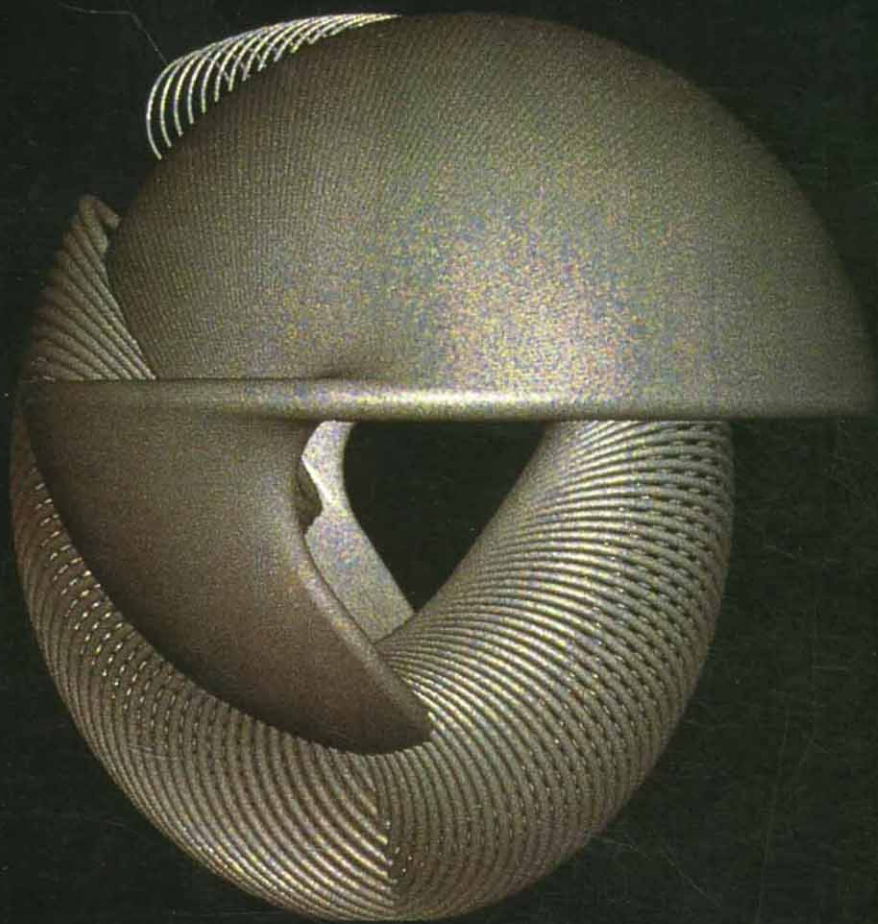




جurnal

مجله ریاضی

برای دانش آموزان دبیرستان





• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

- اعضای هیئت تحریریه:
- حمیدرضا امیری • محمد هاشم رستمی • احمد قندهاری
 - سید محمد رضا هاشمی موسوی • غلامرضا یاسی پور
- (بانسکرازمکاری ارزنده آقایان پرویز شهریاری و مهدی قمصری)
- مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی
- صفحه آرا: مهرزاد طاهری
- رسام: فرخ نیکزاد • حروفچینی: یگانه • تیراژ: ۲۰۰۰۰ نسخه
-
- سال سوم، زمستان ۱۳۷۲، شماره دوم
-
- هر ۳ ماه یک شماره منتشر می شود.

ذکر و عنوان هر قسمت از مجله در کتب یا مجلات دیگر منوط به اجازه کتبی از انتشارات مدرسه می باشد.

مطالب این شماره

- | | | | |
|----|--|----|---|
| ۵۸ | آشنایی با مشاهیر ریاضی جهان/غلامرضا یاسی پور | ۱۴ | حرف اول |
| ۶۱ | طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۷)/ غلامرضا یاسی پور | ۲۵ | شما هم می توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۹)/ پرویز شهریاری |
| ۶۲ | مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۷)/نغمه شریک زاده | ۷ | معادله درجه سوم و حل آن/احمد قندهاری و مهدی قمصری |
| ۶۵ | نظریه گراف/غلامرضا یاسی پور | ۲۰ | آموزش ترجمه متون ریاضی (۵)/حمیدرضا امیری |
| ۷۴ | اصل حجره ها/مهدی نساجی (سال سوم دبیرستان) | ۲۴ | مکان هندسی/محمد هاشم رستمی |
| ۷۹ | جواب نامه ها/ | ۲۹ | تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۸)/ |
| ۸۲ | حل مسائل مسابقه ای برهان ۷ | ۳۸ | مفهومهای اصلی واصل موضوعات در هندسه فضایی (قسمت سوم)/ |
| ۸۳ | مسائل مسابقه ای/حمیدرضا امیری | | پرویز شهریاری |
| ۸۴ | مسائل برای حل/ | ۴۳ | توابع گزاره ای و سورها/غلامرضا یاسی پور |
| ۸۹ | حل مسائل برهان ۸/ | ۴۶ | دوران در هندسه تحلیلی/محمد ابراهیم گیتی زاده |
| | | ۵۴ | پارامترهای جبری متجانس/دکتر احمد شرف الدین |

حرف اول

باسمه تعالی

امروز بسیاری از کشورهای صنعتی و پیشرفته جهان، توسعه اقتصادی و علمی خود را مرهون تلاشهای علمی و پژوهشی علما و دانشمندان خود می دانند. در واقع این اندیشمندان و متفکران یک جامعه اند که با تفکر و تحقیق و تلاشهای پیگیر و گاهی طاقت فرسا، ضمن بالابردن سطح علمی جامعه، صنعت و تکنولوژی را به خدمت انسان درمی آورند تا جامعه در رفاه و آسایش به سر برد. حال این که چرا در بسیاری از کشورهای پیشرفته صنعتی، علی رغم رشد روزافزون تکنولوژی و دستاوردهای چشمگیر آن، هنوز بشر به آرامش و آسایش واقعی نرسیده و اسیر دست صنعت و تکنولوژی است؟؟ بحثی است که احتیاج به تأمل و بررسی زیادی ندارد، زیرا جهان امروز بدون پشتوانه و بهره گیری از تکیه گاه های معنوی و بدون توجه به فطرت حق جو و عدالت طلب انسان از نردبان علم بالا می رود و متأسفانه همچون پرنده ای تکیه بال قدرت پرواز و اوج گیری در آسمان آرامش را ندارد.

ما در این جا نمی خواهیم علل این صعود و سقوط را بررسی کنیم، بلکه می خواهیم بگوئیم که ما نباید در حالی که به توسعه و بازسازی ساختارهای مختلف جامعه مشغول هستیم، پژوهش و تحقیقات علمی را نادیده بگیریم و یا رشد کمی و کیفی علوم ریاضی خود را در حد باز یافته های کلاسیک محدود کنیم.

پس بر ما که در آغاز یک حرکت نوین علمی در جامعه هستیم، لازم است که حس برتری جویی و فزون طلبی در کسب علم را در خود تقویت کنیم و با تکیه بر منابع معنوی و پشتوانه های علمی و فرهنگی خود، در راه بازسازی تلاش کنیم و هرگز فراموش نکنیم که بزرگترین پشتوانه فرهنگی ما قرآن و سخنان پیامبر (ص) و امامان ما علیهم السلام است. این سخن را با پیامی نورانی از امام صادق (ع) به پایان می برم. باشد که توفیق شاگردی در مکتب ایشان نصیب ما شود. امام صادق (ع) فرمودند:

«دانش، دوست مؤمن است.»

شما هم می توانید در درس

ریاضی خود موفق باشید (۹) پرویز شهریاری

کار در منزل

قبل از هر چیز تأکید می‌کنم، تکلیفهای مربوط به هر درس را، در همان روزی انجام دهید که درسش را در دبیرستان خوانده‌اید. فرض کنید امروز دوشنبه است و شما درس جبر داشته‌اید. وقتی بعد از پایان کلاسها به منزل می‌رسید، دفتر جبر خود را بردارید و تکلیفهای جبر را انجام دهید. اگر فقط هفته‌ای یکبار و روزهای دوشنبه با دبیر جبر خود روبه‌رو می‌شوید، تکلیف هر هفته را باید عصر دوشنبه همان هفته انجام دهید، نه عصر یکشنبه هفته بعد! شما هر قدر هم که حافظه‌ای نیرومند داشته باشید، با گذشت یک هفته، بسیاری از نکته‌هایی را که در کلاس شنیده‌اید، از یاد می‌برید و، در نتیجه، نمی‌توانید با موفقیت کامل بر موضوع درس مسلط شوید.

اگر از همان روز نخست سال تحصیلی، کارهای مربوط به هر درس را در همان روزی انجام دهید که درسش را خوانده‌اید، به‌طور محسوسی از دشواریهای شما کاسته می‌شود. بعد از به پایان رساندن کارهای مربوط به همان روز، کافی است مراجعه‌ای تند به درسهای فردای آن روز بکنید تا برای فردا آمادگی کامل داشته باشید. می‌گویم مراجعه‌ای تند به درسها و تکلیفهای فردا کافی است، زیرا هفته قبل، درباره همه زیر و بمهای درسهای فردا دقت کرده‌اید، تکلیفها را به‌طور کامل انجام داده‌اید و اگر با دشواریهای احتمالی برخورد کرده‌اید، در روزهای بعد، ضمن مشورت با هم‌کلاسیها و یا مراجعه به دبیران خود آنها را برطرف ساخته‌اید و حالا، تنها کافی است نگاهی به آنها بیندازید تا همه چیز دوباره به یادتان بیاید.

اکنون بینیم، برای انجام تکلیفها چه باید کرد! برای هر درس یک دفترچه داشته باشید (تنها یکی) نوع دفترچه و جنس کاغذ و جلد آن، حتی تعداد صفحه‌های آن مهم نیست. اگر دفترچه تمام شد، می‌توانید دفترچه دیگری بردارید و کارتان را روی آن ادامه دهید. همه کارهای خود را در همین یک دفتر انجام دهید. چیزی را پاک نکنید. اگر اشتباهی رخ داد، خط نازکی روی آن بکشید. باید برای خودتان و هم برای دبیرتان روشن باشد، بیشتر در چه زمینه‌هایی اشتباه می‌کنید! تمیزی کار در این نیست که خط خوردگی نداشته باشد، در این است که منظم و خوانا نوشته باشید. یکی از شیوه‌های بی‌نظمی - که با کمال تأسف، بسیاری از دانش‌آموزان، به آن گرفتارند، بی‌ترتیبی نوشته‌هاست. به این معنا که مطلب را - مثلاً ضمن دنبال کردن حل یک معادله - گاهی به‌صورت ستونی و گاهی به‌صورت افقی می‌نویسند. نوشته شما باید طوری باشد که اگر کسی بخواهد آن را دنبال یا بازبینی کند، دچار سردرگمی نشود و براحتی متوجه شود، بعد از هر جمله یا فرمول، کدام جمله یا فرمول آمده است!

به عقیده من، بهترین روش نوشتن، صورت افقی آن است. اگر با مطلب توضیحی و توصیفی سر و کار دارید، از راست به چپ، و اگر رابطه‌ها، دستورها و نمادها را به کار می‌برید، از چپ به راست. در ضمن، وقتی با رابطه‌ها و نمادها سر و کار دارید، به این چند نکته توجه کنید:

(۱) اگر از دو طرف برابری چیزی را حذف می‌کنید، اگر صورت و مخرج کسری را ساده می‌کنید، اگر به جای چند جمله متشابه، مجموع

(۳) وقتی از چپ به راست می‌نویسید، ممکن است تمامی مطلب در یک سطر جا نگیرد و مجبور شوید بقیه آن را در سطر بعد بنویسید، در این صورت آخرین نماد سطر قبل را در آغاز سطر بعد تکرار کنید:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - x^2 y^2 &= \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 3x^2 y^2 = \\ &= (x^2 + y^2 + xy\sqrt{3})(x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}) \end{aligned}$$

(در دفتر خود، اول خلاصه درسی را که معلم داده است، بنویسید.) برای این منظور سعی کنید، تنها با به یاد آوردن سخنان معلم و با مراجعه به واژه‌ها و اشاره‌هایی که سرکلاس نوشته‌اید، موضوع درس را روی کاغذ بیاورید. مراجعه به کتاب درسی یا هر کتاب دیگر، مانعی ندارد، ولی تنها وقتی به آن مراجعه کنید که گیر کرده باشید. از رونویسی جمله‌های کتاب و یا تمرینهای حل شده آن، خودداری کنید. خودتان بنویسید: با قلم خودتان و با فکر و استدلال خودتان، آن‌طور که فهمیده‌اید و قانع شده‌اید. در ضمن، نوشته شما باید چنان باشد که نه در جمله بندیهای آن و نه در نوع استدلالها، کمبودی وجود نداشته باشد و هرکسی بتواند از آن استفاده کند. اگر سرکلاس، تمرینی حل شده یا دستور تازه‌ای ثابت شده، به نقل ساده آن اکتفا نکنید. ببینید با درس قبل چه رابطه‌ای دارد! چگونه می‌توان آن را تعمیم داد؟ چه نتیجه‌هایی از آن به دست می‌آید؟ آیا می‌توانید خودتان، مسأله‌ای برای این درس یا این دستور درست کنید؟ آیا راه حل و یا استدلال معلم را پسندیده‌اید؟ اگر ایرادی به آنها دارید و آنها را قانع کننده نمی‌دانید و یا راه حل تازه‌ای به نظرتان می‌رسد (ولو این که راه حل شما دشوارتر باشد)، همه را یادداشت کنید.

یادداشت خلاصه درس کلاس، باید به میدانی برای زور آزمایی فکری شما تبدیل شود. می‌توانید و باید درباره همه استدلالها و درباره همه راه حلها، نظرتان را بگویید. هرگونه شک که نسبت به گفته‌های دیگران به دل خود راه دهید - ولو این که شک شما به جا و درست نباشد - می‌تواند در رشد فکری شما و در سلامتی و استحکام اندیشه شما، نقشی جدی داشته باشد.

جبری آنها را می‌نویسید... چیزی را خط نزنید، بلکه این عملها را با نمادهایی که می‌شناسید مشخص کنید:

$$\frac{95}{133} = \frac{95:19}{133:19} = \frac{5}{7};$$

$$3x^2 - 2x = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 2x - 1 = 0 :$$

(۲) اگر برای انجام تبدیلی یا عملی، شرطی وجود دارد، ذکر شرط را فراموش نکنید:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b \quad (a \neq b \text{ شرط});$$

$$mx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{m} \quad (m \neq 0 \text{ شرط});$$

همین جا به این نکته هم اشاره کنیم که، اگر برای عمل خود توضیحی دارید، آن را در مقابل عملی که انجام داده‌اید یادداشت کنید.

مثال: می‌خواهیم عبارت $x^2 + y^2 + g^2 - 3xyg$ را به صورت ضرب دو عامل تجزیه کنیم.

حل: عبارت $x^2 + y^2 + g^2$ را به صورت:

$$(x+y+g)(x^2+y^2+g^2) - xy^2 - xg^2 - x^2y - yg^2 - x^2g - y^2g$$

و عبارت $-3xyg$ را به صورت

$$-xyg - xyg - xyg$$

می‌نویسیم و به این ترتیب گروه‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + g^2 - 3xyg &= (x+y+g)(x^2+y^2+g^2) - \\ &- (x^2y + xy^2 + xyg) - (x^2g + xyg + xg^2) - \\ &- (xyg + y^2g + yg^2) = (x+y+g)(x^2+y^2+g^2) \\ &- xy(x+y+g) - xg(x+y+g) - yg(x+y+g) = \\ &= (x+y+g)(x^2+y^2+g^2 - xy - xg - yg) \end{aligned}$$

به هر حال، هر جا که لازم است توضیح بدهید از چه قانونی، چه دستوری و چه استدلالی استفاده کرده‌اید؟ چه نتیجه‌ای به دست آورده‌اید؟ برای به دست آوردن این نتیجه، چه شرط یا شرطهایی لازم است؟ ...

بر حسب توانهای $\cos a$ نوشت؛

(۲) در بسط $(\cos n a) \sin n a$ ، نتیجه نسبت به $\sin a$ ($\cos a$) از درجه n و تنها شامل توانهای فرد است؛

(۳) در هر حال، مجموع ضریبهای عددی در بسط $\sin n a$ و $\cos n a$ ، قدر مطلق برابر واحد دارد؛

(۴) ضریب بزرگترین درجه در بسط $(\cos (2k+1)a)$ ($k \in \mathbb{Z}$) همیشه مثبت است؛

(۵) ضریب بزرگترین درجه در بسط $\sin n a$ و $\cos n a$ ، از لحاظ قدر مطلق برابر است با 2^{n-1} .

(۶) در حالت $n = 4k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$) ضریبهای جمله‌های هم درجه در بسطهای $\sin n a$ و $\cos n a$ با هم برابر و در حالت $n = 4k-1$ قرینه یکدیگرند. (سعی کنید این «قانونها» را ثابت کنید).

اگر این «قانونها» درست باشند، می‌توان مثلاً $\cos 7a$ را، بدون بسط مستقیم، به دست آورد. باید داشته باشیم:

$$(\ast) \cos 7a = 64 \cos^7 a + A \cos^5 a + B \cos^3 a + C \cos a$$

برابری $(\ast)$ یک اتحاد و، بنابراین، به ازای هر مقدار حقیقی a برقرار است. اگر a را به ترتیب برابر 0 ، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ قرار دهیم، بعد از تبدیلهای ساده، به این سه معادله سه مجهولی (برای A و B و C) می‌رسیم:

$$\begin{cases} A+B+C = -63 \\ A+2B+2C = -28 \\ A+4B+16C = 0 \end{cases}$$

که از آن، به دست می‌آید:

$$A = -112, B = 56, C = -7$$

یعنی:

$$\cos 7a = 64 \cos^7 a - 112 \cos^5 a + 56 \cos^3 a - 7 \cos a$$

با توجه به «قانون» ۶:

$$\sin 7a = -64 \sin^7 a + 112 \sin^5 a - 56 \sin^3 a + 7 \sin a$$

به نمونه‌ای پردازیم. در کلاس مثلثات، دستورهای مربوط به تابعهای مثلثاتی کمان دو برابر و کمان سه برابر را ثابت کرده‌اند:

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a ; \\ \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a ; \\ \sin 3a &= -4 \sin^2 a + 3 \sin a ; \\ \cos 3a &= 4 \cos^2 a - 3 \cos a \end{aligned}$$

(در این جا، به اثبات درستی این دستورها نپرداخته‌ایم، ولی شما باید در دفتر مثلثات خود، آن را بیاورید؛ از این به بعد هم، برای کوتاهی مطلب، از بسیاری از استدلالها و محاسنها صرف نظر کرده‌ایم). خیلی جالب است. در بسط $\sin 3a$ و $\cos 3a$ ، ضریبها در سمت راست برابری، قرینه یکدیگرند و دو دستور مربوط به $\sin 2a$ و $\cos 2a$ خیلی به هم شباهت دارند. درحالی که در مورد $\sin 2a$ و $\cos 2a$ چنین نیست ...

کار را ادامه دهیم، بینیم برای کمانهای $4a$ و $5a$ چه پیش می‌آید. نتیجه‌ها چنین است:

$$\begin{aligned} \sin 4a &= 4 \sin a \cos^3 a - 4 \sin^3 a \cos a ; \\ \cos 4a &= 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1 ; \end{aligned}$$

این جا هم نتیجه‌های بسط $\sin 4a$ و $\cos 4a$ شباهتی ندارند، ولی برای کمان $5a$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sin 5a &= 16 \sin^5 a - 20 \sin^3 a + 5 \sin a ; \\ \cos 5a &= 16 \cos^5 a - 20 \cos^3 a + 5 \cos a \end{aligned}$$

شباهت بیشتر شد. ضریبها نه تنها از لحاظ قدر مطلق، که از لحاظ علامت هم، یکی هستند... دستورهای مربوط به کمانهای $3a$ و $5a$ ، این «قانونها» را به ما تلقین می‌کنند. اینها به صورت استقرایی به دست می‌آیند که البته نیاز به اثبات دارند.

برای $\sin n a$ و $\cos n a$ ، وقتی n عددی فرد باشد

$$: (k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1)$$

(۱) می‌توان $\sin n a$ را بر حسب توانهای $\sin a$ و $\cos a$ را

$$= \frac{\sqrt{6(5+\sqrt{5})} + \sqrt{5}-1}{8} \quad (2)$$

بقیه ریشه‌ها را هم می‌توان، با همین روش، به صورت جبری درآورد:

$$\sin^2 6^\circ = \frac{1 - \cos 12^\circ}{2}, \quad 48^\circ = 30^\circ + 18^\circ, \quad 24^\circ = 30^\circ - 6^\circ$$

ولی حقیقت این است که ریشه‌های معادله (۱)، به صورت مثلثاتی خود بسیار ساده‌تر و ملموس‌تر از بیان آنها به صورت جبری هستند: برای مقدار تقریبی $\cos 12^\circ$ می‌توان بلافاصله به جدول مراجعه کرد، درحالی که برای به دست آوردن مقدار تقریبی x ، وقتی به صورت جبری (۲) باشد، باید عملیاتی طولانی را تحمل کرد.

و اما نکته دوم: می‌دانیم هر معادله جبری، به شرطی که جمله بزرگترین درجه آن، با توان فرد باشد:

$$ax^{2n+1} + bx^{2n} + \dots + l = 0$$

دست کم یک ریشه حقیقی دارد. به این معادله درجه سوم توجه کنید:

$$4x^3 - 3x - 5\sqrt{2} = 0 \quad (2)$$

معادله (۲)، بسادگی به صورت زیر درمی‌آید:

$$(x - \sqrt{2})(4x^2 + 4\sqrt{2}x + 5) = 0$$

معادله (۲)، یک ریشه حقیقی $(x = \sqrt{2})$ و دو ریشه موهومی دارد. اکنون اگر فرض کنیم $x = \cos t$ ، به معادله

$$\cos 3t = 5\sqrt{2} \quad (3)$$

می‌رسیم. $5\sqrt{2}$ از واحد بزرگتر است و، بنابراین، برای t جوابی حقیقی به دست نمی‌آید. این تناقض را چگونه باید حل کرد؟ و آیا، به واقع، به یک تناقض برخورد داریم؟

حقیقت این است که تابعهای مثلثاتی را می‌توان به صورت تحلیلی تعریف کرد. اولاً ثابت کرد:

در ضمن، با بسط مستقیم $\sin va$ و $\cos va$ آزمایش شد؛ نتیجه‌ها درست است (این آزمایش را انجام دهید).

جالبتر از همه این است که، به کمک این بسطها، می‌توان برخی معادله‌های جبری بالاتر از درجه دوم را حل کرد. به این معادله توجه کنیم:

$$32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0 \quad (1)$$

که اگر فرض کنیم $x = \cos t$ ، به این معادله می‌رسیم:

$$\cos 5t = \frac{1}{4} = \cos 6^\circ$$

حلی این معادله مثلثاتی ساده است و به دست می‌آید:

$$t = 72k^\circ \pm 12^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

در نتیجه، برای ریشه‌های معادله جبری (۱)، به این جوابها می‌رسیم:

$$x_1 = \cos 12^\circ, \quad x_2 = \cos 6^\circ = \frac{1}{4}, \quad x_3 = \cos 84^\circ = \sin 6^\circ,$$

$$x_4 = \cos 132^\circ = -\cos 48^\circ, \quad x_5 = \cos 156^\circ = -\cos 24^\circ$$

در این جا توجه دانش‌آموزان را به دو نکته جلب می‌کنیم:

نکته اول: معادله (۱) یک معادله جبری است و ما عادت

کرده‌ایم ریشه‌های یک معادله جبری را به صورت عددهای جبری در اختیار داشته باشیم. ولی اگر مایل باشیم می‌توانیم این ریشه‌ها را به صورت جبری هم بنویسیم. اگر به یاد بیاوریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\cos 18^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

آن وقت، برای محاسبه x_1 ، به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos 12^\circ = \cos (30^\circ - 18^\circ) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم، غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی که در کاشان و سپس در سمرقند در دربار الخ بیگ کار می‌کرد، با استفاده از برابری

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{و} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (۴)$$

که در آنها، e عبارت است از عدد نپئر (مبنای لگاریتم طبیعی و به تقریب برابر $۲/۷۳$)، e عددی گنگ و غیر جبری است) و $i = \sqrt{-1}$. اگر از این رابطه‌ها اطلاع داشته باشیم و اگر با عددهای مختلط و عمل با آنها آشنا شویم، آن وقت می‌توانیم ریشه حقیقی معادله (۲) را، به کمک معادله (۳) پیدا کنیم. با توجه به رابطه‌های (۴)، مفهوم تابع مثلثاتی از محدوده تنگ خود آزاد می‌شود و مثلاً تابعهای مثلثاتی عددهای موهومی معنا پیدا می‌کند. در ضمن تابع مثلثاتی یک عدد موهومی، الزاماً مقداری موهومی نیست، به عنوان نمونه:

$$\cos \sqrt{-1} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e},$$

و از این شگفت‌تر، رابطه‌ای است که بین عددهای گنگ و غیر جبری π و e و عدد موهومی $\sqrt{-1}$ وجود دارد:

$$e^{2k\pi i} = 1 \quad (k \in \mathbb{Z}, i = \sqrt{-1})$$

$$\sin 3^\circ = -4 \sin^3 1^\circ + 3 \sin 1^\circ$$

و با در دست داشتن مقدار $\sin 3^\circ$ ، توانست مقدار $\sin 1^\circ$ را با تقریب خوبی به دست آورد.

□

دامنه بحث درباره این درس مثلثات، چنان گسترده است که، با اندکی صرف وقت، می‌توانید نتیجه‌های بسیاری به دست آورید (به یاد داشته باشید که ما در این جا درباره $\lg 3a$ صحبتی نکردیم؛ همچنین با توجه به بسط $\lg(a+b+c)$ می‌توان به نتیجه‌های بسیار جالبی رسید که باز هم به آنها نپرداختیم)، که البته، برای دراز نشدن مطلب از آنها می‌گذریم، ولی از دانش آموزان می‌خواهیم تا آن جا که می‌توانند، دامنه بحث را گسترش دهند و خود به نتیجه‌های لازم برسند.

تا بعد

۱		۳		
				۲
۵				
			۴	

جواب در صفحه ۹۶

تقریب از گذشته

مربع مقابل را با عددهای ۶ تا ۲۵ طوری تکمیل کنید که مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و دو قطر آن برابر ۶۵ شود (مربع وقتی یا مربع جادویی).

ترجمه سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

معادله درجه سوم و حل آن

● احمد قندهاری و مهدی قمصری

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad \begin{array}{l} x-1 \\ x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1, 2, 3}$$

۲- اگر در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ، $a + c = b + d$ ، آنگاه معادله بر $(x + 1)$ بخش پذیر است.

اثبات:

$$a + c = b + d \Rightarrow d = a + c - b$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + a + c - b = 0$$

$$\Rightarrow a(x^3 + 1) + b(x^2 - 1) + c(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a(x + 1)(x^2 - x + 1) + b(x - 1)(x + 1) + c(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a - b + c) = 0$$

مثال: معادله $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ را حل کنید.

چون در این معادله $a + c = b + d$ ، پس معادله بر $(x + 1)$ بخش پذیر است. معادله را بر $(x + 1)$ تقسیم می‌کنیم تا تجزیه شود.

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 \quad \begin{array}{l} x+1 \\ x^2 - 7x + 12 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x^2 - 7x + 12) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1, 3, 4}$$

معادله درجه سوم: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

بخش اول:

حل معادله درجه سوم: روشهایی کلی، برای حل معادله درجه سوم وجود دارد که به علت مفصل بودن فرمولهای آن عملاً از آنها استفاده نمی‌شود. اینک حل معادله درجه سوم را در حالتی زیر بررسی می‌کنیم:

۱- اگر در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ مجموع ضرایب صفر باشد، آن معادله بر $(x - 1)$ بخش پذیر است.

اثبات:

$$\Rightarrow a + b + c + d = 0 \quad \text{مجموع ضرایب معادله صفر است.}$$

$$\Rightarrow d = -a - b - c$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx - a - b - c = 0$$

$$\Rightarrow a(x^3 - 1) + b(x^2 - 1) + c(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow a(x - 1)(x^2 + x + 1) + b(x - 1)(x + 1) + c(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(ax^2 + (a + b)x + (a + b + c)) = 0$$

مثال: معادله $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ را حل کنید.

حل: چون مجموع ضرایب صفر است، معادله بر $(x - 1)$ بخش پذیر است. معادله را بر $(x - 1)$ تقسیم می‌کنیم تا تجزیه شود:

۲- به کمک فاکتورگیری از راه دسته‌بندی بعضی از معادله‌های درجه سوم قابل حل‌اند.

مثال: معادله $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x - 3) - 4(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3, \pm 2}$$

۴- اگر $x = \lambda$ یکی از ریشه‌های معادله درجه سوم

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باشد، آنگاه معادله بر $(x - \lambda)$ بخش پذیر است.

اثبات:

فرض می‌کنیم $x = \lambda$ یکی از ریشه‌های معادله

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باشد، پس می‌توان نوشت:

$$(۲): a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

دو معادله (۱) و (۲) را نظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow a(x^3 - \lambda^3) + b(x^2 - \lambda^2) + c(x - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow a(x - \lambda)(x^2 + \lambda x + \lambda^2) + b(x - \lambda)(x + \lambda)$$

$$+ c(x - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (x - \lambda)(ax^2 + (a\lambda + b)x + a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

مثال: اگر $x = 2$ ، یکی از ریشه‌های معادله

$$x^3 + mx^2 - 2x + 4 = 0$$
 باشد، معادله را حل کنید:

حل:

$$x = 2 \Rightarrow 8 + 4m - 4 + 4 = 0 \Rightarrow m = -2$$

$$\Rightarrow x^3 + mx^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x - 2 \\ x^2 - 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2, \pm\sqrt{2}}$$

۵- اگر ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

عضو (Z) باشند، عدد ثابت معادله بر هریک از ریشه‌ها بخش پذیر است. به عبارت دیگر، ریشه‌های معادله عضو مجموعه مقسوم علیه‌های جبری عدد ثابت معادله‌اند.

اثبات:

اگر ریشه‌های حقیقی معادله درجه سوم

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ را x_1 و x_2 و x_3 بنامیم، بعداً خواهیم

$$\text{دید که } x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

چون x_1 و x_2 و x_3 عضو (Z) می‌باشند چون $a = 1$ پس

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -d$ بنابراین عدد (d) بر هریک از عددهای x_1 و x_2 و x_3

بخش پذیر است. بنابراین x_1 و x_2 و x_3 عضو مجموعه مقسوم علیه‌های

جبری عدد (d) می‌باشند.

مثال: اگر ریشه‌های معادله $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$

عضو (Z) باشند، معادله را حل کنید.

حل: عدد ثابت معادله (20) است و مجموعه مقسوم علیه‌های جبری

آن عبارت است از: $\{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20 \}$

مسئلاً (1) یا (-1) نمی‌تواند یکی از ریشه‌های این معادله باشد

زیرا نه مجموع ضرایب صفر است و نه $a + c = b + d$ ، پس از

$x = 2$ شروع می‌کنیم به جایگذاری در معادله:

$$x = 2 \Rightarrow 8 - 20 - 8 + 20 = 0$$

پس $x = 2$ یکی از ریشه‌های این معادله است.

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) (16x^2 - 52x + 30) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{4}$$

توجه: قواعد فوق در معادله درجه (n) ام نیز صادق است. به علت طولانی شدن مطلب، قواعد فوق در معادله درجه سوم بررسی شده است.

$$7- \text{داریم: } (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

اگر معادله ای درجه سوم دارای جمله هایی نظیر:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2$$

باشد به کمک اتحاد فوق قابل حل است.

مثال: معادله $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$ را حل کنید.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3 \Rightarrow (x - 1)^3 = 3 \Rightarrow$$

$$x - 1 = \sqrt[3]{3} \Rightarrow x = 1 + \sqrt[3]{3}$$

بخش دوم:

بحث در تعداد و علامت ریشه های معادله درجه سوم.

برای بحث در تعداد و علامت ریشه های معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باید معادله را به فرم معادله قابل بحث $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل کرد.

برای پیدا کردن تبدیل مورد نیاز x را به $X + k$ تبدیل می کنیم:

$$\Rightarrow a(X+k)^3 + b(X+k)^2 + c(X+k) + d = 0$$

$$\Rightarrow aX^3 + (3ak + b)X^2 + (3ak^2 + 2bk + c)X$$

$$+ (k^3 + bk^2 + ck + d) = 0$$

برای این که، این معادله به معادله قابل بحث تبدیل شود لازم است

ضریب X^2 را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\Rightarrow 3ak + b = 0 \Rightarrow k = -\frac{b}{3a}$$

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 \quad \left| \begin{array}{l} x - 2 \\ x^2 - 3x - 10 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x^2 - 3x - 10) = 0 \Rightarrow x = 2, -2, 5$$

۶- اگر ریشه های معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

به صورت کسرهایی گویا به فرم $\frac{p}{q}$ باشد $p, q \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه

عدد d را می شمارد و q عدد a را می شمارد. به عبارت دیگر، عدد

عضو مجموعه مقسوم علیه های جبری عدد ثابت (d) است و q عضو

مجموعه مقسوم علیه های جبری عدد (a) خواهد بود.

اثبات:

اگر x_1, x_2 و x_3 ریشه های حقیقی معادله

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

باشد، بعداً خواهیم دید که

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

نظیر $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$ باشند داریم: $\frac{pp'p''}{qq'q''} = -\frac{d}{a}$ بنابراین

d بر p, p' و p'' و a بر q, q' و q'' بخش پذیر خواهد بود.

مثال: اگر ریشه های معادله $16x^3 - 60x^2 + 56x - 15 = 0$

به صورت کسرهایی گویا مانند: $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) باشند، معادله

فوق را حل کنید:

حل:

$$x_1 = \frac{p}{q} \Rightarrow \begin{cases} p \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\} \\ q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\} \end{cases}$$

با بررسی مختصری، یکی از ریشه های معادله $(x = \frac{1}{2})$ پیدا می شود که برای حل، معادله را بر $(x - \frac{1}{2})$ تقسیم می کنیم.

$$16x^3 - 60x^2 + 56x - 15 \quad \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} \\ 16x^2 - 52x + 30 \end{array} \right.$$

داریم:

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{4p^2 + 27q^2}{27}$$

(صفحه ۱۵۸ کتاب جبر و آنالیز سطر ۱۴)

عبارت $4p^2 + 27q^2$ را Δ دلتا می‌نامیم، پس:

$$\Delta = 27y_1 \cdot y_2$$

نتایج بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $X^2 + pX + q = 0$.

۱) $p > 0$ یا $\Delta > 0 \Rightarrow$ معادله یک ریشه حقیقی ساده دارد.

۲) $\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله سه ریشه حقیقی ساده دارد.

۳) $\Delta = 0 \Rightarrow$

معادله یک ریشه حقیقی ساده و یک ریشه حقیقی مضاعف دارد.

علامت ریشه‌ها

در هر حالتی علامت یکی از ریشه‌ها مخالف علامت q است. و

علامت بقیه ریشه‌ها در صورت وجود موافق علامت q است.

تذکره: در حالتی که $\Delta = 0$ معادله $X^2 + pX + q = 0$

یک ریشه حقیقی ساده و یک ریشه حقیقی مضاعف دارد، ریشه

مضاعف برابر با: $\sqrt{\frac{q}{2}}$ و ریشه ساده برابر است با: $-\sqrt{\frac{q}{2}}$

اثبات: فرض می‌کنیم معادله درجه سوم $X^2 + pX + q = 0$

دارای ریشه مضاعف (α) و ریشه ساده (β) باشد.

پس می‌توان نوشت:

$$x^2 + px + q \equiv (x - \alpha)^2 (x - \beta)$$

$$\Rightarrow x^2 + px + q \equiv x^2 - (2\alpha + \beta)x^2 +$$

$$(2\alpha\beta + \alpha^2)x - \alpha^2\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha\beta + \alpha^2 = p \\ -\alpha^2\beta = q \end{cases}$$

از این جا نتیجه می‌شود که اگر در معادله $ax^2 + bx^2 + cx + d = 0$

x را به $(X - \frac{b}{2a})$ تبدیل کنیم معادله، به معادله قابل بحث $X^2 + pX + q = 0$ تبدیل می‌شود.

مثال: معادله $x^2 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$ را به معادله قابل بحث تبدیل کنید.

$$x \rightarrow X - \frac{b}{2a} = X - \frac{6}{2} = X - 2$$

$$\Rightarrow (X - 2)^2 + 6(X - 2) + 9(X - 2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow X^2 - 3X - 1 = 0$$

تذکره: چنانچه معادله درجه سوم به صورت

$ax^2 + bx^2 + d = 0$ باشد، برای تبدیل آن به معادله قابل بحث

کافی است.

$$x \rightarrow \frac{1}{X}$$

مثال: معادله $2x^2 - 6x^2 + 1 = 0$ را به معادله قابل

بحث تبدیل کنید:

$$x \rightarrow \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{2}{X^2} - \frac{6}{X^2} + 1 = 0 \Rightarrow X^2 - 6X + 2 = 0$$

سؤال: چرا باید برای بحث معادله درجه سوم، آن را به فرم

$X^2 + pX + q = 0$ تبدیل کرد؟

جواب: چون منحنی به معادله $y = X^2 + pX + q$ بسادگی

قابل رسم است.

اگر تابع به معادله $y = X^2 + pX + q$ را در حالت‌های مختلف

بررسی کنیم به نتایج زیر می‌رسیم (اثبات کامل، در کتاب جبر و آنالیز

سال چهارم فصل ۶ آمده است):

توجه: در حالتی که منحنی تابع $y = X^2 + pX + q$ ، یک

Max و یک Min دارد و y_1 و y_2 عرضهای نقاط اکسترم باشد

$$\Delta = 4p^r + 2vq^r = -4(2v) + 2v(m+2)^r = 0$$

$$\Rightarrow m^r + 4m = 0 \Rightarrow m = 0, -4$$

$$q = m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

m	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$	
Δ	+	•	-	-	•	+
q	-	-	•	+	+	
نتیجه	$0 < x_1$	$x_1 < x_r < 0 < x_r$	$x_1 < 0 < x_r < x_r$	$x_1 < 0$		
		①	②	③		

$$1) \begin{cases} \Delta = 0 \\ q < 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_r < 0 < x_r$$

$$2) q = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow -3x^r + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^r = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3) \begin{cases} \Delta = 0 \\ q > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 < 0 < x_r = x_r$$

مسئله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^r - 3x^r + (m-1) = 0$ بحث کنید:

$$x \rightarrow \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{1}{X^r} - \frac{3}{X^r} + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^r - \frac{3}{m-1}X + \frac{1}{m-1} = 0$$

$$\Delta = 4p^r + 2vq^r = -4 \times \frac{2v}{(m-1)^r} + 2v \times \frac{1}{(m-1)^r}$$

$$= \frac{2v(m-5)}{(m-1)^r} = 0 \Rightarrow m=5$$

$$= 0 \Rightarrow m=1$$

$$q = \frac{1}{m-1} = 0 \Rightarrow \boxed{m=1}$$

$$\beta = -2\alpha, -\alpha^r\beta = q \Rightarrow 2\alpha^r = q \Rightarrow$$

$$\alpha^r = \frac{q}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \sqrt[2]{\frac{q}{2}}}$$

$$\beta = -2\alpha \Rightarrow \boxed{\beta = -2\sqrt[2]{\frac{q}{2}}}$$

مسئله: در تعداد ریشه‌های معادله

m به ازای مقادیر مختلف $x^r - 6x^r + 9x + (m-4) = 0$ بحث کنید.

$$x \rightarrow X - \frac{b}{3a} = X - \frac{-6}{3} = X + 2$$

$$(X+2)^r - 6(X+2)^r + 9(X+2) + m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow X^r - 3X + (m-2) = 0$$

$$\Delta = 4p^r + 2vq^r = 4(-2v) + 2v(m-2)^r = 0$$

$$\Rightarrow m^r - 4m = 0 \Rightarrow m = 0, 4$$

m	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
Δ	+	•	-	•	+
نتیجه	یک ریشه حقیقی ساده ①		سه ریشه حقیقی ساده ②		یک ریشه حقیقی ساده

$$1) \Delta = 0 \Rightarrow$$

معادله یک ریشه حقیقی ساده و یک ریشه حقیقی مضاعف دارد.

$$2) \Delta = 0 \Rightarrow$$

معادله یک ریشه حقیقی ساده و یک ریشه حقیقی مضاعف دارد.

مسئله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $(m+2)x^r - 3x^r + 1 = 0$ بحث کنید:

$$x \rightarrow \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{m+2}{X^r} - \frac{3}{X^r} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow X^r - 3X + (m+2) = 0$$

مسأله: ثابت کنید منحنی تابع به معادله
 $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$
 دارای سه نقطه عطف است.

$$y' = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+x+1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-2(-x^2+3x^2+6x+1)}{(x^2+x+1)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x^2 - 3x^2 - 6x - 1 = 0 \quad (I)$$

$$x \rightarrow x - \frac{b}{3a} = x - \frac{-3}{3} = x + 1$$

$$\Rightarrow (X+1)^2 - 3(X+1)^2 - 6(X+1) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$X^2 - 4X - 9 = 0 \quad (II)$$

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4(-9)^2 + 27(-9)^2 = -729$$

پس معادله (II) و معادله (I) سه ریشه حقیقی ساده دارد. اگر ریشه‌ها را x_1 و x_2 و x_3 بنامیم: $x_1 < x_2 < x_3$ و چون y'' به ازای ریشه‌های ساده تغییر علامت می‌دهد، پس تابع فوق سه نقطه عطف دارد.

بخش سوم:

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادله درجه سوم

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله درجه سوم فوق باشد، می‌توان نوشت:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 +$$

$$(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

m	$-\infty$	۱	۵	$+\infty$
Δ	+	-	۰	+
q	-	+	+	+
نتیجه	$0 < x_1$	$x_1 < 0 < x_2 < x_3$	$x_1 < 0$	

در معادله

$$۱) m = 1 \Rightarrow x^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} \Delta = 0 \\ q > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 < 0 < x_2 = x_3$$

مسأله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^3 - 2(m-2)x + 2(m-2) = 0$ بحث کنید.

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = -4 \times 27(m-2)^2 + 27 \times$$

$$4(m-2)^2 = 0$$

$$\Delta = -108(m-2)^2(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

$$q = 2(m-2) = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

m	$-\infty$	۲	۳	$+\infty$
Δ	+	۰	+	-
q	-	۰	+	+
نتیجه	$0 < x_1$	$x_1 < 0$	$x_1 < 0 < x_2 = x_3$	

در معادله

$$۱: m = 2 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$۲: \begin{cases} \Delta = 0 \\ q > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 < 0 < x_2 = x_3$$

تذکره:

$$\Rightarrow \frac{-\gamma^2 + 1}{\gamma} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = \pm 1}$$

$$\text{اگر } \gamma = 1 \Rightarrow 1 + m + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -4}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$x \rightarrow \frac{1}{X} \Rightarrow X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 27\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{256}{27} + \frac{27}{9} = -\frac{175}{27} < 0$$

پس: $m = -4$ قابل قبول است. و معادله سه ریشه حقیقی α ، β و γ می تواند داشته باشد.

$$\text{اگر } \gamma = -1 \Rightarrow -1 + m + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x^2 + 3 = 0 \quad x \rightarrow \frac{1}{X} \Rightarrow X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 27\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{49}{27} > 0$$

پس در ازای $m = -2$ معادله یک ریشه حقیقی دارد پس $m = -2$ قابل قبول نیست.

مسئله ۴: در معادله $x^2 - 9x^2 + (m-1)x - 15 = 0$ اگر α و β و γ ریشه های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 35$ ، m را بیابید.

حل:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = 9$$

طرفین تساوی را به توان (۲) می رسانیم.

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 81$$

$$35 + 2\left(\frac{c}{a}\right) = 81 \Rightarrow 35 + 2(m-1) = 81$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 23}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\frac{c}{a}}{-\frac{d}{a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d}}$$

مسئله ۱: اگر ریشه های معادله $x^2 - 9x^2 + mx - 15 = 0$ تصاعد عددی بسازند، m را بیابید.

حل: ریشه ها تصاعد عددی می سازند و α و β و γ ریشه های حقیقی معادله

$$\Rightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow 3\beta = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow 3\beta = 9 \Rightarrow \boxed{\beta = 3}$$

$$\beta = 3 \xrightarrow{\text{در معادله قرار میدهیم}} 27 - 81 + 3m - 15 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 23}$$

مسئله ۲: اگر ریشه های معادله $x^2 - 7x^2 + (m-1)x - 8 = 0$ تصاعد هندسی بسازند، m را بیابید.

حل: اگر α و β و γ ریشه های حقیقی معادله باشند و تصاعد هندسی بسازند:

$$\beta^2 = \alpha\gamma \Rightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -\frac{d}{a} = 8 \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

$$\beta = 2 \rightarrow 8 - 28 + 2m - 2 - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 15}$$

مسئله ۳: اگر ریشه های حقیقی معادله $x^2 + mx^2 + 3 = 0$ و α و β و γ باشد، m قابل قبول را طوری بیابید تا رابطه $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\gamma$ برقرار باشد.

حل:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d} \Rightarrow -\gamma + \frac{1}{\gamma} = 0$$

تذکره: اتحاد اولر:

$$\text{اگر } \begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

مسئله ۵: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله

$$x^3 - 5x^2 + m - 1 = 0$$

باشد، m را چنان بیابید تا داشته باشیم:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = -\frac{3}{2}$$

حل:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d} = 0$$

$$\text{بنابراین اتحاد اولر: } \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 3 \left(\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} = 3 \left(\frac{1}{-\frac{d}{a}} \right) \Rightarrow -\frac{3}{2} = -3 \left(\frac{1}{m-1} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{m=3}$$

مسئله ۶: در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله باشد و

$$k = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta}$$
 مقدار k را بیابید.

حل:

$$k+3 = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + 1 + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + 1 + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + 1$$

$$k+3 = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta}$$

$$(1) = (\alpha+\beta+\gamma) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)$$

$$\Rightarrow k+3 = -\frac{b}{a} \left(-\frac{c}{d} \right) \Rightarrow k+3 = \frac{bc}{ad}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{bc}{ad} = -3}$$

مسئله ۷: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله

$$M = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} \quad x^3 + px + q = 0 \text{ باشد حاصل عبارت}$$

را بیابید.

حل:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha\beta\gamma$$

$$M = \frac{\alpha^2}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha\beta\gamma} \\ = \frac{3(\alpha\beta\gamma)}{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow \boxed{3=M}$$

مسئله ۸: اگر در معادله $x^3 - 8x^2 + 17x + m = 0$ α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله باشد و داشته باشیم

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 134, \text{ مقدار } m \text{ را بیابید.}$$

حل:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = 8$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 64$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\left(\frac{c}{d}\right) = 64$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(17) = 64$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 30$$

$$(\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5) - 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$+ (m - 2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$$

$$(-15) - 9(2 - m) + (m - 2) \times 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 3}$$

مسئله ۱۰: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 24 \quad x^2 - 3x + m = 0 \text{ باشد و داشته باشیم:}$$

مقدار m را بیابید.

حل: ابتدا معادله درجه سوم جدیدی تشکیل می‌دهیم که

ریشه‌هایش α^2 ، β^2 و γ^2 باشد.

$$\begin{cases} x: & \text{ریشه معادله مفروض} \\ y: & \text{ریشه معادله جدید} \end{cases}$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt[2]{y} \quad \text{در معادله مفروض قرار می‌دهیم:}$$

$$y - 3\sqrt[2]{y} + m = 0 \Rightarrow y + m = 3\sqrt[2]{y}$$

$$y^2 + 3my^2 + 3m^2y + m^2 = 27y$$

$$y^2 + 3my^2 + (3m^2 - 27)y + m^2 = 0$$

ریشه‌های این معادله $y_1 = \alpha^2$ و $y_2 = \beta^2$ و $y_3 = \gamma^2$ است.

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = -\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} =$$

$$\frac{27 - 3m^2}{m^2} = 24$$

$$\frac{9 - m^2}{m^2} = \frac{1}{1} \Rightarrow 8m^2 + m^2 - 9 = 0 \quad \text{مجموع ضرایب صفر است.}$$

$$8m^2 + m^2 - 9 \quad \frac{m - 1}{8m^2 + 9m + 9}$$

در معادله به جای x یکبار α و یکبار β و یکبار γ را قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 3x + m = 0$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - 3\alpha + m = 0 \\ \beta^2 - 3\beta + m = 0 \\ \gamma^2 - 3\gamma + m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 3(\alpha + \beta + \gamma) + 3m = 0$$

$$+ 17(\alpha + \beta + \gamma) + 3m = 0$$

$$134 - 3(30) + 17(8) + 3m = 0 \Rightarrow \boxed{m = -10}$$

مسئله ۹: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله

$$x^2 - 3x + (m - 2) = 0 \text{ باشد و داشته باشیم:}$$

$$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = -15$$

مقدار m را بیابید.

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$$

$$3(\alpha\beta\gamma) = 3\left(-\frac{d}{a}\right) = 3(2 - m)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\left(\frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$$

طرفین معادله را در x^2 ضرب می‌کنیم:

$$x^5 - 3x^3 + (m - 2)x^2 = 0$$

در معادله به جای x یکبار α و یکبار β و یکبار γ را قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} \alpha^5 - 3\alpha^3 + (m - 2)\alpha^2 = 0 \\ \beta^5 - 3\beta^3 + (m - 2)\beta^2 = 0 \\ \gamma^5 - 3\gamma^3 + (m - 2)\gamma^2 = 0 \end{cases}$$

k	α	$x = \operatorname{tg} \alpha$
۰	$\frac{\pi}{9}$	$x_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$
۱	$\frac{4\pi}{9}$	$x_2 = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9}$
۲	$\frac{7\pi}{9}$	$x_3 = \operatorname{tg} \frac{7\pi}{9}$
۳	$\frac{10\pi}{9}$	$x_4 = \operatorname{tg} \frac{10\pi}{9} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$

در نتیجه معادله جبری فوق سه ریشه حقیقی متمایز دارد.

$$x_2 = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9}, \quad x_3 = \operatorname{tg} \frac{7\pi}{9}, \quad x_4 = \operatorname{tg} \frac{10\pi}{9}$$

$$x_3 = \operatorname{tg} \frac{7\pi}{9} = \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{2\pi}{9} \right) = -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 3\sqrt{3}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 27$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\left(\frac{c}{a} = -3\right) = 27$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 33$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{9} + \operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{9} + \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{9} = 33$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{9} = \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{9} = 3$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{9} + \operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{9} + \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{9} + \operatorname{tg}^2 \frac{10\pi}{9} = 36$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 20^\circ + \operatorname{tg}^2 40^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{tg}^2 80^\circ = 36$$

حل معادله درجه سوم

هرگاه در معادله درجه سوم $x^3 + px + q = 0$ داشته باشیم

$$\Rightarrow \Delta m^2 + m^2 - 9 = (m-1)(\Delta m^2 + 9m + 9) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m=1}, \quad \Delta m^2 + 9m + 9 = 0 \quad \Delta < 0$$

مسئله ۱۱: دستگاه مقابل را حل کنید:

$$\begin{cases} 8 + 4x + 2y + Z = 0 \\ 27 + 9x + 3y + Z = 0 \\ 64 + 16x + 4y + Z = 0 \end{cases}$$

حل: معادله درجه سوم $t^3 + xt^2 + yt + Z = 0$ را در نظر

می‌گیریم. اگر α و β و γ ریشه‌های این معادله باشد با توجه به معادلات دستگاه $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 4$.

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -x \Rightarrow 2 + 3 + 4 = -x \Rightarrow \boxed{x = -9}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} = y \Rightarrow 6 + 8 + 12 = y \Rightarrow \boxed{y = 26}$$

$$\alpha.\beta.\gamma = -\frac{d}{a} = -Z \Rightarrow 2 \times 3 \times 4 = -Z \Rightarrow \boxed{Z = -24}$$

مسئله ۱۲: معادله درجه سوم $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$

را در نظر بگیرید ثابت کنید:

$$\operatorname{tg}^2 20^\circ + \operatorname{tg}^2 40^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{tg}^2 80^\circ = 36$$

حل:

$$x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}(1 - 3x^2) = 3x - x^3$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

$$x = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \operatorname{tg} 3\alpha$$

$$3\alpha = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{q}{r}} \quad \text{ریشه مضاعف}$$

$$\Delta = 0 \quad x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{r}} \quad x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{r}} \quad \text{خلاصه}$$

حل معادله در حالت $\Delta < 0$

فرض می‌کنیم $x = r \cos \theta$ باشد که برای تعیین x باید r و θ را پیدا کرد ($r > 0$).

$$x^3 + px + q = 0 \Rightarrow r^3 \cos^3 \theta + pr \cos \theta + q = 0$$

$$\Rightarrow \cos^3 \theta + \frac{p}{r^2} \cos \theta + \frac{q}{r^3} = 0 \quad (1)$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \Rightarrow \cos 3\theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta = 0$$

می‌دانیم که (2)

از مقایسه رابطه‌های ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{p}{r^2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow r = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

$$\frac{q}{r^3} = -\frac{\cos 3\theta}{4} \Rightarrow \cos 3\theta = -\frac{4q}{r^3}$$

هرگاه $\Delta < 0$ اختیار شود θ متناظر آن فرق می‌کند چون $\cos 3\theta$ به r هم بستگی دارد.

از معادله $\cos 3\theta = \frac{-4q}{r^3}$ سه مقدار متمایز برای $\cos \theta$ به دست می‌آید زیرا $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{r} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{r} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}}$$

$\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0$ ، در این صورت $x = u + v$ اختیار کرده در معادله قرار می‌دهیم:

$$1) (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v) = 0$$

و چون x را مجموع دو مجهول u و v اختیار کرده‌ایم می‌توانیم بین u و v رابطه دلخواهی اختیار کرده و آن را با معادله ۱ به منزله دو معادله دو مجهولی در نظر گرفته و u و v را پیدا کنیم و با هم جمع کنیم تا x به دست آید (روش گاردان):

$$\begin{cases} 3uv + p = 0 \\ u^3 + v^3 + q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 v^3 = \frac{-p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

حاصل ضرب مجموع

معادله درجه دومی که یک ریشه آن u^3 و یک ریشه آن v^3 است

$$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$u^3, v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{108}}$$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} \quad \text{دستورگاردان}$$

هرگاه $\Delta = 0$ باشد خواهیم داشت:

این ریشه ساده معادله است زیرا علامت آن مخالف علامت q است. و چون

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow -2\sqrt[3]{\frac{q}{r}} + 2x = 0$$

حال اگر $f(a+h)$ را نزدیک به صفر فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{-f(a)}{h} \approx f'(a), \quad \boxed{h \approx -\frac{f(a)}{f'(a)}}$$

به همین ترتیب وقتی $a+h$ پیدا شد می توان ریشه بهتری برای معادله به دست آورد.

مثال: به فرض آن که $x=2$ یک ریشه تقریبی معادله $x^2 - 2 = 0$ فرض شود ریشه بهتری برای این معادله پیدا کنید:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x \\ f(2) = 2, f'(2) = 4 \\ a=2 \quad a+h = 2 - \frac{2}{4} = 1/2 \end{cases}$$

دقت کنید:

$$f(2) = 2^2 - 2 = 2 \quad \text{چقدر به صفر دور است}$$

$$f(1/2) = 1/2^2 - 2 = 0/25 \quad \text{چقدر بهتر است}$$

$$a = 1/2$$

$$f(1/2) = 0/25 \text{ و } f'(1/2) = 1$$

$$a+h = 1/2 - \frac{0/25}{1} \approx 1/417$$

حالا:

$$f(1/417) = 1/417^2 - 2 \approx 0/007$$

توجه می کنید که $1/417$ چه ریشه بهتری برای معادله $x^2 - 2 = 0$ به حساب می آید.

حالا برای تعیین ریشه های تقریبی معادله $f(x) = 0$ بخصوص معادله درجه سوم منحنی تابع $y = f(x)$ را رسم کنید و طول نقاط برخورد منحنی را با محور x ها معین کنید (خواهی نخواهی بین دو عدد متوالی می باشد) و با روش (نیوتن) ریشه های تقریبی معادله را با هر تقریبی که می خواهید حساب می کنید.

مثال ۱: مطلوب است حل معادله $x^3 + 6x - 20 = 0$

$$\Delta > 0 \quad x = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{3})^3} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3} = 2$$

مطلوب است حل معادله $x^3 - 6x + 4\sqrt{2} = 0$

$$\Delta = 0 \quad x_1 = x_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$x_3 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = -2\sqrt{2}$$

مطلوب است حل معادله $x^3 - 3x - 1 = 0$, $\Delta < 0$

$$x = r \cos \theta \quad r = \sqrt[3]{\frac{-p}{3}} = 1$$

$$\cos 3\theta = \frac{-q}{r^3} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow 3\theta = 2K\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{2}{3}K\pi \pm \frac{\pi}{9}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{9} = 20^\circ$$

$$\theta_2 = \frac{5\pi}{9} = 100^\circ \quad \theta_3 = \frac{7\pi}{9} = 140^\circ$$

لذا

$$\boxed{x = 1 \cos 20^\circ, 1 \cos 100^\circ, 1 \cos 140^\circ}$$

تذکره: باید موقعی که به K مقدار داده می شود θ_1 و θ_2 و θ_3 دارای کسینوسهای متفاوت باشند.

حل تقریبی معادله $f(x) = 0$ (منظور ریشه های تقریبی می باشند).

فرض کنید a یک ریشه تقریبی معادله $f(x) = 0$ باشد بنابراین اگر $a+h$ ریشه تقریبی بهتر آن باشد باید h را پیدا کنیم. می دانیم که:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

لذا $1/88$ و $1/87$ به ترتیب ریشه‌های معادله با 0.01 تقریب نقصانی و اضافی می‌باشند.

مسئله: معادله درجه سوم $x^3 + px + q = 0$ که ریشه‌های آن را α و β و γ می‌نامیم مفروض است. مطلوب است محاسبه $\sum \frac{1}{2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ بر حسب p و q .

در هر معادله درجه سوم $S^2 - 3PS + 3R = 0$ که $S = -\frac{b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$ و $R = -\frac{d}{a}$ لذا با توجه $S = 0$ و $R = -q$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -3q$$

معادله درجه سومی می‌نویسیم که ریشه‌های آن $y_1 = \frac{1}{2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ و $y_2 = \frac{1}{2\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2}$ و $y_3 = \frac{1}{2\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2}$ باشند.

$$y = \frac{1}{\sum \alpha^2 + \alpha^2} = \frac{1}{-3q + \alpha^2} \Rightarrow \alpha^2 - 3q = \frac{1}{y},$$

$$\alpha = \sqrt{3q + \frac{1}{y}}$$

حالا α را در معادله $x^3 + px + q = 0$ می‌بریم و

$$3q + \frac{1}{y} + p\sqrt{3q + \frac{1}{y}} + q = 0 \Rightarrow$$

$$(64q^2 + 3p^2q)y^2 + (p^3 + 48q^2)y^2 + 12qy + 1 = 0$$

لذا:

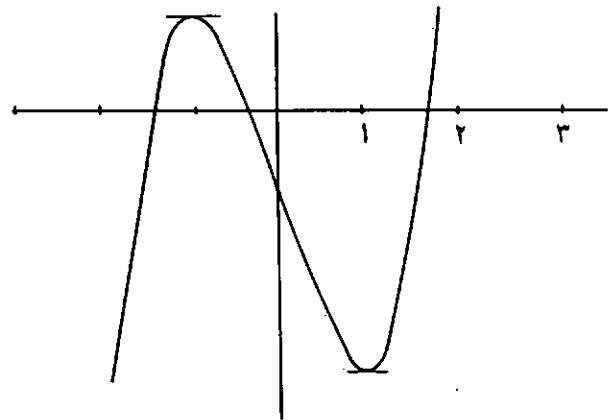
$$\sum \frac{1}{2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = -\frac{p^3 + 48q^2}{64q^2 + 3p^2q}$$



مثال: ریشه مثبت معادله $x^3 - 3x - 1 = 0$ را تا 0.01 واحد حساب کنید:

$$y = x^3 - 3x - 1 \quad y' = 3x^2 - 3 = 0 \quad x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow -3$	$\nearrow 1$	$\searrow -1$	$\searrow -3$	$\nearrow 1$	$+\infty$



ریشه مثبت معادله بین ۱ و ۲ می‌باشد:

$$f(1/8) = -0.568$$

$$f(1/9) = 0.159$$

بنابراین $1/8$ و $1/9$ به ترتیب ریشه‌های معادله تا 0.01 تقریب نقصانی و اضافی می‌باشند.

حالا:

$$f(1/8) = -0.568$$

$$f'(1/8) = 6/72$$

$$a + h = 1/8 + \frac{-0.568}{6/72} \approx 1/88$$

$$f(1/88) = 0.004672$$

$$f(1/87) < 0$$

چقدر به صفر نزدیک است:

آموزش ترجمه متون ریاضی (۵)

از کتاب: روشهایی در جبر

ترجمه: حمیدرضا امیری

The quadratic function $f(x)$ has the following properties:

- (i) $f(0) = c$.
- (ii) As $x \rightarrow \pm\infty$; if $a > 0$, $f(x) \rightarrow +\infty$,
if $a < 0$, $f(x) \rightarrow -\infty$.
- (iii) If $a > 0$, then, from Equation (3.1),

$$f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

The minimum value $(4ac - b^2)/(4a)$ is attained when $x = -b/(2a)$.
If $a < 0$, then

$$f(x) \leq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

The maximum value $(4ac - b^2)/(4a)$ is attained when $x = -b/(2a)$.

$$(iv) f(x) = 0 \Rightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}. \quad (3.2)$$

تابع درجه دوم $f(x)$ دارای خواص زیر می باشد:

$$f(0) = c \quad (1)$$

(۲) درحالتی که $x \rightarrow \pm\infty$ ؛ اگر $a > 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow +\infty$

اگر $a < 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow -\infty$

(۳) با توجه به رابطه (۳.۱) اگر $a > 0$ واضح است که

$$f(x) \geq \frac{(4ac - b^2)}{(4a)}$$

در این حالت کمترین مقدار عبارت $\frac{(4ac - b^2)}{(4a)}$ به ازای

$$x = \frac{-b}{(2a)}$$

اگر $a < 0$ در این صورت $f(x) \leq \frac{(4ac - b^2)}{(4a)}$ در این حالت

بیشترین مقدار عبارت $\frac{(4ac - b^2)}{(4a)}$ به ازای $x = \frac{-b}{(2a)}$ حاصل می شود.

3 The quadratic function and quadratic equations

۳ - توابع درجه دوم و معادلات درجه دوم

3.1 Quadratic functions

The function $f(x)$, where $f(x) = ax^2 + bx + c$, and a, b, c are constants, $a \neq 0$, is called a *quadratic function*, or sometimes a quadratic polynomial. From elementary algebra

$$(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2.$$

Using this, we write

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \\ \Rightarrow ax^2 + bx + c &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

۳.۱. توابع درجه دوم

تابع $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ در آن a و b و c مقادیر ثابت و $a \neq 0$ ، یک تابع درجه دوم، یا بعضی اوقات یک چند جمله ای درجه دوم نامیده می شود.

حال با توجه به اتحاد $(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$ و

استفاده از آن، می توانیم بنویسیم:

$$ax^2 + bx + c \equiv a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \equiv$$

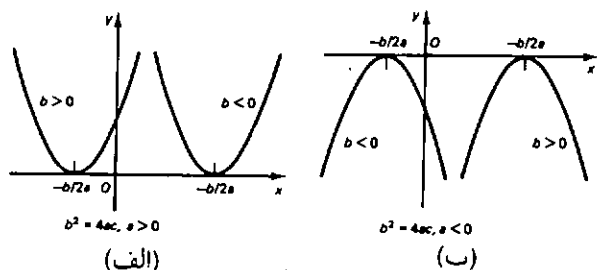
$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \Rightarrow ax^2 + bx + c$$

$$\equiv a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \right] \quad (3.1)$$

(2) If $b^2 = 4ac$, the curve $y = f(x)$ touches the x -axis, since the equation $f(x) = 0$ then has two equal roots at $x = -b/(2a)$.

(۴) اگر $f(x) = 0$ خواهیم داشت:

(۲) اگر $b^2 = 4ac$ ، منحنی $y = f(x)$ بر محور x مماس است، در این حالت معادله $f(x) = 0$ دارای دو ریشه مساوی با هم در $x = \frac{-b}{2a}$ خواهد بود.



شکل ۳.۲

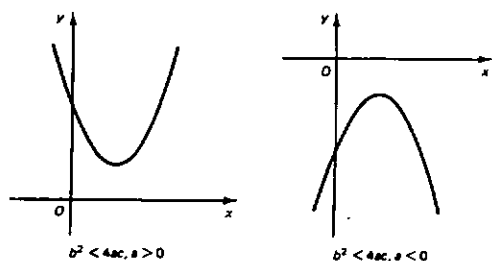
(3) If $b^2 < 4ac$, the equation $f(x) = 0$ has no real roots. [We have seen above that when $\Delta < 0$, there are no real roots of the equation $f(x) = 0$. In such a situation there are always two complex roots. If we define i to be such that $i^2 = -1$, then, from formula (3.2),

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(4ac - b^2)}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad]$$

(۳) اگر $b^2 < 4ac$ ، معادله $f(x) = 0$ ریشه حقیقی نخواهد داشت.

توضیح: دیدیم که اگر $\Delta < 0$ معادله $f(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد. در این وضعیت همواره دو ریشه مختلط موجود است. اگر تعریف کنیم $i^2 = -1$ ، در این صورت، با توجه به فرمول (۳.۲) داریم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(4ac - b^2)}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$



شکل ۳.۳

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

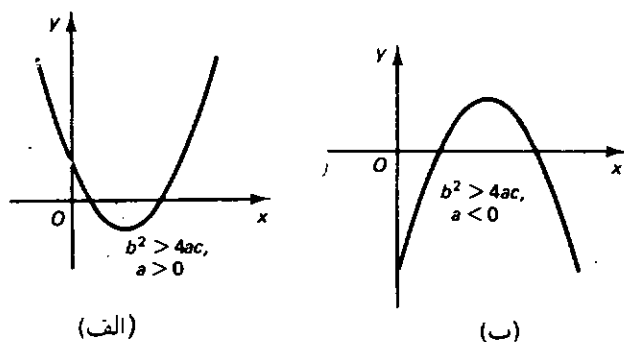
$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.2)$$

This result has an important graphical interpretation. There are three cases to consider, depending on whether the discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ is positive, negative or zero.

(1) If $b^2 > 4ac$, the curve $y = f(x)$ cuts the x -axis at two distinct points. This, taken together with (ii), enables us to draw the sketches of the curves $y = f(x)$ as in Fig. 3.1.

این نتیجه یک تعبیر نموداری مهم در بر دارد. با توجه به مبین عبارت فوق یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ که مثبت، منفی یا صفر باشد، ۳ حالت وجود دارد.

(۱) $b^2 > 4ac$ ، $\Delta > 0$ ، منحنی $y = f(x)$ محور x را در دو نقطه متمایز قطع می‌کند. در این وضعیت و با توجه به قسمت (۲) اگر $a > 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow +\infty$ و اگر $a < 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow -\infty$ برای رسم منحنی $y = f(x)$ دو حالت ممکن حاصل می‌شود، که در شکل ۳.۱ مشاهده می‌کنید.



شکل ۳.۱

تجزیه و تحلیل فوق در زیر نمایش داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} \Delta > 0 & \text{ریشه حقیقی متمایز} \\ \Delta = 0 & \text{ریشه حقیقی برابر} \\ \Delta < 0 & \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

To solve a quadratic equation it is often not necessary to use the general formula (3.3). In simple cases, when the roots are integers or rational numbers, one can often express the quadratic function in terms of its factors, as in Equation (3.4), by inspection. The roots are then just α and β . If a factorisation is not immediately obvious, one may try the factor theorem (p. 21) to obtain a factor.

برای حل یک معادله درجه ۲ حتماً لازم نیست از فرمول عمومی (۳.۳) استفاده شود. در حالت‌های ساده، زمانی که ریشه‌ها صحیح یا گویا هستند، می‌توان معادله درجه دوم را برحسب عامل‌هایش بیان کرد (به معادله «۳.۴» توجه کنید) و ریشه‌ها یعنی α و β به راحتی حاصل می‌شوند. اگر تجزیه بلافاصله انجام پذیر نبود، سعی می‌کنیم از قضیه عامل (صفحه ۲۱) برای به دست آوردن یک عامل، استفاده کنیم.

Example 1 Describe the important features and sketch the graph of:

- (a) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$,
(b) $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$,
(c) $f_3(x) = -x^2 + 2x - 1$.

(a) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$.

(i) $f_1(0) = 5$.

(ii) As $x \rightarrow \pm\infty$, $f_1(x) \rightarrow \infty$.

(iii) $f_1(x) = (x^2 - 3x + 5)$

$$= \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > \frac{11}{4}.$$

So $f_1(x)$ has a minimum value of $\frac{11}{4}$ when $x = \frac{3}{2}$, and so is never zero. The graph of $f_1(x)$ is shown in Fig. 3.4.

مثال (۱) قسمتهای مهم راجع به اشکال منحنیهای داده شده را

توصیف کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

الف) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$

ب) $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$

ج) $f_3(x) = -x^2 + 2x - 1$

الف) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$

3.2 Quadratic equations

The equation $ax^2 + bx + c = 0$, where $a \neq 0$, is called a *quadratic equation*. From Equation (3.2) the roots of this quadratic equation are

$$\frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad (3.3)$$

If we denote these roots by α and β , then

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta). \quad (3.4)$$

۳.۲- معادلات درجه دوم

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ زمانی که $a \neq 0$ ، یک معادله

درجه دوم نامیده می‌شود. با توجه به معادله (۳.۲) ریشه‌های این معادله درجه دوم عبارتند از:

$$\frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad (3.3)$$

اگر ما این ریشه‌ها را با α و β نمایش دهیم، در این صورت داریم:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad (3.4)$$

From Equation (3.3), or alternatively by equating coefficients of x^1 and x^0 in Equation (3.4), we find

$$\alpha + \beta = -b/a, \quad (3.5a)$$

$$\alpha\beta = c/a. \quad (3.5b)$$

It follows immediately from Equation (3.5b) that, when the roots are real, they are of the *same sign* if a and c are of the *same sign*. (From Equation (3.5a) it follows that they are of *different sign* from b .) The roots are of *opposite sign* if a and c are of *opposite sign*.

The above analysis indicates the following:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{two distinct} \\ \text{two equal} \\ \text{no} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{real roots} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} b^2 - 4ac \end{array} \right.$$

با توجه به رابطه (۳.۵ب)، یا با متحد قرار دادن ضرایب x^1 و x^0 در معادله «۳.۴»، خواهیم داشت:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad (\text{الف } ۳.۵)$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \quad (\text{ب } ۳.۵)$$

بلافاصله از رابطه (۳.۵ب) نتیجه می‌گیریم که، اگر a و c هم‌علامت باشند ($\frac{c}{a} > 0$)، دو ریشه (α و β) متحد‌العلامه‌اند. از رابطه «الف ۳.۵» نتیجه می‌گیریم که علامت آنها مخالف علامت b می‌باشند. اگر a و c مختلف‌العلامه باشند، ریشه‌ها نیز مختلف‌العلامه خواهند بود.

$$\text{ب) } f_p(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$(1) f_p(0) = 6$$

$$(2) \text{ اگر } x \rightarrow \pm\infty, f_p(x) \rightarrow +\infty$$

$$(3) f_p(x) = x^2 - 5x + 6 \equiv \left[x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 \\ = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

بنابراین $f_p(x)$ کمترین مقدار خود را به ازای $x = \frac{5}{2}$ ، که مساوی با $-\frac{1}{4}$ می‌باشد، به دست می‌آورد.

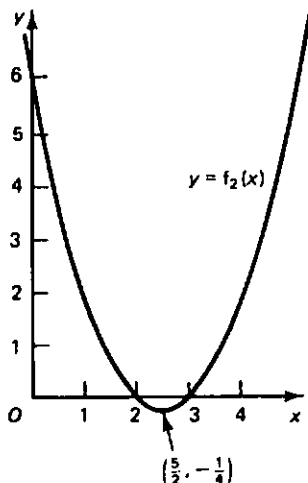
$$f_p(x) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right) = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = 2$$

به روش دیگری ما می‌توانستیم $f_p(x)$ را به صورت زیر تجزیه کنیم و بنویسیم.

$$f_p(x) = (x - 3)(x - 2)$$

$$\Rightarrow f_p(x) = 0 \text{ که } x = 3 \text{ یا } x = 2$$

نمودار $f_p(x)$ در شکل ۳.۵ نمایش داده شده است.



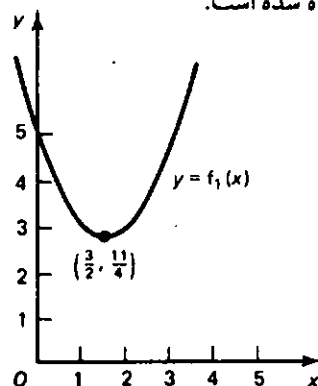
شکل ۳.۵

$$(1) f_1(0) = 5$$

$$(2) \text{ اگر } x \rightarrow \pm\infty, f_1(x) \rightarrow +\infty$$

$$(3) f_1(x) = x^2 - 3x + 5 \equiv \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 \\ = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$$

بنابراین $f_1(x)$ دارای کمترین مقدار خود به ازای $x = \frac{3}{2}$ بوده و مقدار آن برابر $\frac{11}{4}$ است، پس هیچگاه صفر نیست. نمودار $f_1(x)$ زیر نمایش داده شده است.



شکل ۳.۴

$$(b) f_2(x) = x^2 - 5x + 6.$$

$$(i) f_2(0) = 6.$$

$$(ii) \text{ As } x \rightarrow \pm\infty, f_2(x) \rightarrow +\infty.$$

$$(iii) f_2(x) = x^2 - 5x + 6 = \left[x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 \\ = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

So $f_2(x)$ has a minimum value of $-\frac{1}{4}$ when $x = \frac{5}{2}$.

$$(iv) f_2(x) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right) = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ or } 2.$$

Alternatively we could write

$$f_2(x) = (x - 3)(x - 2)$$

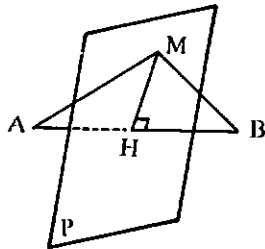
$$\Rightarrow f_2(x) = 0 \text{ when } x = 3 \text{ or } 2.$$

The graph of $f_2(x)$ is shown in Fig. 3.5.

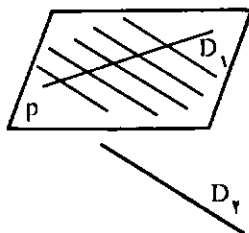
مکان هندسی

• محمد هاشم رستمی

یعنی:
اولاً: هر نقطه‌ای که روی عمود منصف پاره خط AB باشد، از دو نقطه A و B به یک فاصله است.
ثانیاً: هر نقطه‌ای که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد، روی عمود منصف پاره خط AB واقع است.
نکته: این مکان در فضا صفحه عمود منصف پاره خط AB است. (صفحه P در شکل مقابل).



یعنی: مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، صفحه عمود منصف آن پاره خط است.
مثال ۲: مکان هندسی خطهایی که از نقاط مختلف خط راست D_1 به موازات خط راست D_2 رسم می‌شوند، یک صفحه است که شامل خط D_1 است و با خط D_2 موازی می‌باشد.

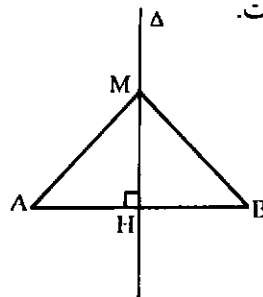


یکی از مهمترین و جالبترین مباحث هندسه، مکان هندسی است، که در بخشهای دیگر هندسه نیز کاربردهای فراوان دارد.
در این مقاله پس از تعریف مکان هندسی، ضمن معرفی مکانهای هندسی مهم، کاربردهایی از آنها و مسأله‌هایی در مورد تعیین مکانهای هندسی، ارائه خواهد شد. از اثبات مکانهای هندسی که به صورت قضیه در کتابهای درسی آمده‌اند خودداری خواهد شد، مگر آن که، روش دیگری برای اثبات آنها وجود داشته باشد، و یا نیازمند شرح و بسط بیشتری باشند.

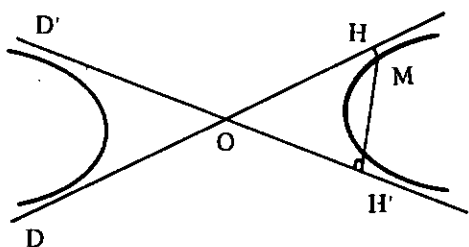
تعریف: مجموعه‌ای از نقطه‌ها (یا خطها) که دارای خاصیت مشخصی باشند به قسمی که:
اولاً: هر نقطه (یا خط) متعلق به آن مجموعه، آن خاصیت را داشته باشد.

ثانیاً: هر نقطه (یا خط) که آن خاصیت را دارد به آن مجموعه تعلق داشته باشد، یک مکان هندسی نامیده می‌شود.

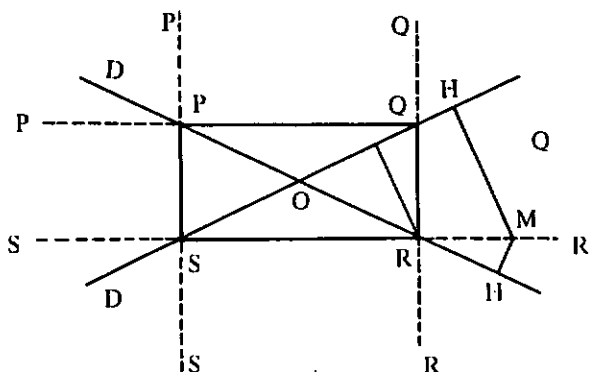
مثال ۱: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو سر پاره خط AB واقع در این صفحه به یک فاصله باشد ($MA=MB$)، عمود منصف پاره خط AB است.



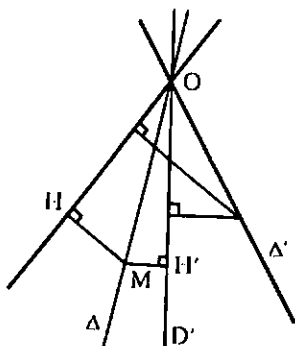
مجاانبهای آن می‌باشند.



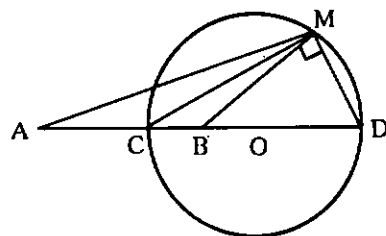
مثال ۶: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که تفاضل فاصله‌اش از دو خط متقاطع D و D' واقع در آن صفحه مقدار ثابت l باشد ($|MH - MH'| = l$) هشت نیم خط است، که این نیم خطها امتداد اضلاع مستطیلی هستند که دو خط مفروض قطرهای آن، و فاصله هر رأس مستطیل از قطر مقابلش برابر l است.



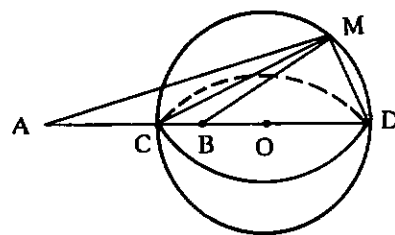
مثال ۷: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو خط متقاطع D و D' مقدار ثابت K ($K \neq 0$) باشد، ($\frac{MH}{MH'} = K$)، دو خط Δ و Δ' است، که از نقطه برخورد خطهای D و D' می‌گذرند، و چهار خط $DD'\Delta\Delta'$ تشکیل یک دستگاه توافقی می‌دهند.



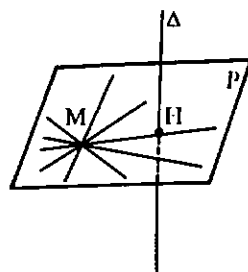
مثال ۳: مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت K ($K \neq 0$ و $K \neq 1$) باشد، ($\frac{MA}{MB} = K$)، دایره‌ای است که قطرش پاره خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند (دایره آپولونیوس).



تکته: این مکان در فضا کره‌ای به قطر CD است، با توجه به اینکه (ABCD) یک تقسیم توافقی با نسبت K است.



مثال ۴: مکان هندسی خطی که از یک نقطه عمود بر یک خط رسم می‌شود، صفحه‌ای است که از آن نقطه بر آن خط عمود می‌گردد.

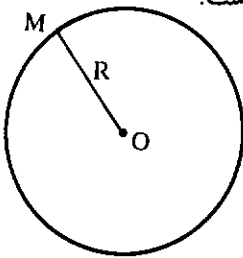


مثال ۵: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که حاصل ضرب فاصله‌های آن از دو خط متقاطع واقع در آن صفحه مقدار ثابتی باشد ($MH \cdot MH' = K$)، یک هذلولی است که دو خط مفروض

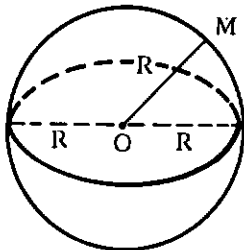
نقطه یا خط داده شده تعلق دارد. در این موارد نقطه‌های ثابت و خط‌های ثابت همچنین مقدارهای ثابت موجود در مسأله اهمیت زیادی دارند که در زیر برخی حالتها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱- در مسأله تنها یک نقطه ثابت مانند O وجود دارد:

الف) اگر نقطه متحرک M در صفحه P چنان حرکت کند که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت R باشد، مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R است.

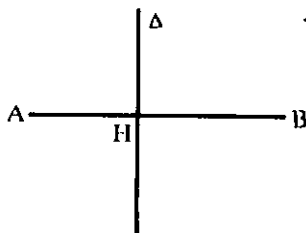


ب) اگر نقطه متحرک M در فضا چنان حرکت کند که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت R باشد، مکان هندسی نقطه M کره‌ای به مرکز O و به شعاع R است.



۲- دو نقطه ثابت مانند A و B در مسأله وجود دارد:

الف) اگر نقطه متحرک M چنان حرکت کند که همواره از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله باشد، مکان هندسی نقطه M عمود منصف پاره خط AB است.



تعریف مکان هندسی مشخص می‌کند که هر مجموعه‌ای از نقطه‌ها، خط‌ها و یا سطوح یک مکان هندسی نیست. زیرا این مجموعه‌ها، می‌تواند هر شکلی باشد، مانند یک یا چند نقطه، یک خط، یک صفحه، بخشی از یک خط و یا بخشی از یک صفحه. همچنین تعریف مکان هندسی مشخص می‌کند که برای اثبات قضیه‌هایی که به صورت مکان هندسی بیان شده‌اند دو قضیه (یک قضیه و عکس آن قضیه) را باید ثابت کرد.

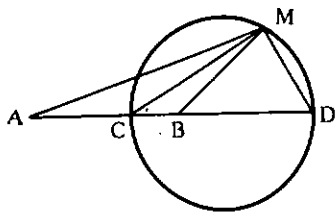
مکان هندسی از دیر زمان مورد توجه ریاضیدانان بوده است. ارشمیدس Archimedes (۲۸۷ تا ۲۱۲ ق.م.) در آثار خود خاصیت سهمی را که یک مکان هندسی است به کار برده است. همچنین آپولونیوس برغهای Apollonius (۲۶۰ تا ۲۰۰ ق.م) اولین اثر مهم و مستقل در مورد مقاطع مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی) را نوشت، که همگی مکان هندسی می‌باشند و با استفاده از همین مکانهای هندسی، کپلر Kepler در سال ۱۶۰۴ آینه‌های خاصی را طراحی کرد که به آینه‌های سهموی معروفند. و در سال ۱۶۰۹ نظریه حرکت خورشید مرکزی را در مقابل نظریه بطلمیوس که زمین مرکزی بود ارائه داد. همچنین آپولونیوس ثابت کرد، مکان هندسی نقطه‌ای که مختصات آن در رابطه $ay = x + b$ (که $a > 0$ و $b > 0$) صدق کند، یک خط راست است.

مکانهای هندسی علاوه بر آن که خود شامل قضایا و مسائل جالبی می‌باشند، در دیگر بخشهای هندسه نیز کاربردهای فراوانی دارند. از جمله مکانهای هندسی از ابزارهای مفید و مؤثر برای حل مسأله‌های ترسیم هندسی یا ساختمانهای هندسی است.

عده‌ای ساختمانهای هندسی یا ترسیمهای هندسی را عنصر اصلی آموزش ریاضی و وسیله‌ای نیرومند و قوی برای پرورش استعدادها در زمینه هندسه، و به طور کلی ریاضی می‌دانند، که این مطلب خود، اهمیت مکانهای هندسی را بیشتر نمایان می‌کند.

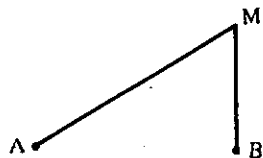
در مواردی از ما خواسته می‌شود که مکان هندسی یک نقطه یا یک خط را در صفحه یا فضا، مشخص کنیم. در این صورت باید ببینیم که آن مکان هندسی چه شکلی است و چه قسمتی از آن شکل به مکان هندسی

دایره‌ای است که قطرش پاره خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند (دایره آپولونیوس).

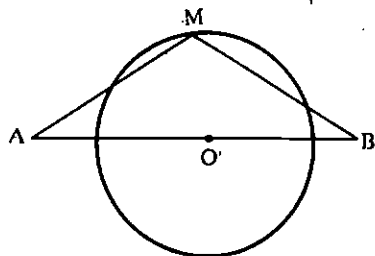


نکته: این مکان در فضا کره‌ای به قطر پاره خط CD است.

(ج) اگر نقطه متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که حاصل ضرب فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابت K باشد ($MA \cdot MB = K$)، مکان هندسی نقطه M یک منحنی از درجه چهارم است (مقطع غیر مخروطی است).



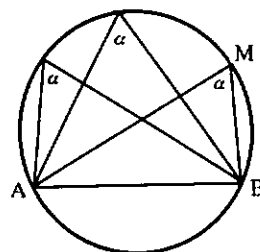
(ج) در صورتی که نقطه متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابت K^2 باشد ($MA^2 + MB^2 = K^2$)، مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2} \sqrt{2K^2 - AB^2}$ است.



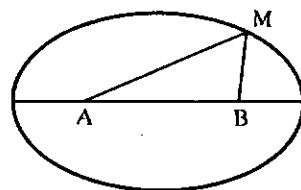
نکته: این مکان در فضا کره‌ای به مرکز O و به شعاع

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{2K^2 - AB^2}$$

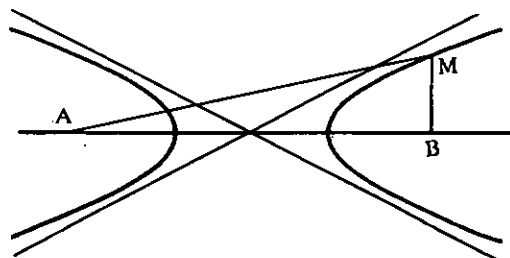
(ب) اگر نقطه متحرک M چنان حرکت کند که همواره رأس زاویه‌ای باشد که اندازه‌اش مقدار ثابت α است و اضلاعش از دو نقطه ثابت A و B می‌گذرند، مکان هندسی نقطه M کمان درخور زاویه α مقابل به پاره خط AB است.



(پ) اگر نقطه متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر مقدار ثابت $2a$ باشد ($2a > AB$ و $2a > 0$)، مکان هندسی نقطه M یک بیضی است به کانونهای A و B و عدد ثابت $2a$.

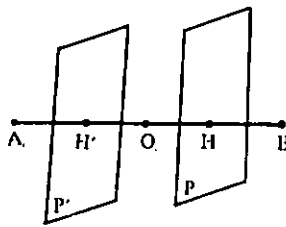


(ت) اگر نقطه متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که قدرمطلق تفاضل فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر مقدار ثابت $2a > 0$ باشد ($|MA - MB| = 2a$)، مکان هندسی نقطه M یک هذلولی به کانونهای A و B و عدد ثابت $2a$ است.



(ث) اگر نقطه متحرک M چنان در صفحه تغییر مکان دهد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابت K ($K \neq 1$ و $K \neq 0$) باشد، ($\frac{MA}{MB} = k$)، مکان هندسی نقطه M

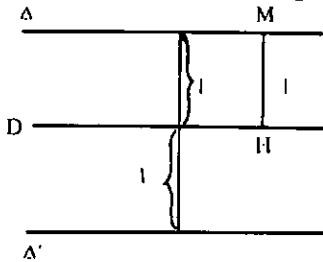
قسمی که فاصله این دو صفحه از نقطه O وسط پاره خط AB برابر



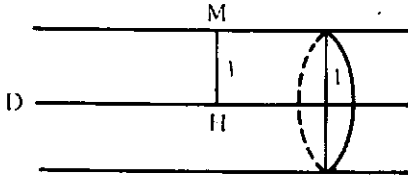
است. $\frac{K^2}{2AB}$

۳- در مسأله تنها یک خط ثابت مانند D وجود دارد:

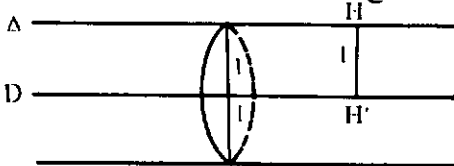
الف) اگر نقطه متحرک M در صفحه، چنان حرکت کند که همواره فاصله‌اش از خط ثابت D برابر مقدار ثابت l باشد (MH=l)، مکان هندسی نقطه M دو خط Δ و Δ' موازی خط D و به فاصله ثابت l، واقع در طرفین آن می‌باشند.



ب) اگر نقطه متحرک M در فضا چنان حرکت کند که همواره فاصله‌اش از خط ثابت D برابر مقدار ثابت K باشد، مکان هندسی نقطه M یک سطح استوانی است که شعاع قاعده مقطع قائم آن برابر l است.



ج) اگر خط متحرک Δ در فضا چنان حرکت کند که همواره موازی خط ثابت D بوده و در فاصله ثابت l از آن قرار داشته باشد، مکان هندسی خط Δ یک سطح استوانه‌ای دوار است که مقطع قائم آن دایره‌ای به شعاع l است.



(ادامه دارد)

بحث: این مکان هندسی وقتی وجود دارد که، $2K^2 - AB^2 \geq 0$ یا $K^2 \geq \frac{AB^2}{2}$ باشد.

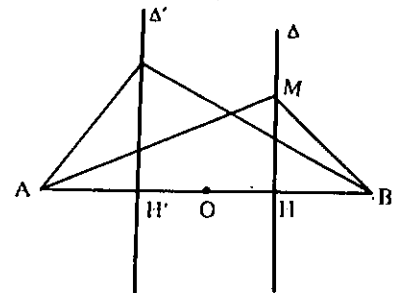
(۱) در صورتی که $K^2 = AB^2$ باشد، $R = \frac{AB}{2}$ یعنی شعاع دایره (یا کره) مکان هندسی برابر نصف پاره خط AB است.

(۲) اگر $K^2 > AB^2$ باشد، شعاع دایره (یا کره) مکان هندسی از $\frac{AB}{2}$ بیشتر است.

(۳) اگر $K^2 = \frac{AB^2}{2}$ باشد، دایره (یا کره) مکان هندسی به یک نقطه تبدیل می‌شود.

(۴) در صورتی که $K^2 < \frac{AB^2}{2}$ باشد، مسأله جواب ندارد.

ح) اگر نقطه متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که تفاضل مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B مساوی مقدار ثابت K^2 باشد ($MA^2 - MB^2 = K^2$)، مکان هندسی نقطه M خطی مانند Δ عمود بر خط AB است، به قسمی که، فاصله آن از نقطه O وسط پاره خط AB برابر $OH = \frac{K^2}{2AB}$ است.



تبصره: اگر $MB^2 - MA^2 = K^2$ باشد، مکان هندسی نقطه M خطی مانند Δ' عمود بر خط AB است که این خط قرینه خط Δ نسبت به نقطه O وسط پاره خط AB می‌باشد ($\overline{OH'} = \frac{K^2}{2BA}$)، به طور کلی می‌توان گفت: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که تفاضل مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت، مقدار ثابتی باشد، دو خط راست عمود بر خط واصل بین آن دو نقطه است، به قسمی که این دو خط نسبت به نقطه وسط پاره خط واصل بین آن دو نقطه قرینه یکدیگرند. نکته: این مکان در فضا دو صفحه عمود بر خط AB است، به

تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۸)

در این شماره نیز بررسی مجله آشنایی با ریاضیات را پی می گیریم.

بگوییم، از دولتی که بین او و کنت روجستر انجام گرفته است، تشخیص دهیم:

- دکتر، من شما را در حد کفش می دانم.
- کنت، من شما را در حد خاک می دانم.
- دکتر، من شما را در مرکز زمین می بینم.
- کنت، من شما را در آن طرف زمین می بینم.
- دکتر، من شما را در قعر جهنم می بینم.
- باروی روی پاشنه هایش چرخید و گفت:
- من شما را در آن جا تنها می گذارم.

از مقاله خوب نگاریمها^۲ می گذریم، نیز از مقاله سلسل مسأله های قدیمی که با عنوان مسأله های چینی^۴ مطرح شده است - گرچه در این صورت از وزن شمشهای طلا و نقره و قیمت گاو میش و گوسفند بی خبر می مانیم - و به مقاله ریاضیات مرز سودمند بودن را مشخص می کنده می رسم و در آن چنین می خوانیم:

هندسه دبیرستانی حتی از ساده ترین چیزها، مثل مثلث و دایره، چنان شبکه به هم بافته ای از قضیه ها ایجاد می کند که به سختی می توانید از آن خلاص شوید و این بیشتر به خاطر آن است که شما بدانید با چه موضوعی سروکار دارید: این را فایده آن می دانند. ولی در مورد «سودمند بودن» چه می توان گفت؟ «سودمندی» مفهومی کاملاً انتزاعی است که راه حلی را می پذیرد که کشش به سمت حداکثر رضایت را به وجود آورد.

به گشت و گذارمان ادامه می دهیم. گشت و گذاری که در آغاز نیتان به سریع بودن آن بوده و اکنون با توجه به گلهای رنگا رنگ صفحه های مجله به کندی گراییده است. به هر حال از این مقاله هم دل می کنیم و خواننده مشتاق را به اصل مرجع آن حواله می دهیم و از سر آن می گذریم و به راهمان قدم می زنیم و با گذشتن از خیر یکی دو مقاله به مقاله آفرینندگان ریاضیات عالی^۱ می رسم و در آن درباره ایساک باروی^۲ (۱۶۷۷ - ۱۶۳۰) استاد نیوتن چنین می خوانیم که:

بی توقعی و فروتنی جزو عاداتی باروی بود و حتی به لباس پوشیدن خود هم توجهی نداشت. ظاهری موقر داشت، با قدی نه چندان بلند، لاغر و رنگ پریده. او چنان محجوب بود که حتی حاضر نمی شد برای تصویر خود، در برابر نقاش بایستد، نقاش تصویر او را پنهانی، وقتی دوستان موفق شدند توجه باروی را به جای دیگری جلب کنند کشید. با وجود این در عمق وجود باروی، هرگز خصلت مبارزه جویی، که از کودکی به آن شهرت داشت، خاموش نشد. وقتی که در «سمیرنا»^۳ روی دریا بود، دزدان دریایی به کشتی حمله کردند، باروی تنها مسافری بود که همراه با فرماندهی در عرشه باقی ماند و حمله متجاوزان را شکست داد. وقتی که کشیش شاهی بود ضرورت پیدا کرد که مدتی را با درباریان بگذرانند. کشیش فروتن می بایست غرور اشراف را متواضعانه تحمل کند، ولی کشیش ما «از آنها نبوده» موضع باروی را می توان از گفت و گو، یا درست تر

* نام قدیمی یونانی از میر در ترکیه (م).

به همین ترتیب، جاه طلبی (به صورت «شدیده» آن)، یعنی تمایل به این که «از همه بهتر» باشد. بنابراین، جاه طلبی اولی راسی توان به صورت به حداکثر رساندن تفاضل:

$$a_1 - \text{Max} \{a_p, a_r\} \quad (**)$$

نشان داد.^۷

روشن است که بین «ضعیفترین» خودخواهی و «شدیدترین» جاه طلبی - که با رابطه های (*) و (**) مشخص شده اند - مجموعه ای نامتناهی از انواع «احساسهای مربوط به ارزشهای شخصی» وجود دارد که متناظر با تابعهای بینایی هستند.

این هم یک احساس دیگر: «مثل همه بودن»، که رابطه متناظر آن را می توان به صورت حداقل کردن این رابطه نوشت:

$$\text{Max} \{ |a_1 - a_p|, |a_1 - a_r| \}$$

انصاف یعنی چه؟ انصاف به این معناست که از تمایل شدید به بردهای شخصی و از برد متوسط دوری گزینیم، یعنی حداقل کردن این ماکزیم:

$$\text{Max} \left\{ \left| a_1 - \frac{a_1 + a_p + a_r}{3} \right|, \left| a_p - \frac{a_1 + a_p + a_r}{3} \right|, \left| a_r - \frac{a_1 + a_p + a_r}{3} \right| \right\}$$

یا رابطه ای شبیه به آن.

رسیدن به مناسبترین راه حلها و حداکثر سودمندی، از چیزهایی است که ریاضی دانها به آن توجه دارند، و نظریه بازی به طوری جدی به این مسأله ها می پردازد.

در مقاله علم و صنعت در پلانیورس^۸ به تجسمی از موجودات دو بعدی و زندگی آنها برمی خوریم. بعضی از مطالب خواندنی این مقاله که به قلم مارتین گاردنر است، به صورت زیر است:

در «سرزمین هموار»^۹ تذکر داده ام که «دست کم از لحاظ سرگرمی و تفریح هم که باشد، ارزشمند است که ویژگیها و سرشت

خط اصلی نظریه کلی «سودمندی» عبارت است از بررسی پدیده هایی که در آنها نتیجه هایی که مورد علاقه ماست، به پیشامد و تصادف مربوط باشد. در نظریه «سودمندی» این گونه پدیده ها را «شانس» یا «لاتاری» می نامند. به جز مفهوم مرسوم واژه «لاتاری»، همه انواع کارهای مربوط به بیمه، شرکت در قمار، در نظر گرفتن پدیده های خود به خودی و غیره را هم باید مربوط به آن دانست.

سه نفر را در نظر می گیریم. اگر اولی فردگرا باشد، تابع سودمندی او، به طور ساده، همان برد a_1 است که تمایل به زیاد کردن آن دارد. حالا فرض می کنیم که اولی، دوستی فداکار برای دومی باشد، این به معنای آن است که سودمندی اولی a_p است.

اگر اولی هم به فکر دومی هم به فکر سومی باشد، ولی کمی بیش از آنها هم درباره خودش بیندیشد، طبیعی است که تابع سودمندی او، به صورت:

$$a_1 + a_p + a_r$$

در خواهد آمد.

ممکن است اولی، به «بی تفاوتی کاملی» علاقه مند باشد، یعنی بدون هیچ علاقه مادی شخصی، به بقیه لطمه بزند (مثل روحیه او باش). طبیعی است که در این حالت، تابع سودمندی به این صورت در می آید:

$$-(a_p + a_r)$$

چگونه می توان حسادت اولی را نسبت به دومی نشان داد؟ روشن است که تمایل اولی در این است که دومی، در هر حال، بهتر از خود او نباشد. بنابراین، هدف اولی این است که اختلاف:

$$a_p - a_1$$

را به حداقل برساند. و طبیعی است که تمایل اولی به این هدف را هم باید به عنوان تعریف حسد او نسبت به دومی قبول کرد.

خودخواهی را، به عنوان تمایلی می پذیریم که شخص نمی خواهد بدتر از دیگران باشد، شکل «ضعیفتر» آن این است که می خواهد «آخرین نفر» نباشد. و این متناظر با تابع سودمندی

$$a_1 - \text{Min} \{a_p, a_r\} \quad (*)$$

است.^{۱۰}

آستریا می تواند خورشیدی هم داشته باشد که ضمن گردش به دور آن، در اثر چرخش به دور خودش، شب و روز هم ایجاد کند. جالب این است که همان طور که موجودات چهار بعدی قادر به دیدن کلیه اندامهای داخلی ما هستند، ما هم می توانیم ارگانهای داخلی هر حیوان دوبعدی بی را بخوبی ببینیم.

مردم آستریا مثلث شکلند و صورتهاشان همیشه به یک جهت توجه است و دو دست در جلو، دو چشم در نزدیکی رأس مثلث و دو پا در زیر قاعده مثلث دارند، یعنی متقارند. صورت مردها همیشه رو به مشرق و صورت زنهارو به مغرب قرار گرفته است. در نتیجه، آستریائیها مانند پرندگان یا اسبهای ما، در یک زمان می توانند دو جهت را ببینند. طبیعتاً آستریائیها برای عبور از یکدیگر یک راه بیشتر ندارند و آن خزیدن از زیر یا پریدن از روی یکدیگر است.

از پلانیورس بیرون می آیم^{۱۲} و با پریدن از روی یک دو مقاله همچنان مفید به چهارمین قسمت مقاله تلاشی برای تنظیم فرهنگ ریاضی^{۱۳} می رسم. نویسنده در تلاش خود در کار تنظیم مقاله برای دانش آموزان موفق است، ولی ما در تلاشمان در کار گذشتن از سرمقاله توفیق نمی یابیم و ناچار به ذکر دو بخش آن که پیش از این هم ذکر از نام آنها به میان آمده است، می پردازیم:

پاپیروس ریند^{۱۴} (به نام مالک آن A. H. Rhind، مصرشناس انگلیسی) برای نخستین بار در سال ۱۸۷۷، و به وسیله هاینز لومبر، مورد بررسی قرار گرفت. و به زبان آلمانی ترجمه شد. این پاپیروس که حدود ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد نوشته شده، دارای مجموعه ای شامل ۸۴ سؤال با حل آنها است که به ریاضیات کار بسته مربوط می شوند و در آنها از عمل با کسرها، تعیین مساحت مستطیل، مثلث، دوزنقه و دایره، و حجم مکعب مستطیل و استوانه صحبت شده است. پاپیروس مسکو^{۱۵} توسط مصرشناسان روسی بررسی و در سال ۱۹۳۰ به طور کامل به زبان آلمانی ترجمه شد. در این پاپیروس، ۲۵ سؤال، تقریباً شصت همان سؤالهای پاپیروس ریند حل شده است. در سؤال چهاردهم آن، رابطه دقیق محاسبه حجم هرم ناقص

دنیای دو بعدی مورد مطالعه قرار گیرد و ابزار و وسایل مکانیکی ساده ای که ممکن است در چنین دنیایی به کار رود بررسی شود. این تذکر انگیزه ای شد که الکساندر دودنی^{۱۶} دنباله چنین فکری را بگیرد و در سالهای ۱۹۷۸ و ۱۹۷۹ بخشی از اندیشه های خود را در این مورد نشر کند.

پلانیورس یا دنیای دو بعدی سرزمینی است که اسم آن را آستریا^{۱۷} گذاشته است. آستریا سیاره دیسک مانند است که در فضای مسطح می چرخد. حرکت ساکنین آستریا بر انتهای لبه سیاره انجام می گیرد. آنها می توانند جهت شرق و غرب و بالا و پایین را تشخیص بدهند ولی طبیعتاً دیگر شمال و جنوب ندارند. دودنی با تکیه به اصل تشابه، به نکات زیر پی برد:

- (۱) پلانیورس هم یک توالی سه بعدی از «زمان و مکان» است.
- (۲) ماده پلانیورس متشکل از ملکولها، اتمها و ذرات بنیادی است.
- (۳) انتقال انرژی در آن به صورت موجی و ذره ای است.
- (۴) دارای نور با تمام طول موجهایش می باشد که در نتیجه به وسیله عدسیهای مسطحه (دو بعدی) منکسر می شود. استفاده از عدسی، وجود چشمهای پلانیورسی، تلسکوپهای پلانیورسی و میکروسکوپهای پلانیورسی را امکان پذیر می سازد.
- (۵) بعضی از قوانین اساسی پلانیورسی با همتهایشان در دنیای سه بعدی، مطابقت کامل دارند، مثل: قانون علت و معلول، قوانین اول و دوم ترمودینامیک و قوانین مربوط به اینرسی، گاز، اصطکاک، مغناطیس، الاستیسیته.

دودنی فرض را بر این گذاشت که پلانیورس نیز با یک انتی بار به وجود آمده و دائماً رو به انبساط و واکنش است. یک محاسبه سرانگشتی، بر مبنای قانون عکس فاصله جاذبه نشان می دهد که بدون بستگی به مقدار جرم - سرانجام این واکنش باید در پلانیورس متوقف شود و پس از آن نوبت انقباض یا همکشی فرارسد.

آسمان شب ساکنین آستریا مسلماً قوسی از دایره خواهد بود که در طول آن ستارگانی به صورت نقطه هایی درخشان پراکنده خواهند بود.

(باقاعده‌های مربعی) داده شده است. در مسأله دهم، سطح جانبی نیم استوانه‌ای که ارتفاع آن برابر قطر باشد (یا، احتمالاً، مساحت نیم کره) محاسبه شده است، و این نخستین نمونه تعیین مساحت سطحهای منحنی در ادبیات ریاضی است.

گفتیم که یکی از ویژگیهای مجله در کنار پرداختن به تاریخ و آموزش و پرورش ریاضیات توجه به ریاضیات کاربرده یا عملی است. در این مورد و در همین مرجع^{۱۶} به دو مقاله کاربرد هندسه در علم جغرافیا^{۱۷} و ریاضی کردن فیزیک^{۱۸} برخورد می‌کنیم که به این علت که خلاصه کردنشان زبان جدی به آنها می‌رساند از این کار صرف نظر می‌کنیم، و به شتاب از مطالب کتاب می‌گذریم و به شماره بعد^{۱۹} می‌رسیم.

این شماره با مقاله می‌بینیم یا به نظرمان می‌رسد^{۲۰} آغاز می‌شود. اغلب مقالات این شماره دنباله مقاله‌های قبل است، و آخرین مقاله آن تعمیم بسط دو جمله‌ای^{۲۱} می‌باشد. در این مقاله چنین می‌خوانیم که:

پاول لوکی^{۲۲} ریاضی‌دان و محقق آلمانی در سال ۱۹۴۸ میلادی هنگامی که مشغول ترجمه قسمتی از مفتاح الحساب غیاث الدین جمشید کاشانی بود متوجه شد که آنچه به نام بسط دو جمله‌ای نیوتن و مثلث حسابی پاسکال مشهور است، پیش از این دو ریاضی‌دان، توسط کاشانی و ریاضی‌دانهای دیگر اسلامی مطالعه و مدون شده است. محمد باقرزیدی^{۲۳} نیز در پایان مطلب دهم از باب اول عیون الحساب فصلی به این موضوع اختصاص داده است.

دکتر محسن هشترویدی علیه‌الرحمه در این باره چنین نوشته است: بسط دو جمله‌ای جبری امروزه معمولاً به نام دو جمله‌ای نیوتن معروف است. چه اول بار علی‌الظاهر، نیوتن این محاسبات را مدون کرده است، ولی با ملاحظه این که خیام در کارهای خود این بسط و قانون تشکیل ضرایب آن را به کار برده است روشن می‌شود که دو جمله‌ای نیوتن و مثلث پاسکال پیش از این دو دانشمند، توسط خیام کشف و وضع شده است. در یکی از کنگره‌های بین‌المللی تاریخ

علوم که در رم برپا شد دانشمندان خارجی به این امر اشاره کرده‌اند و روزنفلد از استادان دانشگاه مسکو پیشنهادی دایر بر تغییر نام دو جمله‌ای و مثلث به نام خیام به کنگره تقدیم داشت.^{۲۴}

به سال ششم انتشار مجله می‌رسیم. در این سال ناشر پیشین مجله از ادامه انتشار آن چشم می‌پوشد و سردبیر مجله که نمی‌خواهد این یگانه نشریه عمومی ریاضیات به زبان فارسی تعطیل شود انتشار آن را با همان سبک و شیوه پیشین، اما ناگزیر با بهایی گرانتر، دنبال می‌کند.^{۲۵}

اولین مقاله اولین شماره سال ششم معادله‌های دیفرانسیلی و اهمیت آنها در دانشهای طبیعی^{۲۶} است. در این مقاله که ساده‌ترین نوعهای معادله دیفرانسیل خطی را مورد بررسی قرار می‌دهد سخن از کاربرد این معادلات در محاسبه سرعت حرکت مستقیم‌الخط، تجزیه رادیواکتیو، جذب نور، غلظت محلول، سرد کردن جسم، ساده‌ترین مدارهای الکتریکی، سقوط جسم، نوسانهای ناشی از نیروی کشان فتر، و روش مدلسازی ریاضی به میان می‌آید.

در مقاله انحنای فضا^{۲۷} در شرح احوال و آثار برنارد ریمان^{۲۸} ریاضی‌دان آلمانی چنین آمده است که:

در بهار سال ۱۸۵۴، یک ریاضی‌دان آلمانی به نام برنارد ریمان بشدت نگران آینده خود و امتحانی بود که بزودی در پیش داشت. او در آن ایام بیست و هشت ساله بود و هنوز هیچ درآمدی نداشت. با چند سکه‌ای که پدرش (یک کشیش پروتستان در یکی از شهرهای کوچک هاننور) هر ماه برایش می‌فرستاد، زندگی محقری را می‌گذراند. برنارد با فروتنی به پدر و برادرش می‌نوشت^{۲۹} که اغلب استادان مشهور دانشگاه، در برلین و گوتینگن، بی‌هیچ دلیلی محبت فوق‌العاده‌ای نسبت به وی ابراز می‌کنند. در این زمان، او مدرک دکتری را گرفته بود و برای آن که به سمت دانشیاری (بدون دریافت حقوق) منصوب شود، باید خطابه قابل قبولی در محضر کلیه اعضای دانشکده فلسفه در گوتینگن ایراد می‌کرد. برنارد سه موضوع را پیشنهاد کرده بود. در آن روزها به برادرش نوشت: «دو موضوع اول

نمونه و سرمشق کامل این روش را در ریاضیات می‌دید. البته، روش ریاضی، به خودی خود روشی عام نیست و نمی‌تواند باشد، زیرا تنها حوزه کمیتها را در برمی‌گیرد. ولی، روش ریاضی نمونه‌ای است که با سرمشق قرار دادن آن می‌توان چنان آلفگوریتمی ساخت (واژه «آلفگوریتم» را برای نخستین بار، لایب‌نیتز به کار برده است)، که بتواند همه مفهوما را در بر بگیرد، همان‌طور که ریاضیات، کمیتها را در بر گرفته است.

به مقاله هفت فاجعه^{۲۲} می‌رسیم. گرچه قبلاً در مورد مطلب مربوط به آن یعنی نظریه فاجعه‌ها سخن گفته‌ایم، با این همه به ذکر چند نکته از آن می‌پردازیم:

تولد ستاره جدید، باز شدن گل یا به وجود آمدن شهر، اینها پیش - آمدهایی عادی هستند، ولی در واقع هر کدام از آنها، تعادلی را که قبلاً برقرار بوده است، به صورتی ناگهانی به هم می‌زنند. تمامی عالم افلاکی، در حرکت تکاملی خود، به حالت تعادلی دیگر منتقل می‌شود. کارهای پرفسور رنه توم، ریاضی‌دان فرانسوی، می‌تواند در درک این جهشها به ما کمک کند.

«نظریه ویژگیهای نگاشتهای قابل دیفرانسیل‌گیری» را، اگر در اصطلاحها تجربه کافی نداشته باشیم، می‌توان به ترتیب دیگری هم بیان کرد مثلاً، برای امان دادن به گوش، که ناچار به شنیدن اصطلاحی به این دور و درازی نباشد، می‌توان از اصطلاح کوتاه «نظریه فاجعه‌ها» استفاده کرد.

بیان آسانتر می‌شود، ولی معنا و مفهوم آن چیست؟ چه بسا که این کوتاه کردن اصطلاح، خواننده را به گمراهی بکشانند و ذهن او را به طرف زلزله یا آتش سوزی، سقوط هواپیما یا ورشکستگی مالی بکشاند. ولی در این مقاله، به هیچ موضوعی از این قبیل برخورد نخواهید کرد. در این جا، درباره گلوله‌ای که در یک شیار خمیده می‌غلتد، و درباره قرصی که به کمک نیروهای وارد بر آن در حال تعادل است، و بابه هم خوردن و ناپایداری تعادل، حالت خود را از دست می‌دهد و ... صحبت می‌شود.

را بخوبی تهیه کرده بودم، اما گوس موضوع سوم را انتخاب کرد و حالا به زحمت افتادام.»

کارل فردریک گوس، سرکرده ریاضی‌دانان آلمان و مایه مباهات دانشکده خود بود. در تصور برنارد از عرش اعلا، میل کار گوس از بارگاه ربانی فاصله چندانی نداشت. (این برداشت، امروزه نیز در گوشتینگن عمومیت دارد.) عنوان موضوعی که گوس برای سخنرانی ریمان جوان برگزید، عبارت بود از: «فرضیهایی که پایه هندسه را تشکیل می‌دهند.» گوس در مورد این عنوان چیزی جز چند بررسی مبهم انتشار نداده بود، با این حال، این موضوع را بر دو موضوع دیگری که ریمان پیشنهاد کرده بود ترجیح داد، زیرا کنجکاو بود ببیند این مرد جوان در مورد چنین موضوع ژرف و غریبی چه خواهد گفت.

در مقاله تابع یا عمل و کردار^{۲۳} در تعریف تابع یا فونکسیون^{۲۴} چنین می‌خوانیم که: تابع از یک یا چند متغیر، عمل یا کرداری است که به موجب آن یک یا چند متغیر تبدیل به متغیر دیگر می‌شود. فرمه در منطق ذات هر مفهوم را با تابع بیان می‌کند و اشیائنگلر تابع را عدد باختری می‌نامد و آن را مشخص فرهنگ مغرب زمین می‌داند.

در مقاله آفرینندگان ریاضیات عالی^{۲۵} که یکی از مقالات مسلسل این مجموعه است در شرح حال لایب‌نیتز فیلسوف و ریاضی‌دان بزرگ آلمانی چنین آمده است که:

باید به این نکته اشاره کنیم که هر قدر کشفهای لایب‌نیتز در ریاضیات بزرگ باشد، برای خود او، همه آنها، تنها جزئی از مسأله فلسفی مورد نظرش را تشکیل می‌داد، مسأله‌ای که حل آن، تمامی زندگی لایب‌نیتز را پر کرده، همچون خط سرخی از میان تمامی کارهای او عبور می‌کند. برای این که بتوانیم ماهیت این مسأله را روشن کنیم، باید به یاد بیاوریم که در فلسفه لایب‌نیتز، نقش عمده، به عهده هماهنگی و توازن عمومی است. جهانی که بر آن یک نظام هماهنگ حکومت می‌کند، نمی‌تواند جهانی یگانه نباشد، و در نتیجه، باید روش یگانه‌ای هم برای شناخت آن وجود داشته باشد. ولایب‌نیتز،

سوم:

$$x^3 + a = cx^2$$

را که ماهانی نتوانسته بود حل کند و آن را مستعجلاً نگاشته بود، ابوجعفر خازن به وسیله قُطوع مخروطی حل کرد.

برای این که وسوسه نشویم و کار به درازا نکشد از بقیه مطالب این شماره سرعت می‌گذاریم و به شماره بعد^{۲۷} می‌رسیم.

اولین مقاله شماره بعد مجموعه‌ها^{۲۸} است. در این مقاله چنین

می‌خوانیم:

مجموعه چیست و چه معنایی دارد؟ اگر شرافتمندانه بخواهید، باید بگوییم که تعریفی برای این مفهوم نداریم. تعریف یعنی چه؟ تعریف را، مثلاً می‌توان به این معنی دانست که ابتدا چیزی کلیتر از مفهوم مورد نظر خود نام ببریم، سپس در این محدوده کلی، مرزهایی را مشخص کنیم که مفهوم مورد نظر ما را از همه مفاهیم دیگر جدا کند (یعنی، خصلتها و ویژگیهایی که این مفهوم را از دیگر مفاهیم متمایز می‌کند، معین کنیم).

در مورد مفهوم «مجموعه» هیچ مفهومی را که نسبت به آن کلیتر باشد نمی‌شناسیم (و باید گفت، همین عام بودن مفهوم مجموعه است که موجب شده است یکی از بنیادین‌ترین نقشها را در ریاضیات امروزی داشته باشد).

اما وقتی تعریف مجموعه را نمی‌دانیم چه گونه می‌توانیم مثلاً از مجموعه مشخصی مثل مجموعه اعداد طبیعی صحبت کنیم؟ و در این مورد نوعی ناسازگاری وجود ندارد؟

جواب این است که جای هیچ گونه سازگاری نیست. این درست است که مجموعه، به عنوان یک مفهوم انتزاعی ریاضی، قابل تعریف نیست، ولی برای تعریف یک مجموعه مشخص، به هیچ دشواری بر نمی‌خوریم.

در مقاله ابن سینا^{۲۹} چنین می‌خوانیم که:

پدرش از اهل بلخ بود و خود او به سال ۳۷۰ / ۹۸۰ در نزدیکی

در این نظریه، به هروضعی که موجب دگرگونی تندی در حالت یک دستگاه بشود و هر به هم خوردگی ناگهانی که در تداوم جریان یک روند به وجود آید، فاجعه گفته می‌شود.

نظریه فاجعه‌ها، شاخه‌ای از آنالیز ریاضی است.

به طور کلی، همه مسأله‌های مربوط به نظریه فاجعه‌ها را می‌توان به این صورت تنظیم و روشن کرد: طبیعت جنبه‌ها چه گونه است که ضمن گذار از یک حالت تعادلی به حالت دیگر، جنبه تدریجی تغییر را از دست می‌دهند؟

از مقاله ریاضیات و تصمیم‌گیری جمعی^{۳۴} که در آن جمعی می‌خواهد براساس خواستهای اعضایش تصمیمی بگیرد می‌گذریم و در یک دو مقاله بعدی نیز توقف نمی‌کنیم و به مقاله معماهای مکانیکی^{۳۵} می‌رسیم که در آن از معماهایی سخن می‌رود که تنها بر صفحه کاغذ نوشته نشده‌اند، بلکه از چند وسیله مخصوص و معمولاً ساده درست شده‌اند، و در حل آنها باید از دستها نیز کمک گرفت. از این مقاله نیز گذر می‌کنیم و به مقاله ریاضی‌دانان ایران^{۳۶} می‌رسیم و در آن در مورد ابوجعفر خازن چنین می‌خوانیم:

ابوجعفر محمد بن حسین صاغانی خراسانی خازن (ریاضی‌دان و منجم ثلث سوم قرن سوم و نیمه اول قرن چهارم هجری) یکی از بزرگترین رجال ریاضی و نجوم در نیمه اول قرن چهارم هجری است. وی در اواخر عمر یا در تمام آن در شهر ری می‌زیست و نوشته‌اند که در دستگاه رکن الدولة دیلمی صاحب مقام و عزت بوده است. عمر طولانی یافت و در بین سالهای ۳۵۰/۹۶۱ و ۳۶۰/۹۷۱ در گذشت.

ابوجعفر خازن علاوه بر مقام بلندی که در نجوم و ریاضیات داشت در ساختن آلات نجومی و به کاربردن آنها مهارت کامل داشت و در زمان خود در این فن مشهور بود. چنان که ریاضی‌دانهای بزرگ مانند: ابونصر عراق و بیرونی و ابوالجود و عمر خیام و نصیرالدین طوسی بارها در نوشته‌های خود از وی و آثارش گفت و گو کرده‌اند. عمر خیام در کتاب جبر و مقابله خود نوشته است که معادله درجه

به خصوص در ریاضیات صاحب نظر بوده و مسائل دقیق و مشکلی را که در آثار متقدمان خود می دیده ورد بحث و نقادی قرار می داده است.

شماره بعدی را که در این جا مورد بررسی قرار می دهیم شماره ۵ سال ششم یا شماره سلسل ۲۵ است. اولین مقاله این شماره زنان و ریاضیات است که به شرح حال هی پاتی که قبلاً هم ذکر کردیم از او به میان آمده، می پردازد. در مقاله مسأله های قدیمی ۴۲ به مسأله های ایرانی توجه شده و در ضمن آن مسائل زیر آمده است:

مسأله هایی از خوارزمی

۱. در یک مثلث متساوی الساقین، که طول هراساق آن برابر ۱۰ و طول قاعده آن برابر ۱۲ است، یک مربع محاط کنید.
۲. عددی را پیدا کنید که اگر $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ آن را از آن کم کنیم، ۸ باقی بماند.

مسأله هایی از کرجی

۳. عددی پیدا کنید که از ضرب آن در $\sqrt{5} + 3$ ، عدد ۱ به دست آید.
۴. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2 + 6^2 = z^2 \\ xz = y^2 \\ xy = 10 \end{cases}$$

مسأله عمر خیام

۵. این معادله را حل کنید:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = 1\frac{1}{4}$$

مسأله یی از بهاء الدین عاملی

۶. ارتفاع r و R شعاعهای دو قاعده بالا و پایین یک مخروط ناقص است. ارتفاع مخروط کامل متناظر با آن را بیابید.

مسأله یی از غیاث الدین جمشید کاشانی

۷. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، تساوی زیر برقرار است:

بخارا متولد شد و در سال ۴۲۸ / ۱۰۳۷ در همدان درگذشت و هم اکنون آرامگاه وی در آن جا دیده می شود.

مهمترین اثر ریاضی ابن سینا همان است که در کتاب «شفا» آورده است و بعضی از آنها عبارتند از:

الف. دستور تشکیل عددهای مثلث:

عددهای مثلث عددهایی هستند که از جمع کردن جمله های متوالی رشته طبیعی عددها به دست می آیند مانند:

$$1, 2, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$$

دستور تشکیل این عددها این است^{۴۰}:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ب. مجموع هر عدد مثلث و عدد مثلث ما قبل آن مساوی است با مربع مرتبه آن یعنی^{۴۱}:

$$T_{n-1} + T_n = n^2$$

ج. دستور تشکیل عددهای مخمس:

عددهای مخمس عددهایی هستند که از جمع کردن جمله های متوالی تصاعد حسابی زیر حاصل می شوند:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$$

عددهای مخمس ابتدا از واحد عبارتند از:

$$1, 5, 12, 22, 35, 51, \dots$$

این عددها را از آن جهت مخمس می نامند که می توان آنها را به شکل پنج ضلعی منتظم مرتب کرد. دستور تشکیل دادن این عددها این است:

$$T_n = n^2 + T_{n-1} = \frac{(2n-1)n}{2}$$

شماره بعد یعنی شماره ۴ سال ششم یا شماره سلسل ۲۴ با مقاله معادله ها و نامعادله ها آغاز می شود که قسمت اعظم مطالب آن را به خود اختصاص می دهد. و با مقاله سلسل ریاضی دانان ایران به قلم ابوالقاسم قربانی ادامه می یابد. این مقاله در مورد ابن صلاح همدانی ریاضی دان و فیلسوف و طیب نیمه اول سده ششم هجری است، که

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5}(n^5 + 5n^4 + 10n^3 - n)$$

سرانجام آخرین شماره‌ای را که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌دهیم شماره ۶ سال ششم به شماره مسلسل ۲۶ است.

یکی از مقاله‌های جالب این شماره مقاله روش مونت کارلو^{۴۳} است. این روش عبارت است از روش عددی حل مسأله‌های ریاضی به کمک نمونه برداری از کمیت‌های تصادفی. تاریخ پیدایش این روش را سال ۱۹۴۹ دانسته‌اند و این آن زمان است که مقاله «روش مونت کارلو» در آن منتشر شد. مبتکران این روش جان فون فویمان و استانیسلاو اولام ریاضی‌دانهای آمریکایی هستند. مقاله را خلاصه نمی‌کنیم چه این کار به یک دست بودن آن لطمه می‌زند و خواننده علاقه‌مند را به خود مقاله ارجاع می‌دهیم.

در مقاله ریاضی‌دانان ایران راجع به محمد باقریزدی^{۴۴} چنین می‌خوانیم که:

مهمترین اثر ریاضی محمد باقریزدی از ریاضی دانهای دوره صفویه کتاب عیون الحساب است که به عربی نوشته که به تقلید مفتاح الحساب غیاث‌الدین جمشید کاشانی فراهم آورده است.

در این کتاب حالات خاصی از معادله درجه پنجم حل شده است. نیز محاسبه $a^n - b^n$ با معلوم بودن a, b, n آورده شده است. در پایان مطلب ششم از باب هفتم کتاب فصلی در استخراج عددهای متحاب دارد که در آن ابتدا قاعده معروف ثابت بن قره را برای محاسبه عددهای متحاب بیان می‌کند و سپس قاعده‌ای از خود شرح می‌دهد و با همان قاعده دو عدد متحاب ۹۳۶۳۵۸۴ و ۹۴۳۷۰۵۶ را به دست می‌آورد.

این دو عدد را نخستین بار در اروپا دکارت ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی در سال ۱۶۳۸ میلادی به دست آورد. یزدی تألیف کتاب عیون الحساب را در سال ۱۰۴۷ هجری قمری یعنی سال ۱۶۳۷ میلادی به پایان رسانیده و یقیناً این دو عدد را پیش از آن تاریخ

حساب کرده بوده است.

عیون الحساب توسط ملا محمد باقر بن میر اسماعیل خاتون آبادی به زبان فارسی ترجمه شده است.

آخرین سخن این شماره که آخرین حرف مقاله ما نیز هست تحت عنوان به خواننده «آشتی با ریاضیات»^{۴۵} و چنین است.

با همه دشواریها ساختیم و به هر نحوی بود سال ششم «آشتی با ریاضیات» را به پایان رساندیم. مهر دوستان و استقبال «عاشقانه»ی خوانندگان، تکیه گاه اصلی ما در تحمل سختیها و از میان برداشتن مانعها بود. دشواری و مانع، گاه چنان بود که حتی بسیاری از آشنایان «اهل فن» ناامید می شدند و تلاش ما را بیهوده می دانستند.

دریغ، که ناچار بودیم، قسمت عمده وقت و نیروی خود را در راه برطرف کردن دشواریهای «قانونی»، «مالی» و «اداری» صرف کنیم و تنها سهم ناچیزی از آنها را برای بالا بردن کم و کیف نشریه خود در نظر بگیریم. تهیه مطلب، ویراستاری، چاپ و پخش یک نشریه علمی، سازمان می‌خواهد و آراش خیال. و ما از هر دو محروم بودیم و امید، که بتدریج به آنها دست یابیم.

علی‌رغم میل خود، و با وجود اطلاعی که از جیب تقریباً خالی خوانندگان خود داریم، ناچار شدیم «آشتی با ریاضیات» را گرانتر کنیم. برای سال آینده (سال ۱۳۶۲)، تک شماره نشریه ۱۵۰ ریال و اشتراک سالانه آن ۹۰۰ ریال خواهد بود.

امیدواریم بتوانیم نخستین شماره سال هفتم «آشتی با ریاضیات» را اول فروردین ۱۳۶۲ در اختیار شما قرار دهیم.

یادداشتها

۱. همان مرجع، سال پنجم شماره ۲، صفحه ۵۶، ترجمه پرویز شهریاری.
۲. آیزک برو مؤلف کتاب درس‌هایی از اپتیک و هندسه.
۳. همان مرجع، سال پنجم شماره ۲، صفحه ۶۸، ترجمه پرویز شهریاری.
۴. همان مرجع، سال پنجم شماره ۲، صفحه ۷۸.
۵. همان مرجع، سال پنجم شماره ۳، صفحه ۹.

۶. منظور از $\{ \dots \}$ Min کوچکترین عدد از عددهای داخل ابروهاست.
۷. منظور از $\{ \dots \}$ Max بزرگترین عدد از عددهای داخل ابروهاست.
۸. همان مرجع، سال پنجم، شماره ۳، صفحه ۱۵، ترجمه هرمز شهریاری، Planiverse به معنای جهان دو بعدی یا دنیای مسطحه است. این واژه مترادف با Universe که به معنای کائنات یا جهان سه بعدی خودمان است، به کار گرفته شده است (م).
۹. داستانی طنزآمیز از Edwin Abbott Abbott.
۱۰. Alexander Kewatin Dewdney دانشمند کامپیوتر اُتاریوی غربی، W. Ontario.
۱۱. Astria.
۱۲. البته اگر داخلش رفته باشیم؛ این سخن یادآور این بیت پرمعنی از مثنوی شریف است:

باز دیگر ما به فضا آمدیم ما از این فضا برون خود کی شدیم

۱۳. همان مرجع، سال پنجم، شماره ۳، صفحه ۷۲، نویسنده پرویز شهریاری.
۱۴. این پاپروس در موزه بریتانیا نگهداری می‌شود و چنین می‌گویند که کلمه paper. یا مشابه‌های آن در زبانهای اروپایی مشتق از آن است.
۱۵. این پاپروس هم مربوط به دانش ریاضی مصر باستان است.
۱۶. مرجع مذکور در شماره ۳۶.
۱۷. نویسنده: مجید همرا.
۱۸. نویسنده: فرهاد قابوسی.
۱۹. یعنی، شماره ۴ سال پنجم.
۲۰. همان مرجع، سال پنجم، شماره ۴، صفحه ۱، ترجمه پرویز شهریاری.
۲۱. همان مرجع، سال پنجم، شماره ۴، صفحه ۹۶، پرویز خیزرانی.
۲۲. P. Luky.
۲۳. محمد باقر زین‌العابدین یزدی از ریاضی‌دانان دوره صفویه.
۲۴. ظاهراً این موضوع به ریاضی‌دانهای دیگر نیز مربوط می‌شود.
۲۵. نام ناشر این شماره مشخص نیست اما بتای آن ۱۲۰ ریال رقم زده شده است.
۲۶. آشتی با ریاضیات سال ششم شماره ۱، صفحه ۳، ترجمه پرویز شهریاری.
۲۷. همان مرجع، سال ششم شماره ۱، صفحه ۴۲، ترجمه محمدباقری.
۲۸. Bernhard Riemann.
۲۹. با نامه‌ای که غیاث‌الدین جمشید کاشانی به پدرش نوشته و قسمتی از آن در شماره اول بوهان تحت عنوان ادب ریاضی آمده است مقایسه شود.
۳۰. همان مرجع، سال ششم شماره ۱، صفحه ۵۲، دکتر اسدالله آل بویه.
۳۱. function.
۳۲. همان مرجع، سال ششم شماره ۱، صفحه ۵۶، ترجمه پرویز شهریاری.
۳۳. همان مرجع، سال ششم شماره ۲، صفحه ۱۳۷، ترجمه پرویز شهریاری.
۳۴. همان مرجع، سال ششم شماره ۲، صفحه ۱۵۳، شهریار شهریاری.
۳۵. همان مرجع، سال ششم شماره ۲، صفحه ۱۷۲، ترجمه هرمز شهریاری.
۳۶. همان مرجع، سال ششم شماره ۲، صفحه ۱۹۳، ابوالقاسم قربانی.
۳۷. یعنی، سال ششم شماره ۳.
۳۸. همان مرجع، سال ششم شماره ۳، صفحه ۲۴۹، ترجمه پرویز شهریاری.
۳۹. همان مرجع، سال ششم شماره ۳، صفحه ۲۹۸، ابوالقاسم قربانی.
۴۰. در واقع عددهای مثلث مجموعات عددهای طبیعی یا مجموعات یک تصاعد حسابی با جمله اول ۱ و قدر نسبت ۱ را مشخص می‌کنند.
۴۱. امروزه این فورمولها را فورمولهای بازگشتی «recursive» می‌نامند.
۴۲. همان مرجع، سال ششم شماره ۵، صفحه ۵۴۷، ترجمه پرویز شهریاری.
۴۳. همان مرجع، سال ششم شماره ۶، صفحه ۶۰۳، ترجمه پرویز شهریاری، کیمرث پربانی.
۴۴. همان مرجع، سال ششم شماره ۶، صفحه ۶۷۳، ابوالقاسم قربانی.
۴۵. همان مرجع، سال ششم شماره ۶، صفحه ۷۲۲.

ادب ریاضی

آنچه را که غلط است، آنچه را که تناقضی در بر ندارد و آنچه را که بنا به ساختمان منطقی خود حقاً قانونی شناخته می‌شود، مشخص می‌کنند.
سرگذشت آنالیز ریاضی
آندره دولاشه، پرویز شهریاری

ریاضی‌دانهای شهودی (یا اشراقی) از جمله گریس، ویل، بروئر، هیتینگ «Griss»، «Weyl»، «Brouwer»، «Heyting».

مفهومهای اصلی و اصل موضوعها در

هندسه فضایی (قسمت سوم) • پرویز شهریاری

۷. قضیه‌های مربوط به خطهای راست موازی

قضیه ۴. اگر از هریک از دو خط راست موازی مفروض، صفحه‌ای بگذرانیم و، درضمن، این صفحه‌ها متقاطع باشند، آن وقت فصل مشترک این صفحه، با هریک از دو خط راست مفروض، موازی است.

شرط: $\alpha \cap \beta = c, b \subset \beta, a \subset \alpha, a \parallel b$.

حکم: $c \parallel b, c \parallel a$.

اثبات. چون $a \parallel b$ و $c \subset \beta$ ، بنابراین، بنابر معیار موازی بودن خط راست و صفحه $a \parallel \beta$ ، ولی در این صورت، با توجه به قضیه ۳ باید داشته باشیم $c \parallel a$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود: $c \parallel b$.

قضیه ۵. اگر هریک از دو خط راست مفروض، موازی با خط راست سوم باشد، آن وقت خود این دو خط راست باهم موازیند.

شرط: $b \parallel c, a \parallel c$.

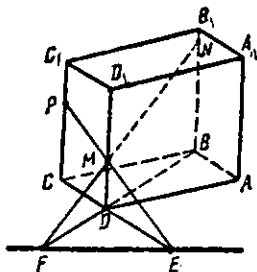
حکم: $a \parallel b$.

اثبات. حالتی را در نظر می‌گیریم که، این سه خط راست، بر یک صفحه نباشند. نقطه دلخواه M را، روی خط راست a، انتخاب می‌کنیم و از M، صفحه α ، و از b و M، صفحه β را می‌گذرانیم (بخش ۳، نتیجه ۱). بنابر قضیه ۴، خط راست MN (فصل مشترک این دو صفحه)، با خط راست b و همچنین، با خط راست c موازی است. از نقطه M نمی‌توان دو خط راست، موازی با خط راست c،

رسم کرد (بخش ۳، مسأله). بنابراین، خط راست MN بر a منطبق است. ولی چون $b \parallel (MN)$ ، پس $a \parallel b$.

مسأله. روی شکل ۶، متوازی السطوح $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ دیده می‌شود که، هر شش وجه آن، به شکل متوازی الاضلاع اند. نقطه‌های M و N، P به ترتیب، به یالهای DD_1 ، BB_1 و CC_1 تعلق دارند. درضمن $(DC) \parallel (MP)$ ، فصل مشترک دو صفحه MNP و ABC را پیدا کنید.

حل: برای رسم خط راست مورد نظر، کافی است دو نقطه از فصل مشترک صفحه‌های MNP و ABC را پیدا کنیم. هریک از این گونه نقطه‌ها را، می‌توان، به عنوان نقطه مشترک دو خط راست متقاطع به دست آورد که یکی از آنها متعلق به صفحه MNP و



شکل ۶

دیگری متعلق به صفحه ABC باشد. یکی از این نقطه‌ها، عبارت است از نقطه E، محل برخورد خطهای راست MP و DC که روی

۶۲. اجتماع همه خطهای راست دو به دو موازی را پیدا کنید که، هریک از آنها، خط راست مفروضی را قطع کرده است.

۶۳. متوازی السطوح AC_1 (شکل ۶) مفروض است. ثابت کنید (۱) یالهای AA_1 و CC_1 (۲) یالهای AB و D_1C_1 (۳) یالهای AD و B_1C_1 موازیند و طولی برابر دارند.

۶۴. نقطه M در درون یال B_1C_1 از متوازی السطوح $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ قرار دارد. مقطع متوازی السطوح را باصفحه‌ای پیدا کنید که (۱) از (DC) و M (۲) از (AD) و M گذشته باشد.

۶۵. مکعب مستطیل $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ مفروض است. می‌دانیم $P \in [CD]$ و $N \in [AA_1]$ ، $M \in [AB]$ مقطع مکعب مستطیل را باصفحه MNP پیدا کنید؛ (۲) محیط این مقطع را محاسبه کنید، به شرطی که $|AB| = 8$ ، $|BC| = 7$ ، $|AA_1| = 6$ و نقطه‌های مفروض در وسط یالهای متناظر باشند.

۶۶. متوازی السطوح $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ داده شده است. نقطه برخورد خط راست AC_1 را باصفحه‌ای پیدا کنید که از یالهای AB و C_1D_1 می‌گذرد.

۸. وضع دو صفحه نسبت به هم. معیار موازی بودن دو صفحه

دو حالت را، برای وضع دو صفحه نسبت به هم، می‌شناسیم: (۱) وقتی که دو صفحه برهم منطبق باشند و، این وضع، وقتی پیش می‌آید که دو صفحه، سه نقطه مشترک غیرواقع بریک خط راست، داشته باشند (اصل موضوع صفحه)؛ (۲) وقتی که دو صفحه یکدیگر را قطع کرده باشند و، این وضع، وقتی پیش می‌آید که دو صفحه، متمایز و نقطه مشترکی داشته باشند (اصل موضوع برخورد صفحه‌ها).

حالت سومی هم وجود دارد: دو صفحه می‌توانند نقطه مشترکی نداشته باشند. وجود چنین صفحه‌هایی را در بخش ۹ (مسئله) ثابت خواهیم کرد. در این جا هم، دو حالت اول و سوم را، یک حالت به حساب می‌آوریم.

وجه DCC_1D_1 قرار دارند. خطهای راست DD_1 و BB_1 ، که با خط راست AA_1 موازی‌اند، باهم موازی می‌شوند (قضیه ۵). بنابراین، نقطه دوم F را، به عنوان محل برخورد خطهای راست MN و DB پیدا می‌کنیم (این دو خط راست، به صفحه DBB_1 تعلق دارند).

کوتاه شده حل: (۱) $E = (MP) \cap (DC)$ ، (۲) $F = (MN) \cap (DB)$ ، (۳) (EF) . بنابر اصل موضوع برخورد صفحه‌ها، EF همان خط راست مورد نظر است.

پرسشها و مسأله‌ها

۵۵. متوازی السطوح قائم $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ مفروض است. (۱) ثابت کنید مقطع آن با هر صفحه‌ای که از یک ضلع قاعده بگذرد، متوازی الاضلاع است؛ (۲) محیط مقطع $ABMN$ را محاسبه کنید، به شرطی که $|AB| = 5$ ، $|BC| = 3$ ، $|CM| = 4$.

۵۶. دوزنقه $ABCD$ ، $(|AB| \parallel |CD|)$ و نقطه M در بیرون صفحه دوزنقه، مفروضند. فصل مشترک صفحه‌هایی را پیدا کنید که (۱) یکی از M و (CD) و دیگری از M و (AB) گذشته باشد؛ (۲) یکی از M و (AD) و دیگری از M و (BC) بگذرد.

۵۷. قاعده هرم $SABCD$ ، یک متوازی الاضلاع است. فصل مشترک صفحه‌هایی را پیدا کنید که از دو وجه روبه روی هرم گذشته‌اند.

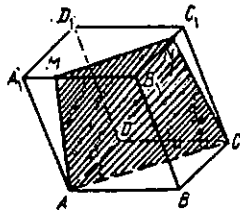
۵۸. می‌دانیم $a \parallel b$ و $a \parallel c$. ثابت کنید $b \parallel c$.

۵۹. متوازی الاضلاعهای $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ روی دو صفحه مختلفند. ثابت کنید $|A_1A| = |B_1B|$.

۶۰. صفحه α با یکی از دو خط راست موازی باهم، موازی است. ثابت کنید، خط راست دوم هم، باصفحه α موازی است.

۶۱. می‌دانیم، یکی از دو خط راست موازی، صفحه‌ای را قطع کرده است. ثابت کنید، خط راست دوم هم، این صفحه را قطع می‌کند.

مسأله. مقطع متوازی السطوح AC_1 را با صفحه α پیدا کنید که از رأسهای A و C و نقطه M در درون یال A_1B_1 گذشته باشد (شکل ۸).



شکل ۸

حل. با رسم پاره‌خطهای راست AC و AM ، فصل مشترک صفحه α ، با دو وجه به دست می‌آید. چون دو وجه $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ موازیند، بنابراین فصل مشترکهای آنها با صفحه α ، باهم موازی می‌شوند. یعنی باید $[MN]$ را موازی $[AC]$ رسم کرد. سرانجام، پاره‌خط راست NC را رسم می‌کنیم. دوزنقه $AMNC$ مقطع مورد نظر است.

پرسشها و مسأله‌ها

۶۷. نمونه‌هایی از صفحه‌های موازی را، دور و بر خود پیدا کنید.
۶۸. آیا دو صفحه موازیند اگر: (۱) خط راستی واقع بر یکی، با خط راستی واقع بر صفحه دیگر موازی باشد، (۲) دو خط راست واقع بر یک صفحه، با دو خط راست واقع بر صفحه دیگر موازی باشند؟

۶۹. برای متوازی السطوح AC_1 (شکل ۸) روشن کنید: (۱) $(DCC_1) \parallel (ABB_1)$ و $(BCC_1) \parallel (ADD_1)$ ؛ (۲) قاعده منشور قائم دوزنقه است. ثابت کنید، بین وجه‌های جانبی این منشور، تنها دو وجه موازی باهم، وجود دارد.

۷۰. نقطه‌های M ، N و P ، به ترتیب در وسط یالهای DA ، DB و DC از چهار وجهی $ABCD$ واقعند. ثابت کنید، این سه نقطه روی یک خط راست نیستند و $(MNP) \parallel (ABC)$.

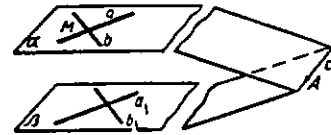
۷۱. خطهای راست a ، b و c که بر یک صفحه نیستند، در نقطه O مشترکند. روی هر یک از این خطهای راست و در دو طرف نقطه

تعریف. دو صفحه را موازی گویند وقتی که: یا نقطه مشترکی نداشته باشند و یا برهم منطبق باشند.

موازی بودن دو صفحه α و β را، به صورت $\alpha \parallel \beta$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۶ (معیار موازی بودن دو صفحه). اگر دو خط راست متقاطع از صفحه α ، به ترتیب، با دو خط راست واقع بر صفحه β موازی باشند، آن وقت، این صفحه‌ها موازیند.

شرط: $a \parallel a_1, \{a_1, b_1\} \subset \beta, a \cap b = M, \{a, b\} \subset \alpha$
 $b \parallel b_1$
حکم: $\alpha \parallel \beta$



شکل ۷

اثبات: حالتی را در نظر می‌گیریم که α و β ، دو صفحه مختلف باشند (شکل ۷) و از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر دو صفحه در نقطه A مشترک باشند، با توجه به اصل موضوع برخورد دو صفحه، باید صفحه‌های α و β در خط راستی مثل c ، مشترک باشند. صفحه‌های α و β ، به ترتیب از خطهای راست a و a_1 ، که باهم موازیند، می‌گذرند. بنابراین، بنابر قضیه ۴ (بخش ۷) $a \parallel a_1$. همین صفحه‌ها از خطهای راست موازی b و b_1 هم می‌گذرند، یعنی $b \parallel b_1$. به این ترتیب، از نقطه M واقع بر صفحه α ، دو خط راست مختلف a و b ، موازی خط راست c در می‌آیند که اصل توازی را نقض می‌کند. بنابراین، فرض وجود نقطه مشترک A ، در دو صفحه α و β ، نادرست است و $\alpha \parallel \beta$.

دو صفحه α و β ، اگر با شرط قضیه سازگار باشند، ممکن است برهم منطبق شوند؛ در این حالت هم، بنا به تعریف، دو صفحه موازیند. از تعریف صفحه‌های موازی و خطهای راست موازی نتیجه می‌شود: فصل مشترک دو صفحه موازی با صفحه سوم، دو خط راست موازیند.

موازی با یال AB رسم شده است.

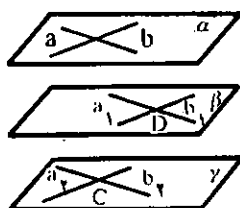
۹. ویژگیهای صفحه‌های موازی

قضیه ۷. اگر دو صفحه، باصفحه سوم موازی باشند، خود باهم

موازیند.

شرط: $\beta \parallel \gamma, \alpha \parallel \gamma$

چکم: $\alpha \parallel \beta$



شکل ۱۰

اثبات. در صفحه α ، دو خط راست متقاطع a و b را رسم می‌کنیم (شکل ۱۰). از هر کدام از این خطهای راست و نقطه دلخواه C از صفحه γ ، صفحه‌ای می‌گذرانیم (این دو صفحه کمکی روی شکل نشان داده نشده است). این صفحه‌ها، صفحه γ را در دو خط راست متقاطع a_1 و b_1 قطع می‌کنند؛ درضمن $a_1 \parallel a$ و $b_1 \parallel b$ (بخش ۸ را ببینید). باهمین استدلال، برای دو صفحه α و β ، خطهای راست $a_2 \parallel a$ و $b_2 \parallel b$ به دست می‌آیند. در این صورت، بنا بر قضیه ۵ (بخش ۷) داریم: $a_1 \parallel a_2$ و $b_1 \parallel b_2$ و از آنجا، $\alpha \parallel \beta$.
مسئله ۱. ثابت کنید، از هر نقطه مفروض، یک صفحه، و تنها یک صفحه می‌توان موازی باصفحه مفروض رسم کرد.

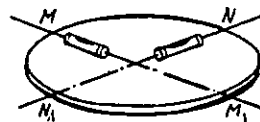


شکل ۱۱

حل. فرض می‌کنیم، نقطه M روی صفحه مفروض α نباشد. دو خط راست متقاطع a و b را، در صفحه α رسم می‌کنیم. از نقطه M ، خط راست $a_1 \parallel a$ و $b_1 \parallel b$ را با توجه به مسئله بخش ۳، در نظر

می‌گیریم. به ترتیب، نقطه‌های A_1 و A_2 ، B_1 و B_2 ، C_1 و C_2 را انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، دو صفحه $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ موازی باشند که داشته باشیم: $|OA_1| = |OA_2|$ ، $|OB_1| = |OB_2|$ ، $|OC_1| = |OC_2|$.

۷۲. ثابت کنید، اگر هریک از دو خط راست متقاطع واقع بر یک صفحه، موازی با صفحه‌ای دیگر باشند، آن وقت این دو صفحه باهم موازیند؛ (۲) برای این که افقی بودن یک تیغه را آزمایش کنند، از دو تراز (شبه شکل ۹) استفاده می‌کنند. به چه مناسبت باید ترازها را، روی دو خط راست متقاطع قرار داد؟



شکل ۹

۷۳. اگر داشته باشیم $a \subset \alpha$ ، $b \subset \beta$ و $\alpha \parallel \beta$ ، خطهای راست a و b ، نسبت به هم، چه وضعی دارند؟
۷۴. ثابت کنید، مجموعه خطهای راستی که از یک نقطه می‌گذرند و با صفحه مفروض موازی باشند، روی یک صفحه واقعند.
۷۵. آیا ممکن است، دو خط راستی که از برخورد دو صفحه با صفحه سوم به دست می‌آیند، با هم موازی باشند؟
۷۶. ثابت کنید، دو پاره خط راست موازی که دو انتهای هریک از آنها روی دو صفحه موازی باشند، طولی برابر دارند؛ (۲) آیا ممکن است، دو پاره خط راست ناموازی که دو انتهای هریک از آنها، روی دو صفحه موازی قرار دارند، طولی برابر داشته باشند؟
۷۷. متوازی السطوح $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ و نقطه‌های $P \in [C_1 D_1]$ و $N \in [CC_1]$ ، $M \in [AA_1]$ مقطع متوازی السطوح را با صفحه MNP پیدا کنید.

۷۸. روی یالهای AD و $B_1 C_1$ از متوازی‌السطوح $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ، نقطه‌های M و N داده شده‌اند. مطلوب است مقطع متوازی السطوح باصفحه‌ای که از نقطه‌های M و N

۸۰. (۱) ثابت کنید، اگر صفحه‌ای یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع خواهد کرد؛ (۲) ثابت کنید، هر صفحه، دست کم چهار صفحه شامل وجه‌های یک متوازی السطوح را قطع می‌کند.

۸۱. می‌دانیم $\alpha_1 \parallel \alpha, \beta_1 \parallel \beta, \alpha \cap \beta = c, \alpha_1 \cap \beta_1 = c_1$. ثابت کنید $c \parallel c_1$.

۸۲. (۱) ثابت کنید، اگر خط راستی، با یکی از دو صفحه موازی، موازی باشد، با دیگری هم موازی است؛ (۲) خط راستی، یکی از دو صفحه موازی را قطع کرده است؛ ثابت کنید، این خط راست، صفحه دوم را هم قطع می‌کند؛ (۳) یک صفحه و خط راستی موازی با آن، داده شده است. صفحه‌ای را پیدا کنید که با صفحه مفروض موازی باشد و از خط راست مفروض بگذرد.

۸۳. مقطع چهار وجهی ABCD را با صفحه‌ای که از نقطه M واقع در درون یال AB، موازی با وجه DBC رسم شده است، پیدا کنید.

۸۴. از رأس چهار وجهی، صفحه‌ای موازی با وجه رو به رو رسم کرده‌ایم. فصل مشترک این صفحه را با صفحه‌هایی که از وجه‌های دیگر چهار وجهی می‌گذرند، پیدا کنید.

۸۵. هرم SABCD (با قاعده ABCD) داده شده است. مقطع آن را با صفحه‌ای که از نقطه $M \in [AB]$ موازی با صفحه SAD رسم شده است، پیدا کنید.

ادامه دارد...

می‌گیریم. از دو خط راست a_1 و b_1 ، صفحه منحصر به فرد β می‌گذرد (بخش ۳، نتیجه ۲). با توجه به معیار موازی بودن دو صفحه: $\beta \parallel \alpha$. ثابت می‌کنیم، β تنها صفحه‌ای است که با شرط مسأله سازگار است.

فرض می‌کنیم، توانسته باشیم، صفحه دیگر γ را (غیر از β)، از نقطه M موازی با صفحه α رسم کنیم (شکل ۱۱). بنابر قضیه ۷، دو صفحه β و γ موازیند، ولی این دو صفحه، بنابر اصل برخورد صفحه‌ها، متقاطعند، یعنی γ نمی‌تواند صفحه‌ای غیر از β باشد.

اگر $M \in \alpha$ ، آن وقت، تنها صفحه‌ای که از M می‌گذرد و با α موازی است، خود صفحه α است.

مسأله ۲. ثابت کنید، از هریک از دو خط راست متناظر، می‌توان صفحه‌ای عبور داد، به نحوی که دو صفحه حاصل، با هم موازی باشند.

حل. a و b را دو خط راست متناظر می‌گیریم. از نقطه دلخواه M ، واقع بر خط راست a ، خط راست a_1 را موازی با b رسم می‌کنیم و سپس از a و a_1 ، صفحه α را می‌گذرانیم. به همین ترتیب، نقطه N را بر خط راست b انتخاب و از آن جا خط راست b_1 را موازی با a رسم می‌کنیم و از b و b_1 ، صفحه β را می‌گذرانیم. صفحه‌های α و β با هم موازیند. (چرا؟)

پرسشها و مسأله‌ها

۷۹. دو صفحه متقاطع را در نظر می‌گیریم. آیا می‌توان صفحه‌ای پیدا کرد که با این دو صفحه موازی باشد؟

م
م ه م
م ه ر ه م
م ه م
م

جواب در صفحه ۹۶

در شکل مقابل به چند طریق کلمه مهر را می‌توان خواند؟

ترجمه سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

نقش برج آله بشه

توابع گزاره‌ای و سورها^۲

● غلامرضا یاسی پور

۱. قضایای فردی^۳ و قضایای عمومی^۴

روشهای منطقی^۵ی که تاکنون مورد بحث قرار گرفته‌اند تنها در مورد استدلالهایی^۶ به کار می‌روند که درستی^۷شان به روشی که طبق آن گزاره‌های ساده^۸ به‌طور تابع ارزشی^۹ به گزاره‌های مرکب^{۱۰} ترکیب شده‌اند وابسته است. آن روشها را در مورد استدلالهایی چون استدلال زیر نمی‌توان به کار برد:

تمام انسانها میرا هستند.
سقراط انسان است.
بنابراین سقراط میراست.

به این ترتیب «شهره ترسو است» و «شهره می‌ترسد» همان معنی را دارند که می‌توان آن را با «شهره دارای ترس است» نیز بیان کرد. در علامتی کردن قضایای فردی، حرف کوچک «e» تا «w» را برای نمایش دادن افراد، معمولاً با استفاده از حروف اول نام فرد برای نمایش دادن آن فرد، به کار می‌بریم، به علت این‌که این علائم افراد را نمایش می‌دهند آنها را «ثابتهای فردی»^{۱۸} می‌نامیم. برای معرفی کردن صفات از حروف بزرگی که ابتدای آن صفاتند استفاده می‌کنیم. به این ترتیب در زمینه استدلال قبل «سقراط» را با حرف کوچک «s» و صفات «انسان» و «میرا» را با حروف بزرگ «E» و «M» نمایش می‌دهیم.

برای بیان کردن یک قضیه فردی به صورت علامتی، علامت محمول آن را در سمت چپ علامت موضوع آن می‌نویسیم. به این ترتیب «سقراط انسان است» را به صورت «Es» و «سقراط میراست» را به صورت «Ms» نمایش می‌دهیم.

با بررسی اشکال علامتی قضایای فردی‌ای که دارای یک محمولند، مشاهده می‌کنیم تمام آنها قالب مشترکی دارند، و هریک از اشکال علامتی قضایای فردی «ارسطو انسان است»، «بوستون انسان است»، «کالیفرنیا انسان است»، «دکارت انسان است»، ... که عبارت از «Ea»، «Eb»، «Ec»، «Ed»، ... می‌باشند، شامل علامت صفتی «E» که پس از آن ثابت فردی می‌آید، است. در این صورت عبارت «Ex» را برای علامتی کردن قالب مشترک تمام قضایای فردی‌ای که اظهار می‌کنند افرادی دارای صفت انسانند به کار می‌گیریم. حرف کوچک «x»ی که به متغیر فردی^{۱۹} موسوم است - یک مشخص

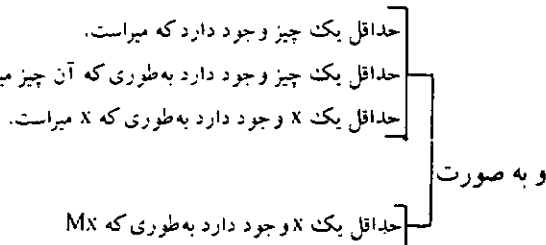
درستی چنین استدلالی به ساختمان منطقی^{۱۱} داخلی گزاره‌های نامرکبی^{۱۲} که استدلال شامل آنهاست بستگی دارد. برای ارزیابی چنین استدلالهایی باید روشهای تحلیل گزاره‌های نامرکب و علامتی کردن ساختارهای^{۱۳} داخلی‌شان را توسعه دهیم.

مقدمه^{۱۴} دوم استدلال قبل یک قضیه فردی (شخصیه) است، که اظهار می‌کند شخص سقراط صفت انسان بودن را داراست. در این مورد «سقراط» را موضوع^{۱۵} و «انسان» را محمول^{۱۶} می‌نامیم. هر قضیه فردی (موجه^{۱۷}) اظهار می‌کند فردی که به آن با عبارت موضوعش اشاره کرده است دارای صفتی که توسط عبارت محمولش معین شده، می‌باشد، و در این مورد افراد را نه تنها به عنوان اشخاص، بلکه هر شیء، چون حیوان، شهر، ملت، سیاره یا ستاره، که به آن صفات را می‌توان به صورت معنی‌داری حمل کرد در نظر می‌گیریم. این صفات را نه تنها با صفت، بلکه با اسم یا حتی فعل نیز، می‌توان معین کرد، و

نوشتن آن به صورت «با معلوم بودن هر Mx, x » استفاده کنیم. عبارت «با معلوم بودن هر x » به «سور عمومی»^{۲۵} موسوم است و به صورت « (x) » علامتی می‌شود. بنابراین با به کار بردن این علامت جدید می‌توانیم به طور کامل قضیهٔ عمومی اولمان را به صورت:

$$(x) Mx$$

علامتی کنیم. به همین ترتیب می‌توانیم قضیهٔ عمومی دوممان، یعنی «چیزی میراست» را متوالیاً به صورتهای:



تفسیر کنیم. عبارت «حداقل یک x وجود دارد به طوری که» به «سور وجودی»^{۲۶} موسوم است و به صورت « $(\exists x)$ » علامتی می‌شود. به این ترتیب با به کار بردن این علامت جدید می‌توانیم به طور کامل قضیهٔ عمومی دوممان را به صورت:

$$(\exists x) Mx$$

علامتی کنیم. به این ترتیب قضیهٔ عمومی از تابع گزاره‌ای با قراردادن سور عمومی یا سور وجودی در جلو آن ساخته می‌شود. واضح است که تصویر عمومی^{۲۷} یک تابع گزاره‌ای اگر و فقط اگر تمام مثالهای جانشین آن تابع گزاره‌ای راست باشند، راست است، و تصویر وجودی^{۲۸} یک تابع گزاره‌ای اگر و فقط اگر حداقل یک مثال جانشین راست داشته باشد، راست می‌باشد. اگر قبول داشته باشیم که حداقل یک فرد موجود است در این صورت هر تابع گزاره‌ای حداقل یک مثال جانشین (راست یا دروغ) دارد. تحت این فرض، اگر تصویر عمومی یک تابع گزاره‌ای راست باشد، در این صورت تصویر وجودی آن نیز باید راست باشد.

می‌توانیم با بررسی دو قضیهٔ عمومی اضافی «چیزی میرا نیست» و «هیچ چیز میرا نیست» که نقیضهای^{۲۹} مربوط به دو قضیهٔ عمومی اولی که مورد بررسی قرار گرفته‌اند می‌باشند، نشان دهیم که رابطهٔ

کنندهٔ مکان صرف است که دلالت می‌کند که ثابت فردی را برای به دست آوردن یک قضیهٔ فردی کجا می‌توان نوشت. قضایای فردی « Ea »، « Eb »، « Ec »، « Ed »، ... یا راست یا دروغند؛ اما « Ex » نه راست نه دروغ، و نه قضیه است. عباراتی چون « Ex » را «توابع گزاره‌ای»^{۳۰} می‌نامند. این توابع به صورت عباراتی تعریف می‌شوند که شامل متغیرهای فردی‌اند و زمانی که به جای متغیرهای فردی شان ثابتهای فردی قرار داده شود به صورت قضیه یا گزاره در می‌آیند. هر قضیهٔ فردی را می‌توان به صورت یک مثال جانشین^{۳۱} تابع گزاره‌ای بی که آن قضیه با قراردادن یک ثابت فردی به جای متغیر فردی آن تابع گزاره‌ای از آن به دست می‌آید در نظر گرفت. عمل به دست آوردن یک قضیه از یک تابع گزاره‌ای با قراردادن ثابت به جای متغیر، «تمثیل»^{۳۲} نامیده می‌شود. قضایای فردی منفی «ارسطو انسان نیست» و «بوستون انسان نیست» که به صورت « $\sim Ei$ » و « $\sim Eb$ » نمایش داده می‌شوند، با استفاده از تمثیل از تابع گزاره‌ای « $\sim Ex$ » که این قضایا مثالهای جانشین آنند نتیجه می‌شوند. به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که علائمی غیر از علائم صفت و متغیرهای فردی می‌تواند در توابع گزاره‌ای رخ دهد.

قضایای عمومی‌ای چون «هر چیز میراست» و «چیزی میراست» در این که شامل اسامی افراد نیستند با قضایای فردی تفاوت دارند. اما، آنها را نیز می‌توان به صورت نتیجهٔ توابع گزاره‌ای، گرچه نه با استفاده از تمثیل بلکه با استفاده از عملی موسوم به تعمیم^{۳۳} یا «تسویر»^{۳۴} در نظر گرفت. به این ترتیب، مثال اول، یعنی «هرچیز میراست» را می‌توان به طرق دیگر به صورت

«با معلوم بودن هر شیء فردی هرچه که باشد، آن (شیء) میراست»

بیان کرد. در این جا ضمیر موصول «آن» اشاره به کلمهٔ «شیء» که در گزارهٔ پیش از آن آمده است دارد. در این مورد می‌توانیم متغیر فردی « x » را به جای ضمیر «آن» و مقدمش را برای تفسیر قضیهٔ عمومی اول به صورت

«با معلوم بودن هر x, x میراست»

به کار ببریم. سپس می‌توانیم از علامتی که قبلاً معرفی شده، برای

تمام انسانها میرا هستند.
هیچ انسانی میرا نیست.
بعضی انسانها میرا هستند.
بعضی انسانها میرا نیستند.

این قضایا به ترتیب به صورت «موجبه کلیه»^{۳۴}، «سالبه کلیه»^{۳۵}، «موجبه جزئی»^{۳۶} و «سالبه جزئی»^{۳۷} دسته‌بندی شده‌اند، و نوعشان بار دیگر به ترتیب به صورت «A»، «E»، «I»، «O» مختصر شده است. (فرض بر این است که این نامهای حرفی از لاتین و از «Affirme» و «nEgO» به معنای «تأیید می‌کنم» و «حاشا می‌کنم» آمده باشند.) این چهار صورت مخصوص قضایای موضوع محمولی به کمک توابع گزاره‌ای و سورها بسادگی علامتی می‌شوند.

Symbolic Logic

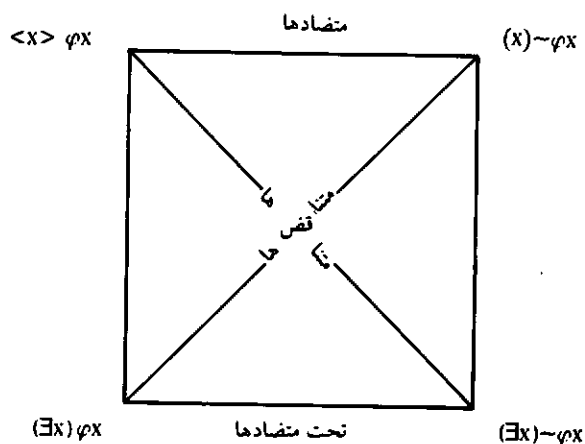
مرجع:

Irving M. Copi

یادداشتها

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1. Propositional Functions | 20. Propositional functions |
| 2. Quantifiers | 21. Substitution instance |
| 3. Singular propositions | 22. Instantiation |
| 4. General propositions | 23. Generalization |
| 5. Logical Techniques | 24. Quantification |
| 6. Arguments | 25. Universal quantifier |
| 7. Validity | 26. Existential quantifier |
| 8. Simple statements | 27. Universal quantification |
| 9. Truth functionally | 28. Existential quantification |
| 10. Compound statements | 29. Negations |
| 11. Logical structure | 30. Equivalent |
| 12. Noncompound statements | 31. Contraries |
| 13. Structures | 32. Subcontraries |
| 14. Second premiss | 33. Contradictories |
| 15. Subject | 34. Universal affirmative |
| 16. Predicate | 35. Universal negative |
| 17. Affirmative | 36. Particular affirmative |
| 18. Individual constants | 37. Particular negative |
| 19. Individual variable | |

دیگری بین تصویر عمومی و وجودی موجود است. «چیزی میرا نیست» به صورت « $(\exists x) \sim Mx$ » و «هیچ چیز میرا نیست» به صورت « $(x) \sim Mx$ » علامتی می‌شود. این دو نشان می‌دهند که نقیض تصویر عمومی (وجودی) یک تابع گزاره‌ای منطقاً هم‌ارز تصویر وجودی (عمومی) تابع گزاره‌ای جدید است که از قراردادن علامت نقیض در جلو تابع گزاره‌ای اول حاصل می‌شود. در این صورت چون حرف یونانی فی را برای نمایش دادن هر علامت صفتی به کار بریم، می‌توانیم روابط عمومی بین تصویر عمومی و وجودی را برحسب جدول مربع شکل زیر توصیف کنیم:



با فرض وجود حداقل یک فرد، می‌توانیم بگوییم که: دو قضیه بالای مربع متضاد^{۳۸} اند، یعنی ممکن است هر دو دروغ باشند اما نمی‌توانند هر دو راست باشند، دو قضیه پایین مربع تحت متضادها^{۳۹} هستند یعنی می‌توانند هر دو راست باشند اما نمی‌توانند هر دو دروغ باشند، قضایایی که در دو سر مقابل اقطار قرار دارند متناقض^{۴۰} اند، که از آنها یکی باید راست و دیگری دروغ باشد، و بالاخره، در هر ضلع، راستی قضیه بالا مستلزم راستی قضیه‌ای است که مستقیماً پایین آن است.

منطق قدیم بر چهار نوع قضیه موضوع محمولی، که با مثالهای زیر توضیح داده شده‌اند، تأکید کرده است:

دوران در هندسه تحلیلی

(مورد استفاده دانش آموزان سوم و چهارم ریاضی - فیزیک)

● محمد ابراهیم گیتی زاده

۱- دوران در صفحه حول مبدأ مختصات

۱-۱. تعریف:

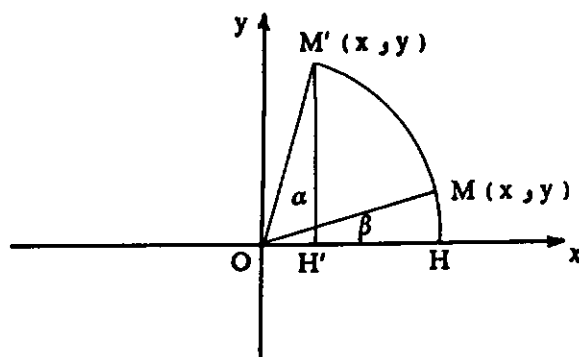
در صفحه محورهای مختصات قائم xOy زاویه جهت دار α را که اندازه جبری آن در جهت مثلثاتی مثبت باشد در نظر می گیریم. اگر متناظر هر نقطه M از این صفحه M' را چنان اختیار کنیم که $OM' = OM$ و $(\widehat{OM}, \widehat{OM'}) = \alpha$ باشد، آنگاه نقطه M' را تبدیل یافته نقطه M در دوران به زاویه α گرد مبدأ مختصات می نامیم و به صورت زیر نشان می دهیم:

$$R_0^\alpha(M) = M'$$

متقابلاً، نقطه M تبدیل یافته نقطه M' در دوران به زاویه $(-\alpha)$ گردد

$$R_0^{-\alpha}(M) = M'$$

مبدأ مختصات خواهد بود،



۱-۲. محاسبه مختصات دوران یافته یک نقطه.

در شکل بالا، فرض می کنیم که تبدیل یافته نقطه $M(x, y)$ در دوران R_0^α نقطه $M'(x', y')$ باشد. با توجه به این که $(\widehat{OX}, \widehat{OM}) = \beta$ ، $\widehat{HM} = y$ ، $\widehat{OH'} = X$ ، $\widehat{OH} = x$ ، $(\widehat{OM}, \widehat{OM'}) = \alpha$ و $\widehat{H'M'} = y$ در دو مثلث OMH و $OM'H'$ می توان نوشت:

$$OM = \frac{x}{\cos \beta}, \quad OM' = \frac{X}{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$OM' = OM \Rightarrow \frac{X}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{x}{\cos \beta}$$

$$X = \frac{x \cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = \frac{x(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}{\cos \beta}$$

$$= x \cos \alpha - x \sin \alpha \tan \beta$$

اما در مثلث OMH ، $\tan \beta = \frac{y}{x}$ پس:

$$X = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

در همان مثلث و به روش مشابه خواهیم داشت:

$$Y = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

بنابراین:

$$R_0^\alpha [M(x, y)] = M'(X = x \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

$$Y = x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow M'(x, y) \quad \text{ب.}$$

یعنی؛ دوران صفر یک تبدیل همانی است.

$$\alpha = 180^\circ \Rightarrow M'(-x, -y) \quad \text{ج.}$$

یعنی؛ دوران به زاویه 180° تقارن نسبت به مبدأ مختصات است.

د. اگر زاویه خط OM با محور OX برابر β باشد:

$$\alpha = \pi - \gamma \beta \Rightarrow M' \begin{vmatrix} x \cos(\pi - \gamma \beta) - y \sin(\pi - \gamma \beta) \\ x \sin(\pi - \gamma \beta) + y \cos(\pi - \gamma \beta) \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$M' \begin{vmatrix} x \cos \gamma \beta - y \sin \gamma \beta \\ x \sin \gamma \beta - y \cos \gamma \beta \end{vmatrix}$$

چون $\tan \beta = \frac{y}{x}$ است، پس از قراردادن مقادیر:

$$\cos \gamma \beta = \frac{1 - \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\sin \gamma \beta = \frac{2 \tan \beta}{1 + \tan^2 \beta} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

و ساده کردن، $M'(-x, y)$ به دست می آید. یعنی، دوران به زاویه $\pi - \gamma \beta$ که β زاویه خط OM با محور OX است، تقارن نسبت به محور عرضها است.

ه. با همان فرض که β زاویه خط OM با محور OX باشد، به طریق مشابه ثابت می شود:

$$\alpha = -\gamma \beta \Rightarrow M'(x, -y)$$

یعنی: این دوران، تقارن نسبت به محور طولها است.

مثال. نقطه $A(4, 2)$ را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه ای دوران می دهیم تا بر خط $y = 2x + \sqrt{2}$ قرار گیرد. کوچکترین اندازه زاویه دوران را پیدا کنید.

طریقه اول. دوران یافته نقطه A را A' فرض می کنیم و مختصات آن را بر حسب زاویه دوران، که α در نظر گرفته می شود، به دست می آوریم.

در این صورت می توان گفت که ماتریس دوران به زاویه α حول مبدأ مختصات عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

یعنی:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{bmatrix}$$

متقابلاً، نقطه $M(x, y)$ تبدیل یافته نقطه $M'(x, y)$ در دوران R_0^α است، یعنی:

$$R_0^{-\alpha} [M'(X, Y)] = M(x = X \cos \alpha + Y \sin \alpha, y = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha)$$

مثلاً تبدیل یافته نقطه $M(2, -4)$ در دوران به زاویه 30° و به مرکز مبدأ مختصات عبارت است از:

$$M' \begin{vmatrix} X = 2 \cos 30^\circ + 4 \sin 30^\circ = \sqrt{3} + 2 \\ Y = 2 \sin 30^\circ - 4 \cos 30^\circ = 1 - 2\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

و برعکس، اگر نقطه $M'(\sqrt{3} + 2, 1 - 2\sqrt{3})$ را به زاویه (-30°) گرد مبدأ مختصات دوران دهیم، نقطه $M(2, -4)$ به دست می آید،

$$M \begin{vmatrix} x = (\sqrt{3} + 2) \cos(-30^\circ) - (1 - 2\sqrt{3}) \sin(-30^\circ) \\ y = (\sqrt{3} + 2) \sin(-30^\circ) + (1 - 2\sqrt{3}) \cos(-30^\circ) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow M(2, -4)$$

اکنون به دوران یافته های نقطه $M(x, y)$ در حالت های خاص زیر توجه کنید:

$$R_0^\alpha [M(0, 0)] = M'(0, 0) \quad \text{الف.}$$

یعنی، دوران یافته مرکز دوران بر خودش منطبق است.

تمرین

۱- دوران یافته نقطه $M(x, y)$ را در هریک از حالت‌های زیر پیدا

کنید:

الف: $\alpha = 90^\circ$ ب: $\alpha = -90^\circ$ ج: $\alpha = 45^\circ$

۲- نقطه $A(4, 2)$ را به چه زاویه‌ای در جهت مثلثاتی دهیم تا دوران یافته آن به فاصله ۲ از نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات قرار گیرد؟

۱-۳. دوران یک شکل:

قضیه ۱. مکان هندسی دوران یافته‌های نقاط هر خط راست، یک خط راست است. یا، دوران یافته هر خط راست، یک خط راست است.

برهان. خط راست d به معادله $ax + by + c = 0$ و نقطه متغیر $M(t, -\frac{at+c}{b})$ را روی آن در نظر می‌گیریم. تبدیل یافته این نقطه در دوران R_α^O نقطه M' است به طوری که

$$M' \begin{cases} X = t \cos \alpha + \frac{at+c}{b} \sin \alpha \\ Y = t \sin \alpha - \frac{at+c}{b} \cos \alpha \end{cases}$$

ثابت می‌کنیم مکان هندسی نقطه M' وقتی t تغییر کند یک خط راست است. برای این منظور بین رابطه‌های X و Y پارامتر t را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} bX - c \sin \alpha = t(b \cos \alpha + a \sin \alpha) \\ bY + c \cos \alpha = t(b \sin \alpha - a \cos \alpha) \end{cases}$$

$$\frac{bX - c \sin \alpha}{bY + c \cos \alpha} = \frac{b \cos \alpha + a \sin \alpha}{b \sin \alpha - a \cos \alpha}$$

پس از ساده کردن، معادله زیر به دست می‌آید:

$$a(X \cos \alpha + Y \sin \alpha) + b(-X \sin \alpha + Y \cos \alpha) + c = 0 \quad (1)$$

$$A' \begin{cases} x \cos \alpha - y \sin \alpha = 4 \cos \alpha - 2 \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha = 4 \sin \alpha + 2 \cos \alpha \end{cases}$$

چون نقطه A' بر خط به معادله $y = 2x + \sqrt{2}$ قرار دارد؛

$$4 \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 2(4 \cos \alpha - 2 \sin \alpha) + \sqrt{2}$$

$$8 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = \sqrt{2}$$

معادله را بر حسب $\frac{\alpha}{4}$ می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$(6 - \sqrt{2}) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4} + 16 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} - (6 + \sqrt{2}) = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} = -\frac{25\sqrt{2} + 31}{17}, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} = \sqrt{2} - 1 \quad \text{از حل این معادله}$$

به دست می‌آید که به جواب قابل قبول آن $\alpha = \frac{\pi}{4}$ است.

طریقه دوم: ابتدا معادله دایره‌ای می‌نویسیم که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاع آن طول OA باشد. نقطه تلاقی این دایره با خط $y = 2x + \sqrt{2}$ که با شرط مسأله مطابقت دارد نقطه A' است. سپس زاویه بین دو خط OA و OA' را، که زاویه دوران است، به دست می‌آوریم:

$$OA^2 = 20 \Rightarrow x^2 + y^2 = 20$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y = 2x + \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

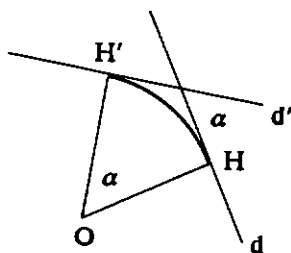
$$5x^2 + 4\sqrt{2}x - 18 = 0 \Rightarrow A'(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$$

$$m_{OA} = \frac{1}{2}, \quad m_{OA'} = 3$$

$$\operatorname{tg}(OA, OA') = \left| \frac{m_{OA} - m_{OA'}}{1 + m_{OA} \cdot m_{OA'}} \right| = 1$$

$$\Rightarrow (OA \wedge OA') = \frac{\pi}{4}$$

می‌کنیم و آن را H' می‌نامیم. خط d' که از نقطه H' بر خط OH' عمود شود دوران یافته خط d خواهد بود.



قضیه ۲. در دوران R_0^α ، زاویه‌های بین دو خط متناظر d و d' با $|\alpha|$ و $|\pi - \alpha|$ برابرند.

برهان. اثبات قضیه با توجه به شکل بالا به آسانی ممکن می‌شود، اما به روش تحلیلی، خط d و دوران یافته آن خط d' را به معادله‌های زیر در نظر می‌گیریم:

$$d: y = ax + b$$

$$d': -x \sin \alpha + y \cos \alpha = a(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \Rightarrow$$

$$y(\cos \alpha - a \sin \alpha) - x(\sin \alpha + a \cos \alpha) = b$$

ضریب زاویه‌ای خط d مساوی a و ضریب زاویه‌ای خط d' برابر $\frac{\sin \alpha + a \cos \alpha}{\cos \alpha - a \sin \alpha}$ است، بنابراین اگر زاویه بین این دو خط را ω فرض کنیم، داریم:

$$\operatorname{tg} \omega = \pm \frac{\frac{\sin \alpha + a \cos \alpha}{\cos \alpha - a \sin \alpha} - a}{1 + \frac{a(\sin \alpha + a \cos \alpha)}{\cos \alpha - a \sin \alpha}} = \pm \operatorname{tg} \alpha$$

$$\omega = |\alpha|, \quad \bar{\omega} = \pi - |\alpha|$$

نتیجه. دوران یافته هر زاویه با آن زاویه برابر است،

$$[R_0^\alpha(AB) = A'B', R_0^\alpha(BC) = B'C'] \Rightarrow \hat{A'B'C'} = \hat{ABC}$$

قضیه ۳. دوران یافته هر پاره، با آن پاره خط برابر است.

برهان. دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ و دوران یافته‌های آنها $A'(x_1, y_1)$ و $B'(x_2, y_2)$ را در نظر می‌گیریم.

این معادله، نمایش یک خط راست مانند d' است. چون مختصات نقطه $M'(X, Y)$ دوران یافته نقطه $M(x, y)$ از خط d ، در معادله (۱) صدق می‌کند، و به عکس، تبدیل یافته هر نقطه $M'(X, Y)$ از خط d' در دوران R_0^α بر خط d واقع است، لذا معادله (۱) معادله دوران یافته خط d است.

دستور. برای نوشتن معادله تبدیل یافته یک خط معلوم در دوران R_0^α ، کافی است در معادله این خط x را $x \cos \alpha + y \sin \alpha$ و y را به $-x \sin \alpha + y \cos \alpha$ تبدیل کنیم.

مثال: معادله تبدیل یافته خط d به معادله $x + y = 1$ در دوران $R_0^{45^\circ}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x \Rightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y)$$

$$y \Rightarrow -x \sin \alpha + y \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (-x + y)$$

$$d: x + y = 1 \Rightarrow d': y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

متقابلاً، خط d تبدیل یافته خط d' در دوران $R_0^{45^\circ}$ است، زیرا:

$$y \Rightarrow -x \sin(-45^\circ) + y \cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y)$$

$$d': y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d: x + y = 1$$

تذکر. نماد $\Rightarrow$ را بخوانید «... تبدیل می‌شود به...».

نتیجه. اگر d و d' دو خط متناظر در دوران R_0^α باشند و از نقطه O

دو خط OH و OH' را بر این دو خط عمود کنیم:

اولاً: H و H' در این دوران دو نقطه متناظرند.

ثانیاً: چون $OH = OH'$ ، پس مرکز دوران از دو خط متناظر به

یک فاصله است.

● یکی از روشهای ترسیم دوران یافته یک خط، مانند d ، استفاده

از نتیجه بالا است. به این طریق که از نقطه O (مرکز دوران) خط OH را بر خط d عمود کرده تبدیل یافته نقطه H (پای عمود) را تعیین

$$\begin{cases} x \rightarrow x \cos 90^\circ + y \sin 90^\circ = y \\ y \rightarrow -x \sin 90^\circ + y \cos 90^\circ = -x \end{cases} \Rightarrow$$

$$C: y^2 + y + x - 1 = 0 \rightarrow \bar{C}: y = -x^2 + x + 1$$

۱-۵: دوران مقاطع مخروطی

معادله هر مقطع مخروطی به صورت کلی

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

نوشته می شود که در آن ضریبهای a و b و c و d و e و f اعداد حقیقی فرض می شوند. بر حسب آن که عبارت $b^2 - ac$ عددی منفی، صفر، یا مثبت باشد، ثابت می شود که نوع مقطع مخروطی به ترتیب بیضی، سهمی، یا هذلولی است. در حالت خاصی که $b = 0$ است، معادله مقطع مخروطی فاقد جمله xy ، یعنی به صورت زیر می باشد:

$$G(x, y) = a'x^2 + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0 \quad (2)$$

در این حالت محور یا محورهای مقطع مخروطی به موازات محورهای مختصات وده و مشخصات آن به آسانی تعیین می شوند. درحالی که اگر $b \neq 0$ یعنی معادله شامل جمله xy باشد، به دست آوردن این مشخصات نسبتاً مشکل است. اما، با عمل دوران می توانیم معادله (۱) را به معادله نوع (۲) تبدیل کنیم. برای این منظور، در دوران R_α زاویه α را چنان تعیین می کنیم که معادله تبدیل یافته معادله (۱) فاقد جمله xy باشد. این تبدیل به صورت زیر انجام می گیرد:

$$(x \rightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha, y \rightarrow -x \sin \alpha + y \cos \alpha) \Rightarrow$$

$$F(x, y) = 0 \rightarrow a(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + 2b(x \cos \alpha + y \sin \alpha)(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) + c(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + d(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + e(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) + f = 0$$

ساده شده ضریب جمله xy در معادله بالا، عبارت

$$2b \cos 2\alpha - (c-a) \sin 2\alpha$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A'B' = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

اما،

$$\begin{cases} X_2 - X_1 = (x_2 - x_1) \cos \alpha - (y_2 - y_1) \sin \alpha \\ Y_2 - Y_1 = (x_2 - x_1) \sin \alpha + (y_2 - y_1) \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'B' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$A'B' = AB$$

قضیه ۴. تبدیل یافته هر شکل در هر دوران، با آن شکل برابر است.

پرهان. چون در هر دوران تبدیل یافته هر پاره خط، با آن پاره خط و تبدیل یافته هر زاویه، با آن زاویه برابر است، بنابراین دوران یافته هر شکل، با آن شکل برابر خواهد بود.

۱-۴. معادله دوران یافته یک منحنی:

مرگانه منحنی C به معادله $f(x, y) = 0$ حول مبدأ مختصات به زاویه α دوران کند، معادله منحنی C' تبدیل یافته آن در این دوران، با تبدیل x به $x \cos \alpha + y \sin \alpha$ و y به $-x \sin \alpha + y \cos \alpha$ در معادله $f(x, y)$ به دست می آید.

$$\begin{cases} x \rightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y \rightarrow -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x, y) = 0 \rightarrow f(X, Y) =$$

$$f(x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha) = 0$$

مثال: منحنی C به معادله $y^2 + y + x - 1 = 0$ را حول مبدأ مختصات به زاویه 90° دوران می دهیم. معادله منحنی C' تبدیل یافته آن را بنویسید.

حل:

$$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$$

منحنی معادله اخیر یک بیضی است که محور کانونی آن با محور عرضها موازی است و طولهای دو قطر بزرگتر و کوچکتر آن، که با اقطاربزرگتر و کوچکتریضی C متناظرند، $2\sqrt{6}$ ، $2\sqrt{2}$ هستند. اگر زاویه دوران را $(-\frac{\pi}{4})$ اختیار کنیم، معادله تبدیل یافته منحنی C به صورت $1 = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2}$ در می آید که منحنی نمایش آن یک بیضی است که محور کانونی آن به موازات محور طولها است.

۱-۶: چند مثال

مثال ۱: اگر خط d' به معادله $y = -3x + m$ تبدیل یافته خط d به

معادله $y = 2x + 1$ در دوران R_0^α باشد، ابتدا زاویه α ، که حاده فرض می شود، و سپس ضریب m را تعیین کنید.

حل: طبق قضیه ۲، زاویه دوران در این جا، مساوی زاویه حاده بین دو خط متناظر d و d' است. بنابراین:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-3-2}{1-6} \right| = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

اکنون، معادله دوران یافته خط d را در دوران $R_0^{45^\circ}$ به دست می آوریم:

$$\left[x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \right] \Rightarrow$$

$$d: y = 2x + 1 \quad d': y = -3x - \sqrt{2}$$

از مقایسه دو معادله $y = -3x + \sqrt{2}$ ، $y = -3x + m$ برای خط d' داریم، نتیجه می شود:

$$m = -\sqrt{2}$$

مثال ۲: نقطه O (مبدأ مختصات) یک رأس مثلث

متساوی الاضلاع OAB است که در آن، رأس A بر خط $y = 1$ و رأس B بر خط $y = 5$ قرار دارد. مختصات دو رأس A و B را، که مثبت فرض می شوند، پیدا کنید.

حل: اگر OAB مثلث مطلوب باشد، چون $\angle AOB = 60^\circ$

$$2b \cos 2\alpha - (c-a) \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2b}{c-a} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{2b}{c-a} + k\pi \right)$$

با انتخاب هر زاویه α از رابطه بالا، دوران R_0^α معادله نوع (۱) را به معادله نوع (۲) تبدیل می کند که در آن جمله xy وجود ندارد و در نتیجه محورهای منحنی آن با محورهای مختصات موازینند. در حقیقت، زاویه α که به این ترتیب به دست می آید زاویه ای است که بین یکی از محورهای مختصات و یکی از محورهای مقطع مخروطی، قبل از دوران، تشکیل می شود.

حالت خاص. اگر $a = c$ باشد،

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \pm \infty \Rightarrow 2\alpha = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{4}$$

مثال: منحنی C به معادله $y = \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{12 - 3x^2})$ مفروض است.

اولاً - تحقیق کنید این منحنی یک مقطع مخروطی از نوع بیضی است.

ثانیاً - این بیضی را حول مبدأ مختصات به زاویه α دوران می دهیم تا محورهای آن با محورهای مختصات موازی شوند. پس از تعیین زاویه α ، معادله تبدیل یافته این بیضی و از آن جا طولهای اقطار بزرگتر و کوچکتر آن را پیدا کنید.

حل: اولاً - معادله مفروض پس از حذف رادیکال و ساده کردن به صورت زیر در می آید:

$$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

معادله بالا با معادله کلی مقطع مخروطی قابل مقایسه است و در آن:

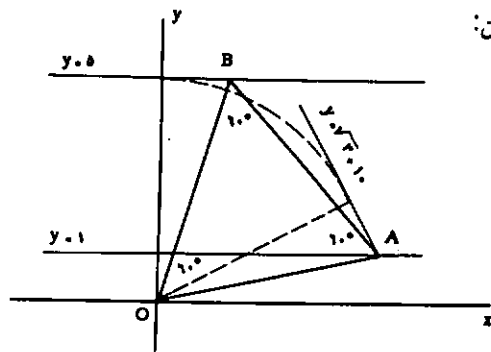
$$a=1, b=-\frac{1}{2}, c=1, d=0, e=0, f=-3$$

چون $b^2 - ac < 0$ ، نوع این مقطع مخروطی بیضی است.

ثانیاً - چون $a = c = 1$ است، می توانیم زاویه دوران را $\alpha = \frac{\pi}{4}$ اختیار کنیم. بنابراین:

$$\left[x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \right] \Rightarrow$$

$OA = OB$ است می توان گفت رأس A تبدیل یافته رأس B در دوران $\bar{R}_O^{10^\circ}$ و رأس B دوران یافته رأس A در دوران $\bar{R}_O^{10^\circ}$ است. بنابراین:



از برخورد خط $y = 1$ با تبدیل یافته خط $y = 5$ در دوران $\bar{R}_O^{10^\circ}$ ، رأس A و از برخورد خط $y = 5$ با تبدیل یافته خط $y = 1$ در دوران $\bar{R}_O^{10^\circ}$ ، رأس B به دست می آید. محاسبه مختصات این دو نقطه به صورت زیر است:

تعیین تبدیل یافته خط $y = 5$ در دوران $\bar{R}_O^{10^\circ}$:

$$y \rightarrow -x \sin(-6^\circ) + y \cos(-6^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

$$y = 5 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 5 \Rightarrow y = -\sqrt{3}x + 10$$

تعیین مختصات رأس A :

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 10 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(3\sqrt{3}, 1)$$

تعیین تبدیل یافته خط $y = 1$ در دوران $\bar{R}_O^{10^\circ}$:

$$y \rightarrow -x \sin 6^\circ + y \cos 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

$$y = 1 \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 1 \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2$$

تعیین مختصات رأس B :

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(\sqrt{3}, 5)$$

مثال ۳: تابع هموگرافیک $y = \frac{2x+1}{x-1}$ مفروض است. منحنی آن را حول مبدأ مختصات به زاویه معینی، که آن را پیدا می کنید، دوران می دهیم تا یک هذلولی که محورهای آن با محورهای مختصات موازی هستند، پدید آید. معادله این هذلولی و معادله های محورهای آن را بنویسید و از آنجا، معادله های محورهای تقارن منحنی تابع هموگرافیک مفروض را به دست آورید.

حل: تابع مفروض پس از حذف مخرج به صورت زیر در می آید،
 $xy - 2x - y - 1 = 0$.

منحنی این تابع یک مقطع مخروطی از نوع هذلولی است، زیرا

$$b^2 - ac > 0 \text{ و } b = \frac{1}{2}, a = c = 0.$$

برای این که محورهای این منحنی در دوران $\bar{R}_O^\alpha$ به موازات محورهای مختصات در آیند، چون $a = c$ است می توان زاویه دوران را $\alpha = \frac{\pi}{4}$ اختیار کرد. بنابراین:

$$\left[x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \right] \Rightarrow$$

$$xy - 2x - y - 1 = 0 \rightarrow y^2 - x^2 - \sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y - 2 = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{(y - \frac{3\sqrt{2}}{2})}{6} - \frac{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{6} = 1$$

منحنی معادله اخیر یک هذلولی متساوی القطرین به مرکز $O'(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ است که محورهای آن به معادله های

$$y = \frac{3\sqrt{2}}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

هستند. اگر این دو خط را حول مبدأ مختصات به زاویه $(-\frac{\pi}{4})$ دوران دهیم معادلات دو محور تقارن منحنی تابع هموگرافیک داده شده به دست می آیند:

$$\left[x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \right] \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = x+1$$

$$A'(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{6}), A(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{6})$$

نقاط ماکسیم و مینیم آن هستند.

تمرین

۱- خط $4x + 3y = 12$ را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه کوچکترین زاویه، دوران می‌دهیم تا با محور طولها موازی شود. زاویه دوران (α) و معادله تبدیل یافته این خط را تعیین کنید.

جواب: $\alpha = \text{Arc tg } \frac{4}{3}$ و $y = \frac{12}{5}$

۲- نقطه O (مبدأ مختصات) یک رأس مثلث متساوی الساقین OAB

است که در آن $\hat{O} = 30^\circ$ و $OA = OB$. اگر رأس A بر خط (d) به معادله $y = x\sqrt{3} - 2$ و رأس B بر خط (δ) به معادله $y = x + \sqrt{3}$ واقع باشند، مختصات این دو رأس را پیدا کنید.

جواب: $A(\frac{2\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2})$, $B(1, \sqrt{3}+1)$

۳- سهمی (c) به معادله

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 4x + 4\sqrt{3}y + 8 = 0$$

را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم تا به سهمی (c') که محورش با محور طولها موازی باشد تبدیل شود؛

اولاً: اندازه کوچکترین زاویه دوران را پیدا کنید

ثانیاً: معادلات سهمی (c') و مختصات رأس، مختصات کانون، معادله محور و معادله خط هادی در آن را تعیین کنید.

ثالثاً: با استفاده از مشخصات سهمی (c') که به دست آورده‌اید، مشخصات سهمی (c) را از طریق دوران معکوس معین کنید.

جوابها:

اولاً: $\alpha = \frac{\pi}{3}$

ثانیاً: $C': y^2 = 2(x-2), S'(2,0), F'(\frac{5}{2},0), y=0, x=\frac{3}{2}$

ثالثاً:

$$S(1, -\sqrt{3}), F(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}),$$

$$y + \sqrt{3}x = 0, \sqrt{3}y - x + 3 = 0$$

$$y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -x + 3$$

اگر زاویه دوران را $\alpha = \frac{-\pi}{4}$ اختیار کنیم تابع هموگرافیک مفروض به معادله زیر تبدیل می‌شود که منحنی آن یک هذلولی است که محور کانونیش با محور طولها موازی است:

$$\frac{(x - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2}{6} - \frac{(y - \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{6} = 1$$

تذکره. منحنی هر تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، ($c \neq 0$)،

یک هذلولی است که نقطه $H(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ محل تلاقی مجانبها و مرکز تقارن آن است. این منحنی دو محور تقارن دارد که از نقطه H می‌گذرند و با محور طولها زاویه‌های $\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$ می‌سازند، یعنی به معادلات زیر هستند:

$$y = x + \frac{a+d}{c}, y = -x + \frac{a-d}{c}$$

درباره دوران یک منحنی لازم است به نکته زیر نیز توجه شود:

گرچه، دوران هیچ‌گونه تغییری در شکل یک منحنی پدید نمی‌آورد و فقط آنرا تغییر مکان می‌دهد، اما تبدیل یافته معادله منحنی، ممکن است هیچ‌یک از ویژگیهای خود معادله را نداشته باشد. برای مثال رابطه $F(x,y) = xy - 2x - y - 1 = 0$ را با رابطه دوران یافته منحنی آن به زاویه $\frac{\pi}{4}$ ، که در مثال ۳ به صورت:

$$G(x,y) = y^2 - x^2 - \sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y - 2 = 0$$

آمد، در چند مورد مقایسه می‌کنیم:

الف. دامنه تعریف و برد رابطه $F(x,y) = 0$ عبارتند از:

$$D_F = R - \{2\} \text{ و } R_F = R - \{1\} \text{ در صورتی که دامنه}$$

تعریف و برد رابطه $G(x,y) = 0$ برابرند با:

$$R_G =]-\infty, \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{6}] \cup [\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{6}, +\infty[; D_G = R$$

ب. رابطه $F(x,y) = 0$ یک تابع یک به یک و بنابراین معکوس پذیر است، درحالی که رابطه $G(x,y) = 0$ اصولاً تابع نیست.

ج. منحنی معادله $F(x,y) = 0$ نقطه ماکسیم یا مینیم ندارد، اما رأسهای کانونی منحنی معادله $G(x,y) = 0$ ، یعنی:

پارامترهای جبری متجانس

● دکتر احمد شرف الدین

مقدمه

به صورت $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ بنویسیم هیچ گاه از این معادله، معادله خطوط مستقیم به دست نمی آید. برای فایق آمدن بر این مشکل پارامترهای جبری متجانس به کار می بریم یعنی معادله خط راست را به صورت $ax + by + c = 0$ می نویسیم که جمیع اوضاع خط راست را نشان می دهد و معادله دایره را به صورت $(x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ می نویسیم به ازای $\lambda = 0$ خطوط راست به دست می آید.

مسئله ۱. معادله خطوطی را که از مبدأ مختصات بر منحنی C به معادله

$$(1) \quad y^2 - x - 2y + 1 = 0$$

تماس رسم می شوند بنویسید.

حل. معادله خطوطی را که بر مبدأ مختصات می گذرند به صورت زیر می نویسیم:

$$(2) \quad y = mx$$

جوابهای دستگاه معادله های زیر مختصات نقاط تقاطع منحنی C و خط به معادله (۲) می باشند:

$$(3) \quad \begin{cases} y^2 - x - 2y + 1 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

از حذف لایین دو معادله دستگاه بالا، معادله زیر حاصل می شود:

$$(4) \quad m^2x^2 - (1 + 2m)x + 1 = 0$$

جوابهای معادله (۴) طولهای نقاط تقاطع منحنی C و خط (۲) می باشند. شرط تماسی خط (۲) و منحنی C چنین است:

$$(5) \quad \Delta = 4m + 1 = 0$$

مفهوم پارامترهای جبری متجانس حائز اهمیت است. دانش آموزان باید از این مفهوم آگاهی داشته باشند. عدم آشنایی با این مفهوم موجب اشتباه در حل بعضی مسائل می شود. در سطرهای آینده در این مورد توضیح می دهیم و مثالهای متعدد ذکر می کنیم. این مثالها را طوری طرح کرده ایم که محاسبات آنها بسیار کوتاه باشد تا توجه دانش آموز کاملاً به درک نقش پارامترهای جبری متجانس متمرکز باشد.

پارامترهای هندسی و پارامترهای جبری

هر شرط مشخص کننده یک شکل هندسی یک پارامتر نامیده می شود مثلاً چون خط مستقیم با دو نقطه مشخص می شود می گوئیم خط مستقیم دو پارامتر دارد. دایره با سه نقطه اش مشخص می شود از این جهت می گوئیم دایره سه پارامتر دارد: هر نقطه از یک شکل یک پارامتر محسوب می شود مگر نقاط مخصوص مثلاً رأس بیضی دو پارامتر محسوب می شود. وقتی می گوئیم نقطه A رأس یک بیضی است یعنی این که نقطه A متعلق به بیضی است (یک شرط) و به علاوه یکی از محورهای بیضی از نقطه A می گذرد (شرط دوم).

هنگامی که معادله یک خط راست را در هندسه تحلیلی می نویسیم نمی توانیم اوضاع مختلف خط راست را به توسط دو پارامتر مشخص کنیم. به عنوان مثال اگر معادله خط را به صورت $y = px + q$ بنویسیم خطوط $x = a$ (خطوط موازی با محور y ها) را نمی توان با آن معادله به دست آورد. همچنین می دانیم که خط راست دایره ای است که شعاع آن بی نهایت است. اگر معادله دایره را

$$(۱۱) \quad y^2 - 2y + 1 = 0$$

معادله (۱۱) دارای جواب مضاعف $y = 1$ است. پس خط $x = 0$ در نقطه‌ای به عرض $y = 1$ بر منحنی C مماس است.

ب. اگر $b \neq 0$ باشد معادله دوم دستگاه (۸) را به صورت زیر

$$(۱۲) \quad y = \frac{a}{b}x$$

می‌نویسیم: قرار می‌دهیم $m = \frac{a}{b}$ معادله (۱۲) به صورت $y = mx$ در می‌آید. در این صورت دستگاه معادله‌های (۸) به صورت دستگاه معادله‌های (۳) نوشته می‌شود و به وسیله آن معادله خط مماس دیگر به صورت (۶) به دست می‌آید. با این ترتیب با به کارگیری پارامترهای جبری متجانس یعنی با به کارگیری معادله (۷) معادله هر دو خط مماس را به دست می‌آوریم.

اگر معادله (۱) را به صورت $x = (y - 1)^2$ بنویسیم به آسانی معلوم می‌شود که منحنی C یک سهمی است که در نقطه $S(0, 1)$ بر محور y مماس است.

مسئله ۲. دایره C به معادله

$$(۱۳) \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

مفروض است. معادله خطوطی را که از مبدأ مختصات می‌گذرند و بردایره C مماسند بنویسید.

حل. معادله خطوطی که بر مبدأ مختصات می‌گذرند به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۱۴) \quad y = mx$$

مختصات نقاط تقاطع دایره C و خط (۱۴) جوابهای دستگاه معادله‌های زیراند:

$$(۱۵) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

از حذف y بین دو معادله دستگاه (۱۵) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$(۱۶) \quad (1 + m^2)x^2 - 2(1 + 2m)x + 4 = 0$$

شرط تماس خط (۱۴) و دایره (۱۳) چنین است:

$$\Delta = 4m - 2 = 0$$

$$m = \frac{2}{4}$$

$$m = -\frac{1}{4}$$

معادله خط مماس چنین است:

$$(۶) \quad y = -\frac{1}{4}x$$

معادله (۱) معادله یک سهمی است و نقطه $O(0, 0)$ روی منحنی C قرار ندارد زیرا مختصات نقطه O در معادله (۱) صدق نمی‌کنند. پس چرا فقط یک معادله برای خطوط مماس به دست آمده است؟

علت آن است که در نوشتن معادله خط، پارامتر جبری متجانس به کار نبوده‌ایم. معادله کلی خطوطی که از مبدأ مختصات می‌گذرند به صورت (۲) نیست که به صورت زیر است:

$$(۷) \quad ax = by$$

در معادله (۲) هیچ مقداری نمی‌توان به m نسبت داد تا خط نمایش آن محور y ها باشد. معادله (۲) کلیه خطوط مایلر مبدأ مختصات را نشان می‌دهد بجز خط y'/y را. در مسئله (۱)، محور y ها مماس بر سهمی C است. معادله (۲) محور y را نشان نمی‌دهد، از این جهت دستگاه معادله‌های (۳) فقط معادله یک خط مماس را به دست داده است.

برای جست‌وجوی معادله‌های خطوط مماس، دستگاه معادله‌های زیر را می‌نویسیم:

$$(۸) \quad \begin{cases} y^2 - x - 2y + 1 = 0 \\ ax = by \end{cases}$$

y را بین دو معادله حذف می‌کنیم. چنین می‌نویسیم:

$$(۹) \quad y = \frac{a}{b}x$$

اما این هنگامی ممکن است که $b \neq 0$ باشد. پس دو حالت در نظر می‌گیریم.

الف. اگر $b = 0$ باشد در این صورت معادله دوم دستگاه (۸) می‌شود:

$$(۱۰) \quad x = 0$$

حال بررسی می‌کنیم که آیا خط به معادله (۱۰) بر منحنی C مماس است یا نه. در معادله اول دستگاه به جای x مقدار آن یعنی صفر قرار می‌دهیم حاصل می‌شود:

از حذف y بین دو معادله دستگاه معادله‌های (۱۹)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$(20) \quad (p^2 - p - 2)x^2 + (2pq - q + 3)x + q^2 - 1 = 0$
جوابهای معادله (۲۰) طولهای نقاط تقاطع خط (۱۸) و نمودار معادله (۱۷) اند. اگر نمودار معادله (۱۷) از دو خط راست تشکیل شده باشد می‌توان p و q را طوری انتخاب کرد که معادله (۲۰) دارای بی‌نهایت جواب باشد. برای آن که معادله (۲۰) دارای بی‌نهایت جواب باشد لازم و کافی است هر سه ضریب آن صفر باشند یعنی:

$$(21) \quad \begin{cases} p^2 - p - 2 = 0 \\ 2pq - q + 3 = 0 \\ q^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

جوابهای این دستگاه معادله‌ها چنین است:

$$\begin{cases} p = -1 \\ q = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 2 \\ q = -1 \end{cases}$$

پس نمودار معادله (۱۷) از دو خط راست به معادلات زیر تشکیل شده‌اند.

$$y = -x + 1 \quad y = 2x - 1$$

تبصره: مسئله (۳) را می‌توان به صورت زیر مطرح کرد:

عبارت زیر را به حاصل ضرب دو عبارت درجه اول بر حسب x و y تجزیه کنید.

$$-2x^2 + y^2 - xy + 3x - 1$$

توجه. مسئله (۴) که در سطور آینده مطرح می‌کنیم از همان نوع مسئله (۳) است. در حل مسئله (۳) نیازی به بکارگیری پارامترهای جبری متجانس نبود. اما در حل مسئله (۴) باید پارامترهای جبری متجانس به کار ببریم. مسئله (۳) را فقط از این نظر مطرح کردیم که ذهن خواننده برای مسئله (۴) آماده شود.

مسئله ۴. ثابت کنید نمودار معادله زیر از دو خط راست تشکیل شده است:

$$(22) \quad x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0$$

حل. معادله خط راست را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = \frac{2}{4}x$$

نقطه O (مبدأ مختصات) در خارج از دایره C است زیرا مختصات مرکز دایره C عبارت است از $(1, 2)$ و شعاع آن $r = 1$ است. فاصله O از مرکز دایره $\sqrt{5}$ است.

چرا با وجود آن که نقطه O خارج از دایره است برای خطوط مماس فقط یک معادله به دست آمده است. علت این امر آن است که در نوشتن معادله خطوط مار بر مبدأ مختصات پارامترهای جبری متجانس به کار نبرده‌ایم. برای به دست آوردن جواب کامل، معادله خطوط مار بر مبدأ مختصات را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$ax = by$$

و سپس همان شیوه استدلال مسئله (۱) را به کار می‌بریم. معادله هر دو خط مماس به دست می‌آید.

اکنون مسئله دیگری در شماره (۴) مطرح می‌کنیم که اگر در حل آن پارامترهای جبری متجانس به کار نبریم دچار اشتباه می‌شویم. برای این منظور ابتدا با حل مسئله (۳) ذهن خواننده را آماده می‌کنیم و سپس مسئله (۴) را که هدف اصلی، است مطرح می‌کنیم.

مسئله ۳. معادله درجه دوم

$$(17) \quad -2x^2 + y^2 - xy + 3x - 1 = 0$$

مفروض است. ثابت کنید نمودار این معادله از دو خط راست تشکیل شده است.

حل: معادله خطوط راست را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(18) \quad y = px + q$$

دستگاه معادله‌های زیر، مختصات نقاط تقاطع خط (۱۸) و نمودار (۱۷) را به دست می‌دهد:

$$(19) \quad \begin{cases} -2x^2 + y^2 - xy + 3x - 1 = 0 \\ y = px + q \end{cases}$$

اگر نمودار معادله (۱۷) از دو خط راست تشکیل شده باشد آنگاه می‌توان مقادیر p و q را طوری اختیار کرد که خط (۱۸) نمودار (۱۷) را در بی‌نهایت نقطه قطع کند.

در سطور زیر پارامترهای جبری متجانس به کار می‌بریم تا بر مشکل فایق آییم.

برای حل مسأله، معادله خط راست را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(28) \quad ax + by + c = 0.$$

مختصات نقاط تقاطع خط به معادله (۲۸) و نمودار معادله (۲۲) جوابهای دستگاه معادله‌های زیراند:

$$(29) \quad \begin{cases} x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف. اگر $h = 0$ باشد آنگاه معادله دوم دستگاه معادله‌های

(۲۹) به صورت $x = \alpha$ (خطوط موازی محور y ها) در می‌آید. حال بررسی می‌کنیم که آیا می‌توان مقداری به α نسبت داد تا خط $x = \alpha$ بخشی از نمودار معادله (۲۲) باشد. برای این منظور α باید بتواند مقداری بگیرد که تساوی زیر به‌ازای جميع مقادیر y برقرار باشد:

$$\alpha^2 + \alpha y - 2\alpha - y + 1 = 0.$$

و یا

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 + y(\alpha - 1) = 0.$$

پس باید دو تساوی زیر باهم برقرار باشند:

$$\alpha - 1 = 0.$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0.$$

به‌ازای $\alpha = 1$ هر دو تساوی برقرار است پس خط $x = 1$ بخشی از نمودار معادله (۲۲) است.

ب. اگر $h \neq 0$ باشد معادله (۲۸) را به صورت $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

می‌نویسیم و قرار می‌دهیم $\frac{-a}{b} = p$ و $\frac{-c}{b} = q$. در این صورت

معادله (۲۸) به صورت $y = px + q$ نوشته می‌شود و دستگاه

معادله‌های (۲۹) به صورت دستگاه معادله‌های (۲۴) در می‌آید که

به‌وسیله آن بخش دیگر نمودار معادله (۲۲) به صورت معادله (۲۷) به دست می‌آید.

$$(23) \quad y = px + q$$

دستگاه معادله‌های زیر مختصات نقاط تقاطع خط (۲۳) و نمودار معادله (۲۲) را به دست می‌دهند.

$$(24) \quad \begin{cases} x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0 \\ y = px + q \end{cases}$$

از حذف y بین دو معادله دستگاه (۲۴) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$(25) \quad (1 + p)x^2 + (q - p - 2)x - q + 1 = 0.$$

جوابهای معادله (۲۵) طولهای نقاط تقاطع خط (۲۳) و نمودار (۲۲) اند. اگر نمودار (۲۲) متشکل از دو خط راست باشد آنگاه می‌توان مقادیر p و q را طوری اختیار کرد که معادله (۲۵) دارای بی‌نهایت جواب باشد. برای آن که معادله (۲۵) دارای بی‌نهایت جواب باشد لازم و کافی است که هر سه ضریب آن صفر باشند یعنی:

$$(26) \quad \begin{cases} 1 + p = 0 \\ -q + 1 = 0 \\ q - p - 2 = 0 \end{cases}$$

جواب این دستگاه معادلات چنین است:

$$p = -1 \quad \text{و} \quad q = 1$$

پس معادله (۲۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(27) \quad y = -x + 1$$

اما، معادله (۲۲) از درجه دوم است و نمی‌تواند فقط شامل یک خط باشد.

نقص حل در کجاست؟ نقص حل ما، این است که پارامترهای

جبری متجانس به کار نبرده‌ایم. معادله (۲۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x - 1)(y + x - 1) = 0.$$

پس نمودار معادله (۲۲) از دو خط راست به معادله‌های $x - 1 = 0$

و $y + x - 1 = 0$ تشکیل شده است. در معادله (۲۳) نمی‌توان

مقادیری به p و q نسبت داد تا آن معادله به صورت $x - 1 = 0$ در

آید. از این جهت است که با به کارگیری معادله (۲۳) نتوانستیم معادله

هر دو خط تشکیل دهنده نمودار معادله (۲۳) را به دست آوریم.

آشنایی با مشاهیر ریاضی جهان

غلامرضا یاسی پور

از:

Oxford Dictionary of Mathematics

آپولونیوس پرگانی، Apollonius of perga (حدود ۱۹۰ - ۲۶۲ ق.م.). آپولونیوس طی دوران طلایی ریاضیات یونان به کار اشتغال داشت و کم و بیش معاصر ارشمیدس بود، و در مورد سیارات به حرکت اپیسیکلیکی تأکید داشت. معروفترین اثرش که تا دوران جدید اثری قاطع راجع به مقاطع مخروطی: بیضی، سهمی و هذلولی بوده، مخروطات «The Conics» است.



ارشمیدس، Archimedes (۲۱۲ - ۲۸۷ ق.م) ارشمیدس یکی از بزرگترین ریاضی‌دانهایی است که کارهایی اساسی در هندسه و نظریه‌های هیدرواستاتیک و تعادل انجام داده. در ریاضیات محض، بیشتر به خاطر اکیسوم ارشمیدس در نظریه دستگاه‌های حقیقی به

آبل، نیل هنریک، Abel, Niels Henrik (۱۸۰۲ - ۱۸۲۹) در خانواده‌ی کشیشی در نروژ متولد شد. در سن ۱۹ سالگی، ثابت کرد که چند جمله عمومی بیشتر از درجه ۴ نمی‌تواند با استفاده از استخراج ریشه‌ها، حل شود. به عبارت دیگر، برای ریشه‌های معادلاتی چنین، فرمولی مشابه فرمول آشنای درجه دومها موجود نیست. آبل عهده‌دار توسعه‌های اساسی نظریه توابع جبری نیز بود. این کار مهمترین کار او بود. نامش عبارت آبلی «abelian» را به ما داده است. در سن ۲۶ سالگی، درست چند روز قبل از این که نامه‌ای دریافت کند که در آن انتصابش به عنوان استاد در برلین اعلام شده بود، در فقر و فاقه مرد.





در واقع بسیار مهم بودند، به عمل آورد. معروفترین آنها برادران برنولی، ژاکوب و ژان، و دانیل پسر ژان اند. ژاکوب (- ۱۶۵۴) ۱۷۰۵) کارهای بسیاری در حساب دیفرانسیل و انتگرال تازه مطرح شده در آن زمانها انجام داد، اما به خاطر سهمش در نظریه احتمال، یعنی کتاب «Ars conjectandi» که در ۱۷۱۳، بعد از مرگش به چاپ رسید، به خاطر ماندنی است. اعداد برنولی به نام ژاکوب نامگذاری شده اند. کارهای ژان (۱۷۴۸ - ۱۶۶۷) به طور قطعی تر در حوزه حساب دیفرانسیل و انتگرال بود و او یکی از بنیانگذاران حساب تغییرات «Calculus of Variatiop» است. در نسل بعد، دانیل (۱۷۸۲ - ۱۷۰۰) عضوی از این خانواده بود که در هیدرودینامیک کارهایی انجام داد و در آن قضیه برنولی را به نام خود به جا گذاشت.

بول جورج، George Boole (۱۸۶۴ - ۱۸۱۵) بول ریاضی دانی انگلیسی و یکی از آباء مؤسس منطق ریاضی است. اثر مهم او، که در سال ۱۸۵۴ به چاپ رسید، تحقیق در قوانین تفکر «Investigation of the Laws of Thought» است. نوع استدلال علامتی ای که بول مطرح کرد، به مطالعه جبرهای بولی، که از اهمیت جاری در محاسبه و جبر برخوردار است، انجامید. کارهای بول، همراه با کارهای افراد دیگر مکتب انگلیسی چون دومورگان

خاطر می آید. روشش به گونه قابل توجهی مدرن است و مسائل هندسی مورد بررسیش بسیار فریبده اند. کارهایی نظیر کارهای اوست که لیتل وود «Little Wood» را به این دلالت کرد که اعلام کند که ریاضی دانهای یونانی نه دانش آموزشی باهوش که اشخاصی از دانشگاهی دیگر بوده اند. جالبترین اثرش، به نام روش «The method» باردیگر در ۱۹۰۶ کشف شد. ممکن است ارشمیدس فریاد «یافتم» «Eureka» را کشیده و برهنه در خیابانهای سیراکوز دویده باشد یا نباشد، ولی محققاً توسط سربازی رمی به قتل رسیده، واقعه ای که پایان عصری در ریاضیات را رقم زد.



آرگان، ژان روبرت، Argand, Jean Robert (۱۷۶۸ - ۱۸۲۲) آرگان ریاضی دانی سوئیسی بود که یکی از چند شخصی است که نمایش هندسی اعداد مختلط را اختراع کرد، از جمله افراد دیگر گاوس و وسل اند. این موضوع وجه تسمیه نمودار آرگان «Argand diagram» را توضیح می دهد.

خانواده برنولی، Bernoulli family خانواده برنولی از باسل «Basle» گروهی از ریاضی دانهای بزرگ، که بعضی از آنها

De Morgan و پی کاک «Peacock» راه توسعه جبر صوری جدید را هموار کرد.



عمیقترین کارهایش در ریاضیات نظریه مجموعه‌های نامتناهی و اعداد نامتناهیش بود، و تمایز بین مجموعه‌های شمارا و ناشمارایش از اهمیت خاصی برخوردار است. او را می‌توان به‌عنوان ریاضی‌دانی که بی‌نهایت را آزاد ساخت در نظر گرفت.



بورباکی، نیکلا «Bourbaki Nicolas» ژنرال ان. بورباکی مرد نظامی فرانسوی ناشناخته‌ای با فعالیت‌های بسیار است. بیشتر در این قرن زاده شده و بیشتر عمرش هنوز باقی مانده است. از ۱۹۳۹ به بعد، بررسی انسیکلوپدی ماندی را در ریاضیات محض به نام مقدمات «Elements» به طبع رسانده، که نفوذ آن به اشکال مختلف به‌عنوان عمیق یا مصیبت بار توصیف شده و بدون شک پنهان‌تر است. در این مدت پرچمدار مکتبی، که می‌تواند مکتب ساختارگرایی «Structuralist School» ریاضیات جدید نامیده شود، بوده است.

کانتور، ژورژ «Cantor, Georg» (۱۸۴۵-۱۹۱۸) کانتور در سن پترزبورگ «St. Petersburg» تولد یافت، اما بیشتر عمر خود را در هاله «Halle» به سر برد. قسمت آخر عمرش با بیماری‌های روانی مکرر تیره و تار بود و اوقات بسیاری را در آسایشگاه گذراند.

کوشی، آگوستین لویی «Cauchy, Augustin-louis» (۱۸۵۷-۱۷۸۹) کوشی یکی از مهمترین ریاضی‌دانهای اوایل قرن نوزدهم و چهره مسلط ریاضیات فرانسوی بود. آثارش در زمینه‌های وسیعی از ریاضیات تغییر می‌کند، اما وی بخصوص به‌عنوان یکی از پایه‌گذاران آنالیز ریاضی دقیق به‌خاطر مانده است. کارهای عمیقی در مورد مفاهیم پیوستگی و همگرایی انجام داد و نتایج آن در نظریه توابع مختلط برای دانشجویان دوره کارشناسی بسیار آشناست.



طرح و حل مسائل

اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۷)

از کتاب: حل مسئله از طریق مسأله

ترجمه: غلامرضا یاسی پور

این حقیقت که برف روب برف را با آهنگی یک نواخت می‌روبد بدین معنی است که سرعت برف روب به طور معکوس متناسب با عمق برف در هر زمان t است (به عنوان مثال: دو برابر عمق برف متناظر با نصف سرعت برف روب است). از لحاظ علامتی، به ازای $t \geq T$ ؛

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{h(t)} \quad k \text{ ثابت}$$

$$= \frac{k}{ct} = \frac{K}{t}, \quad K = \frac{k}{c} \quad \text{ثابت}$$

با انتگرال گرفتن از دو طرف داریم:

$$x(t) = K \log t + C, \quad C \text{ ثابت}$$

در این مورد سه شرط داده شده‌اند: زمانی که $x=0$ ، $t=T$ ، زمانی که $x=2$ ، $t=T+1$ ، و زمانی که $x=3$ ، $t=T+2$. با دو شرط از شرایط فوق می‌توان K و C را محاسبه کرد، و سومی را می‌توان برای T حل کرد. آشکار می‌شود که (تفصیلات کار در این جا جالب نیستند).

$$T = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618 \text{ ساعت} \approx 37 \text{ دقیقه و } 5 \text{ ثانیه}$$

به این ترتیب، در ساعت ۷:۲۲:۵۵ پیش از ظهر برف آغاز به باریدن کرده است.

بامدادی برفی سنگین با آهنگی یک نواخت آغاز به باریدن کرد. برف روبی در ساعت هشت پیش از ظهر به کار آغازید. در نه پیش از ظهر ۲ میل رفته بود. تا ده پیش از ظهر ۳ میل حرکت کرده بود. با فرض این که برف روب مزبور در ساعت، حجم ثابتی از برف را می‌روبد، زمان آغاز بارش برف را معین کنید.

حل: تصور این که در مسئله، اطلاعات کافی برای جواب دادن به سؤال موجوداند، مشکل است. اما، اگر راهی موجود باشد، باید به طور سیستماتیک ابتدا با استفاده از شناختن مقادیری که مجهول‌اند اقدام کنیم. در این مورد، نماد نویسی زیر را معرفی می‌کنیم: فرض می‌کنیم t زمانی را که از شروع برف آمدن منقضی شده است نمایش دهد و T زمانی (اندازه گرفته شده از $t=0$) باشد که در آن برف روب از کار می‌ایستد. فرض می‌کنیم $x(t)$ مسافتی باشد که برف روب در زمان t رفته است (تنها به $x(t)$ به ازای $t \geq T$ علاقه‌مندیم). سرانجام، فرض می‌کنیم $h(t)$ عمق برف در زمان t را نمایش دهد.

اکنون آماده ترجمه مسئله به عبارات علامتی هستیم. این واقعیت که برف با آهنگی یک نواخت می‌بارد بدین معنی است که عمق آن با آهنگی ثابت افزایش می‌یابد؛ یعنی:

$$\frac{dh}{dt} = c, \quad c \text{ ثابت}$$

با انتگرال گرفتن از دو طرف داریم:

$$h(t) = ct + d \quad d, c \text{ ثابت}$$

از آن جا که $h(0)=0$ ، $d=0$ را به دست می‌آوریم. به این ترتیب $h(t) = ct$.

مقالات کوتاه از مجلات

ریاضی معتبر جهان (۷)

● ب. ریچموند، ت. ریچموند

● ترجمه: نغمه شریک زاده

ویژگی همسطحی منطقه‌ها

همسطحی منطقه‌ها بهره‌ورند، توسع دهیم. واضح است که استوانه چنین است. آیا دیگرانی نیز موجودند؟ دو راه حل را که بسادگی، برای غیردانشجویان قابل وصولند، تاره یا فتن به این سؤال، از نظرگاه‌هایی متفاوت، ارائه می‌دهیم.

برای بیان دقیق سؤال، فرض می‌کنیم $y = g(x)$ ، خم نامنفی تکه‌ای - همواری، تعریف شده بر $[a, b]$ باشد، و حول محور x دوران نماید. منطقه‌ای به پهنای h ($h \leq b - a$) از رویه حاصله، بخشی از رویه محصور بین صفحات $x = x_0$ و $x = x_0 + h$ است، که در آن $x_0 \in [a, b - h]$. چه رویه‌های دورانی‌ای با ویژگی همسطحی منطقه‌ها «equal area zones property» (E.A.Z) وجود دارند، چنان‌که به ازای هر پهنای $h \in [0, b - a]$ سطح رویه

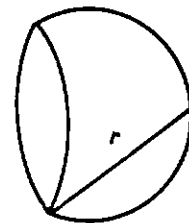
$$S(x, h) = \int_{x_0}^{x_0+h} 2\pi g(t) \sqrt{1 + g'(t)^2} dt \quad (x \in [a, b-h])$$

از منطقه‌ای به پهنای h ، تنها تابعی از h بوده، مستقل از x باشد؟

دو نکته را می‌توان در باب دو رویه‌ای که می‌دانیم دارای ویژگی E.A.Z. هستند، کره و استوانه، ملحوظ داشت. نخست، ملاحظه می‌شود که خمهای مولد آنان، دایره و خط، تنها خمهای مسطح‌اند، با خمیدگی ثابت و نامنفی. دوم آن‌که، در تحقیق‌دارا بودن ویژگی E.A.Z. این دو رویه، آشکار می‌شود که در هر دو مورد، انتگرالده

بر سشی قدیمی که در بسیاری از کتب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به چشم می‌خورد، سؤال مناطق یک کره است: تحقیق کنید، چنانچه کره‌ای توسط دو صفحه موازی، h واحد جدا از یکدیگر، قطع شود، آنگاه، مساحت رویه منطقه بین دو صفحه مزبور، تنها به h بستگی دارد، و از موقع صفحات مستقل است. از آن‌جا که این ویژگی، همواره مورد توجه دانش‌آموزان بوده است، آشنا و شناخته شده است. این ویژگی پیامد بلافصل نتیجه زیر از ارشمیدس است که به کمک شکل تشریح شده است.

قضیه. مساحت رویه هر قطعه از کره برابر مساحت دایره‌ای است به شعاعی برابر با خطی از رأس قطعه مزبور تا نقطه‌ای بر دایره قاعده منطقه کره مورد بحث.



مساحت رویه πr^2

با بررسی کره مزبور، به مثابه رویه‌ای دورانی با محور تقارنی عمود بر صفحات قاطع آن، طبیعی است که پرسش معمول مذکور در فوق را، با طرح این پرسش که چه رویه‌های دورانی دیگری از ویژگی

چنانچه در بازه‌ای، $y = g(x)$ ، $y \equiv c$ ثابت خواهد بود، و رویه متناظر بر آن بازه، استوانه است. بنا به پیوستگی، اگر به ازای $x_0 \in [a, b]$ ، $g(x_0) \neq c$ ، آنگاه در بازه‌ای شامل x_0 ، $g(x) \neq c$ خواهد بود، و تفکیک متغیرها، چنین به دست خواهد داد:

$$\left[\left(\frac{c}{y} \right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} dy = \pm dx$$

با جایگذاری $u = c/y$ و انتگرالگیری به دست می‌آوریم:

$$\int \frac{cdy}{u^2 \sqrt{u^2 - 1}} = \pm \int dx$$

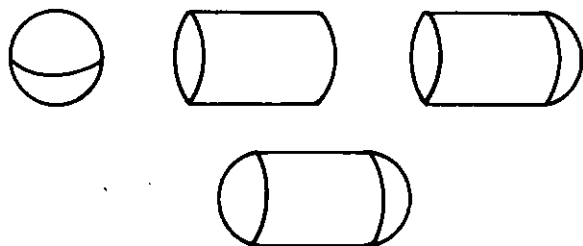
جانشینی مثلثاتی $u = \csc \theta$ ، به دست می‌دهد:

$$cu^{-1} \sqrt{u^2 - 1} = \pm x + k$$

یا

$$y^2 + (\pm x + k)^2 = c^2$$

از این صورت، روشن می‌شود که خم متناظر واقع بر I ، بخشی از نیم‌دایره‌ای است به شعاع c و مرکوز واقع در $(\pm k, 0)$. این موضوع، همراه با همواری g ، مستلزم این است که، به‌ازای $x_0 < x_1$ ، چنانچه $g(x_0) = c = g(x_1)$ ، آنگاه به‌ازای هر $x \in [x_0, x_1]$ ، $g(x) = c$ ، به این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که دوران خمی نامنفی و هموار رویه‌ای با ویژگی E.A.Z. به دست می‌دهد، اگر و تنها اگر رویه مزبور، کره، استوانه، «سیلوه» یا «کپسول» باشد.



تنها رویه‌های هموار دارای ویژگی E.A.Z.

همگی این چهار رویه را می‌توان به صورت مناطقی از یک کپسول توصیف کرد؛ کپسولی که استوانه‌ای است به ارتفاع $h \geq 0$ ،

کافی برای دارا بودن ویژگی E.A.Z. است. در نخستین راه حل‌مان، نشان خواهیم داد که شرط مزبور، در مورد خم هموار $g(t)$ ، لازم نیز می‌باشد.

فرض می‌کنیم $g(t)$ بر $[a, b]$ ، هموار و نامنفی است. به ازای h ی ثابت، انتگرال سطح رویه $S(x, h)$ فوق،

صورت $S(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$ را خواهد داشت، که در آن $f(t) = 2\pi g(t) \sqrt{1 + g'(t)^2}$ چنانچه رویه حاصل آمده از

$g(t)$ دارای ویژگی E.A.Z. باشد، به ازای h ی ثابت، $S(x)$ ثابت خواهد بود، بنابراین:

$$\frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx} \int_x^c f(t) dt + \frac{d}{dx} \int_c^{x+h} f(t) dt = 0$$

با به کار بردن قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، در می‌یابیم که به ازای هر $x \in [a, b-h]$ ، $f(x) = f(x+h)$ ، بنابراین $f(x)$ بر $[a, b]$ ، دوره‌ای است. از آن جا که این بحث، به ازای هر $h \in [0, b-a]$ برقرار است، ثابت بودن انتگرالده $f(t)$ مقرر می‌گردد.

حال، برای تعیین این‌که به ازای چه خمهای $y = g(x)$ ، انتگرالده $f(x)$ ثابت است، باید معادله دیفرانسیل زیر را حل کرد:

$$y \sqrt{1 + y'^2} = c$$

اگر $c = 0$ ، آنگاه $g(x) \equiv 0$ ، بنابراین می‌توان فرض کرد که $c \neq 0$. نتیجه می‌شود که به‌ازای هر x ، $y = g(x) \neq 0$ ، و با مربع کردن طرفین معادله و حل آن بر حسب y' ، به دست می‌آوریم:

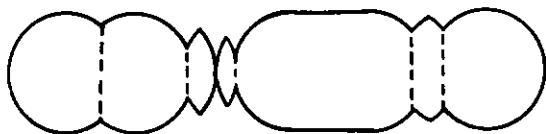
$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{y^2} - 1} \quad (1)$$

با g در بازه I ، سطح بزرگتری از منطقه‌ای به همان پهنای تولید شده با $c(x)$ دارد. بنابراین، به ازای هر x ، $g(x) \leq r$ ، که در این صورت، به ازای هر x_0 ، z_0 $g(x_0) = c(z_0)$ ، چنان که $g'(x_0) \neq c'(z_0)$ اگر $g'(x_0) \neq c'(z_0)$ ، آنگاه، چون در بالا، نتیجه می‌گیریم که $\varepsilon > 0$ ε وجود است، چنان که به ازای δ ، $|\delta| < \varepsilon$ ،

$$\left| 2\pi g(x_0 + \delta) \sqrt{1 + g'(x_0 + \delta)^2} - 2\pi c(z_0 + \delta) \sqrt{1 + c'(z_0 + \delta)^2} \right| > 0$$

و متناقض با اینکه g و c رویه‌هایی با مناطق همسطح تولید می‌کنند. بنابراین $g'(x_0) = c'(z_0)$ ، هرگاه $g(x_0) = c(z_0)$ ، نتیجه می‌شود که بر هر بازه‌ای که g وارونپذیر است، یعنی، بر هر بازه‌ای که $g'(x) \neq 0$ یا هم ارز آن، $g(x) \neq r$ ، g با تبدیل افقی بخشی از خم c ، سازگار است. استفاده از بخشی بر مبنای همواری، چنانچه در حل پیشین ارائه شد، نتیجه‌ای مبنی بر اینکه رویه تولید شده با g ، باید منطقه‌ای از یک کپسول باشد را به دست خواهد داد.

با نیم‌کره‌ای جفت شده به هر انتهای آن. در پی آن، معادله دیفرانسیل (۱) می‌تواند با جانشینی $u = y^2$ حل شود، که به معادله دیفرانسیل دیگری منجر خواهد شد که تنها با استفاده از قاعده توان، قابل انتگرالگیری است. همچنین، پاسخهای (۱) فوق، این حقیقت را بیان می‌دارند که پوش خانواده‌ای از پاسخهایی به معادله دیفرانسیلی از مرتبه اول، پاسخی به معادله دیفرانسیل نیز می‌باشد. پوش کره‌هایی به شعاع c ، به مرکز واقع در $(\pm k, 0)$ ، استوانه‌ای به مرکز c است. نتیجه می‌شود که اگر $g(x)$ خم تکه‌ای - هموار نامنفی پیوسته‌ای باشد، مولد رویه‌ای دورانی با ویژگی E.A.Z.، آنگاه رویه مزبور باید «زنجره‌ای از مهره‌هایی باشد که هر مهره منطقه‌ای از کپسولی به شعاع ثابت c است.



زنجره‌ای از مناطق یک کپسول

گذشته از اثبات مستقیمی که در بالا داده شد، باشهودی کافی، می‌توان بحث منحصربه‌فردی را تا نشان دادن این که مناطق یک کپسول، تنها رویه‌های هموار دارای ویژگی E.A.Z. اند، دنبال کرد. چون بخشی که در زیر می‌آید.

فرض می‌کنیم g خم نامنفی همواری بر $[a, b]$ بوده، مولد رویه‌ای دورانی با ویژگی E.A.Z.، و با همان تابع مساحت رویه تولید شده باشد، $S(h) = 2\pi rh$ ، آن چنان که کره مربوطه با $c(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ، اگر $g(x_0) > r$ ، آنگاه

$$2\pi g(x_0) \sqrt{1 + g'(x_0)^2} > 2\pi r = 2\pi c(x_0) \sqrt{1 + c'(x_0)^2}$$

و بنابه پیوستگی، $\varepsilon > 0$ وجود دارد، چنان که به ازای هر $x \in I = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [a, b]$

$$2\pi g(x) \sqrt{1 + g'(x)^2} > 2\pi c(x) \sqrt{1 + c'(x)^2}$$

که این متناقض خواهد بود با این که مساحت رویه هر منطقه تولید شده

نشریه انجمن فیزیک

به جای ستاره‌ها چه ارقامی می‌توان قرار داد تا این تساوی برقرار شود:

$$***4** \times 7 = 1742 * 56$$

ترجمه سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

جواب در صفحه ۹۶

نظریهٔ گراف

Discrete Mathematics
Stephen A. Wiitala
Associate Professor of Mathematics
Norwich University

ترجمهٔ غلامرضا یاسی پور

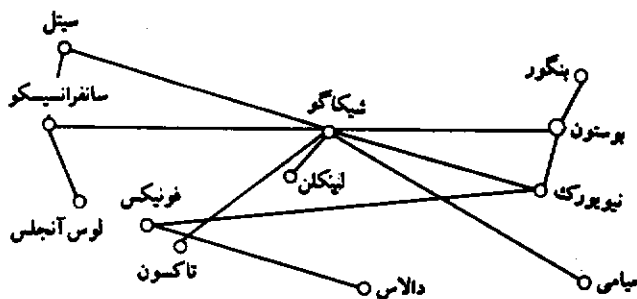
۱. گرافها چیستند؟

مفهوم گراف^۱ یکی از مفیدترین مفاهیم ریاضیات گسسته^۲ و یکی از جالب توجه ترین آنها از لحاظ ریاضی است. در واقع، تقریباً تمامی ما گرافها را گاه گاه ملاحظه کرده و به کار برده ایم. به عنوان مثال، شکل ۱، نقشهٔ مسیر خطوط هوایی X ، را در نظر می گیریم.

۴. اگر خطوط هوایی X تصمیم متوقف کردن تمام پروازهای از بوستون به نیویورک را بگیرد، باز هم می توان از بنگور به فونیکس رفت؟
۵. آیا می توان جمیع مسیرهای خط هوایی X را بدون دوبار گذشتن از یک مسیر طی کرد؟

مثال ۱.

طبیعی است که تعدادی سؤال در مورد نقشهٔ شکل ۱ مطرح شود.



شکل ۱. نقشهٔ خطوط هوایی

مثال ۲.

در این حالت شکل ۲ شبکه ای کامپیوتری^۴ را نمایش می دهد که در آن دایره ها، میکرو کامپیوترها^۵ را نمایش می دهند. مربعها، میکرو کامپیوترهایی را نمایش می دهند که برای دادن علامت^۶ از یک مدار^۷ به مدار دیگر، نیز برای پردازش داده ها^۸ به کار می روند. لوزی، کامپیوتر مرکزی^۹ را در قلب شبکه مشخص می کند، و خطوط، مدارهای واصل شبکه را نمایش می دهند.

شخصی که مایل به دسترسی داشتن به شبکه است یکی از مینی کامپیوترها را از میکرو کامپیوتر خود می گیرد و از طریق خطوط در دسترس برای ارتباط یافتن با کامپیوتر مطلوب تغییر مسیر می دهد.

۱. آیا کسی می تواند از میامی به دالاس برود؟

۲. برای رفتن از بوستون به لوس آنجلس چند بار باید هواپیما عوض کنیم؟

۳. اگر کارمندان فرودگاه شیکاگو اعتصاب کنند و فرودگاه بسته شود باز هم رفتن از بوستون به لوس آنجلس امکان پذیر است؟

تجريد ریاضی^{۱۱} را به شخص نشان می دهد.

کشف این مطلب که یک نظریه واحد، اطلاعاتی در مورد کاربردهای این همه متفاوت به دست می دهد هیجان آور است. کلید به کار انداختن طرح کلی مورد نظر، توصیف به قدر کفایت محتاطانه دستگاه ریاضیمان به چنان طریقی است که آن را بر حسب نظریه قبلی قابل درک، و در عین حال در نواحی ای که مایل به استفاده از آن در آنها هستیم فایده مند کند. در مورد نظریه گراف، اصطلاحات^{۱۲} و نمادهای^{۱۳} نظریه مجموعه ها^{۱۴} به هدفمان کمک می کنند.

۲. مفاهیم اصلی و تعاریف

رأسها و یالها

مفهوم گراف مفهومی ساده است. در این مورد آنچه که نیاز به انجام دادن آن داریم تنظیم این مفهوم است که نقاطی^{۱۵} (موسوم به رؤوس^{۱۶}) داریم که به طور مستقیم توسط قطعه خطهایی^{۱۷} (موسوم به یالها^{۱۸}) به نقاط دیگر وصل شده اند. اغلب موضوعهای جالب توجه نظریه گراف شامل جریان ردیابی دنباله های یالها (موسوم به مسیرها^{۱۹}) ای یک گراف است. در این صورت اهمیت دارد که در تعاریفمان چنان دقیق باشیم که ابهامی که بتواند در بحث مربوط به این موضوع رخ دهد موجود نباشد. تعریفمان از گراف از همه لحاظ جامع^{۲۰} نیست، زیرا به بعضی از وضعیات ممکن مهم (چون یالهای یک راهه^{۲۱}، طوقه رأس^{۲۲}، یا بیش از یک واصل یک زوج رأس) نمی پردازد؛ اما شروع بررسی، مفاهیم اساسی گرافها را ممکن می سازد.

تعاریف

گراف زوج مرتب^{۲۳} (V, E) ای است که در آن V مجموعه ای موسوم به مجموعه رأسی^{۲۴} و E مجموعه ای شامل زیر مجموعه های با دو عضو V است. مجموعه E مجموعه یالی^{۲۵} نام دارد، و چنین می گوئیم که a و b توسط یک یال وصل شده اند اگر $\{a, b\}$ متعلق به E باشد.

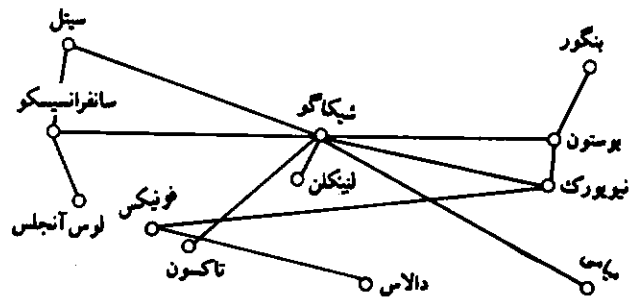
دستگاه می تواند برای فرستادن پیام بین میکرو کامپیوترها به کار رود، یا استفاده کننده می تواند برای انجام پردازش اطلاعاتی^{۱۰} به یکی از کامپیوترهای بزرگتر رجوع کند. در این مورد نیز به طور طبیعی بعضی سؤالا مطرح می شوند:

۱. آیا میکرو کامپیوتر واقع در سینتل می تواند پیامی به میکرو کامپیوتر واقع در میامی بفرستد؟

۲. چند تغییر مسیر برای گرفتن پیام فرستاده شده از بوستون به لوس آنجلس لازم است؟

۳. اگر مینی کامپیوتر واقع در شیکاگو خاموش شود، می توان باز هم پیامی از بوستون به لوس آنجلس فرستاد؟

۴. اگر مدارهای بین بوستون و نیویورک از کار بیفتند، می توان باز هم پیامی از بنگور به فونیکس فرستاد؟



شکل ۲. شبکه کامپیوتری

۵. آیا انتشار سلسله ای از علائم که به هر مدار واقع در شبکه دقیقاً یکبار برسد امکان پذیر است؟

واضح است که سؤالهای فوق تنها سؤالهایی که شخص می تواند در مورد تصاویر مذکور مطرح کند، یا شاید حتی مهمترینشان، نیست، اما آنها برد مفاهیم داخل در نظریه گراف را مطرح می کنند. جالب است که توجه داشته باشیم که می توان از شیء ریاضی یکسانی در بررسی کاربردهایی در میدانی به همان اندازه عدم ارتباط ظاهری حمل و نقل و ارتباطات استفاده کرد. این حقیقت که چنین کاربردهای متنوعی را می توان با استفاده از یک نظریه بررسی کرد جنبه های مفید

ریاضی^{۳۰} در ارتباط با G را به دست می دهد. توجه داشته باشید که بازسازی توصیف قبلی یک گراف از نمایش تصویری آن آسان است. در نتیجه، معمولاً جز در مواردی که سروکار داشتن با جنبه های فنی یا نظری^{۳۱} نظریه گراف مورد نیاز باشد، با نمایش تصویری گرافها کار می کنیم.

مسیرها

تعریف

مسیر دنباله ای از رؤوس یک گراف است که در آن هر زوج رأس متوالی^{۳۲} یالی از آن گراف باشد.

در گراف G مثال ۳، $abcd$ یک مسیر است، زیرا، $\{a,b\}$ ، $\{b,c\}$ ، و $\{c,d\}$ تماماً یالهای G اند. گفته می شود که یک مسیر سری از اولین رأس فهرست شده به آخرین رأس فهرست شده است. نیز ممکن است که مسیر را به عنوان دنباله ای از یالها که در آن هر زوج یال متوالی^{۳۳} رأسی مشترک^{۳۴} دارند، تعریف کنیم. این تعریف جدید نیز کاملاً مفید است، و ما غالباً، هر جا که مناسب باشد، از یکی به دیگری می رویم. در این صورت مسیر $abcd$ ی موصوف در فوق، با توجه به این نظرگاه، به مسیر $\{c,d\}$ $\{b,c\}$ $\{a,b\}$ تبدیل می شود. تعاریف زیر بعضی از اصطلاحهای مهم تکمیلی مربوط به مسیرهای ارتباط دهنده رؤوس (یالها) را به دست می دهند.

تعاریف

مسیر ساده^{۳۵} مسیری است که در آن هیچ یالی تکرار نشده است. مسیر مقدماتی^{۳۶} مسیری است که در آن هیچ رأسی تکرار نشده است. مدار^{۳۷} مسیری است که از یک رأس آغاز و به همان رأس انجام می کند.

مدار ساده^{۳۸} مسیری ساده است که مدار است.

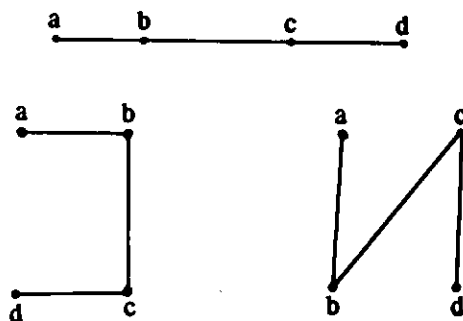
دور^{۳۹} مداری است که در آن رأس اولیه^{۴۰} دو بار رخ می دهد و هیچ رأس دیگری تکرار نمی شود.

گاهی به اعضای V ، بخصوص در کاربردهایی از نظریه گراف که رجوع به شبکه های ارتباطاتی^{۴۱} دارند، به عنوان گره ها^{۴۲} اشاره می کنیم.

در تصور گراف یا نمایش نموداری آن، مجموعه V را شامل نقاط یا رؤوس (مانند شهرها یا کامپیوترهای مثالهامان در بخش ۱) در نظر می گیریم، و سپس کمانهایی بین رؤوسی که با یالی به هم وصل شده اند، رسم می کنیم.

مثال ۳.

نمودار $G = (V,E)$ را، که در آن $V = \{a,b,c,d\}$ و $E = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}\}$ ، در نظر می گیریم. این نمودار را می توان به هریک از سه طریق نشان داده شده در شکل ۳ نمایش داد.



شکل ۳.

باید توجه داشته باشیم که هر چند نمودارهای فوق متفاوت به نظر می رسند، تماماً دارای خواص یکسان اند؛ در واقع، اگر دو نمودار زیر را مستقیم کنیم، نتیجه کار در هر حال نمودار واقع در بالا خواهد بود. در هر نمودار می توان توسط مسیری که از b به c می رود از a به d رفت؛ و اگر هر یک از قطعات موجود شکسته شود، دیگر رفتن از a به d ممکن نخواهد بود.

■

چنین می گویم که هریک از نمودارهای واقع در شکل ۵.۳ نمایش تصویری^{۴۸} G است، زیرا هریک نمایش بصری^{۴۹} خواص

اثبات:

آن را به عنوان تمرین وامی گذاریم.

قضیه ۲:

فرض می‌کنیم $G = (V, E)$ و R چون در قضیه ۱ تعریف شده باشد. در این صورت G مرتبط است اگر و تنها اگر یک طبقه هم‌ارزی^{۵۰} منفرد در مورد نسبت R موجود باشد.

اثبات:

در اثبات گزاره‌ای به صورت $p \leftrightarrow q$ ، باید هم $p \rightarrow q$ هم $q \rightarrow p$ را اثبات کنیم. کار را با این فرض که G مرتبط است آغاز می‌کنیم. در مورد هر زوج رأس متمایز a و b مسیری از a به b موجود، و به این ترتیب aRb راست است. از آنجا که به ازای جمیع مقادیر a ، aRa نیز صادق است، داریم: $\forall x \forall y (xRy)$ ، که به این معنی است که V تنها طبقه هم‌ارزی R است. اگر تنها یک طبقه هم‌ارزی R موجود باشد و x و y رؤوسی متمایز باشند، نتیجه می‌شود که xRy ، زیرا x و y در طبقه هم‌ارزی یکسانی قرار دارند. از آنجا که x و y مساوی نیستند، باید مسیری از x به y موجود باشد. از آنجا که x و y دلخواه بودند، مسیر واصل هر دو رأس متمایز از G ای وجود دارد، و بنابراین G مرتبط است.

زیوگرافها

تعاریف

زیوگراف^{۵۱} (V, E) گراف (V', E') ی است که در آن V' زیر مجموعه‌ای^{۵۲} از V و E' شامل یالهایی واقع در E است که تنها رؤوس V' را به هم وصل می‌کنند. اگر S زیر مجموعه‌ای از V باشد، زیوگراف حاصل از S ،^{۵۳} گرافی با مجموعه رأسی S و مجموعه یالی شامل جمیع یالهایی از G است که رؤوس S را به هم وصل می‌کنند.

در این مرحله لازم است که به اخطار زیر توجه داشته باشیم. اصطلاحها و نمادهای نظریه گراف بسیار متنوع‌اند. عباراتی^{۴۱} که در این جا به کار برده‌ایم عباراتی هستند که در کتب دیگر ملاحظه‌شان کرده‌ایم، اما این عبارات به هیچ وجه استاندارد نیستند. زیرا به علت این که نظریه گراف زمینه ریاضی نسبتاً جدیدی است، اصطلاحهای آن، وقت کافی برای استاندارد شدن نداشته‌اند. عباراتی چون «ردپا^{۴۲}»، «خط سیر^{۴۳}»، «سفر^{۴۴}» و غیره غالباً در کتب نظریه گراف و مقالات ریاضی^{۴۵} به چشم می‌خورند، معانی آنها می‌توانند منطبق بر معانی‌ای که برای عبارات دیگر داده‌ایم باشند (یا نباشند). به این ترتیب هنگام خواندن مطلبی در مورد نظریه گراف، برای اطمینان یافتن از درک معنی مورد نظر نویسنده از یک عبارت، نیازمند دقت بسیاریم. اصطلاحهای زیر استانداردترند.

تعاریف

یک نمودار مرتبط یا همبند^{۴۶} است اگر با معلوم بودن هر دو رأس متمایزی مسیری از یکی به دیگری موجود باشد. گرافی را که مرتبط نیست فامو تبط یا ناهمبند^{۴۷} می‌گویند.

در زبان روزمره گرافی را مرتبط می‌گوئیم که به صورت یک قطعه «به هم وصل» باشد. در حالت مربوط به نقشه خط سیر هوایی، کلمه مرتبط به این معنی است که هر دو شهر واقع در سیستم مزبور می‌توانند توسط دنباله‌ای از پروازهای تنها در ارتباط با آن خط هوایی، به هم وصل شوند. و در حالت مربوط به شبکه ارتباطاتی، کلمه مزبور به این مفهوم است که هر دو گروه واقع در سیستم می‌توانند با یکدیگر در ارتباط باشند. اگر گرافی نامرتبط باشد، در این صورت به «قطعاتی» تقسیم می‌شود که آنها را مؤلفه^{۴۸} می‌نامیم.

قضیه ۱:

فرض می‌کنیم $G = (V, E)$ یک گراف باشد. نسبت R بر V را با xRy تعریف می‌کنیم اگر و تنها اگر $x = y$ یا مسیری از x به y موجود باشد. R نسبتی هم‌ارزی^{۴۹} است.

اثبات:

اثبات قضیه ۳ بسیار شبیه اثبات نیمه دوم قضیه ۲ است. فرض می‌کنیم a و b رؤوس متمایزی در C باشند. در این صورت aRb ، و بنابراین مسیر $x_1b, x_2, \dots, x_nb$ از a به b موجود است. در واقع، به ازای جمع i ها، aRx_i (چرا؟)، بنابراین هر x_i نیز در C هست. به این ترتیب مسیر مزبور مسیری از a به b واقع در C است.

تعریف

مؤلفه یک گراف زیرگرافی حاصل از طبقه هم ارزی نسبت R موصوف در قضیه ۱ است.

نتیجه: ۵۶

یک گراف مرتبط است اگر و تنها اگر تنها یک مؤلفه داشته باشد.

اثبات:

به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

نتیجه:

مؤلفه یک گراف زیرگرافی مرتبط است.

اثبات:

به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۳ و دو نتیجه‌اش نشان می‌دهند که تعریف مؤلفه، چنان که در فوق مطرح شده، واقعاً زیرگراف مرتبط ماکسیمال را به دستمان می‌دهد. این زیرگراف مرتبط گراف اصلی است که به آن نمی‌توان چیز بیشتری از گراف اصلی بدون نامرتب ساختن آن زیرگراف افزود.

اگر G گراف موصوف در مثال ۲ باشد. $V = \{a, b, c, d\}$ و $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$ گراف (V', E') که در آن $V' = \{a, b, c\}$ و $E' = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ زیرگرافی از G و در واقع، زیرگراف فراهم شده توسط مجموعه $\{a, b, c\}$ است. به بیان ساده‌تر^{۵۴}، زیرگراف، گرافی است که دارای بعضی از رؤوس گراف اصلی و بعضی از یالهای گراف اصلی است. در این جا G' زیرگرافی از G است.



مؤلفه‌ها:

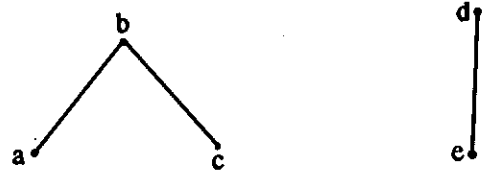
یکی از زمینه‌های جالب در بررسی یک گراف تعیین این مطلب، که چون آن گراف مرتبط نباشد چه اتفاقی رخ می‌دهد، است. مفهوم مؤلفه برای کمک به بحث در مورد این وضعیت مطرح شده و درک آن نسبتاً آسان است. مؤلفه به عنوان زیرگرافی از گراف اصلی، که مرتبط و تا حد امکان بزرگ باشد، در نظر گرفته می‌شود. در واقع، غالباً این تعریف به کار می‌رود که مؤلفه یک گراف، زیرگرافی مرتبط و ماکسیمال^{۵۵} است، و بسیار ممکن است که مایل باشیم مؤلفه یک گراف را برحسب این عبارات در نظر بگیریم. گرافی که مرتبط نیست به تعدادی مؤلفه تقسیم می‌شود. بحث زیر تعریف دیگری از مؤلفه را به دست می‌دهد، و به این علت جالب توجه است که موجب می‌شود به مفاهیم طبقات هم ارزی یک نسبت هم ارزی برگردیم.

قضیه ۳:

اگر C طبقه هم ارزی نسبت R موصوف در قضیه ۱ باشد، در این صورت زیرگراف حاصل از C ، مرتبط است.

مثال ۴:

گراف G رسم شده در زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:



زیرگراف حاصل از رؤوس a, b, c مؤلفه‌ای از G است. باید توجه داشته باشیم که این زیرگراف مرتبط است، اما جهد در افزودن چیز بیشتری از G به آن را نامرتب می‌کند. زیرگراف با رؤوس b و c نیز مؤلفه‌ای از G است. مؤلفه‌های مزبور «بزرگترین» قطعات مرتبط گراف مورد بحث هستند.

درجات رؤوس

تعاریف

یک رأس بر یک یال واقع^{۵۷} است اگر آن رأس عضوی از آن یال باشد. (از لحاظ تصویری، رأسی واقع بر یک یال است اگر یکی از دو سر آن یال باشد.)

درجه^{۵۸} یک رأس تعداد یالهایی است که آن رأس بر آنها واقع است. (در بعضی حالات مناسب است که مجاز کنیم گرافها طوقه، یا یالهایی به صورت $\{a, a\} = \{a\}$ داشته باشند. طوقه به صورت دوبار واقع بودن یالی بر رأس منفردش در نظر گرفته می‌شود زیرا این رأس به صورت هر دو سر آن به کار می‌رود. گرافهای ما معمولاً بدون طوقه‌اند.)

قضیه ۴:

در هر گراف، مجموع درجات رؤوس دو برابر تعداد یالهاست.

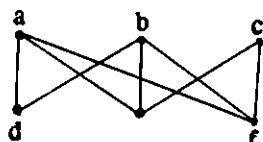
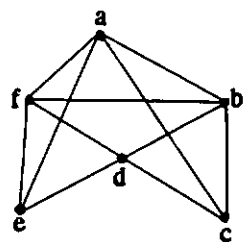
اثبات:

در این مورد تمام چیزی که باید به آن توجه کنیم این است که، هنگام محاسبه مجموع درجات رؤوس، هر یال باید دوبار - به ازای هر سرش یکبار - به حساب آید. در واقع، آنچه هم‌اکنون مطرح کردیم احتمالاً کافی است، اما برای توضیح تکنیک اثباتی متعارف در نظریه گراف، این اثبات را صوری^{۵۹} تر می‌کنیم. برای انجام این کار با استفاده از استقرا عمل می‌کنیم. می‌انگاریم که $P(n)$ این گزاره که مجموع درجات رؤوس گرافی با n یال $2n$ است، باشد.

مرحله مبنایی^{۶۰}. اگر گرافی دارای یال نباشد، در این صورت درجه هر رأس صفر است و مجموع مورد نظر نیز صفر است، که دقیقاً گزاره $P(0)$ می‌باشد.

مرحله استقرایی^{۶۱}. فرض می‌کنیم $P(k)$ ، و نشان می‌دهیم که $P(k+1)$ از آن نتیجه می‌شود. برای انجام این کار، گراف G با $k+1$ یال را در نظر می‌گیریم، در این صورت نیاز به نشان دادن این داریم که درجات رؤوس آن $2k+2$ است. برای انجام این عمل، گراف G' را، که به استثنای این که یکی از یالهایی را که متعلق به G است ندارد، همان G است، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که یال مفقوده^{۶۲} $\{a, b\}$ باشد. مجموع درجات رؤوس G' ، بنا به این فرض که $P(k)$ صادق است (فرض استقرا^{۶۳})، زیرا G' دارای k یال است، برابر $2k$ می‌باشد. اما، برای ساختن G از G' ، تمام آنچه که لازم است برگرداندن یال $\{a, b\}$ به G' است. این کار درجه رأس a را به اندازه ۱ و درجه b را به اندازه ۱ واحد افزایش داده، به این ترتیب به مجموع درجات $2k+2$ واحد اضافه کرده مجموع درجات جمیع رؤوس را به $2k+2$ می‌رساند، و به این ترتیب مرحله استقرایی تکمیل می‌شود.

اثبات فوق گرچه طولانی است، اما تکنیک بسیار مفیدی را در مورد اثباتهای استقرایی^{۶۴} واقع در نظریه گراف، یعنی حذف چیزی برای برگشتن به فرض استقرا و بعد بازگرداندن آن برای به کار آمدن گزاره مورد نظر در حالت بالاتر بعدی، به دست می‌دهد. از آن جا که متغیر^{۶۵} n واقع در گزاره $P(n)$ تعداد یالهاست، اثباتی چون اثبات



فوق را گاهی استقرا بر تعداد یالها می‌نامند. تکنیکهای مشابهی در مورد استقرا بر تعداد رأسها به کار می‌روند. تعداد معتناهایی از قضایای مربوط به نظریهٔ گراف به این شیوه^{۶۶} اثبات می‌شوند. اکنون به بیان نتیجه‌ای از این قضیه که بعداً به کار می‌آید می‌پردازیم.

نتیجه:

در هر گراف، تعداد رؤوسی که درجهٔ فرد^{۶۷} دارند عددی زوج^{۶۸} است.

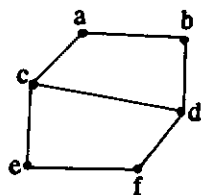
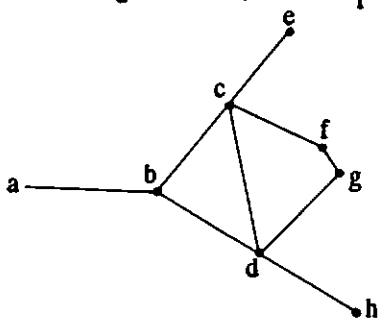
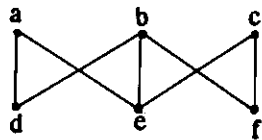
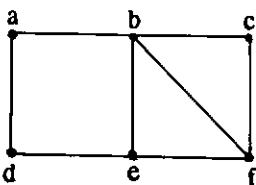
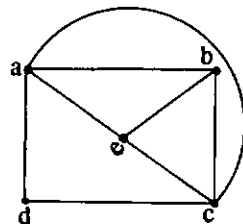
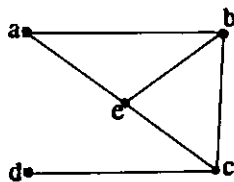
اثبات:

مجموع درجات رؤوس عددی زوج است، و برای این که چنین شود، تعداد جمله‌های فرد واقع در این مجموع نمی‌تواند عددی فرد باشد.

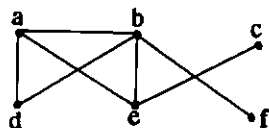
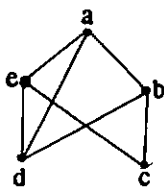
مجموعهٔ مسأله‌ای ۲:

کارهای زیر را در مورد گرافهای ارائه شده در مسائل ۱ تا ۴، انجام دهید:

- توصیفی صوری از گراف مربوطه (به صورت زوج مرتبی از مجموعه‌ها) بنویسید.
- درجهٔ هر رأس را بیابید.
- تعداد یالها را محاسبه کنید.
- قضیهٔ ۱ را تحقیق کنید.

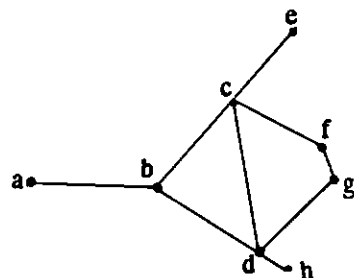
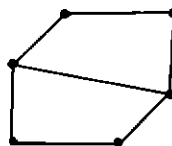


- کارهای زیر را در مورد هر گراف واقع در مسائل ۹ تا ۱۲ بیابید:
- الف) مداری را بیابید که دور نباشد.
- ب) مداری را بیابید که ساده نباشد.
- ج) مداری ساده بیابید.



۲۱. نتیجه اول قضیه ۳ را اثبات کنید (یک گراف مرتبط است اگر و تنها اگر یک مؤلفه داشته باشد).

۲۲. نتیجه دوم قضیه ۳ را اثبات کنید (مؤلفه یک گراف زیرگرافی مرتبط است).



یادداشتها

1. Graph
2. Discrete Mathematics
3. General Theory of Graphs
4. Computer Network
5. Microcomputers
6. Signal
7. Circuit
8. Data
9. Mainframe Computer
10. Information Processing
11. Mathematical Abstraction
12. Terminology
13. Notation
14. Set Theory
15. Points
16. Vertices
17. Line Segments
18. Edges
19. Paths
20. Inclusive
21. One - Way Edges
22. Loop on a Vertex
23. Ordered Pair
24. Vertex Set
25. Edge Set
26. Communications Networks
27. Nodes
28. Pictorial Representation
29. Visual Representation

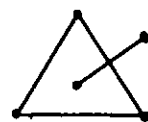
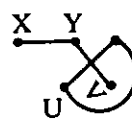
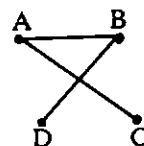
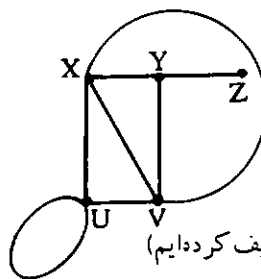
۱۳. با استفاده از گراف مسئله ۵، زیرگراف حاصل از مجموعه رئسی $\{a, b, c, f\}$ را بیابید.

۱۴. با استفاده از گراف مسئله ۸، زیرگراف حاصل از مجموعه رئسی $\{a, c, d, f\}$ را بیابید.

۱۵. با استفاده از گراف مسئله ۷، هر یک از زیرگرافهای حاصل از زیرمجموعه‌های مجموعه رئسی حاصل از حذف رئسی منفرد از مجموعه رئسی مزبور را بیابید.

۱۶. با استفاده از گراف مسئله ۶، دستورهای مسئله ۱۵ را تکرار کنید.

۱۷. اشکال زیر را در نظر می‌گیریم.



(الف) کدام شکل نمایش گراف (آن‌چنان که آن را تعریف کرده‌ایم) است؟

(ب) کدام یک نمایش گراف مرتبط است؟

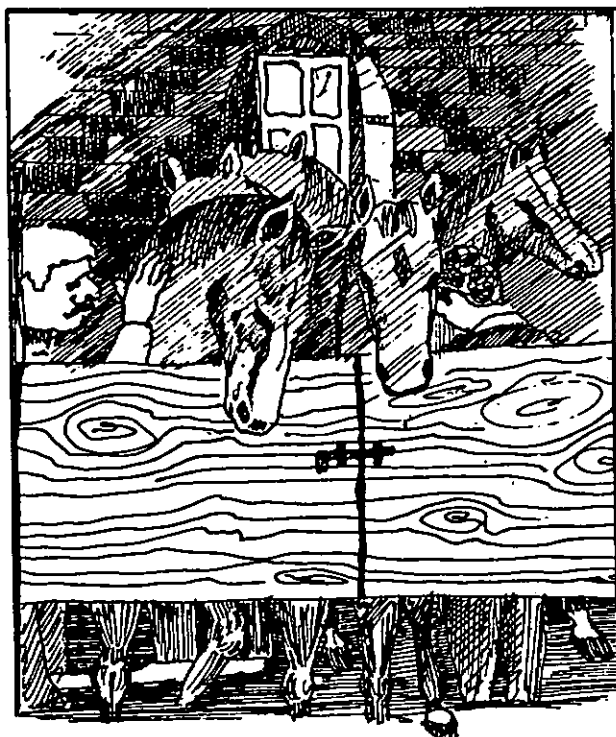
(ج) در مورد گرافهایی که مرتبط نیستند، مؤلفه‌های آنها را مشخص کنید.

۱۸. ثابت کنید اگر مسیری از a تا b در گرافی موجود باشد، آنگاه مسیری مقدماتی از a تا b وجود دارد.

۱۹. قضیه ۱ را ثابت کنید.

۲۰. گزاره واقع در اثبات قضیه ۳ را که بر این است که هر x_i ای مشمول در C می‌باشد، توجیه کنید.

30. Mathematical Properties
31. Technical or Theoretical Aspects
32. Successive Pair of Vertices
33. Successive Pair of Edges
34. Vertex in Common
35. Simple Path
36. Elementary Path
37. Circuit
38. Simple Circuit
39. Cycle
40. Initial Vertex
41. Terms
42. Trail
43. Route
44. Journey
45. Mathematical Papers
46. Connected
47. Disconnected
48. Components
49. Equivalence Relation
50. Equivalence Class
51. Subgraph
52. Subset
53. Induced by
54. Informally
55. Maximal Connected Subgraph
56. Corollary
57. Incident
58. Degree
59. Formal
60. Basic Step
61. Induction Step
62. Missing Edge
63. Induction Hypothesis
64. Induction Proofs
65. Variable
66. Manner
67. Odd
68. Even Number



فهرست الفبايشه ۲

در طویله‌ای چند نفر آدم با چند رأس اسب وجود دارند. آنها
مجموعاً ۲۲ سر و ۷۲ پا دارند. چند نفر آدم و چند نفر اسب در
آن جا هستند؟

ترجمهٔ سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

جواب در صفحهٔ ۹۶

اصل حجره‌ها

● مهدی نساجی، سال سوم دبیرستان

در ریاضیات، اصولی وجود دارند که گرچه به نظر بسیار ساده و بدیهی می‌آیند، اما در مواقع حساس به کمک ریاضی‌دان آمده، بعضاً باعث حل مسائل مشکلی می‌شوند. به عنوان مثال می‌توانیم به اصول ضرب و رد و شمول اشاره کنیم. ذیلاً به یکی از این اصول بدیهی که در حل مسائل ما را یاری می‌کند، توجه می‌کنیم.

اصل لانه کبوتری (لانه زنبوری)

دکتر علی‌رضا جمالی در مجله رشد ریاضی شماره ۱۷ تعریف آن را چنین آورده است: «فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند و $(m < n)$ در این صورت اگر n شیئی را در m حجره قرار دهیم به هر صورت اعم از این که حجره‌ها خالی بماند یا نه، حداقل یکی از این حجره‌ها حاوی دو شیء یا بیشتر از این اشیاء خواهد بود».

چون این تعبیر را می‌توان برای کبوترها یا زنبورها و لانه‌هایشان هم داشت لذا به آن اصل لانه کبوتری و یا لانه زنبوری هم می‌گویند. حال می‌خواهیم چند مسأله را با توجه به این اصل حل کنیم:

مسأله اول: اگر در یک میهمانی ۴۰۰ نفر وجود داشته باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت که حداقل ۲ نفر از آنها در یک روز به دنیا آمده‌اند؟

حل: بلی، زیرا اگر n را تعداد افراد و m را تعداد روزهای سال بگیریم چون $n = 400 < 365 = m$ پس طبق اصل حجره‌ها حداقل دو نفر وجود دارند که در یک روز به دنیا آمده‌باشند مثلاً در روز سوم دی ماه.

به مسأله بعد که شبیه همین مسأله است توجه کنید:

مسأله دوم: در مجموعه‌ای متشکل از ۸ نفر، حداقل دو نفر

موجودند که روز تولد آنها در یکی از روزهای هفته مثلاً شنبه است. (حل برعهده خواننده می‌باشد).

مسأله سوم: اثبات کنید حداقل دو درخت در دنیا وجود دارند که تعداد برگهایشان مساوی است (باید توجه داشت که تعداد برگهای پربرگترین درخت جهان از تعداد کل درختان جهان کمتر است که واقعاً هم چنین است).

حل: m عبارت است از عدد برگهای درختی که بیشترین تعداد برگها را در میان مجموعه همه درختان داراست. ضمناً عدد همه درختان روی زمین را n در نظر بگیریم. با توجه به فرض $m < n$ ، پس بنابر اصل حجره‌ها حداقل دو درخت وجود دارند که تعداد برگهایشان یکی است.

مسأله چهارم: اثبات کنید بر روی زمین حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد موهای سرشان یکی می‌باشد.

(می‌دانیم که تعداد موهای پرموترین انسان (حدود ۳۰۰,۰۰۰ تار مو) از تعداد کل انسانها (حدود ۵,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ نفر) کمتر می‌باشد).

حل: این مسأله همان مسأله قبل است که فقط نوع طرح آن تغییر کرده است.

مسأله پنجم: یک گله گاو شامل ۷ رأس گاو، به رنگهای قهوه‌ای، سیاه، و سفید می‌باشد. اگر گاوها متعلق به دو نفر باشند ثابت کنید یکی از این دو نفر حداقل دارای دو گاو هم رنگ می‌باشد.

حل: این گاوها را به هر طریق که بین این دو نفر تقسیم کنیم، همواره یک نفر وجود خواهد داشت که حداقل چهار گاو متعلق به اوست. (به تقسیم‌بندی زیر توجه کنید).

باقیمانده‌هایشان با هم برابر است پس $r' = r''$:

$$a_i = k' \cdot n + r'$$

$$a_j = k'' \cdot n + r'' \Rightarrow a_i - a_j = (k' - k'') \cdot n$$

$$r' = r'' \quad k' - k'' = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_i - a_j = k \cdot n$$

مسئله هفتم: عدد طبیعی n مفروض است ثابت کنید یک عدد طبیعی با ارقام صفر و یک موجود است (در مبنای ده) که بر n قابل قسمت می‌باشد.

حل: $n + 1$ عدد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$0, 1, 11, 111, \dots, \frac{111\dots 1}{n}$$

بر طبق مسئله قبل حداقل ۲ عدد از بین این عددها مانند a و b ($a > b$) موجودند که تفاضلشان بر n بخش پذیر است. واضح است که $a - b$ واجد خاصیت حکم مسئله است، یعنی فقط از ارقام صفر و یک تشکیل شده است، پس یک عدد طبیعی با ارقام صفر و یک موجود است که بر n قابل قسمت می‌باشد.

مسئله هشتم: ثابت کنید در یک میهمانی اگر n نفر حضور داشته باشند حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد دوستانشان با هم برابر است. (اگر A با B دوست باشد B هم با A دوست است).

حل: کسی که کمترین دوست را دارد تعداد دوستانش صفر است و کسی که بیشترین دوست را دارد تعداد دوستانش $n - 2$ می‌باشد چون او به غیر از خودش و کسی که هیچ دوست ندارد با بقیه دوست است.

$$0, 1, 2, \dots, n - 2$$

باتوجه به رشته فوق افراد این میهمانی $n - 1$ نوع دوست می‌توانند داشته باشند در صورتی که n نفرند پس طبق اصل حجره‌ها دو نفر وجود دارند که تعداد دوستانش برابر است.

مسئله نهم: (المیاد جهانی سال ۱۹۷۲) مجموعه‌ای از عددهای دو رقمی با ده عضو متمایز در دستگاه عددنویسی دهدهی مفروض است. ثابت کنید که همیشه می‌توان دو زیر مجموعه جدا از هم از این مجموعه انتخاب کرد که مجموع عضوهای آنها با هم برابر باشند.

شخص A	شخص B
۱	۶
۲	۵
۳	۴
۴	۳
۵	۲
۶	۱

می‌بینیم که در هر حالت همواره یک نفر حداقل دارای ۴ رأس گاو است.

پس چون یک نفر در هر حالت حداقل دارای چهار گاو است و سه نوع رنگ موجود است، پس بنابراین حجره‌ها حداقل دو گاو هم‌رنگ متعلق به یکی از آنها می‌باشد.

مسئله ششم: فرض کنیم که $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ مجموعه‌ای متشکل از $n + 1$ عدد طبیعی باشد، ثابت کنید در این مجموعه حداقل دو عدد مانند a_i و a_j ($i \neq j$) وجود دارد که:

$$a_i - a_j = k \cdot n \quad (k \in \mathbb{Z})$$

حل: باتوجه به قاعده تقسیم داریم:

$$a_i = k' \cdot n + r'$$

$$a_j = k'' \cdot n + r'' \quad (k', k'' \in \mathbb{Z}, 0 \leq r', r'' < n)$$

می‌دانیم که r' و r'' به ترتیب باقیمانده‌های تقسیم دو عدد a_i و a_j بر n می‌باشند، حال اگر ما بتوانیم اثبات کنیم که در این مجموعه حداقل دو عدد مثل a_i و a_j وجود دارند که دارای باقیمانده‌های یکسان می‌باشند مسئله حل می‌شود.

می‌گوییم ما $n + 1$ عدد طبیعی داریم که اگر تمامی عددهای این مجموعه را بر n تقسیم کنیم بزرگترین باقیمانده، $n - 1$ و کوچکترین باقیمانده، صفر خواهد بود.

$$\text{رشته باقیمانده‌ها } 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

تعداد باقیمانده‌ها n است لذا تعداد عددهای مجموعه از تعداد باقیمانده بیشتر است؛ به عبارت دیگر $n < n + 1$ ، پس مطابق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارند مانند a_i و a_j که

را نقض می‌کند و درستی حکم اثبات می‌گردد.

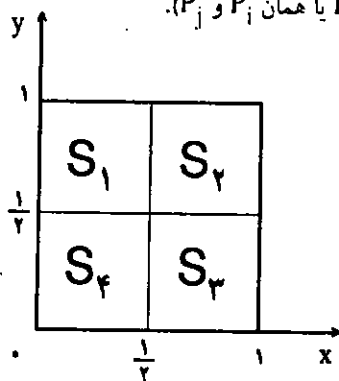
مسئله یازدهم: مجموعه‌ای شامل ۱۳۶۹ عدد طبیعی است، ثابت کنید می‌توان زیر مجموعه‌ای غیر تهی از این مجموعه جدا کرد که مجموع عضوهای آن بر ۱۳۶۹ بخش پذیر باشد.

حل: این مسئله از مسائل المپاد آزمایشی ریاضی دبیرستان امام صادق علیه السلام در سال ۱۳۶۹ انتخاب شده است که حالتی خاص از مسئله قبل می‌باشد و حل آن در حالت کلی n بررسی شده است.

مسئله دوازدهم: مربع S به طول واحد مفروض است، در داخل این مربع پنج نقطه $P_1, P_2, \dots, P_5$ و P_6 را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که d_{ij} فاصله P_i و P_j باشد. ثابت کنید حداقل زوجی از این نقاط

مانند: P_i و P_j موجودند ($i \neq j$) به طوری که $d_{ij} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

حل: مجموعه نقاط داخل ناحیه S را به چهار مجموعه جدا از هم مانند شکل افزای می‌کنیم. چون ما مربع را به چهار مربع متمایز از هم تقسیم کرده ایم، پس بنا بر اصل حجره‌ها دو نقطه از پنج نقطه $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ باید در یکی از زیر مجموعه‌های S_1, S_2, S_3, S_4 باشند (مثلاً P_1 و P_2 یا همان P_i و P_j).



می‌دانیم d_{ij} بیشترین مقداری که می‌تواند پیدا کند کمتر از قطر

است پس با توجه به رابطه فیثاغورس، $d_{ij} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

حال آیا حکم فوق با تبدیل $\frac{1}{\sqrt{2}}$ به عدد کوچکتر باقی می‌ماند؟ (اثبات برعهده خواننده می‌باشد).

حل: می‌دانیم مجموعه n عضوی $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ دارای 2^n زیر مجموعه است بنابراین مجموعه مفروض دارای $1024 = 2^{10}$ زیر مجموعه خواهد بود. عددهای مجموعه $S' \subset S$ همگی دو رقمی اند بنابراین از ۹۹ بزرگتر نیستند. به این ترتیب مجموع عضوهای هر زیر مجموعه نمی‌تواند از 99×10 یعنی ۹۹۰ بیشتر باشد. (در واقع مجموع عددهای مجموعه S' از این عدد هم کمتر است، بیشترین مجموع وقتی به دست می‌آید که ده عدد عضو مجموعه S' عددهای پشت سر هم از ۹۰ تا ۹۹ باشند که در این صورت مجموع آنها ۹۴۵ خواهد بود). چون هر یک از ۹۹۰ یا بهتر بگوییم ۹۴۵ مجموع ممکن است به یکی از ۱۰۲۴ زیر مجموعه متعلق باشند، بنا بر اصل حجره‌ها دست کم دو زیر مجموعه S'_i و S'_j وجود دارند که مجموع عضوهای آن برابرند و این حکم مسئله را اثبات می‌کند.

مسئله دهم: (المپاد کشور انگلیس سال ۱۹۷۰) ثابت کنید از هر مجموعه‌ای که شامل n عدد طبیعی باشد، می‌توان زیر مجموعه‌ای غیر تهی چنان انتخاب کرد که مجموع عضوهای آن بر n بخش پذیر باشد.

حل: فرض کنید برای مجموعه‌ای که شامل n عدد طبیعی $a_1, a_2, \dots, a_n$ است حکم مسئله درست نباشد در این صورت هیچ کدام از عددهای زیر:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

بر n بخش پذیر نیستند از آن جا که عددهای فوق در تقسیم بر n ، به تعداد $n-1$ (بجز صفر) باقیمانده ممکن خواهند داشت، بنا بر اصل حجره‌ها دو عدد S_i و S_j ($j > i$) پیدا می‌شود که در تقسیم بر n باقیمانده‌های برابر داشته باشند. بنابراین تفاضل آنها:

$$S_j - S_i = a_{i+1} + \dots + a_j = k \cdot n \quad k \in \mathbb{Z}$$

بر n بخش پذیر است. حال اگر به عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ بنگریم خود اعضای یک زیر مجموعه از مجموعه اصلی ما می‌باشند که مجموع آنها بر n بخش پذیر است، این همان چیزی است که فرض ما

تمرینها

۱- اطلاعاتی در دست است که هیچ شخصی در سرش بیش از ۲۰۰,۰۰۰ تار مو ندارد و طبق یک سرشماری جدید جمعیت شهر نیویورک ۷,۷۸۱,۹۸۴ نفر است. ملاحظه می شود که در شهر نیویورک حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد موهای سرشان برابر است. بزرگترین عدد صحیحی که می توان در ادعای زیر به جای n قرار داد چه قدر است؟

«در شهر نیویورک n شخص وجود دارند که تعداد موهای سرشان برابر است.»

۲- در یک گله گاوهای دو دهکده چهار رنگ گاو وجود دارد: قرمز، سفید، سیاه، و خالدار. تعداد گاوها روی هم ۶۵ رأس است. ما می دانیم که در میان هر پنج گاو همرنگ حداقل دو گاو همسن وجود دارد. نشان دهید که سه گاو از یک دهکده وجود دارند که همرنگ و همسن می باشند.

۳- فرض کنیم اطلاع داریم که حداقل یکی از a_1 و b_1 دارای ویژگی P و حداقل یکی از a_2 و b_2 دارای ویژگی P و حداقل یکی از a_3 و b_3 دارای ویژگی P هستند. ثابت کنید حداقل دو تا از a_1 و a_2 و a_3 و یا حداقل دو تا از b_1 و b_2 و b_3 دارای ویژگی P هستند.

۴- شطرنج بازی ۱۱ هفته فرصت دارد خود را برای شرکت در مسابقه ای آماده سازد. برای این منظور تصمیم می گیرد هر روز حداقل یک دست بازی کند ولی برای این که خسته نشود در هیچ هفته بیش از ۱۲ دست بازی ننماید و بر طبق تصمیم عمل می کند. ثابت کنید که چند روز متوالی هست که در طی آنها جمعاً ۲۰ دست بازی کرده است.

۵- فرض کنیم A مجموعه متشکل از ۷ عدد متمایز طبیعی باشد که هیچ یک از ۲۴ تجاوز نمی کند. ثابت کنید که عددهای حاصل از حاصل جمع اعضای هر یک از زیر مجموعه های تهی A نمی توانند دو به دو متمایز باشند، یعنی حداقل دو زیر مجموعه وجود دارد که حاصل جمع اعضای آن مساوی است.

مسأله چهاردهم: (المپیاد کشور انگلیس سال ۱۸۶۶) ثابت کنید از بین ۵۲ عدد درست دلخواه همیشه می توان دو عدد طوری انتخاب کرد که مجموع یا تفاضل آنها، بر ۱۰۰ بخش پذیر است.

حل: همه باقیمانده های ممکن تقسیم بر ۱۰۰ را به ترتیب زیر گروه بندی می کنیم:

$$(0, 100), (1, 99), (2, 98), \dots, (50, 50)$$

(البته لازم به تذکر است که ۱۰۰ باقیمانده نیست و همچنین دوبار از عدد ۵۰ استفاده کرده ایم که این اشکالی به حل وارد نمی کند.)

از آن جا که تعداد گروه ها برابر ۵۱ و تعداد عددهای مفروض برابر ۵۲ است، اگر باقیمانده های مساوی نداشته باشیم بنابر اصل حجره ها دو عدد پیدا می شود که باقیمانده آنها بر ۱۰۰، با یکی از این گروه ها تطبیق می کند. در این صورت مجموع این دو عدد بر ۱۰۰ بخش پذیر است، اگر باقیمانده های مساوی داشته باشیم در این صورت تفاضل آنها بر ۱۰۰ بخش پذیر خواهد بود.

مسأله پانزدهم: (المپیاد کشور یوگسلاوی سال ۱۹۷۷) ۲۰ عدد طبیعی $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ که از $a_1 < a_2 < \dots < a_{20}$ که از ۷۰ تجاوز نمی کنند داده شده است. ثابت کنید در بین تفاضلهای $a_j - a_i$ ($j > i$) دست کم چهار عدد برابر پیدا می شود.

حل: از برهان خلف استفاده می کنیم و فرض می کنیم که حکم مسأله نادرست باشد، در این صورت بین ۱۹ عدد:

$$a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, \dots, a_{20} - a_1$$

چهار عدد برابر پیدا نمی شود. بنابراین در بین آنها از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نمی توان بیش از سه بار پیدا کرد، دست کم یکی از این عددها از ۶ بزرگتر است پس:

$$a_{20} - a_1 = (a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \dots + (a_2 - a_1) \geq 1 + (1 + 1 + 1) + (5 + 5 + 5) + \dots + (6 + 6 + 6) = 70$$

در صورتی که ما می دانیم: $a_{20} - a_1 < 70 - 1 = 69$ زیرا هیچ کدام از عددهای طبیعی فوق از ۷۰ بزرگتر نیستند. پس فرض ما غلط است در نتیجه حکم ثابت است.

۶- (المیاد کشور یوگسلاوی سال ۱۹۸۱) مجموعهٔ عددهای ۱ و ۲ و ... و ۱۰۰ را به ۷ زیر مجموعه افراز کرده‌ایم. ثابت کنید در یکی از این زیر مجموعه‌ها یا چهار عدد a و b و c و d وجود دارد که:

$$a + b = c + d$$

و یا سه عدد c و f و g وجود دارد به نحوی که

$$c + f = 2g$$

۷- مسائل المیاد جهانی سالهای ۱۹۷۸ و ۱۹۸۵ را ملاحظه کنید.

۲- ویژه‌نامهٔ مسابقات ریاضی دانش آموزی کشور، مجلهٔ ریاضی‌دان جوان شماره‌های ۱ و ۲.

۳- ایوان نیون، ترجمهٔ علی عمیدی، بتول جذبی، ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم، از سری کتب ریاضیات پیش دانشگاهی - شمارهٔ ۱۵، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۴- ترجمه و تألیف پرویز شهریاری - ابراهیم عادل، مسأله‌های المیادهای ریاضی، انتشارات فاطمی.

۵- جمعی از مؤلفان شوروی، ترجمه پرویز شهریاری، مسأله‌های المیاد ریاضی در کشورهای مختلف، انتشارات فردوس

۶- واسیلیف، ترجمه پرویز شهریاری، آمادگی برای المیاد ریاضی، انتشارات فاطمی.

۷- مسائل المیاد آزمایشی ریاضی، دبیرستان نمونه امام صادق علیه‌السلام (واقع در سه راه آذری).

فهرست منابع

۱- مقالهٔ اصل حجردها و استعمال آن ترجمهٔ دکتر علی‌رضا جمالی مجلهٔ رشد ریاضی شمارهٔ ۱۷.

روپ و ریاضی

مثل غولان

در جزیره‌ای گسروهی از غولهای محیل و وحشی زندگی می‌کردند که چون وحشی بودند هر خارجی وارد در ساحل را می‌کشتند و چون محیل بودند، کاری می‌کردند که آن خارجی خود محکومیت خود را اعلام کند. بدین ترتیب که سؤالی از او می‌کردند، اگر جواب صحیح می‌داد، او را در پیشگاه الههٔ راستی و اگر جواب غلط می‌داد، در پیشگاه الههٔ دروغ قربانی می‌کردند. روزی در برابر یک خارجی زیرکتر از خود این سؤال دور از احتیاط را مطرح کردند. سرنوشت تو چه خواهد بود؟

و خارجی پاسخ داد: «شما مرا قربانی الههٔ دروغ خواهید کرد»
جواب مزبور، این بحث را برای غولان پیش آورد: آیا این

شخص راست گفته است؟ نه، زیرا در این صورت باید او را قربانی الههٔ راستی کرد. پس آیا خلاف حقیقت را بیان داشته است؟ باز هم نه، زیرا لازم بود که او را در پیشگاه الههٔ دروغ قربانی کرد و در این صورت او راست گفته بود ... مثل مورد بحث، این را دیگر بیان نمی‌کند که خارجی مزبور در جزیره سر سلسلهٔ پادشاهان شد.

مثل فوق نشان می‌دهد که هیچ مطلبی ذاتاً صحیح یا غلط نیست و می‌تواند حالت سومی هم داشته باشد، حتی می‌تواند بر حسب ماهیت، از این نظر که آن را با چه چیزی مقایسه می‌کنند، کیفیتهای مختلفی داشته باشد.

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دولاشه، پرویز شهریاری



جواب نامه‌ها

می‌کنیم.

آقای روح... خدیر، دانش آموز سال دوم (تهران)
سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری همراه با حل آن، برای
مجله بفرستید تا در آینده به نام خودتان به چاپ برسد.

آقای حسین سبزو، دانش آموز رشته ریاضی (تهران)
با تشکر از ارسال نامه، امیدواریم بتوانیم در جای مناسب مطالب
شما را چاپ کنیم.

آقای احسان مهتدی، دانش آموز رشته ریاضی (تهران)
با تشکر از نامه شما باید به عرض برسانیم که پاسخگویی به مسائل
شخصی جزو هدفهای مجله نیست ولی چون مسأله مورد نظر شما
مشکلی عمومی بوده است مسأله و حل آن را در این جا می‌آوریم.

مسأله: معادله

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)^x = 6$$

را حل کنید.

حل: معادله را به شکل ساده شده زیر می‌نویسیم:

$$2\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)^x = 6 \Rightarrow \left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)^x = 3$$

$$\Rightarrow x = \log_{\sqrt{3+\sqrt{3}}} 3$$

آقای رشید مقدسی، دانش آموز رشته ریاضی (شیروان)
با تشکر از مقاله شما به عرض می‌رسانیم که امیدواریم امکان درج
آن در شماره‌های بعدی مجله به وجود آید.

آقای فرزاد هوانورد، دانش آموز رشته ریاضی (تهران)
از نامه شما متشکریم. مجله برهان، از مسائل و مقالات ارسالی
خوانندگان خود همیشه استقبال می‌کند. منتهی از بین ارسال شده‌ها،
آن مقاله‌هایی را برمی‌گزیند که حاوی مطالب برجسته درسی باشد
و در ضمن سعی ما بر این است، مجله را به تاریخ ریاضی و
زندگینامه‌های برخی از دانشمندان نامی مزین کنیم.

خانم ارکیده صراف دانش آموز رشته ریاضی (تهران)
با تشکر از ارسال حل چند تست، به عرض می‌رسانیم که سعی
کنید روی مسائل مسابقه‌ای کار کنید و تنها حل این گونه مسائل را
ارسال کنید که در صورت صحیح بودن آن، از طرف مجله جایزه‌ای
به رسم یاد بود به شما تعلق خواهد گرفت.

آقای محمد نوری، دبیر دبیرستانهای تهران
با تشکر از مقاله ارسالی شما در رابطه با حکم بزرگ فرما (با
عنوان «معادله $x^n + y^n = z^n$ برای هر $n > 2$ در مجموعه اعداد
صحیح غیر صفر ممتنع است»)، به عرض حضرت عالی می‌رسانیم که
طبق آخرین خبر رسیده شده، این حکم به وسیله یکی از اساتید
دانشگاه پرینستون به نام «اندريو وایلز» (A.Wills) حل شد که
اثبات وی هنوز تحت بررسی است.

خانم مژگان اسماعیل نیا، دانش آموز رشته ریاضی
(مشهد)

با تشکر از ارسال دو مسأله حل شده، به عرض شما می‌رسانیم که
در گوشه و کنار این کشور، دبیران پرکار و زحمت‌کشی گمنام وجود
دارند که می‌توانند نمونه و الگویی برای دیگر دبیران باشند. در همین
جا از تمامی آنها از جمله دبیر مورد نظر کلاس شما، سپاسگزاری

آقای فرید آزادگان (اهواز)

از شما راه حلی که برای تست مندرج در شماره (۵) ارائه داده‌اید تشکر می‌کنیم. البته در شماره تست اشتباهی رخ داده است؛ در اصل گزینه شماره (۳) تست صحیح است. یادآور می‌شویم که $\cos x - 1$ و $\cos x = \frac{-3}{5}$ برای معادله $\sin x = 2 + 2\cos x$ قابل قبول می‌باشند. ولی برای معادله اولیه تست فقط جواب $\frac{-3}{5}$ قابل قبول می‌باشد. در ضمن در همین جا راه حل شما را همراه با صورت آن می‌آوریم:

از تساوی زیر مقدار $\cos x$ را به دست آورید:

$$\left(\frac{\sin x}{1 - \cos x}\right)^{2n-1} + 3\left(\frac{1 + \cos x}{\sin x}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$$

حل: می‌دانیم:

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \cotg \frac{x}{2}$$

زیرا:

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \cotg \frac{x}{2}$$

پس داریم:

$$4 \left(\cotg \frac{x}{2} \right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-2} \Rightarrow \left(\cotg \frac{x}{2} \right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1}$$

$$\cotg \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tg \frac{x}{2} = 2$$

$$\cos x = \frac{1 - \tg^2 \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} = \frac{-3}{5}$$

از طرفی داریم:

پس داریم:

آقای سید رضا موسوی، دانش آموز رشته ریاضی (تبریز)

با تشکر، در صورت تکراری نبودن مسائل ارسالی شما از آن استفاده خواهد شد.

خانم نسترن مؤذن (فیروزآباد فارس)

با تشکر امیدواریم بتوانیم مطلب شما را در شماره‌های بعدی مجله به چاپ برسانیم.

آقای مهدی شاهوردی (تفرش)

از ارسال دو مسئله حل شده شما متشکریم. به اطلاع می‌رسانیم که در صورت لزوم از آنها استفاده خواهد شد.

آقای محسن نجفی؛ دانش آموز رشته ریاضی (گناباد)

با تشکر از نامه شما به عرض می‌رسانیم که مجله ریاضی برهان یک مجله تعلیمی و در عین حال متنوع است که هدف بیشتر ارتقای سطح ریاضی دانش آموزان عزیز این مرزوبوم است. بدیهی است در چنین مجله‌ای مطالب طنز و جدول و ... کمتر مورد توجه است. متذکر می‌شویم که ادب ریاضی و تفریح اندیشه به نحوی طراحی و انتخاب شده‌اند که علاوه بر تنوع بخشیدن به مجله از نظر سرگرمی و تفریح فکری، کاربردی آموزشی دارد.

خانم رضوان سعیدی؛ دانش آموز رشته تجربی (اراک)

ضمن تشکر از دو مسئله جل شده ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که امید است برای شماره‌های بعدی از آنان استفاده شود.

آقای رضا جعفری؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

با تشکر از نامه شما یادآور می‌شویم که مجله ریاضی برهان مجله‌ای دانش آموزی است و برای عموم دانش آموزان کشور می‌تواند مفید واقع شود. بنابراین سعی کنید که مسائل و مقالات تمام شماره‌های مجله را مورد بررسی دقیق قرار دهید.

خواهد شد.

آقای حمید رضا محمودی هاشمی؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

برای ارسال چند معما و تفریح اندیشه تشکر می‌کنیم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

خانم سهیلا جعفری (داراب)

با تشکر و قدردانی از مقاله شما تحت عنوان «تعیین باقیمانده تقسیم و بخش پذیری اعداد» به عرض می‌رسانیم که الگوریتم کلی روش خود را با توضیحات کافی ارسال دارید تا در صورت امکان در جای مناسب به نام خودتان به چاپ برسد.

آقای یوسف محمدی پورنوبین؛ دانش آموز رشته ریاضی (تبریز)

با تشکر از مسائل ارسالی شما یادآور می‌شویم که پاسخگویی به مسائل شخصی دانش آموزان جزو اهداف مجله نیست و مسائلی را که به منظور چاپ ارائه می‌دهید حتماً باید با جواب باشد.

آقای علیرضا خلیق؛ دانش آموز رشته ریاضی (تبریز)
از زحمات شما برای ارسال جواب برخی از مسائل و تستهای برهان ۶ سپاسگزاریم. در ضمن یادآور می‌شویم که تنها ارسال حل مسائل مسابقه‌ای مورد نظر است.

آقای علی ایمانیان (نجف آباد)

با تشکر از مقاله شما به اطلاع می‌رسانیم که فرمول ارائه شده برای محیط بیضی که از طریق ترسیمی به آن رسیده‌اید یک فرمول تقریبی است $P = \pi(a + b)$ که از مدتها پیش تا به حال از آن در کارهای عملی استفاده می‌شود.

آقای حمید ایزدیان (اصفهان)

با تشکر از ارسال مسائل حل شده شما؛ در صورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقای رسول شمشادی (رشت)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما متذکر می‌شویم که مسائل باید همراه با حل ارائه شود و همچنین در سطح دانش آموزان دبیرستان باشد.

آقای احسان امیری؛ دانش آموز رشته ریاضی (مشهد)

پس از عرض سلام متقابل و تشکر از دو مسئله حل شده شما؛ در صورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقای اسماعیل مهدوی؛ دانش آموز رشته تجربی (آمل)

از مسئله حل شده ارسالی شما متشکریم.

خانم مریم موسوی؛ دانش آموز رشته ریاضی (اهواز)

با تشکر از مسائل حل شده ارسالی شما امید است در شماره‌های بعدی مجله از آنان استفاده شود.

آقای یزدان عقاقیری؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

از مقاله ارسالی شما تشکر می‌کنیم. در صورت امکان، در جای مناسب از آن استفاده خواهد شد.

آقای حمید رضا احمدیان (همدان)

با تشکر از مقاله ارسالی شما؛ در صورت امکان از آن استفاده خواهد شد.

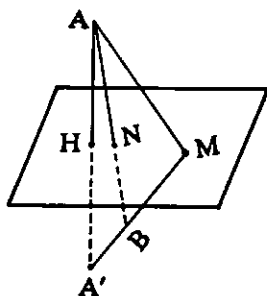
آقای صابر آذری؛ دانش آموز رشته ریاضی (قائم شهر)

با تشکر از مسائل ارسالی شما؛ در صورت لزوم از آنان استفاده

حل مسأله‌های مسابقه‌ای برهان ۲

باشد (اگر نقطه دلخواه B را روی خط d اختیار و از این نقطه به A وصل کنیم و به قطر AB یک دایره رسم نماییم این دایره از نقطه C'' می‌گذرد و نقطه دیگر تقاطعش با نیمساز زاویه C''، نقطه C، رأس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین موردنظر است). بنابراین مکان هندسی موردنظر خط δ نیمساز زاویه AC''B است. همچنین خط δ' نیمساز زاویه AC''B' نیز جواب دیگر مسأله است.

حل ۲- حل از آقای حسن ولی زاده دانش آموز سال چهارم ریاضی - فیزیک دبیرستان شهید شهریکندی مهاباد.
 $P: x-2y-2z-3=0$ و $B(2,-1,0)$ و $A(0,-1,1)$

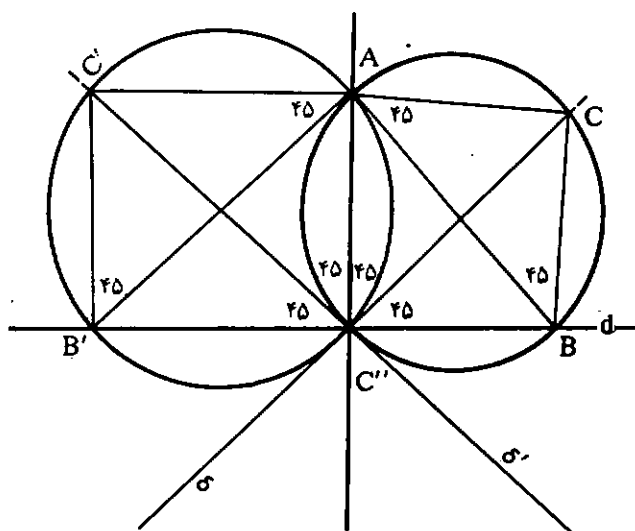


حل الف: نقاط A و B در دو طرف صفحه P قرار دارند زیرا $P(A) \cdot P(B) < 0$ است.

$$P(A) \cdot P(B) = (+2-2-3)(2+2-3) = -3 < 0$$

حل ب: قرینه نقطه A را نسبت به صفحه P پیدانموده نقطه A' می‌نامیم از A' به B وصل می‌کنیم نقطه برخورد A'B با صفحه P جواب مسأله است زیرا چون نقاط A و B در طرفین صفحه P واقع‌اند تفاضل نقطه M از دو نقطه A و B

حل ۱- حل از خانم لیلا سلطان‌زاده دانش آموز سال دوم ریاضی دبیرستان فرزنانگان تبریز.
 فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC ($C=90^\circ$) جواب مسأله باشد.



در این صورت اندازه زوایای A و B از این مثلث هر کدام 45° خواهد بود. از نقطه ثابت A عمود AC'' را بر خط ثابت d فرود می‌آوریم (پس نقطه‌ای است ثابت) و از C'' به C وصل می‌کنیم. چهار ضلعی AC''CB محاطی است زیرا $C'' = C = 90^\circ$ است. پس: $AC''C = BC''C = 45^\circ$ است. یعنی خط CC'' نیمساز زاویه قائمه ثابت AC''B است. لذا نقطه C'' روی نیمساز زاویه AC''B قرار دارد. بالعکس هر نقطه‌ای از این نیمساز می‌تواند رأس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی به رأس قائم C باشد که یک رأس آن نقطه ثابت A و رأس دیگرش B روی خط ثابت d قرار داشته

حل ج: چون نقاط A و B در دو طرف صفحه P واقع اند پس نقطه N که نقطه برخورد پاره خط AB با صفحه P است جواب است یعنی نقطه ای است که مجموع فاصله اش از دو نقطه A و B کمترین مقدار ممکن است.

$$A(0, -1, 1) \quad B(2, -1, 0)$$

$$AB \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{z-1}{-1} \\ y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{z-1}{-1} \\ y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow N \left| \begin{array}{l} \frac{2}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{x}{2} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x - 2y - 2z - 3 = 0$$

یعنی MA - MB بیشترین مقدار ممکن است.

$$P: x - 2y - 2z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow V(1, -2, -2) P \text{ بردار نرمال صفحه}$$

$$AH / \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-2}$$

$$x = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-2} = t$$

$$\Rightarrow x - 2y - 2z - 3 = 0$$

$$(x=t, y=-2t-1, z=-2t+1) \Rightarrow$$

$$t - 2(-2t-1) - 2(-2t+1) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 9t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow H(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$$

$$x_A + x_{A'} = 2x_H \Rightarrow 0 + x_{A'} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_{A'} = \frac{2}{3}$$

$$y_A + y_{A'} = 2y_H \Rightarrow -1 + y_{A'} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y_{A'} = -\frac{1}{3}$$

$$z_A + z_{A'} = 2z_H \Rightarrow 1 + z_{A'} = \frac{2}{3} \Rightarrow z_{A'} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow A' \left| \begin{array}{l} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{l} 2 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right. \Rightarrow A'B / \frac{x-2}{2/3-2} = \frac{y+1}{-1/3+1} = \frac{z-0}{-1/3-0}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{\frac{4}{3}} = \frac{y+1}{\frac{2}{3}} = z$$

$$\frac{x-2}{\frac{4}{3}} = \frac{y+1}{\frac{2}{3}} = z = t$$

$$x - 2y - 2z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow M(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$$

مسائل مسابقه ای

• حمیدرضا امیری

می دانید که شرط $1.v = v$ برای هر $v \in V$ در یک فضای برداری، جزء اصول فضای برداری است. آیا این شرط را نمی توان از شروط دیگر نتیجه گرفت به عبارت دیگر آیا می توانید مجموعه ای چون V با دو عمل جمع و ضرب اسکالر روی $\mathbb{R}$ معرفی کنید که همه شرایط فضای برداری را به جز شرط $1.v = v$ داشته باشد؟

مسائل برای حل

- هندسه: محمد هاشم رستمی
- ریاضیات جدید: حمید رضا امیری
- جبر و مثلثات: احمد قندهاری
- محمد رضا هاشمی - مهدی قمصری

۵- حاصل عبارت $\sqrt{2-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$ را محاسبه کنید.

۶- معادله $a^2(x-a) = b^2(x-b)$ را حل و بحث کنید.

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

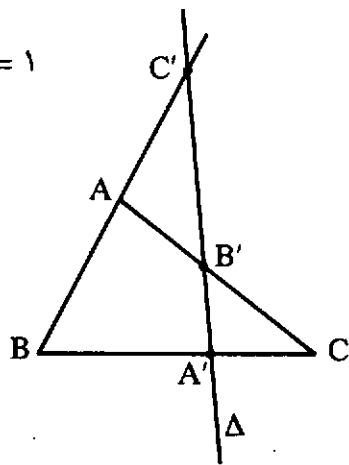
۱- در مثلث ABC اندازه اضلاع عبارتند از: $AB = 40$ ، $AC = 81$ و $BC = 99$ سانتی متر.

الف) اندازه نیمساز زاویه داخلی A را پیدا کنید.

ب) ثابت کنید که $\hat{A} = 2\hat{B}$ است.

۲- قضیه متوالاوس: هرگاه موربی اضلاع یا امتداد اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط A' ، B' و C' قطع کند، ثابت کنید که:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = 1$$



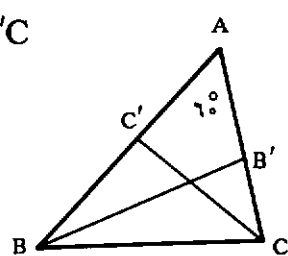
۳- رابطه R روی Z به شکل زیر تعریف شده است، خواص این رابطه را بررسی کنید:

$$\forall x, y \in Z, x R y \Leftrightarrow xy \geq 0$$

مسائل ریاضیات سال اول

۱- در مثلث ABC اندازه زاویه A مساوی ۶۰ درجه و BB' و CC' نیمسازهای زوایای B و C می باشند. ثابت کنید که:

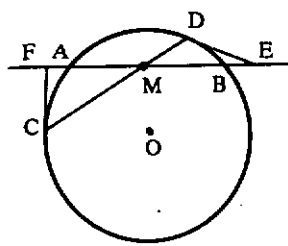
$$\hat{B}B'C = \hat{A}C'C$$



۲- از نقطه M وسط وتر AB از دایره به مرکز O، خطی رسم می کنیم تا دایره را در نقاط C و D قطع کند. در نقطه های C و D

خطهایی مماس بر دایره رسم می کنیم تا امتداد وتر AB را در نقاط E و F قطع کنند. ثابت کنید که $AF = BE$ است.

فرستنده: آقای اشکان شکوری، دانش آموز از رشت.



۳- هرگاه گزاره $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ نادرست و گزاره $(\sim p \wedge r)$ درست باشد، ارزش گزاره $(q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim r)$ را تعیین کنید.

۴- هرگاه $A = \{(x+y), (2n+1), 2z\}$ و $B = \{3, (2y+4), 6\}$ مقادیر ممکن برای x و y و z را محاسبه کنید.

ABC می نیم شود.

(د) فرض می کنیم $a = b$ باشد، در این حالت:

اولاً) اندازه زاویه مسطحه فرجای را که یال آن BC است محاسبه کنید.

ثانیاً) ثابت کنید یال SA بر صفحه مثلث ABC عمود است و سپس حجم هرم SABC را بر حسب a پیدا کنید.

از آقای م - ا - گیتی زاده دبیر ریاضی

۲- فرض کنید T یک تابع یک به یک و پوشا از فضای برداری $(V, +, \cdot)$ به فضای برداری $(W, \oplus, \circ)$ باشد که در شرایط زیر صدق می کند:

$$\forall x, y \in V, T(x+y) = T(x) \oplus T(y)$$

$$\forall r \in \mathbb{R}, \forall x \in V, T(rx) = r \cdot T(x)$$

اولاً: ثابت کنید $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ (تأثیر T روی صفر فضای V

صفر فضای W خواهد شد) و ثانیاً: اگر بردارهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ در فضای V استقلال خطی داشته باشند، آنگاه بردارهای $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ نیز در W استقلال خطی دارند.

۳- ثابت کنید:

$$a'b'c' + a'b'c + a'bc' + ab'c' + a'b + a'c + bc' = a' + c'$$

۴- معین کنید با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت که: الف) مضرب ۵ باشند. ب) فرد بوده و از ۴۰۰۰۰ بزرگتر باشند. ج) اعداد زوج در مکانهای فرد قرار داشته باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 3x + 2)}{(x-1)^2} \quad ۵$$

۶- در تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ثابت کنید بین مشتقات آن

$$3xy'' + 5y' = 0 \quad \text{رابطه } ۰ \text{ برقرار است.}$$

۴- خاصیت یک به یکی و پوشایی را برای تابع با ضابطه زیر بررسی کنید:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \left(\frac{2x-3}{x+2}, \frac{2y+1}{y-4} \right)$$

اگر تابع پوشا نیست، چه تغییری در مجموعه دوم بدهیم تا پوشا شود؟

۵- ماتریس زیر را که درایه های آن با ضابطه مشخص شده اند به شکل یک ماتریس با درایه های معین بنویسید:

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3} \quad \text{که} \quad a_{ij} = \begin{cases} (i+j) & |i-j|=0 \\ (i+j) & |i-j|=1 \\ (i+j) & |i-j|=2 \end{cases}$$

۶- به ازای مقادیر مختلف m در وجود و علامت ریشه های معادله

زیر بحث کنید:

$$mx^2 - 2(m+1)x + (m-1) = 0$$

۷- دورأس مقابل مربعی روی دو خط $x+y-4=0$ و $x+y+2=0$ قرار دارد و قطر مربع بر این دو خط عمود است. مجموع مساحت های دایره های محاطی و محیطی این مربع را بیابید.

مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱- کج $xyz-S$ را که در آن $\hat{x}\hat{S}z = 90^\circ, \hat{x}\hat{S}y = \hat{y}\hat{S}z = 60^\circ$

است در نظر می گیریم. روی یالهای Sx و Sy و Sz به ترتیب نقاط B و A و C را چنان اختیار می کنیم که $SA = a$ و $SB = SC = 2b$ باشد.

الف) ثابت کنید یال SA بر BC عمود است.

ب) طول اضلاع و مساحت مثلث ABC را بر حسب a و b حساب کنید.

ج) اگر نقطه های B و C ثابت بمانند و نقطه A بر یال Sy تغییر مکان دهد، بین a و b چه رابطه ای برقرار باشد تا مساحت مثلث

چپ در ترکیب دو شرطی نیز توزیع پذیر است.

$$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$$

۶- حلقه $(M_{n \times n}, +, \cdot, \times)$ را در نظر می گیریم اگر

ماتریس A عضو ثابتی از این حلقه باشد، ثابت کنید مجموعه $K = \{B | AB = BA\}$ یک زیر حلقه $M_{n \times n}$ است.

۷- ثابت کنید که مجموع مکعبهای سه عدد صحیح متوالی بر ۹ بخش پذیر است.

۸- به روش استقرا ثابت کنید که $10^{3^n} - 1$ بر 3^{n+2} بخش پذیر است.

۹- معادلات مجانبهای منحنی مکان نقطه

$$M \begin{cases} x = \frac{t+4}{t(t-2)} \\ y = \frac{t-4}{t(t+2)} \end{cases} \text{ را بیابید.}$$

۱۰- مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$$

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱- ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه، آن مثلث را به دو

مثلث چنان تجزیه می کند که مساحت یکی، سه برابر مساحت دیگری است. در صورتی که اندازه ارتفاع وارد بر وتر این مثلث مساوی $2\sqrt{3}$ باشد، اندازه مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۲- از نقطه P مماس PT به طول ۸ سانتی متر را بر دایره O رسم می کنیم و از همین نقطه قاطع PAB را چنان نسبت به دایره رسم

۷- معادله مثلثاتی $\cos 2x (\sin x + \sin 9x) = 2$ را حل کنید.

۸- $\operatorname{tg} vx$ را بر حسب $\operatorname{tg} x$ بنویسید و به کمک آن حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید:

$$S = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{v} + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{v} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{v}$$

$$S = \operatorname{tg}^6 \frac{\pi}{v} + \operatorname{tg}^6 \frac{2\pi}{v} + \operatorname{tg}^6 \frac{3\pi}{v}$$

۹- تساوی $\operatorname{Arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ را به طریق هندسی اثبات کنید.

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱- مختصات قرینه نقطه $A(-1, 2, 3)$ نسبت به خط $D: 3x - 1 = -2y + 3 = z - 1$ را پیدا کنید.

۲- ثابت کنید دایره های به معادله $x^2 + y^2 + (m^2 - 1)x - 2my + (m + 1)^2 = 0$ ازای همه مقادیر m بر دایره ثابتی عمودند و معادله این دایره ثابت را پیدا کنید.

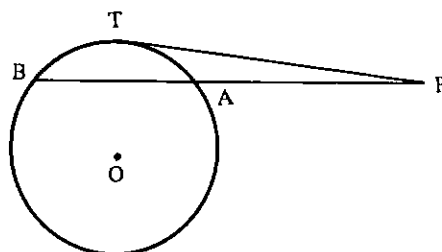
۳- معادله دایره های را بنویسید که از دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(3, -2)$ می گذرد و روی محور طولها وتری به طول می نیم ایجاد می کند.

۴- معادله هذلولی را بنویسید که نقطه $C(-1, 1)$ مرکز و $F(-1, 3)$ یک کانون و $A(-1, 2)$ یک رأس کانونی آن باشد.

۵- می دانیم ترکیب شرطی از چپ در ترکیبهای فصلی، عطفی و شرطی توزیع پذیر است، با این فرض ثابت کنید ترکیب شرطی از

مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

می‌کنیم که $PA = \frac{2}{3} PT$ باشد. اندازه وتر AB را محاسبه کنید.



فرستنده مسائل ۱ و ۲: آقای یوسفزاده (نقده)

۳- اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ و β' و

α' ریشه‌های معادله $a'x^2 + b'x + c = 0$ باشند، معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن: $\frac{\alpha}{\beta'} + \frac{\beta}{\alpha'}$ و $\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'}$ باشند.

۴- سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی مفروض است، اگر به جمله وسطی ۸ واحد اضافه شود؛ تصاعد به یک تصاعد عددی تبدیل می‌شود. ولی اگر در تصاعد عددی به دست آمده به آخری ۶۴ واحد اضافه کنیم؛ تصاعد مجدداً به تصاعد هندسی تبدیل می‌شود. مطلوب است محاسبه آن سه عدد.

۵- معادله زیر را حل کنید:

$$1 + \log_2^{\sin} + (\log_2^{\sin})^2 + \dots = \frac{2}{3}$$

فرستنده: آقای نادر مطیع دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

۶- معادله مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$\operatorname{tg} x = 2 \cos \frac{x}{2}$$

فرستنده: آقای علی‌رضا خانی (تهران)

۷- ثابت کنید که عبارت m مربع کامل است:

$$m = \frac{2(1 - \sin^2 x - \cos^2 x)}{\sin x + \cos x + 2}$$

فرستنده: آقای نادر مطیع دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

۴- اگر $|\overline{AB}| = 10 \text{ cm}$ باشد، و این بردار را به دو بردار در دو راستای عمود برهم که یکی از آنها با AB زاویه 30° می‌سازد، تجزیه کنیم، اندازه مؤلفه‌ها را پیدا کنید.

۵- خط Δ و مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. ارتفاع AH و میانه AM از این مثلث را رسم می‌کنیم و قرینه محوری مثلث ABC نسبت به خط Δ را پیدا کرده، مثلث $A'B'C'$ می‌نامیم. در صورتی که $AH = 8\sqrt{2}$ و $B'C' = 6\sqrt{2}$ باشد اندازه مساحت مثلث ABM را پیدا کنید.

۶- چهار وجهی منظم به ضلع $4\sqrt{3}$ مفروض است. مرکز و شعاع کره محیطی این چهار وجهی را مشخص کنید و حجم کره محیطی را به دست آورید.

۷- در صورتی که داشته باشیم: $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ و $(f \circ g)(x) = -f(x)$ دامنه تابع g را بیابید.

فرستنده: آقای اسماعیل مهدوی دانش آموز رشته تجربی (آمل)

۸- مشتق مرتبه n ام $y = \sin x$ را به دست آورید.

۹- حد تابع باضابطه $f(x) = \frac{5^{x+1} + 3^{x+1}}{5^x - 1 + 3^x - 1}$ را وقتی $x \rightarrow \pm \infty$ حساب کنید.

فرستنده مسائل ۲ و ۳: خانم نسرین احمدی نقدهی دانش آموز رشته ریاضی (نقده)

۱۰- مشتق تابع باضابطه زیر را حساب کنید:

$$y = \frac{1}{(x^2 x^3 \dots x^n)^{2+2+6+\dots+2n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

۱۱- درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید:

$$\text{الف) } (\cos a - \sin a)(\cos 2a - \sin 2a) + \sin 3a = \cos a$$

$$\text{ب) } \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\beta}{2} \right) = \frac{2 \cos \beta - 1}{2 \cos \beta + 1}$$

۹- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\cot x = \operatorname{tg} 20^\circ + 2 \operatorname{tg} 40^\circ + 4 \cot 80^\circ$

ب) $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$

فرستنده مسائل ۱ و ۲: آقای اسماعیل مهدوی دانش آموز رشته تجربی (آمل)

ریاضیات سال چهارم تجربی

(از کتاب جبر پایه، تألیف محمد هاشم رستمی)

۱- تابع پارامتری $\begin{cases} x = 2 \sin \alpha - 1 \\ y = 3 + \cos 2\alpha \end{cases}$ مفروض است. مطلوب است محاسبه y'_x و x'_y .

۲- تابع باضابطه $y = \frac{ax + 3}{x + a + 2}$ مفروض است. اولاً: به ازای مقادیر مختلف a در جهت تغییرات این تابع بحث کنید. ثانیاً: ثابت کنید که نمودار تغییرات این تابع در ازای مقادیر مختلف a از دو نقطه ثابت که مختصات آنها را محاسبه خواهید کرد، می‌گذرد.

۳- خط $(a + 1)x + y + 2a = 0$: Δ مفروض است. مقدار a را به قسمی تعیین کنید که این خط، قائم بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ باشد.

۴- دو دایره $C: 2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - \frac{3}{2} = 0$ و $C': x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ مفروضند. اولاً: وضع این دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید. ثانیاً: طول مماس مشترکهای داخلی و خارجی این دو دایره را در صورت وجود محاسبه کنید.

۵- مطلوب است محاسبه: $\int \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} dx$ و $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$

کسانی که یک یا هر دو مسأله از

مسائل مسابقه‌ای برهان ۷ را

حل کرده‌اند:

۱- آقای حسین سبزو

۲- خانم لیلا سلطان‌زاده، دوم ریاضی فرزندگان تبریز

۳- خانم الهام امت‌پاک از بجنورد

۴- آقای حسن ولی‌زاده، چهارم ریاضی دبیرستان شهید شهریکندی مهاباد

۵- خانم آزاده علوی، دبیرستان فرزندگان امینی اصفهان

۶- آقای اسماعیل قیصری از سقز

۷- آقای مهران خراسانی از گرگان

۸- آقای محمدرضا ضربابی از تهران

۹- خانم مریم عباسی، سوم ریاضی دبیرستان غیرانتفاعی

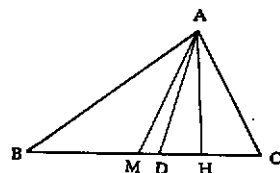
مریم از مشهد



حل مسائل برهان شماره ۱

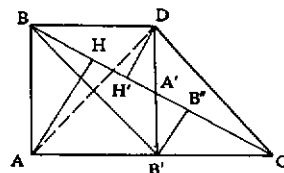
حل مسائل ریاضیات سال اول

۱- در مثلث ABC، فرض می‌کنیم $AB > AC$ باشد. ارتفاع AH و میانه AM و نیمساز AD را رسم می‌کنیم. چون $AB > AC$ است، پس: $\hat{MAB} < \hat{MAC}$



در نتیجه نیمساز AD داخل زاویه $\hat{MAB}$ واقع نیست. از طرفی $\hat{HAB} > \hat{HAC}$ می‌باشد. پس نیمساز AD داخل زاویه $\hat{HAC}$ قرار ندارد. در نتیجه نیمساز AD داخل زاویه $\hat{MAH}$ یعنی داخل زاویه بین ارتفاع و میانه نظیر رأس A واقع است.

۲- وسط ضلع AC را نقطه B' و وسط وتر BC را نقطه A' می‌نامیم. چهار ضلعی BB'CD متوازی الاضلاع است زیرا انقاروش در نقطه A' یکدیگر را نصف کرده‌اند. (دو مثلث قائم الزاویه متشابهی الساقین ABB' و DAB' با هم برابرند، پس: $DB' = AB$ است). از طرفی $A'B' = \frac{1}{2} AB$ پس $A'B' = \frac{1}{4} DB'$ یعنی



نقطه A' وسط پاره خط DB' است و نقطه A' وسط وتر BC نیز می‌باشد پس BB'CD متوازی الاضلاع است. بنابراین رتوس B' و D از قطر BC به یک فاصله‌اند. یعنی $B'B'' \parallel AH$ (زیرا $B'B'' = \frac{1}{2} AH$ و $B'B'' = DH'$ وسط AC است). پس $AH = 2DH'$ می‌باشد.

۳- چون گزاره‌های $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ هر دو درست هستند بنابراین باید $p \equiv q$ زیرا در غیر این صورت یکی از دو گزاره فوق نادرست خواهد شد، از طرفی:

$$\sim p \equiv T \Rightarrow p \equiv F \Rightarrow q \equiv F \Rightarrow \sim q \equiv T$$

$$(\sim p \wedge r) \equiv T \quad \begin{matrix} \nwarrow \\ r \equiv T \end{matrix}$$

بنابراین با توجه به نتایج به دست آمده داریم:

$$(\sim p \Rightarrow q) \equiv F, (\sim q \Leftrightarrow p) \equiv F$$

$$\Rightarrow [(\sim q \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)] \equiv T$$

۴- گزاره شرطی $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ را در دو حالت ممکن که می‌تواند موجود باشد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

I) اگر $(p \wedge q) \equiv T$ که واضح است $p \equiv T$ و $q \equiv T$ و بلافاصله نتیجه می‌گیریم $(p \vee q) \equiv T$ پس $\{(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)\} \equiv T$
II) اگر $(p \wedge q) \equiv F$ که در این حالت گزاره شرطی $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ به انتهای مقدم همواره درست است، لذا گزاره فوق در هر حالت دارای ارزش درست بوده و یک استلزام منطقی است.

$$\Delta -$$

$$\frac{Ax - A + 2Bx - B}{(2x - 1)(x - 1)} = \frac{11x - 8}{(2x - 1)(x - 1)}$$

$$\Rightarrow (A + 2B)x - (A + B) \equiv 11x - 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + 2B = 11 \\ A + B = 8 \end{cases} \Rightarrow B = 3, A = 5$$

۶- طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a + c = b + 2$$

$$a^2 + c^2 + 2ac = b^2 + 4 + 4b$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + c^2 = 4 + 4b - 2ac$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + c^2 = 4(1 + b - \frac{ac}{2})$$

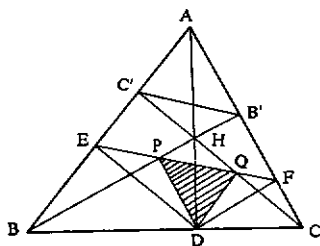
حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱- (حل از حسین اصلانی دانش آموز از تبریز) محل تلاقی ارتفاعات مثلث را H می‌نامیم. در مثلثهای ADE و ADF داریم:

$$HC' \parallel DE \Rightarrow \frac{AC'}{AE} = \frac{AH}{AD} \quad (1)$$

$$HB' \parallel DF \Rightarrow \frac{AB'}{AF} = \frac{AH}{AD} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{AC'}{AE} = \frac{AB'}{AF} \Rightarrow B'C' \parallel EF$$



در مثلثهای CB'B و CB'C' می‌توان نوشت:

$$QF \parallel B'C' \Rightarrow \frac{CQ}{QC'} = \frac{CF}{FB'} \quad (3)$$

-۹

$$\sin\left(\underbrace{\arccos\frac{r}{\delta}}_{\alpha}\right) = \cos\left(\underbrace{\arcsin\frac{r}{\delta}}_{\beta}\right)$$

$$\sin\alpha = \cos\beta$$

باید ثابت کنیم:

بنا به فرض داریم:

$$\arccos\frac{r}{\delta} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{r}{\delta}, \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \pm \frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\arcsin\frac{r}{\delta} = \beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{r}{\delta}$$

$$\Rightarrow \cos^2\beta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \pm \frac{4}{5} \quad (2)$$

پس از (1) و (2) داریم:

$$\sin\alpha = \cos\beta$$

در نتیجه تساوی برقرار است.

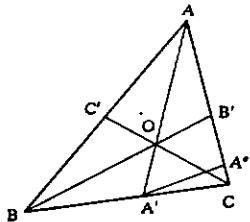
حل مسائل سال سوم ریاضی

۱- حل الف: همان طوری که در برهان ۷ دیدیم اگر نقطه O

محل برخورد نیمسازهای AA' و BB' و CC' از مثلث ABC

باشد، داریم: $OA = \frac{1}{p} \sqrt{bcp(p-a)}$

$$OC = \frac{1}{p} \sqrt{abp(p-c)} \quad \text{و} \quad OB = \frac{1}{p} \sqrt{acp(p-b)}$$

پس اگر در رابطه $OB \cdot OC = a \cdot OA$ مقادیر فوق را قرار دهیم

داریم:

$$\frac{1}{p} \sqrt{acp(p-b)} \times \frac{1}{p} \sqrt{abp(p-c)} = a \times \frac{1}{p} \sqrt{bcp(p-a)}$$

$$\Rightarrow (p-b)(p-c) = p(p-a)$$

اما می دانیم مثلثی که رابطه فوق در آن برقرار باشد، در رأس A قائم الزاویه است.

اگر $A = \{1, 2, 3\}$ در این صورت: $I = \{(1, 1) \text{ و } (2, 2) \text{ و } (3, 3)\}$ رابطه همانی روی A است که $2^3 = 8$ زیر مجموعه دارد.۵- داریم: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ابتدا به بررسی خاصیت

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 1}$$

یک به یکی می پردازیم.

$$\text{فرض کنیم: } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_1 - 1} = \sqrt{x_2^2 + x_2 - 1}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_1 - 1 = x_2^2 + x_2 - 1 \Rightarrow (x_1^2 - x_2^2) = (x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2) + 1] = 0$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{چون } x_1, x_2 > 0$$

پس تابع یک به یک است:

$$\text{حال فرض کنیم: } y \in \mathbb{R}^+, y = \sqrt{x^2 + x - 1} \Rightarrow y^2 = x^2 + x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x - (1 + y^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(1 + y^2)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{4y^2 + 5}}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{4y^2 + 5}}{2}$$

که واضح است برای هر $y \in \mathbb{R}^+$ متوازه $x \in \mathbb{R}^+$ یافت می شود بنابراین تابع پوشا است.

-۶

$$\lg_4^x a = a \Rightarrow \lg_2^x a = a \Rightarrow \lg_2^x a = a$$

$$\Rightarrow 2 \lg_2^x a = a \Rightarrow \lg_2^x a = \frac{a}{2} \Rightarrow \lg_2^x a = \frac{a}{2}$$

$$\lg_2^x \sqrt{a} = \lg_2^x a^{\frac{1}{2}} = \lg_2^x a = \frac{a}{2} \Rightarrow \lg_2^x a = \frac{a}{2} \Rightarrow \lg_2^x a = \frac{a}{2}$$

$$B \mid_x^x \quad A \mid_{-1}^{-1} \quad \text{روی نیمساز ربع اول یا سوم.}$$

$$AB = \sqrt{(x-2)^2 + (x+1)^2} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 17} = \sqrt{13} \Rightarrow 2x^2 - 6x + 17 = 13$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow B_1 \mid_1^1 \quad B_2 \mid_2^2$$

-۸

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (a \cos \alpha - b \sin \alpha)^2 + (a \sin \alpha + b \cos \alpha)^2 \\ &= a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha - 2ab \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad + a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha + 2ab \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \sin^2 \alpha (a^2 + b^2) + \cos^2 \alpha (a^2 + b^2) \\ &= (a^2 + b^2)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$DF \parallel BB' \Rightarrow \frac{CD}{DB} = \frac{CF}{FB'} \quad (4)$$

$$\frac{CQ}{QC'} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow DQ \parallel BC' \Rightarrow \hat{DQC} = 90^\circ \quad (4) \text{ و } (3)$$

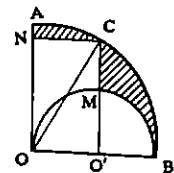
در نتیجه چهارضلعی DQFC محاطی است. پس $\hat{PQD} = \hat{ACD}$ به روش مشابه ثابت می شود که $DP \perp BB'$ یعنی: $\hat{BPD} = 90^\circ$ و چهارضلعی DBEP محاطی، و از آنجا $\hat{QPD} = \hat{ABC}$ است.

بنابراین مثلث DPQ با مثلث ABC مشابه است.

۲- (حل از غلامرضا روشندل)

$$\text{چون } AB = C_T = 10\sqrt{2} \text{ است پس:}$$

$$C_T = R\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow R = 10$$

در نتیجه: $OA = OB = 10$ و $OO' = 5$ 

در مثلث قائم الزاویه OO'C داریم:

$$OC = 10 \quad \text{و} \quad OO' = 5 \Rightarrow$$

$$O'C = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$S_{OO'CN} = 5 \times 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$$

$$OC \text{ نیم دایره به قطر } S = \frac{1}{2} \pi (5)^2 = \frac{25\pi}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \pi (10)^2 = 25\pi$$

$$S = \text{ربع دایره } AOB$$

$$S = \text{ربع دایره } AOB - (S_{OO'CN} + S_{O'BM})$$

$$S = 25\pi - (25\sqrt{3} + \frac{25\pi}{4}) = \frac{75\pi}{4} - 25\sqrt{3}$$

۳- چون A و B دو مجموعه جدا از هم می باشند، پس

$$(A \cap B) = \emptyset$$

$$(B \times A) - (B \times B') = B \times (A - B') = B \times (A \cap B) = B \times \emptyset = \emptyset$$

۴- هرگاه رابطه ای چون R هم خاصیت تقارنی و هم خاصیت

باد تقارنی داشته باشد، می بایست زیر مجموعه ای از رابطه همانی باشد

و اگر R روی یک مجموعه K عضوی تعریف شده باشد، رابطه

همانی دارای K زوج مرتب است یعنی K عضوی است که در

این صورت 2^k زیر مجموعه دارد مثلاً:

$$D': \begin{cases} 1-x+ay+9z-21=0 \\ x+y-2z-2=0 \end{cases} \Rightarrow D': \frac{x-\frac{5}{2}}{-20} = \frac{y+\frac{1}{2}}{19} = \frac{z}{2}$$

معادله کانونیک تصویر قائم خط D روی صفحه P:

-۵

$$\begin{aligned} \sim [(r \Rightarrow s) \Rightarrow (s \Rightarrow (s \wedge t))] &\equiv (r \Rightarrow s) \wedge \sim [s \Rightarrow (s \wedge t)] \\ \equiv (r \Rightarrow s) \wedge [s \wedge \sim (s \wedge t)] &\equiv (\sim r \vee s) \wedge [s \wedge (\sim s \vee \sim t)] \\ &\equiv (\sim r \vee s) \wedge (s \wedge \sim t) \equiv \left[(\sim r \vee s) \wedge s \right] \wedge \sim t \equiv s \wedge \sim t \end{aligned}$$

جذب

-۶

$$\begin{aligned} [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)] &\Rightarrow (q \Rightarrow p) \\ \equiv [(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)] &\Rightarrow (q \Rightarrow p) \\ \equiv [\sim (\sim p \vee q) \vee (p \wedge q)] &\Rightarrow (q \Rightarrow p) \\ \equiv [(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)] &\Rightarrow (\sim q \vee p) \\ \equiv [p \wedge (\sim q \vee q)] &\Rightarrow (\sim q \vee p) \\ \equiv p \Rightarrow (\sim q \vee p) &\equiv p \vee (\sim q \vee p) \\ \equiv (\sim p \vee p) \vee \sim q &\equiv T \vee \sim q \equiv T \end{aligned}$$

۷- مجموعه داده شده زیر مجموعه IR است، بنابراین برای اثبات میدان بودن آن کافی است ثابت کنیم زیرحلقه IR است که در این صورت حلقه جابجایی بودن آن تأمین می شود (IR یک حلقه جابجایی است که فاقد مقوم علیه صفر است) و می توان نتیجه گرفت که مجموعه مفروض یک حوزه درست است و برای آن که میدان باشد باید عناصر غیر صفر آن وارون پذیر باشند. برای اثبات زیرحلقه بودن باید این مجموعه نسبت به دو عمل تقاضل و ضرب بسته باشد که بررسی آن به عهده دانش آموزان و چون $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ پس:

این مجموعه یکدار است و عضو خنثی نسبت به عمل ضرب معمولی را دارد پس:

$$(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3})(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3})^{-1} = 1$$

و برای یافتن $(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3})^{-1}$ از اتحاد زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 - 2ABC &= \\ (A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC)(A+B+C) &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC}{A^2 + B^2 + C^2 - 2ABC} (A+B+C) = 1$$

$$\Rightarrow (A+B+C)^{-1} = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC}{A^2 + B^2 + C^2 - 2ABC}$$

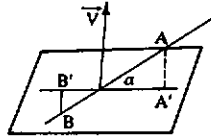
۳- الف) پای عمودهای مرسوم از نقاط A و B بر صفحه P را به ترتیب A' و B' می نامیم خواهیم داشت:

$$A(1, 2, -1) \text{ و } B(-2, 0, 1)$$

$$P: 2x+y-2z-3=0 \Rightarrow \overline{AA'} = \frac{2+2+2-3}{\sqrt{4+1+4}} = +\frac{1}{3}$$

نقاط A و B در دو طرف صفحه P واقعند

$$\overline{BB'} = \frac{-4-2-2}{3} = -2 \Rightarrow$$



ب) زاویه خط AB با صفحه P، متمم زاویه این خط با بردار نرمال صفحه P است. پس:

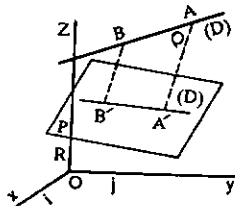
$$P: 2x+y-2z-3=0 \Rightarrow \vec{V}(2, 1, -2)$$

$$\overline{AB}(3, 2, -2)$$

$$\cos(\vec{V}, \overline{AB}) = \frac{6+2+4}{\sqrt{4+1+4} \times \sqrt{9+4+4}} = \frac{12}{3\sqrt{22}}$$

$$(\vec{V}, \overline{AB}) = \arccos \frac{12}{3\sqrt{22}} \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \arccos \frac{12}{3\sqrt{22}}$$

۴- بر خط D صفحه های مانند Q می گذرانیم که بر صفحه P عمود باشد. خط D' فصل مشترک صفحه Q و صفحه P جواب سآله است.



$$D: 2x-1=-y+2=z \Rightarrow D: \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 2z+y-2=0 \end{cases}$$

معادله دسته گذرنده بر D:

$$\alpha(2x+y-3) + \beta(2z+y-2) = 0$$

معادله دسته گذرنده بر خط D:

$$2\alpha x + (\alpha + \beta)y + 2\beta z - 2\alpha - 2\beta = 0$$

$$\text{شرط عمود بودن دو صفحه: } aa' + bb' + cc' = 0$$

$$P: x+y-2z-2=0$$

$$2\alpha + \alpha + \beta - 2\beta = 0 \Rightarrow 3\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{3}$$

معادله صفحه Q:

$$\frac{1}{3}\beta x + \frac{\beta}{3}y + \beta z - \frac{\beta}{3} = 0 \Rightarrow 1 \cdot x + 1 \cdot y + 3 \cdot z - 1 = 0$$

۱۸۸

$$\Rightarrow \vec{V}_1(2k, -k, 2k), \vec{V}_1, \vec{V}_2 = 2\vec{V}_1 \Rightarrow 2k+k+9k=22$$

$$\Rightarrow 12k=22 \Rightarrow k=2 \Rightarrow \vec{V}_1(4, -2, 4)$$

برای محاسبه طول تصویر قائم بردار $\vec{V}_1$ روی صفحه XOY باید زاویه بین این بردار و صفحه XOY را به دست آوریم. می دانیم که صفحه XOY به معادله $Z=0$ است. پس:

$$z=0 \Rightarrow \vec{V}(0, 0, 1)$$

$$\vec{V}_1(4, -2, 4) \text{ تصاویر بردار نرمال صفحه XOY}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos(\vec{V}_1, \vec{V}) &= \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}}{|\vec{V}_1| |\vec{V}|} = \frac{4}{1 \times \sqrt{36+9+16}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{61}} = \frac{4}{\sqrt{61}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin(\vec{V}_1, \vec{V}) = \sqrt{\frac{5}{14}}, (\overline{OH}, \vec{V}_1) = \frac{\pi}{2} - (\vec{V}_1, \vec{V})$$

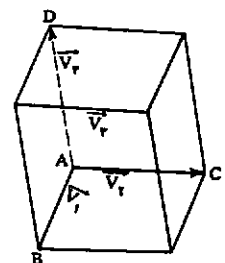
$$\overline{OH} = |\vec{V}_1| \times \cos(\overline{OH}, \vec{V}_1)$$

$$= |\vec{V}_1| \times \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\vec{V}_1, \vec{V})\right]$$

$$\Rightarrow \overline{OH} = |\vec{V}_1| \sin(\vec{V}_1, \vec{V})$$

$$= 4\sqrt{14} \times \sqrt{\frac{5}{14}} = 4\sqrt{5}$$

۲- فرض می کنیم $\vec{V}_1 = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ باشد، در این صورت $\vec{V}_1(1, 1, 0)$ و $\vec{V}_2(2, 2, 2)$ و $\vec{V}_1(3, -4, 2)$ است.



و حجم متوازی السطوحی که این سه بردار یالهای جانبی آن باشند،

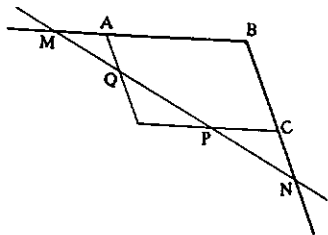
برابر قدر مطلق حاصل ضرب مختلط سه بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$ است. یعنی:

$$V = |\vec{V}_1 \vec{V}_2 \vec{V}_3|$$

$$\vec{V}_1 \vec{V}_2 \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$$

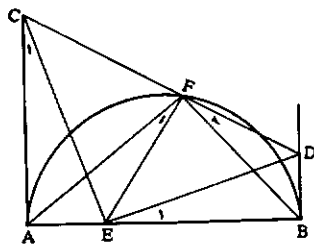
$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (-3, 3, 2) \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = -9 - 12 + 4 = -17$$

و واحد حجم $V = 17$ متوازی السطوح



۲- از نقطه F به نقاط A و B وصل می‌کنیم. زاویه

$\angle AFB = 90^\circ$ است. همچنین از نقطه E به نقطه‌های C و D وصل می‌کنیم، چهارضلع‌های AEFC و EFDB محاطی‌اند پس $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$ و $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ از طرفی $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$ زیرا اضلاعشان دو به دو بر هم عمودند.



لذا $C_1 = E_1$ و از آنجا دو مثل قائم الزاویه ACE و BED متشابه‌اند. پس داریم:

$$\frac{AC}{EB} = \frac{AE}{DB} \Rightarrow AC \cdot DB = EB \cdot EA = CT$$

۳- ثابت می‌کنیم:

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = (a^2+3a+1)^2$$

$$a(a+3)(a+1)(a+2)+1 \quad \text{داریم:}$$

$$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)+1$$

با فرض $a^2+3a = A$ داریم:

$$= A(A+2)+1 = A^2+2A+1$$

$$= (A+1)^2 = (a^2+3a+1)^2$$

پس خواهیم داشت:

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = (a^2+3a+1)^2$$

۴- به‌طور کلی در حل معادلاتی که به فرم کلی

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$$

چهار عدد a و b و c و d مجموع دو عدد با مجموع دو عدد دیگر برابر باشند، مثلاً داشته باشیم:

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x^2\sqrt{x})} = \frac{2}{x^2\sqrt{x}}$$

$$x \rightarrow 1$$

-۱۰

$$y = \frac{x^2+bx+c}{x^2+1} \Rightarrow y'$$

$$= \frac{(2x+b)(x^2+1) - 2x(x^2+bx+c)}{(x^2+1)^2} =$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3+bx^2+2x+b-2x^3-2bx^2-2cx}{(x^2+1)^2} =$$

$$\Rightarrow -bx^2 + 2(1-c)x + b = 0$$

حاصل جمع طولها صفر است.

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow -\frac{2(1-c)}{-b} = 0 \Rightarrow 2-2c = 0 \Rightarrow \boxed{c=1}$$

$$y = \frac{x^2+bx+c}{x^2+1} \Rightarrow yx^2+y = x^2+bx+c$$

$$\Rightarrow (y-1)x^2 - bx + y - c = 0$$

حال اگر در معادله بالا قرار دهیم $\Delta = 0$ معادله‌ای درجه ۲ بر حسب y به دست می‌آید که ریشه‌های آن همان عرضهای نقاط اکسترم است.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4(y-1)(y-c) = 0$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 4(1-c)y - b^2 + 4c = 0$$

چون حاصل ضرب عرضها برابر با صفر است پس: $\frac{c}{a} = 0$ یعنی:

$$\frac{4c-b^2}{4} = 0 \Rightarrow 4c-b^2 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$$

حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱- با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$AQ \parallel BN \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MQ}{MN} \quad (1)$$

$$PC \parallel MB \Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{NP}{NP} \quad (2)$$

$$CN \parallel DQ \Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{NP}{PQ} \quad (3)$$

$$MA \parallel DP \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{PQ}{MQ} \quad (4)$$

$$(1) \times (2) \times (3) \times (4) \Rightarrow \frac{MA}{MB} \times \frac{NB}{NC} \times \frac{PC}{PD} \times \frac{OD}{OA} = 1$$

$$\Rightarrow (a+b\sqrt{x}+c\sqrt{x})^{-1}$$

$$= \frac{a^2+b^2\sqrt{x}+2c\sqrt{x}-ab\sqrt{x}-ac\sqrt{x}-2bc}{a^2+2b\sqrt{x}+2c\sqrt{x}-6abc}$$

$$= \frac{a^2-2bc}{k} + \frac{-ab+2c}{k}\sqrt{x} + \frac{b^2-ac}{k}\sqrt{x}$$

$$= a' + b'\sqrt{x} + c'\sqrt{x}$$

۸- فرض کنیم S یک حوزه درست متناهی باشد، واضح است که اگر یک حوزه درست، یکدار باشد وارون‌پذیر نیز خواهد بود؛ بنابراین برای این که ثابت کنیم S میدان است باید ثابت کنیم S یکدار است. حال اگر $S_1, S_2, \dots$ و S_n عنصر متمایز اعضای S باشند، و عنصر S_1 را با همه عناصر S بنابر قانون ضرب آن ترکیب کنیم، نتایج به دست آمده n عنصر متمایز است که باید در حلقه باشند، زیرا اگر مثلاً:

$S_1 S_2 = S_1 S_p$ یا توجه به این که S یک حوزه درست است قانون حذف در آن برقرار است و S_1 را از طرفین حذف کرده و خواهیم داشت: $S_2 = S_p$ که با متمایز بودن اعضای S تناقض دارد، پس باید عضوی در S باشد به قسمی که ترکیب آن با S_1 خود S_1 باشد، این عضو را c می‌نامیم که همان عضو خنثی است، زیرا:

ثابت شد $S_1 c = c S_1 = S_1$ (الف)
ب) به ازای هر s_k در S اگر $S_1 s_k = s_k S_1 = s_k$

$$s_k s_k c = c s_k s_k = (c s_k) s_k = s_k s_k$$

$$s_k s_k = s_k s_k c = c s_k = s_k$$

پس S یک حوزه درست (حلقه جابجایی فاقد مقسوم علیه صفر) یکدار است و چون مقسوم علیه صفر ندارد لذا، هر عضو غیر صفر آن وارون‌پذیر است، بنابراین یک میدان است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$$

$$x \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\times \frac{\sqrt{(x^2+x)^2} + \sqrt{2} + \sqrt{2(x^2+1)}}{\sqrt{(x^2+x)^2} + \sqrt{2} + \sqrt{2(x^2+1)}}$$

این تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر است:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2\sqrt{x})}$$

خط راست قرار نخواهند داشت و در این صورت مثلث $M'AN'$ به وجود خواهد آمد که در این مثلث:

$$M'N' < AM' + AN' = \frac{1}{\sqrt{3}} AB + \frac{1}{\sqrt{3}} AC$$

$$\Rightarrow M'N' < \frac{1}{\sqrt{3}} (AB + AC)$$

۲- می‌دانیم که اندازه جبری تصویر مجموع همدی چند بردار بر یک محور، برابر است با جمع جبری تصاویر آن بردارها بر آن محور. پس اگر $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4$ اختیار شود داریم:

$$+1 = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + 6\cos\frac{\pi}{4} + 8\cos\frac{\pi}{4} + 12\cos(\alpha, \vec{V}_4)$$

$$\Rightarrow 1 = 2 + 6 + 8 + 12\cos(\alpha, \vec{V}_4)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha, \vec{V}_4) = -\frac{1}{6} \Rightarrow (\alpha, \vec{V}_4) = 120^\circ$$

-۳

$$|\vec{a}| = 2\sqrt{2}, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= (2\sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(6)\cos\frac{\pi}{4} = 8 - 24 = -16$$

۴- شرایط معین بودن تابع به قرار زیر است:

$$1) 4x^2 - 2x + 5 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 2x + 5 = 0 \\ \Delta' = 1 - 20 = -19 < 0 \\ \text{چون ضریب } x^2 \text{ مثبت است} \\ \text{و } \Delta < 0 \text{ پس عبارت همواره مثبت است} \end{cases}$$

$$2) 1 + 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$3) (1 - \sqrt{1 + 2x})^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$4) \left(\frac{2x}{1 - \sqrt{1 + 2x}} \right)^2 < 2x + 9$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9$$

$$\frac{4x^2(1 + \sqrt{1 + 2x})^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2(1 + \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9$$

فرض می‌کنیم: $y = \sqrt{1 + 2x}$

$$(1 + \sqrt{1 + 2x})^2 < 2x + 9$$

پس داریم:

$$(1 + y)^2 < y^2 + 9 \Rightarrow 1 + y^2 + 2y < y^2 + 9 \Rightarrow y < 4$$

$A =$ با فرض $x = 12y$ داریم:

$$2\cos\frac{x}{6} - \sin\frac{x}{3} + 1 = 0 \quad x = 12y$$

$$2\cos 2y - \sin 3y + 1 = 0$$

$$2(1 - 2\sin^2 y) - 3\sin y + 2\sin^3 y + 1 = 0$$

$$2\sin^3 y - 4\sin^2 y - 3\sin y + 3 = 0$$

$$2\sin^3 y (\sin y - 1) - 3(\sin y - 1) = 0$$

$$(\sin y - 1)(2\sin^3 y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \sin y - 1 = 0 \Rightarrow \sin y = 1 \Rightarrow \sin y = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = 12y_1 \Rightarrow x_1 = 24k\pi + 6\pi$$

$$2\sin^3 y - 3 = 0 \Rightarrow \sin y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_{1,2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ y_3 = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 24k\pi \pm 4\pi \\ x_3 = 24k\pi + 8\pi \\ x_4 = 24k\pi + 16\pi \end{cases}$$

حل مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

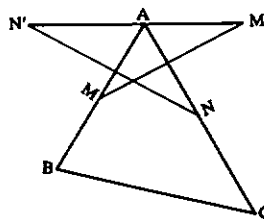
۱- الف: با توجه به خاصیت تقارن محوری داریم:

$$M' \hat{A} N = \hat{N} A M = 60^\circ$$

$$N' \hat{A} M = \hat{M} A N = 60^\circ$$

$$M' \hat{A} N' = \hat{M}' A N + \hat{N} A M = \hat{M} A N'$$

$$\Rightarrow M' \hat{A} N' = 3 \hat{M} A N = 3 \times 60^\circ = 180^\circ$$



پس سه نقطه M' و A و N' روی یک خط راست واقعند.
(ب)

$$AM' = AM = \frac{AB}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$AN' = AN = \frac{AC}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$M'N' = AM' + AN' = \frac{1}{\sqrt{3}} (AB + AC)$$

در صورتی که $\hat{A} \neq 60^\circ$ باشد سه نقطه M' و A و N' روی یک

$$a + b = c + d$$

معادله را می‌توان با روش ساده و مقداتی حل کرد. پس چون

برای معادله فوق داریم:

$$2 - 3 = 9 - 5$$

$$(x+2)(x-3)(x+4)(x-5) = 72$$

بنابراین می‌توان نوشت: $(x^2 - x - 6)(x^2 - x - 20) = 72$

با فرض: $t = x^2 - x$ خواهیم داشت:

$$(t-6)(t-20) = 72 \Rightarrow t^2 - 26t + 120 = 72$$

$$t^2 - 26t + 48 = 0 \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 24$$

$$\begin{cases} x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ x^2 - x = 24 \Rightarrow x^2 - x - 24 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{97}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{97}}{2} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 2 + 2a \quad \text{داریم: } 5$$

$$\Rightarrow 14 - 2xy = 2 + 2a \Rightarrow xy = p = 6 - a$$

$$x+y = s = \pm\sqrt{14} \Rightarrow \begin{cases} x+y = s = \pm\sqrt{14} \\ xy = p = 6 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z' - SZ + P = 0 \Rightarrow x^2 - (\pm\sqrt{14})Z + (6 - a) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 14 - 24 + 2a \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{10}{2}$$

۶- داریم:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_m = a_1 + (m-1)d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = a_1 + nd - d \\ a_m = a_1 + md - d \end{cases}$$

از تفاضل دو رابطه اخیر داریم:

$$a_n - a_m = nd - md \Rightarrow a_n - a_m = d(n - m)$$

$$\Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{5\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{7\pi}{\lambda} = -Y$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \sin^2 \left(\pi - \frac{3\pi}{\lambda} \right) + \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda} + \sin^2 \left(\pi - \frac{5\pi}{\lambda} \right) =$$

$$2\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + 2\sin^2 \frac{3\pi}{\lambda} = 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} - \frac{3\pi}{\lambda} \right) \right)$$

$$= 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} \right) = 2 \left(1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{4\pi}{\lambda} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$= \left[\frac{tg^{rn+1}x}{rn+1} \right]^{\frac{1}{r}} = \frac{tg^{rn+1}(\frac{\pi}{r})}{rn+1} = \frac{1}{rn+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{rn+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{rn+1} = \frac{1}{r}$$

حل مسائل مثلثات سال چهارم تجربی

۱- به ترتیب می توان نوشت:

$$a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x = c$$

$$a(\sin x \pm \cos x) = c - b \sin x \cos x$$

$$a^2(1 \pm \sin 2x) = (c - \frac{b}{2} \sin 2x)^2$$

$$a^2 \pm a^2 \sin 2x = c^2 - bc \sin 2x + \frac{b^2}{4} \sin^2 2x$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$\frac{b^2}{4} \sin^2 2x - (bc \pm a^2) \sin 2x + (c^2 - a^2) = 0$$

$$\Delta = (bc \pm a^2)^2 - b^2(c^2 - a^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \Delta = a^2 \pm 2bc + b^2 \geq 0$$

$$\text{برای معادله } a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c \text{ باید داشته باشیم:}$$

$$\Delta = a^2 - 2bc + b^2 \geq 0$$

پس اگر $\Delta < 0$ و یا $a^2 + b^2 < 2bc$ معادله فوق ریشه حقیقی ندارد.

$$\text{همچنین برای معادله } a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c \text{ باید داشته باشیم:}$$

$$\Delta = a^2 - 2bc + b^2 \geq 0$$

$$a = b \cos \hat{A} + c \cos \hat{B} \quad - 2$$

$$a^2 = b^2 \cos^2 \hat{C} + c^2 \cos^2 \hat{B} + 2bc \cos \hat{C} \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{A} = -\cos(\hat{B} + \hat{C}) \quad \text{می دانیم:}$$

$$\cos \hat{A} = -(\cos \hat{B} \cos \hat{C} - \sin \hat{B} \sin \hat{C}) \quad \text{پس داریم:}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{B} \cos \hat{C} = \sin \hat{B} \sin \hat{C} - \cos \hat{A}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 \cos^2 \hat{C} + c^2 \cos^2 \hat{B} + 2bc \sin \hat{B} \sin \hat{C} - 2bc \cos \hat{A} \\ &= (2R \sin \hat{B})^2 (1 - \sin^2 \hat{C}) + (2R \sin \hat{C})^2 (1 - \sin^2 \hat{B}) \\ &\quad + 2(2R \sin \hat{B})(2R \sin \hat{C}) - 2bc \cos \hat{A} \end{aligned}$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$= 4R^2 (\sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}) - 2bc \cos \hat{A}$$

$$= 4R^2 \left(\frac{b^2 + c^2}{4R^2} \right) - 2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$= \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1$$

(ب) طرف چپ را چنین می نویسیم:

$$\frac{1}{2 \sin 5^\circ} (2 \sin 5^\circ \sin 10^\circ + 2 \sin 5^\circ \sin 20^\circ + 2 \sin 5^\circ \sin 30^\circ + 2 \sin 5^\circ \sin 40^\circ + 2 \sin 5^\circ \sin 50^\circ)$$

پس خواهیم داشت:

$$= \frac{1}{2 \sin 5^\circ} (\cos 5^\circ - \cos 15^\circ + \cos 15^\circ - \cos 25^\circ + \cos 25^\circ - \cos 35^\circ + \cos 35^\circ - \cos 45^\circ + \cos 45^\circ - \cos 55^\circ)$$

$$= \frac{1}{2 \sin 5^\circ} (\cos 5^\circ - \cos 55^\circ) = \frac{2 \sin 30^\circ \sin 50^\circ}{2 \sin 5^\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 50^\circ \cos 5^\circ$$

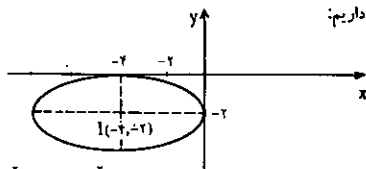
و در نتیجه پس از اختصار لازم داریم:

$$= \frac{1}{2 \sin 5^\circ} (\cos 5^\circ - \cos 55^\circ) = \frac{2 \sin 30^\circ \sin 50^\circ}{2 \sin 5^\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 50^\circ \cos 5^\circ$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱- با توجه به شکل زیر مشاهده می شود که محور کانونی بیضی فوق موازی محور طولها است. پس $a = 4$ و $b = 2$ است. پس داریم:



$$\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$$O(3, -2) \text{ و } c = 3\sqrt{2} \text{ و } a^2 + b^2 = c^2 \text{ و } a = b: \text{ داریم: } 2$$

$$\Rightarrow 2a^2 = c^2 \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, b = 3$$

پس داریم:

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$$

۳- مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود بر هم، بر سهمی می توان رسم کرد خطی هادی سهمی است. پس داریم:

$$(y+3)^2 = -8(x-2)$$

$$\Rightarrow S(\alpha = 2, \beta = -3), \quad yp = -8 \Rightarrow p = -4$$

$$x = \alpha - \frac{p}{2} = 2 + \frac{4}{2} = 4 \Rightarrow x - 4 = 0$$

داریم: ۳

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^{rn}x}{\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tg^{rn}x (1 + tg^2 x) dx$$

$$\sqrt{1+2x} < 3 \Rightarrow x < 4$$

و در نتیجه، دامنه تابع از اشتراک شرایط اخیر حاصل می شود:

$$D_f = \left\{ x \mid -\frac{1}{4} \leq x < 4, x \neq 0 \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) \operatorname{tg} 2x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) - \cos \operatorname{tg} 2x}{\cos \operatorname{tg} 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - 2x)} = \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\operatorname{tg}(-2)(x - \frac{\pi}{4})}$$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \frac{\pi}{4} \\ \left| \begin{aligned} x - \frac{\pi}{4} &= a \\ x &\rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow a \rightarrow 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

با فرض:

داریم:

$$= \sqrt{2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{\operatorname{tg}(-2a)} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{a} \times \frac{-2a}{\operatorname{tg}(-2a)}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{a} \times \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2a}{\operatorname{tg}(-2a)}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2} \times 1 \times 1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

- 6

$$\sin nx = \sin(2y + x)$$

$$\Rightarrow \sin(x + y - y) = \sin(x + y + y)$$

$$\Rightarrow \sin(x + y) \cos y - \sin(x + y) \sin y$$

$$= \sin(x + y) \cos y + \cos(x + y) \sin y$$

$$\Rightarrow 4 \sin(x + y) \cos y = 9 \cos(x + y) \sin y$$

پس از تقسیم طرفین بر عبارت $\sin(x + y) \cos y$ داریم:

$$4 \operatorname{tg}(x + y) = 9 \operatorname{tg} y$$

۷- الف) چون $\sin 90^\circ = 1$ و $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ پس باید ثابت کنیم:

$$8 \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 1$$

می دانیم:

$$\sin 70^\circ = \cos 20^\circ, \sin 50^\circ = \cos 40^\circ, \sin 80^\circ = \cos 10^\circ$$

طرف چپ تساوی را چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} &\frac{8 \times 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\cos 10^\circ} \\ &= \frac{8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{2 \sin 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ} \end{aligned}$$

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

حل:

۱	۱۳	۳	۲۵	۲۲
۲۱	۱۸	۱۱	۶	۹
۲۲	۱۹	۱۲	۱۰	۲
۵	۸	۱۵	۲۰	۱۷
۱۶	۷	۲۴	۴	۱۴

جواب ۳

حل: رقم اول باید عددی باشد که پس از ضرب شدن در ۷ حاصل آن به ۶ ختم شود. این عدد فقط می تواند ۸ باشد. پس خواهیم داشت:

$$* * * ۴ * ۸ \times ۷ = ۶۷۴۳ * ۵۶$$

۸×۷ می شود ۵۶ پس برای این که رقم دوم حاصل ضرب ۵ باشد لازم است که حاصل ضرب ۷ در رقم دوم عدد اول به صفر ختم شود پس رقم دهگان این عدد فقط صفر می تواند باشد.

$$* * * ۴۰۸ \times ۷ = ۶۷۴۳ * ۵۶$$

یعنی داریم: رقم صدگان حاصل ضرب ۸ می باشد زیرا: $۷ \times ۴ = ۲۸$ به ۸ ختم می شود. پس:

$$* * * ۴۰۸ \times ۷ = ۶۷۴۳۸۵۶$$

به همین ترتیب رقمهای دیگر مشخص می شود و خواهیم داشت:

$$۹۶۳۴۰۸ \times ۷ = ۶۷۴۳۸۵۶$$

جواب ۲

حل: اگر در این محل فقط آدم وجود داشت چون ۲۲ سر وجود دارد پس مجموع پاهای آنها $۴۴ = ۲۲ \times ۲$ می شد. اما چون تعداد پاها ۷۲ تا است پس $۲۸ = ۴۴ - ۷۲$ یعنی ۲۸ پا اضافه می باشد و چون هر اسب از هر آدم ۲ پایشتر دارد، پس $۱۴ = ۲۸ : ۲$ بنابراین: ۱۴ اسب و ۸ آدم در آن محل هستند.

جواب ۲

حل: با هر (م) که در منتهی الیه سمت چپ، راست، پایین، و بالای شکل قرار دارد یکبار کلمه مهر را می توان خواند پس: $۴ \times ۱ = ۴$ و با هر (م) که در گوشه شکل واقع است ۲ بار کلمه مهر خوانده می شود. پس $۴ \times ۲ = ۸$ بار؛ لذا در مجموع به ۱۲ صورت می توان کلمه مهر را از روی شکل داده شده خواند. زیرا:

$$۴ + ۸ = ۱۲$$

فرم اشتراک

عزیزانی که مایل به اشتراک ۴ شماره مجله برهان هستند با واریز مبلغ ۵۰۰۰ ریال به حساب جاری ۷۹۱۰/۵ بانک ملت شعبه کریمخان زند به نام مشترکین انتشارات مدرسه، اصل فیش واریزی را همراه با فرم تکمیل شده به آدرس دفتر مرکزی انتشارات مدرسه واقع در خیابان ایرانشهر شمالی، کوچه بهرام چوبینی پلاک ۱۷ ارسال دارند. ■ لطفاً از ارسال وجه نقد جداً خودداری فرمایید.

در صورت مشترک بودن کد اشتراک خود را حتماً ذکر فرمایید:

۱. نام خانوادگی ۲. نام ۳. سال تولد ۴. دختر ☐ پسر ☐

۵. پایه و رشته تحصیلی

۶. نشانی: استان شهرستان خیابان کوچه پلاک

۷. کد پستی ۸. مبلغ واریزی ۹. شماره فیش ۱۰. تاریخ فیش

In the name of God

Borhān

VOL. 3. No. 2

Serial numbers ; 9

Winter 1994

Executive Editor H.R. Amiri

Editorial Board

H.R. Amiri

S.M.R Hashemy Moosavi

A. Ghandehāri

M.H. Rostami

G.R. Yassipour

Advisors(M.Ghamsari; P.Shahryāri)

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

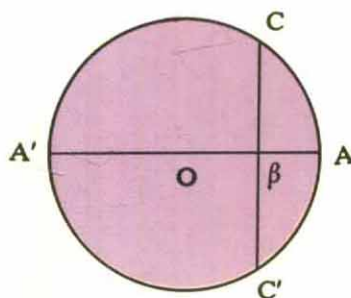
Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e -Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. The first word | |
| 2. You, too, may be successful in your mathematics lessons | Parviz shahriari |
| 3. Cubic equation and its solution | A. Ghandehari and M. Gkamsari |
| 4. Instruction of translation of mathematics articles | Hamid Reza Amiri |
| 5. Locus | M. H. Rostami |
| 6. A brief history of Persian mathematics journals | |
| 7. Fundamental concepts and axioms in solid geometry | Parvis shahriari |
| 8. Propositional functions and quantifiers | Golam Reza Yassipour |
| 9. Rotation in analitic geometry | M. A. Gitizadeh |
| 10. Homogeneous algebraic parameters | Ahmad Sharafeddin |
| 11. Acquaintance with famous mathematicians | Golam Reza Yassipour |
| 12. Solving a fundamental problem of mathematics by elementary methods | |
| 13. Short articles of authentic mathematics journals | Naghmeh Sharikzadeh |
| 14. Graph theory | Golam Reza Yassipour |
| 15. Pigeonhole principle | Mehdi Nassaji |
| 16. Answers to letters | |
| 17. Solutions of contest problems | |
| 18. Contest problems | |
| 19. Problems | Amiri, Ghandehari, Rostami, Hashemi |
| 20. Solutions and hints of problems | |

ابوالوفای بوزجانی

ورسم هفت ضلعی منتظم



گوس، ریاضی‌دان بزرگ آلمانی در سده ۱۹، روشن کرد: هر چند ضلعی منتظم دلخواه را نمی‌توان به یاری خط کش و پرگار در دایره محاط کرد. گوس، در ضمن ثابت کرد، اگر p عددی اول و m توانی از ۲ باشد و داشته باشیم:

$$p = 2^m + 1$$

آن وقت می‌توان راهی برای رسم p ضلعی منتظم محاط در دایره پیدا کرد. مثلاً برای

$$17 = 2^4 + 1 \text{ و } 4 = 2^2$$

خود گوس، روش رسم ۱۷ ضلعی منتظم محاط در دایره را، به یاری خط کش و پرگار، پیدا کرد. با وجود این، ریاضی‌دانان ایرانی - که در دوران دوم ریاضیات کاربردی (از دوران‌های تکامل ریاضیات) به سر می‌بردند، می‌کوشیدند تا روش رسم چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره را، به تقریب و به نحوی که در عمل لازم است، پیدا کنند.

به عنوان نمونه، ابوالوفای بوزجانی (سده چهارم هجری قمری = سده دهم میلادی) این روش تقریبی را برای به دست آوردن پاره خط راستی که برابر با ضلع هفت ضلعی منتظم محاط در دایره مفروض باشد، داده است. روش او، از روی شکل روشن است:

$$|AA'| = 2R; |AB| = \frac{R}{2}; CC' \perp AA'$$

پاره خط راست CB (یا $C'B$)، به تقریب، طولی برابر با طول ضلع هفت ضلعی منتظم محاط در دایره دارد.

آیا می‌توانید میزان خطا را، در این روش تقریبی، پیدا کنید؟