قسمت سوم

داستان جبر

منافع و دام‌های شیءانگاری

آنا اِسفارد و لیُرا لینچوسکی
ترجمه: **زهرا کامیاب**
امیرحسین اصغری، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده
مطلب حاضر، سومین بخش از مقاله‌ی «داستان جبر؛ منافع و دام‌های شیءانگاری» است. در دو بخش قبلی، پس از معرفی جبر از دیدگاه نظریه‌ی شیءانگاری مفاهیم و استفاده از آن برای تجزیه و تحلیل‌های منطقی، هستی‌شناسی و تاریخی توسعه‌ی جبر؛ رشد تفکر جبری از دیدگان روان‌شناسی و به‌عنوان دنباله‌ای از انتقال‌های همواره رو به پیشرفت، از نگاه عملیاتی جبر ساختاری مورد بررسی قرار گرفت. تا این بخش از مقاله، انتقال از جبر عملیاتی محض به جبر ساختاری از یک مجهول بررسی شده است و در ادامه، توسعه‌ی این انتقال به جبر تابعی (از یک متغیر) در این قسمت مطرح می‌شود. در خاتمه، دشواری‌هایی که یادگیرندگان در این نقاط اتصال تجربه می‌کنند، با استفاده از داده‌های تجربی به‌دست آمده از دامنه‌ی وسیعی از منابع، شرح داده می‌شود.

کلیدواژه‌ها: جبر مدرسه‌ای، شیءانگاری مفاهیم، تفکر جبری.

۲.۲.۳ گام دوم: به سمت جبر تابعی. در ادبیات موضوع، گذر از جبر مقدار ثابت (از یک مجهول) به جبر تابعی (از یک متغیر)، به‌خوبی انتقال از رویکرد عملیاتی محض به رویکرد دوگانه‌ی فرایند-نتیجه مستند نشده است. در حقیقت، بیش‌تر آن‌چه در مورد مفهوم تابع نوشته شد، در مورد روشی است که این مفهوم رشد می‌یابد و این‌که بیش‌تر افراد این مفهوم را با دشواری کسب کرده و به کار می‌برند. هر چند همه‌ی این‌ها تا حدودی مرتبط با موضوعی است که در حال حاضر مورد توجه ماست، اما اطلاعات سرراستی که برای فهم مسائل خاص رویکرد تابعی مورد نیاز است، به‌دست نمی‌دهد. در میان موضوعاتی که می‌تواند مورد توجه قرار گیرد، می‌توان به این‌ها اشاره کرد: توانایی دانش‌آموز برای تفکر در مورد فرمول‌های جبری برحسب توابع و آمادگی او برای به‌کار بردن این دیدگاه در زمان مناسب (بنابراین یک بار دیگر مسئله‌ای که با آن مواجهیم تغییرپذیری و انطباق‌پذیری تفکر جبری فرد است).

به دلایل مختلف، مواجه شدن با موضوع فعلی دشوارتر از موضوع قبلی است. یکی از این دلایل این است که، اهمیت یا حتی وجود نقطه‌ی عطفی که الآن در مورد آن صحبت می‌کنیم، مبهم‌تر از قبلی است. حتی اگر تشخیص داده شود، دور از دسترس است. با وجودی که کاملاً روشن است، انتقال از دید عملیاتی به دید فرآیند-نتیجه را کجا باید جست‌وجو کنیم (زیرا این بخشی از گذر از جبر حسابی به نمادین است!)، اما نمی‌توان به‌سادگی لحظه‌ای از یادگیری را مشخص کرد که رویکرد تابع لازم است. بنابراین، تشخیص دادن رویکرد تابعی در میان رویکردهای دیگر در راه حل‌های دانش‌آموزان در مسائل استاندارد مدرسه‌ای، یقیناً یک موضوع بدیهی نیست.

برنامه‌های درسی جدید مدارس، غالباً از ابتدا رویکرد تابعی را معرفی می‌کنند. بنابراین، در ظاهر صحبت کردن در مورد انتقال به این رویکرد معنی نمی‌دهد. به‌عنوان مثال، تصویری بدون جزئیات از یک نوع روش تدریس جبر ارائه می‌کنیم. در این‌جا فرض می‌شود دید ساختاری پیشرفته تقریباً با معرفی نمادهای جبری هم زمان است.

عبارات جبری پیش از این‌که به‌عنوان بخشی از معادله یا نامعادله باشند، معرفی می‌شوند. کودک ۱۳-۱۲ ساله آموزش جبر را با مدل‌سازی موقعیت‌های مختلف «زندگی واقعی» و بیان روابط عددی با استفاده از فرمول‌های نمادین آغاز می‌کند. در این مرحله، هنوز از او خواسته نمی‌شود که هیچ مقداری را محاسبه کند و این کار فقط برای توصیف وضعیتی است که همه‌ی اعداد داده شده است. بنابراین، از همان ابتدا حروف به‌عنوان متغیرها به‌کار می‌روند نه مجهول‌ها. سپس معادلات و نامعادلات به‌تدریج معرفی می‌شوند. آن‌ها به‌عنوان دو مثال مختلف اما بسیار مرتبط از یک مفهوم ریاضی منفرد: فرمول گزاره‌ای[1] (که از این به بعد به اختصار

رویدادهایی که در این مقاله مورد بحث قرار گرفتند، این سوءظن را ایجاد می‌کنند که برای برخی دانش‌آموزان فرمول‌های جبری، چیزی بیش از رشته‌ای از نمادها نیستند که معمولاً رویه‌های تعریف شده‌ی معینی برای آن‌ها به‌کار می‌رود. از منظر این دانش‌آموزان تنها منبع معنی بخشی به ساخت‌های نمادین، دست‌ورزی‌های صوری است

آن‌را با PF نشان می‌دهیم) هستند. این ساخت عمومی به‌عنوان «ترکیبی از نمادها (نام‌های اعداد، حروف، عملگرها، گزاره‌نماها و پرانتزها) تعریف می‌شود و زمانی‌که نام‌های اعداد جایگزین حروف شوند، تبدیل به یک گزاره می‌شود». ایده‌ی PF به زودی در کلاس هفتم معرفی می‌شود و سپس به‌طور هم‌زمان روی معادلات و نامعادلات کار می‌شود. هر PF مجموعه‌ی جوابی[2] (به اختصار TS) دارد. مجموعه‌ی جواب، مجموعه‌ی همه‌ی جایگزینی‌هایی است که PF را تبدیل به یک گزاره‌ی درست می‌کنند. دو PF درست با مجموعه جواب یکسان، هم‌ارز نامیده می‌شوند. حل کردن یک معادله یا نامعادله به‌معنای پیدا کردن مجموعه جواب آن است. به‌عنوان نتیجه‌ی این رویکرد، حتی رویه‌های حل، در اصطلاحات نظریه‌ی مجموعه‌ها توصیف شده است: برای حل معادله‌ای مانند E، فرد باید ساده‌ترین PF ممکن را که با E هم‌ارز است، بیابد. گام‌های اولیه‌ای که باید برای تبدیل یک معادله به یک PF هم‌ارز انجام شوند، عملیات مقدماتی (مجاز) نامیده می‌شوند (در زبان ما، این‌ها فرایندهای ثانویه در جبر مدرسه‌ای هستند).

هر چند مفهوم تابع به‌طور رسمی بعداً ارائه خواهد شد (سال هشتم، گاهی حتی سال نهم)، شیوه‌ی تدریس بالا حاوی مثال خوبی از رویکرد ساختاری- تابعی است: حرف به‌عنوان یک متغیر و یک عبارت جبری به‌عنوان تابعی از یک متغیر ارائه می‌شود و فرمول‌های گزاره‌ای به‌عنوان مقایسه‌هایی بین توابع تفسیر می‌شوند. به‌طور قابل ملاحظه‌ای، تأکید بیش‌تری بر بازنمایی‌های نموداری مجموعه‌های جواب می‌شود که در مورد معادله‌ای با دو متغیر x و y، غالباً نمودار تابع f(x) است. این شیوه‌ی ساختاری غیرقابل انعطاف مواجهه با موضوع، به علت ظرافت، ثبات و عمومیت ریاضی آن بسیار جذاب است. اما این موضوع تا حدودی مغایر با ترتیب شناخت شناسانه و تاریخی است که مفاهیم جبری را با هم مرتبط می‌کند، پس نمی‌توان مطمئن بود رویکرد تابعی بهترین جهت‌گیری برای آغاز باشد.

در یکی از مصاحبه‌هایی که در گروه ۲ (۱۵-۱۴ ساله‌ها، سال نهم) و گروه ۳ (۱۶-۱۵ ساله‌ها، سال دهم) انجام شد، هدف ما ارزیابی آشنایی دانش‌آموزان با رویکرد تابعی و توانایی آن‌ها در به‌کار بردن این رویکرد در زمینه‌های مختلف بود. در مکالمات اولیه با مصاحبه شونده‌ها تلاش کردیم نشان دهیم آن‌ها از «انقطاع آموزشی» گذشته‌اند و رویکرد مقدار ثابت را یاد گرفته‌اند. در حقیقت، دریافتیم آن‌ها می‌توانند از عهده‌ی بسیاری از انواع معادلات و نامعادلات برآیند و جابه‌جایی‌های لازم را برحسب عملیات در دو طرف یک فرمول گزاره‌ای توضیح دهند (به‌عنوان مثال، «در این‌جا 2x را به دو طرف اضافه کردیم... این عمل مجاز است زیرا زمانی‌که آن‌را در دو طرف انجام می‌دهم، دو عمل معادل هستند و دو طرف یکسان باقی می‌ماند»).

تکلیف اول این بود، تصمیم بگیریم رویکرد تابعی در کدام نوع مسائل لازم و یا حداقل مفیدتر از هر دیدگاه دیگری است. کتاب‌های درسی مختلفی را مورد بررسی قرار دادیم و سه مثال به‌عنوان نمونه مشخص کردیم: یک نامعادله‌ی درجه‌ی ۲، یک دستگاه معادلات با مجموعه جواب نامتناهی (معادلات تکین) و یک دستگاه با معادلات پارامتری. در زیر توضیح داده شده که چرا برای عمل کردن روی هر کدام از این مسائل، رویکرد تابعی لازم است.

پیش از ارائه‌ی توضیحات و یافته‌هایمان، به یک ملاحظه‌ی روش‌شناسی اشاره می‌کنیم. زمانی‌که سه پرسش را برای مصاحبه‌شونده مطرح می‌کردیم، به‌خوبی آگاه بودیم که او هنوز از تکنیک‌های پاسخ دادن به بعضی مسائل آگاه نیست (به‌عنوان مثال نامعادلات درجه‌ی ۲). این موضوع بیش‌تر مفید بود تا مضر. از آن‌جایی‌که می‌خواستیم روش‌های دانش‌آموزان را برای تفسیر ساخت‌های جبری تشخیص دهیم، باید از پنهان شدن ادراک دانش‌آموز در پس رفتار الگوریتمی ماشینی او که

بالاخص در حل مسائل استاندارد نمایش داده می‌شد، ممانعت می‌کردیم. فرض بر این بود که حتی مصاحبه‌شونده‌های کوچک‌تر هم همه‌ی اطلاعات لازم را برای انجام دادن تکالیف، حتی آن تکلیف‌هایی که هنوز در مدرسه تمرین نشده‌اند، دارند. پرسش فریبنده این بود که آیا دانش جبری آن‌ها به اندازه‌ی کافی تغییرپذیر و انطباق‌پذیر بود تا حداقل بتوانند مسائل را درک کنند. در گزارش کوتاهی از مصاحبه‌های بالینی که در ادامه می‌آید، سعی نداریم هیچ آماری ارائه کنیم یا تعمیمی بدهیم. ما خودمان را محدود به سه مطالعه‌ی موردی می‌کنیم که روشن‌کننده و کاملاً نوعی هستند. این حقیقت که معلمان ریاضی مصاحبه‌شونده‌ها را افرادی حساس، باهوش و موفق می‌دانستند، این سه رویداد را خیلی بااهمیت می‌سازد.

مسئله‌ی ۱: نامعادله‌ی درجه‌ی ۲

حل کنید: $x^2 + x + 1 > 0$

نامعادله‌ها یک سال پیش از ملاقاتمان با اَلِن (۱۵ ساله) به او معرفی شده بودند. او قبل از انجام مصاحبه در حل نامعادله‌های خطی متبحر شده بود. بنابراین به دلایلی که در بالا توضیح دادیم، ارائه‌ی این مسائل اطلاعات زیادی برایمان تدارک نمی‌دید. فرض می‌شد برای الن نیز مانند بسیاری از دانش‌آموزان، یک نامعادله فقط حالت خاصی از یک فرمول گزاره‌ای باشد و تفاوت زیادی با یک معادله نداشته باشد. با این وجود، برای ما نوع قبلی PF دشوارتر به‌نظر می‌رسید و به وضوح نیاز به نگاه ساختاری پیشرفته‌تری داشت. معادلات ممکن است براساس رویکرد مقدار ثابت فهمیده و حل شوند، یعنی؛ یک حرف به‌عنوان یک عدد مجهول معین و هر طرف یک معادله به‌عنوان یک نتیجه‌ی واقعی از عملیات‌ها روی این عدد تلقی شود. در حالیکه برای یک نامعادله باید مقادیر فرمول تشکیل‌دهنده، برای مقادیر مختلف حرف، مورد آزمون قرار گیرد و مقایسه شود. بنابراین در نامعادله، حرف، نقش متغیر و عبارات تشکیل‌دهنده نقش توابعی از این متغیر را ایفا می‌کنند (بدیهی است که رویکردهای مقدماتی عملیاتی در این‌جا قابل استفاده نیست: برخلاف علامت تساوی، نماد «<» را نمی‌توان به‌عنوان علامت «انجام دادن چیزی» تفسیر کرد). شاید مؤثرترین شیوه‌ی حل نامعادلات درجه‌ی ۲ مانند نمونه‌ای که ما انتخاب کردیم، توجه کردن به نمودار تابع (در نمونه‌ی ما: $x^2 + x + 1$) و انتخاب بخش‌هایی از محور xها است که در زیر نمودار قرار دارد. هر چند همه‌ی دانش‌آموزانی که ما با آن‌ها صحبت کردیم تجاربی در رسم سهمی‌ها داشتند، انتظارات ما از عملکرد آن‌ها خیلی بالا نبود. مطالعه‌ای که ایون[3] (۱۹۸۸) در مورد معلمان ریاضی آینده انجام داد، نشان داده بود که «ارتباط دادن جواب‌های معادلات به مقادیر متناظر تابع در یک نمایش نموداری» تکلیف دشواری است که بسیاری از یادگیرندگان از عهده‌ی آن برنمی‌آیند.

در حقیقت، حتی یکی از مصاحبه شونده‌های ما، از کوچک‌ترها یا بزرگ‌ترها، از رسم نمودار کمک نگرفت. هم‌چنین، حتی یکی از آن‌ها نامعادله را حل نکرد. مکالمه زیر بین اَلن و مصاحبه‌کننده، کاملاً نوعی است.

(۱) م: [اشاره به نامعادله] این چیه؟ چیزی مثل این را چه می‌نامیم؟

(۲) آ: معادله‌ی درجه‌ی ۲.

(۳) م: معادله؟

(۴) آ: نه، نامعادله.

(۵) م: زمانی که آن‌را حل می‌کنیم، به‌دنبال چه می‌گردیم؟

(۶) آ: سعی می‌کنیم بفهمیم، طرف چپ مساوی با چیست؟

(۷) م: منظورت چیه؟

(۸) آ: بررسی می‌کنیم، چقدر بزرگ‌تر از صفر است و آیا بزرگ‌تر از صفر است.

(۹) م: می‌توانی دقیق‌تر بگویی؟ به‌دنبال چی هستی؟ می‌خواهی چه چیزی را به‌دست آوری و آن‌را در آخر بنویسی؟

(۱۰) آ: که $x^2 + x + 1$...، من می‌خواهم x^2 و x را به‌دست بیاورم. سپس می‌توانم جایگزین کنم و امتحان کنم، آیا این معادله . . . این نامعادله درست است یا نه.

(۱۱) م: دوباره بگو. . . می‌خواهی چه چیزی را پیدا کنی؟ صندلی‌ها، مدادها، میزها؟

(۱۲) آ: یک عدد.

(۱۳) م: یک عدد واقعی؟

(۱۴) آ: بله، یک عدد.

(۱۵) م: یک عدد خاص که. . . چه؟

(۱۶) آ: که من می‌توانم جایگزین کنم و یک جواب پیدا کنم.

(۱۷) م: منظورت از «پیدا کردن جواب» چیه؟

(۱۸) آ: جواب، یعنی نامعادله درست باشد.

از آن‌چه الن می‌گوید به‌نظر می‌رسد او در دیدگاه مقدار ثابت فرمول جبری «گیر افتاده است» در اظهارات ۶ و ۹ او اشاره می‌کند $x^2 + x + 1$ فقط یک مقدار تعریف شده دارد. علاوه بر این، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶ نشان

می‌دهد برای او حرف x، فقط نوعی کد برای یک عدد واقعی معین است. نمی‌توان انتظار داشت الن با این رویکرد از عهده‌ی مسئله برآید. برای حل نامعادله او به برخی رویه‌های متداول قدیمی برگشت و به وضوح امیدوار بود که آن‌ها به او کمک کنند، حتی اگر نتواند دلیلش را بیان کند.

(۱۹) م: آیا می‌دانی چگونه باید چیزی را که می‌خواهی انجام بدهی؟

(۲۰) آ: شاید. . . [می‌نویسد
$x_{۱,۲} = (-۱ \pm \sqrt{۱ - ۴ \times ۱ \times ۱}/۲)$]

در این‌جا ریشه‌ی دوم ۳− را داریم. جواب ندارد.

(۲۱) م: پس؟

(۲۲) آ: پس [به نامعادله اشاره می کند] درست نیست.

(۲۳) م: منظورت چیه؟

(۲۴) آ: این‌که هر چیزی را جایگزین کنم، نامعادله کوچک‌تر یا شاید مساوی صفر می‌شود، اما بزرگ‌تر از صفر نمی‌شود.

اَلن نمی‌توانست رویکردی تابعی را به کار برد که او به او اجازه می‌داد نامعادله را به شیوه‌ی معناداری مورد بررسی قرار دهد. این ضعف موجب شد او رفتاری ماشینی انجام دهد. این رفتار براساس عادت‌هایی بود که او هرگز تلاش نکرد آن‌ها را اصلاح کند. ریشه‌ی دوم یک عدد منفی برای او نشانه‌ای بود که «هیچ جوابی» وجود ندارد (در حالی‌که در حقیقت، هر عددی در نامساوی صدق می‌کند!) او به‌طور غیرارادی پاسخ داد و هیچ تلاش نکرد تصمیمش را به تعویق بیندازد تا بررسی کند پاسخ چگونه به محتوای سؤالی که از او پرسیده شده ارتباط دارد.

مسئله‌ی ۲: دستگاه معادلات تکین

حل کنید:

$$\begin{cases} ۲(x - ۳) = ۱ - y \\ ۲x + y = ۷ \end{cases}$$

تکین‌ها و آن‌چه که در حاشیه‌ی تعاریف ریاضی اتفاق می‌افتد؛ غالباً حساس‌ترین ابزارهایی هستند که با آن‌ها، درک دانش‌آموزان از مفاهیم جدید، جست‌وجو و اندازه‌گیری می‌شود. این امر، برای دستگاه معادلات تکین نیز برقرار است.

بدون رویکرد تابعی به فرمول‌های جبری، فرد احتمالاً درک نمی‌کند که یک دستگاه معادلات خطی ممکن است بی‌نهایت جواب داشته باشد. اگر حروف در معادلات، مجهول را نشان دهند و مجهول‌ها اعداد معینی باشند، چگونه می‌توان انتظار داشت یک یا هر دوی این اعداد معین، «هر عددی» باشند؟

علاوه بر این، در حالتی که دو معادله‌ی وابسته‌ی خطی داریم، در حقیقت، مجموعه‌ی جواب، یک تابع است: برای هر مقدار x، یک مقدار متناظر برای y وجود دارد. برای آن‌که دانش‌آموز این آمادگی را داشته باشد، باید درک کند که هر کدام از معادلات تشکیل‌دهنده ممکن است برای نمایش یک تابع به‌کار روند و نمودارهای دو تابع می‌توانند در هر تعداد نقطه بر هم منطبق شوند. فقط با درک این موضوع است که او خواهد توانست تساوی واضحی مانند ۰=۰ را به‌طور معناداری تفسیر کند. این تساوی معمولاً به‌عنوان نتیجه‌ی نهایی از رویه‌ی متداول حل دستگاه معادلات خطی وابسته به هم به‌دست می‌آید.

برخلاف معادلات درجه‌ی ۲، موضوع معادلات تکین باید برای همه‌ی دانش‌آموزان حتی کوچک‌ترین آن‌ها شناخته شده باشد. به‌طور معمول، تقریباً هم‌زمان با معرفی دستگاه معادلات (سال نهم) به این موضوع اشاره می‌شود. با این وجود، برخی از مصاحبه‌شونده‌ها به مسئله‌ی ۲ پاسخ‌هایی از این قبیل دادند: «مجموعه‌ی جواب تهی است» یا « x و y ممکن است هر عددی باشند» (هیچ ارتباط تابعی بین x و y مشخص نشد). در این‌جا به روش خاصی که کامیلیای ۱۵ ساله (دانش‌آموز سال نهم) با مسئله درگیر شد، نگاه دقیق‌تری داریم. کامیلیا بعد از تبدیل‌های متعدد به این‌جا رسید:

$$\begin{cases} ۲x + y = ۷ \\ ۲x + y = ۷ \end{cases}$$

(۱) ک: این یک معادله است. من باید حلش کنم؟ [شروع به زمزمه کرد.] فقط یک لحظه، ۲x...۲x را از دو طرف کم می‌کنیم [می‌نویسد: $y = ۷ - ۲x$]. $۷ - ۲x$را به جای y می‌گذاریم. [در معادله‌ی دوم جایگزین میکند؛ می‌نویسد: $۲x + (۷ - ۲x) = ۷$؛ ساده می‌کند و به ۷=۷ می‌رسد.]

(۲) م: پس؟

(۳) ک: پس x مساوی صفر است [می‌نویسد $x = ۰$]. y را هم می‌خواهید؟

(۴) م: من نمی‌دانم، خودت تصمیم بگیر. معمولاً تکلیفی مثل این را در کلاس چگونه حل می‌کنی؟ در آخر چه می‌نویسی؟

(۵) ک: جواب.

(۶) م: خوب، جواب را بنویس.

(۷) ک: اگر x صفر باشد y، ۷ است. حالا آن‌را در معادله‌ی اول

می‌گذارم. . . نه، در دومی. بنابراین، دو برابر صفر می‌شود صفر. . . . [به تساوی ۷=۷ می‌رسد] بنابراین جوابم درست است: (۷ و ۰).

(۸) م: این تنها جواب است؟

(۹) ک: بله.

کامیلیا باید در جست‌وجوی میان‌برهای معنادار، دائماً مسئله را از دید بالاتری مورد بازبینی قرار می‌داد. اما او در عوض به سمت وضعیتی با دغدغه‌ی کمتر که از نظر اومطمئن‌تر و الگوریتمی بود، منحرف شد. در نقطه‌ای که دو معادله یکی شدند، حقیقتی که او به وضوح در (۱) بیان کرد، نتیجه‌ی ترکیب دید تابعی و دانش او از توابع خطی، می‌توانست فوراً او را به پاسخ برساند. اما کامیلیا، ناآگاه به این گزینه‌ی ساده، باقی ماند و در عوض روش جایگزینی متداول را به‌کار برد.

همانند الن، کامیلیا احتمالاًبرحسب مقادیر ثابت فکر می‌کرد نه متغیرها و توابع. اعمال او را می‌توان با این فرض توضیح داد که برای او، x و y، اعداد خاصی را نمایش می‌دهند. به‌عبارت دیگر، او ممکن است بدون این‌که واقعاً در مورد معنای حروف هیچ تفکری کرده باشد، نمادها را فقط به روشی متداول مورد دست‌ورزی قرار داده باشد. انتظار او برای یافتن یک عبارت به شکل «عدد=x» در انتهای فرایند، به اندازه‌ی کافی قوی بود که موجب شد او اشتباه استدلال کند. (در (۳) از ۷=۷ نتیجه گرفت $x = ۰$). عقیده‌ی او در مورد ماهیت کلی جواب موجب شد او نسبت به اشتباهش حساس نباشد. او حتی زمانی که مصاحبه‌کننده از علت تصمیمش پرسید، نظرش را عوض نکرد:

(۱۰) م: چگونه از ۷=۷ نتیجه گرفتی $x = ۰$؟

(۱۱) ک: x حذف شد. پس من می‌توانم ۷ را حذف کنم و سپس صفر برابر x، مساوی ۰ است.

مسئله‌ی ۳: معادلات پارامتری

آیا دستگاه معادلات خطی زیر برای هر مقدار k یک جواب دارد؟

$$\begin{cases} k - y = ۲ \\ x + y = k \end{cases}$$

آشنایی ما با متغیرها غالباًموجب عدم حساسیت ما نسبت به تفاوت ساده بین معادلات با ضرایب عادی و پارامترها می‌شود. برای افرادی که در به کار بردن تکنیک‌ها تبحر خوبی دارند، این سؤال که آیا آن‌ها روی اعداد یا حروف عمل می‌کنند، ظاهراً بی‌معنی است. بنابراین، حتی برای معلمان تفاوت مفهومی زیادی بین معادلات معمولی و معادلات پارامتری روشن نیست. (ضمناً، هم‌چون بیش‌تر ریزه‌کاری‌های مفهومی دیگر، نگاهی به تاریخ می‌تواند چشم آن‌ها به این واقعیت را باز کند.)

در چنین مسائلی، اشیائی که انتظار می‌رود دانش‌آموز مورد توجه قرار دهد فقط اعداد نیستند، بلکه توابع هستند. برای فهمیدن سؤال، فرد باید درک کند که هر کدام از معادلات $k - y = ۲$ و $x + y = k$ یک خانواده از توابع خطی را نمایش می‌دهد (یا به‌عبارت دیگر، بر خانواده‌ای از مجموعه‌های نامتناهی از زوج‌های مرتب از اعداد دلالت می‌کند) و این که برای مقادیر مختلف k، زوج‌های مختلفی از این توابع به‌دست می‌آید. یکی از روش‌ها برای تفسیر حدسی که در مسئله‌ی ۳ ارائه شده این است که نشان دهیم برای هیچ زوجی از معادلات، نمودار دو تابع موازی نیستند. گام مفهومی بلندی برای رسیدن به این تفسیر باید برداشته شود و حتی برخی معلمان باتجربه هم نمی‌توانند به این تفسیر برسند.

در این مسئله‌ی خاص، اگر رویکرد تابعی به‌همراه دانش توابع خطی، نه تنها برای فهمیدن سؤال بلکه پاسخ دادن به آن به کار رود، فوراً استدلال مناسب بدون هیچ محاسبه‌ای پیدا خواهد شد. برای نشان دادن این‌که مجموعه‌ی جواب هیچ وقت تهی نیست، کافی است بفهمیم که نمودار معادله‌ی اول $(k - y = ۲)$ یک خط افقی مستقیم و نمودار معادله‌ی دوم $(x + y = k)$ یک خط مایل است. چنین خطوط مستقیمی باید در یک نقطه بر هم منطبق شوند. راه حل جبری دیگر شامل به کار بردن تکنیک‌های متداول حل و پیدا کردن این حقیقت است که آیا عملیات‌ها هیچ محدودیتی روی مقدار k می‌گذارند یا نه (در این مورد هیچ محدودیتی وجود ندارد و این نشان می‌دهد چرا مجموعه‌ی جواب، هیچ وقت تهی نیست).

زمانی که مسئله را به مصاحبه‌شونده‌ها ارائه می‌کردیم به دلایل زیادی انتظار داشتیم همه‌ی آن‌ها و بالاخص بزرگ‌ترها، حداقل بتوانند پرسش را درک کنند. علاوه بر این، امیدوار بودیم که روش تابعی اثبات ادعا به‌طور خودبه‌خودی رخ دهد.

در واقع، به این دلیل که در مدرسه، از ابتدا برای فرمول‌های گزاره‌ای رویکرد تابعی ترغیب می‌شد، همه‌ی دانش‌آموزان با توابع خطی و خواص و بازنمایی‌های آن‌ها آشنا بودند. علاوه بر این، دانش‌آموزان بزرگ‌تر، دوره‌ای در هندسه‌ی تحلیلی گذرانده بودند و زمانی که ما با آن‌ها صحبت می‌کردیم، تقریباًیک سال بود که ریاضی عمومی را می‌گذراندند. برخلاف همه‌ی این‌ها، حتی یکی از آن‌ها دانش توابع خطی را برا اثبات این‌که

وجود جواب مستقل از مقدار k است، به‌کار نبرد. بعضی از آن‌ها (دو تا از هر گروه سنی) با به کار بردن دست‌ورزی‌های استاندارد جبری به سؤال پاسخ دادند. مسئله برای بقیه غیرقابل درک بود. مکالمه‌ی زیر با دینا (۱۶ ساله، سال دهم) معرف و معنادار است.

زمانی‌که دینا با مسئله مواجه شد، در حل آن ناتوان بود. او از مصاحبه‌کننده پرسید، انتظار می‌رود او چه کاری انجام دهد. مسئله به

دانش‌آموزان معمولاً روی معانی عمل می‌کنند و زمانی‌که برنامه‌های آموزشی برای رشد مناسب معانی موفق نباشند، دانش‌آموزان معانی خودشان را خلق می‌کنند. این معانی گاهی به هیچ وجه مناسب نیستند

هیچ‌عنوان برای او روشن نبود. بعد از یکی دو دقیقه نگاه کردن به مسئله، پرسید: «من دارم در تاریکی کورمال کورمال می‌روم؟» در این‌جا بخشی از مکالمه‌ی ما با او آمده است:

(۱) د: [سؤال را به آرامی می‌خواند] «. . . یک جواب دارد . . .»

(۲) م: «یک جواب دارد» چه معنایی دارد؟

(۳) د: این‌که می‌توانیم یک عدد به جای k بگذاریم تا درست شود.

(۴) م: زمانی‌که می‌گویم دستگاه برای هر مقدار k جواب دارد «جواب» چه معنایی دارد؟ جواب یک عدد است یا چیست؟

(۵) د: بله، یک عدد است.

(۶) م: یک عدد؟

(۷) د: بله، عددی است که اگر به‌جای k بگذاریم، دستگاه درست می‌شود.

همان‌طوری که در این‌جا دیده شد، دینا به وضوح با درک معنای اصطلاح «جواب» مشکل داشت. یک تفسیر ممکن از اظهارات ۳ و ۷ این است که برای او، جمله‌ی «معادلات یک جواب دارند» هم‌ارز با این ادعا بود که «معادلات درست هستند» (گفته‌ی ۳) مثل این‌که همه‌ی مؤلفه‌های معادلات، مقادیر مشخص داشتند. احتمالاً براساس اشارات کلامی، او تصمیم گرفت که در این مسئله تمرکز بر k است تا بر x و y. در مکالمه‌ی بعدی مصاحبه‌کننده بر ارائه‌ی توضیحات روشن‌تر اصرار کرد و به زودی مشخص شد که دینا بر موضع خودش ثابت نیست. بدون تردید و بدون هیچ توضیح، او تمرکز را از k به x و y برد.

(۸) م: اصطلاح «جواب» در این‌جا به چه چیزی ارجاع می‌دهد؟ جواب چه چیزی؟

(۹) د: معادلات $x + y = k$ و $k - y = ۲$.

(۱۰) م: جواب این معادلات چیست؟

(۱۱) د: وقتی که ما اعداد را جایگزین می‌کنیم. . .

(۱۲) م: جایگزین چه چیزی؟

(۱۳) د: جایگزین x و y و k و درست می‌شود.

(۱۴) م: پس، یک‌بار دیگر، در این پرسش جواب‌هایی که درباره‌ی آن‌ها صحبت می‌کنیم، چه هستند [اشاره به کلمات «یک جواب دارد»]؟

(۱۵) د: من فکر می‌کنم. . . من فکر می‌کنم ما سه عدد می‌خواهیم: x و y و k.

یک تفسیر ممکن این است که دینا مثل الن گرفتار رویکرد مقدار ثابت بود. او نمی‌خواست از دید بالاتری به موضوع نگاه کند؛ جایی‌که کمک می‌کرد بفهمد اشیایی که باید مورد توجه قرار دهد، توابع هستند نه اعداد. دیدن این موجودات مجرد از طریق نمادهای استاندارد به وضوح فراتر از توان او بود، چه برسد به این‌که بتواند براساس آن‌ها عمل کند. این محدودیت موجب شد او نتواند سؤال را به روش معنادار و سازگاری تفسیر کند. این باعث شد که او گیج و درمانده شود. بنابراین، زمانی‌که از او پرسیده شد قرار است به دنبال چه چیزی بگردد، او انتخابی نداشت و تلاش کرد با بخش‌هایی از عبارات استانداردی که در گذشته به‌کار آمده بودند، «به‌طور تصادفی کار کند». لازم به گفتن نیست روشی که دینا تلاش کرد مسئله را حل کند، سردرگم بودن او را نشان می‌دهد: او k را از معادله‌ی اول به دست آورد (نوشت $k = ۲ + y$) و آن‌را در دومی جایگزین کرد ($x + y = ۲ + y$). در این‌جا او متوقف شد و نتوانست کار بیش‌تری انجام دهد.

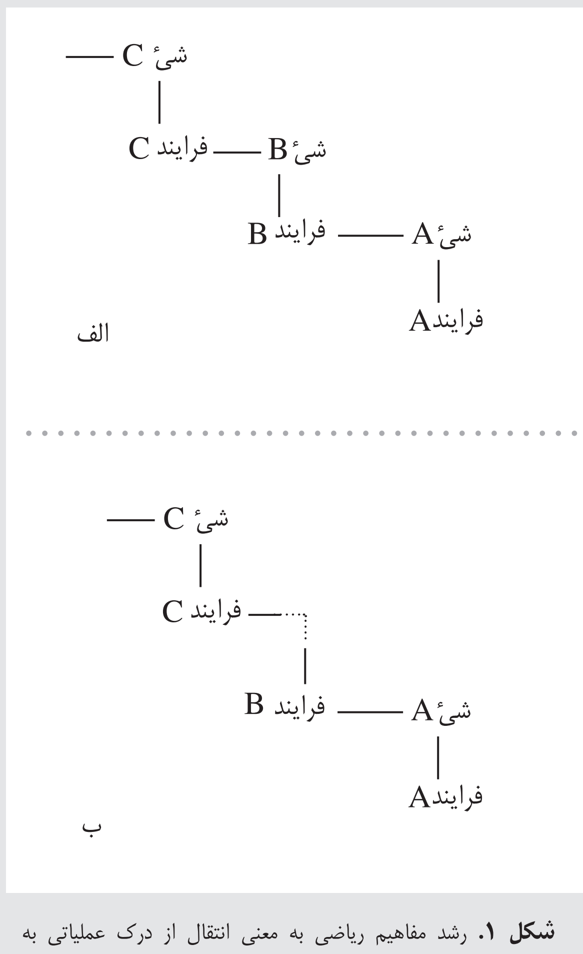
قبل از این‌که این بخش را پایان دهیم، باید متذکر شویم در این قسمت از مکالماتی که انتخاب کردیم، هر چند هیچ کدام از دانش‌آموزان نتوانستند رویکرد تابعی را نشان دهند، اما دو نفر از سه نفر مصاحبه‌شونده، در موقعیت‌های دیگر توانایی تفکر تابعی را نشان دادند. به‌عنوان مثال، دینا نامعادله‌ی درجه‌ی ۲ را به شیوه‌ی درستی تفسیر کرد: به‌عنوان مسئله‌ای که احتمالاً مجموعه‌ای نامتناهی از مقادیر برای متغیر دارد که مقدار عبارت درجه‌ی ۲ را مثبت می‌کند. الن مسئله‌ی ۳ را با دست‌ورزی روی معادلات حل کرد، اما ظاهراً درک کمی از مسئله داشت.

پیامی که از همه‌ی این‌ها به‌دست می‌آید این است که: دید ساختاری لزوماً فراتر از مجموعه‌ی رویکردهایی که دانش‌آموزان به‌طور بالقوه در اختیار داشتند، نبود. بلکه مسئله‌ی مهم، انطباق‌پذیری بود: رویکرد تابعی همیشه در دسترس نبود و حتی در صورت لزوم هم به‌طور غیرارادی مورد

استفاده قرار نمی‌گرفت.

۳.۳ زمانی‌که چیزی اشتباه است: رویکرد شبه ساختاری

با وجود این‌که رویکرد تابعی در مدارس ترغیب می‌شود و با وجود این واقعیت که دانش‌آموزانی که ما با آن‌ها صحبت کردیم، در عملکردشان در ریاضی نمرات خیلی بالایی داشتند، آن‌چه که از طریق مصاحبه‌ها به‌دست آمد، هشداردهنده بود. دانش‌آموزانی که معمولاً موفق بودند، زمانی‌که در مورد فرمول‌های گزاره‌ای برحسب اصطلاحات ساختار پیشرفته‌ی تابع و مجموعه جواب فکر می‌کردند، توانایی خیلی محدودی نشان می‌دادند. لازم است این واقعیت مورد توجه خاص قرار گیرد، زیرا هم‌چون خطری در کمین است. خطری که ما آن‌را در جایی دیگر، برداشت[4] کم ارزش معنایی[5] یا شبه ساختاری[6] نامیدیم (اسفارد، ۱۹۹۱، ۱۹۹۲؛ لینچوسکی و اسفارد، ۱۹۹۱ را ببینید).



شکل ۱. رشد مفاهیم ریاضی به معنی انتقال از درک عملیاتی به ساختاری. الف) یک زنجیره رشد «سالم»؛ ب) یک زنجره رشد شکسته شده: فرایند B تبدیل به شئ نشده است، بنابراین، ارتباطی بین B و C نیست.

در این‌جا این اصطلاحات را توضیح می‌دهم. همان‌طور که قبلاً شرح دادیم، اشیای مجردی مانند توابع و مجموعه‌ها، نقش رابط را بین دانش قدیم و جدید ایفا می‌کند (شکل ۱-الف را ببینید). توابع در جبر، فرایندهای حسابی (فرایندهای اولیه) و دست‌ورزی‌های صوری جبری (فرایندهای ثانویه) را به هم متصل می‌کنند. بنابراین، شئ‌انگاری فرایندهای اولیه، یا در مورد جبر، به‌دست آوردن دیدگاه تابعی ساختاری، درک رابطه‌ای[8] را تضمین می‌کند. با این وجود، داده‌هایی که تا این‌جا به‌دست آوردیم، شواهد کافی از این‌که شئ‌انگاری ذاتاً خیلی دشوار است، در اختیار ما می‌گذارد. این‌که در یک سطح خاص و در زمینه‌های معین، رویکرد ساختاری عملاً در دسترس برخی از دانش‌آموزان نیست، دشواری‌های زیادی را به بار می‌آورد. زمانی‌که زنجیر رشد گسسته شد (شکل ۱-ب) فرایند یادگیری محکوم به فناست: بدون اشیای مجرد، فرایندهای ثانویه «در فضا معلق می‌مانند»- آن‌ها بالاجبار باید انجام شوند. . . اما روی هیچ چیز. از آن‌جا که دانش‌آموز نمی‌تواند تصوری از موجودات غیرعینی (توابع، مجموعه‌ها) که باید مورد دست‌ورزی قراردهد داشته باشد، تصاویر و نمادها را به‌عنوان جایگزین به کار می‌برد: نمودار یک تابع یا یک فرمول جبری، نام یک عدد، حروف '$\varnothing$' و 'x' — هر کدام از این علائم به خودی خود تبدیل به یک شئ می‌شود و بر چیز دیگری دلالت نمی‌کند (این‌که چنین مشخصه‌ای چقدر واقعی است را می‌توان از مطالعه‌ی واگنر[9]، ۱۹۸۱، به‌دست آورد. این مطالعه نشان می‌دهد برای اکثریت دانش‌آموزان دبیرستانی، از تغییر نام متغیرها یک معادله‌ی کاملاً جدید به‌دست می‌آید). در این حالت خواهیم گفت، یادگیرنده یک مفهوم شبه ساختار را رشد داده: او به اشتباه دلالت‌کننده[10] به کار می‌برد. زمانی‌که اشیای مجرد و تأثیر متحدکننده‌ی آن‌ها وجود ندارد، دانش جدید، از زیربناهای عملیاتی آن و سیستم رشد یافته‌ی مفاهیم قبلی جدا می‌ماند. در این شرایط فرایندهای ثانویه کاملاًدلخواه به‌نظر می‌رسند. حتی ممکن است دانش‌آموزان بتوانند این فرایندها را انجام دهند، اما درک آن‌ها ابزاری باقی می‌ماند.

در مکالمات ذکر شده در بخش آخر، رویدادهای نگران‌کننده‌ای وجود داشت. در این رویدادها علائمی وجود دارد که نشان می‌دهد مصاحبه‌شونده‌هاتمایل به رویکرد شبه‌ساختاری دارند. روشی که الن سعی کرد مسئله را حل کند یک مثال برجسته است (اظهارات ۲۴-۱۹). او به وضوح نسبت به تفاوت بین یک نامعادله‌ی درجه‌ی ۲ و یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ بی‌توجه بود و فقط شکل طرف چپ، عبارت $x^2 + x + 1$ سرنخ‌هایی برای تصمیم‌های او فراهم کرد. او به‌طور ماشینی فرمول را

برای ریشه‌ها به‌کار برد و نتیجه را مانند زمانی‌که فرمول را برای حل معادلات به‌کار می‌برد، تفسیر کرد. دینا نتوانست دقیقاً به‌تفاوت بین نقش پارامتر k و متغیرهای x و y اشاره کند و سردرگمی او در درک معنای «جواب» در زمینه‌ی خاص مسئله‌ی ۳، نمونه‌ی دیگری را نشان می‌دهد. هر دو دانش‌آموز طوری عمل کردند که انگار نمی‌دانستند رشته‌های نمادها را می‌توان با توجه به زمینه، به شیوه‌های مختلف تفسیر کرد. به‌نظر می‌رسید آن‌ها وجود اشیائی خارج از خود حروف را درک نمی‌کردند (شاید برخی اعداد مجهول استثنا باشند، اما به زودی ثابت شد این تفسیر ناکارآمد است).

درواقع به‌نظر می‌رسد هر دو مورد مثال‌های نوعی از تفکر شبه ساختاری باشند: هر دو دانش‌آموز به گونه‌ای عمل می‌کردند انگار آن‌ها نوعی شیء را مورد بررسی قرار می‌دهند، اما تفکر آن‌ها به کلی انعطاف‌ناپذیر بود و نوع مناسبی از تفسیر ساختاری در دسترس نبود. مطالعه‌ی ما (اسفارد و لینچوسکی، ۱۹۹۳) به وضوح نشان داد این نوع مفاهیم کاملاًشایع هستند. در این مطالعه از ۲۸۰ دانش‌آموز دبیرستانی (۱۷–۱۵ ساله) مستقیماً سؤالاتی درمورد معنای مفاهیم جبری مانند حل معادلات، عملیات‌های مجاز و هم‌ارزی معادلات پرسیده شد. اکثریت قریب به اتفاق دانش‌آموزان نمی‌توانستند توجیه معقولی در مورد عملیات‌های مجاز داشته باشند. واضح بود این عملیات برای آن‌ها چیزی بیش‌تر از «قوانین بازی» دلخواه نبود. دقیق‌تر بگوییم در نظر بسیاری از پاسخ‌دهندگان، حل کردن معادلات و نامعادلات معادل با انجام دادن یک الگوریتم معین بود. در این بازی، عبارت به شکل «عدد=x» یا «عدد « x» یک نشانه‌ی مکث بود.

ما قبلاً مشاهده کردیم بسیاری از دانش‌آموزان ظاهراً نمی‌توانند روی فرمول‌های گزاره‌ای تکین عمل کنند – یعنی معادلات و نامعادلاتی که در آن‌ها متغیر در یک مرحله‌ی معین از فرآیند حل، ناپدید می‌شود. این ادعا را با مورد کاملیا نشان دادیم (مسئله‌ی ۲). اکنون یک دلیل احتمالی این دشواری آشکارتر می‌شود. اگر دانش‌آموز نتواند اشیای مجردی که در پس نمادهاست درک کند، او به صورت «برنامه‌ریزی شده» یک مسئله را زمانی حل شده فرض کند که عبارتی به شکل «عدد=x» یا «عدد « x» به‌دست آمده باشد. زمانی‌که چنین عبارتی ظاهر نشود او احساس سردرگمی و ناتوانی می‌کند. در ادامه، گزیده‌ای از مصاحبه‌ی ما با نیومی (۱۵ ساله) آمده است که حدسیات ما را باورپذیرتر می‌سازد.

زمانی‌که نیومی مسئله‌ی ۲ را حل می‌کرد، به مرحله‌ای رسید که اولین معادله از دو معادله‌ی داده شده به ۱=۱ تبدیل شد.

(۱) ن: یک مساوی یک است. درست است اما چیزی به ما نمی‌دهد. شاید من نباید پرانتز را [معادله ی اول] باز می‌کردم... نمی‌دانم...

(۲) م: در مورد جواب دستگاه معادلات چه می‌توانی بگویی؟

(۳) ن: این‌که یک جواب دارد.

(۴) م: آن جواب چیست؟

(۵) ن: یک. عدد ۱. درواقع... درواقع فکر نمی‌کنم این‌طور باشه.

(۶) م: پس؟

(۷) ن: هیچ جوابی ندارد. یک مجموعه‌ی تهی.

(۸) م: چطوری به این نتیجه رسیدی؟

(۹) ن: زیرا همه‌ی این کارها را انجام دادیم... ۲x را به‌دست آوردیم و... تا مقدار y را به‌دست آوریم. ما این‌را جایگزین کردیم [در معادله‌ی‌اول y − ۷ به جای ۲x] و x باقی نماند، فقط y داشتیم. پس از آن y هم نداشتیم.هدف ما پیدا کردن مقدار y بود و موفق نبودیم. بنابراین، من فکر می‌کنم در این‌جا یک مجموعه [جواب] تهی داریم.

نیومی در توضیح عدم موفقیتش (خط ۹) به‌وضوح به این واقعیت اشاره می‌کرد که او به‌عبارت مورد انتظاری به شکل «عدد=y» نرسید. از آن‌جایی‌که دیدگاه او به موقعیتی محدود بود که باید در آن چنین عبارتی در انتها ظاهر شود، «عدم موفقیت» در فرایند پیدا کردن جواب، به‌عنوان عدم وجود نتیجه برای حل تفسیر شد.

۴. سخن آخر: ما کجا هستیم و کجا باید باشیم؟

رویدادهایی که در این مقاله مورد بحث قرار گرفتند، این سوءظن را ایجاد می‌کنند که برای برخی دانش‌آموزان فرمول‌های جبری، چیزی بیش از رشته‌ای از نمادها نیستند که معمولاً رویه‌های تعریف شده‌ی معینی برای آن‌ها به‌کار می‌رود. از منظر این دانش‌آموزان تنها منبع معنی بخشی به ساخت‌های نمادین، دستورزی‌های صوری است.

ظاهراً، این دیدگاه خیلی نزدیک به دیدگاهی است که توسط پیکاک[12] و همکارانش ارائه می‌شود. در حقیقت، تصویر دانش‌آموزان و نظر صورت‌گرایان را نمی‌توان یکی گرفت؛ تفاوت‌ها معنادارتر از شباهت‌هاست. باور در مورد ماهیت دستورزی‌های نمادین، جایی است که صورت‌گرایان و دانش‌آموزان امروزی از یکدیگر جدا می‌شوند. صورت‌گرایان در هنگام کار کردن با نمادها بر ترکیب عملیات تمرکز می‌کنند (گریگوری[13]، ۱۸۴۰). عملیات‌هایی که فرض می‌شود دانش‌آموز دبیرستانی بر آن‌ها مسلط است. به‌عنوان مثال، آن‌هایی که به‌عنوان تعمیم

محاسبات حسابی تفسیر می‌شوند، برای صورت‌گرایان فقط یک نقطه‌ی حرکت هستند. این عملیات تنها ورودی‌های فرایندهایی هستند که آن‌ها واقعاًعلاقه‌مند به بررسی آن می‌باشند. به‌عبارت دیگر، جبر صورت‌گرایان از آن‌جا شروع می‌شود که جبر مدرسه‌ای تمام می‌شود. علاوه بر این، هر چند ریاضی‌دان و دانش‌آموز عملیات‌های صوری را دلخواه در نظر می‌گیرند، برای صورت‌گرا چنین رویکردی، یک موضع با انتخابی تعمدی است، در حالی‌که برای دانش‌آموز نتیجه‌ی غیرقابل اجتنابی از ناتوانی اساسی او برای ارتباط دادن قواعد جبری با قوانین حساب است.

زمانی‌که فرد روی ساخت‌های جبری عمل می‌کند دیدگاهی دارد، ما این مقاله را با فهرستی از دیدگاه‌های احتمالی آغاز کردیم. در سرتاسر بحث بر اهمیت تغییرپذیری و انطباق‌پذیری تفکر دانش‌آموز تأکید کردیم. نتایجی که به‌دست آوریدیم خیلی امیدوارکننده نیست. به شیوه‌ای کاملاً سازگار، همه‌ی نتایج نشان داد که دانش‌آموزان غالباً نمی‌توانند روی مسائلی کار کنند که از الگوریتم‌های استاندارد پیروی نمی‌کنند. از آن‌جایی‌که آشکار شد رویکرد تابعی حتی برای دانش‌آموزان خوب هم قابل دسترس نیست، دشوار نیست بفهمیم چرا رویکرد ماشینی و شبه ساختاری معمولاً بر تفکر دانش‌آموز غالب است و مانند یک علف هرز بیش از حد رشد یافته و هیچ جایی برای دیدگاه‌های معنادار دیگر باقی نمی‌گذارد.

همان‌گونه که بارها توضیح دادیم، «حس معنادار بودن با توانایی «دیدن» ایده‌های مجرد در پس نمادها همراه است. با این وجود، «اشیا و ساختارهای ریاضی که معلم می‌تواند «ببیند»، احتمالاً برای دانش‌آموز آشکار نیست» (کاب[۱۴]، ۱۹۸۸). از طرف دیگر، این ادعا درست نیست که فعالیت‌ها و تصمیم‌های دانش‌آموز به‌طور کامل از یک منطق درونی تهی است. ما هم مانند دیویس (۱۹۸۸) خواهیم گفت «دانش‌آموزان معمولاً روی معانی عمل می‌کنند و زمانی‌که برنامه‌های آموزشی برای رشد مناسب معانی موفق نباشند، دانش‌آموزان معانی خودشان را خلق می‌کنند. این معانی گاهی به هیچ وجه مناسب نیستند» (ص ۹). این جبر خودجوش، سرراست و تک بعدی است، اما خالی از سازگاری نیست. مسئله این است آن‌هایی که رویکرد شبه ساختاری را می‌پذیرند و اشیای مجرد قوی را با بازنمایی‌های آن‌ها اشتباه می‌گیرند، درک نمی‌کنند که نمادها به‌خودی خود نمی‌توانند معجزه‌ای را انجام دهند که مرجع نماد می‌تواند انجام دهد: آن‌ها نمی‌توانند بخش‌های پرجزئیات دانش را به هم بچسبانند تا یک کل قدرتمند به‌دست آورند. بنابراین، زمانی‌که راجع به دیدگاه ماشینی شبه ساختاری صحبت می‌شود، فرد قطعاً خواهد گفت «هر چند این یک روش است، با این وجود، همراه با نادانی است.»

تقابل میان مدل رشدی که در این مقاله ارائه شد و شیوه‌ی ساختاری تدریس جبر، به دلیل احتمالی عدم رضایت از نتایج تدریس اشاره می‌کند. برنامه‌ی درسی تقریباً ترتیبی را که مفاهیم جبری با هم مرتبط هستند و در طول قرن‌ها به این شکل رشد یافته‌اند، برعکس می‌کند. در ابتدا رویکرد ساختاری پیشرفته مورد نظر است اما به وضوح دانش‌آموز آماده‌ی درک ایده‌ی دوگانگی فرایند – شیء نیست، دیدگاه تابعی که جای خود دارد. از ابتدا، فرض می‌شود حروف نقش متغیر را، و نه فقط مجهول را

حس معنادار بودن با توانایی «دیدن» ایده‌های مجرد در پس نمادها همراه است. با این وجود، اشیاء و ساختارهای ریاضی که معلم می‌تواند «ببیند»، احتمالاً برای دانش‌آموز آشکار نیست

ایفا می‌کنند، اما، ما مشاهده کردیم که اولی پیشرفته‌تر از دومی است. فرمول‌های جبری به‌طور مستقل و قبل از این‌که در یک معادله یا نامعادله وارد شود، معرفی می‌شوند. در حالی‌که فرمول جبری را تنها در زمینه‌ی معادلات «حسابی» ساده می‌توان به روش عملیاتی تفسیر کرد تا برای دانش‌آموز کوچک‌تر در دسترس باشد.

در نهایت، معادلات و نامعادلات به‌طور هم‌زمان تدریس می‌شوند، هر چند دومی بار سنگین‌تری بر درک دانش آموزان دارد. هرم مفهومی بر رأسش قرار گرفته است و طبیعی است که تمایل به افتادن دارد. تجدیدنظر درمورد ترتیبی که ایده‌های اساسی جبر برای دانش‌آموزان ارائه می‌شود، احتمالاً پیشرفت‌هایی را نتیجه می‌دهد. قابل توجیه است که بر تمایل طبیعی دانش‌آموزان برای رویکرد عملیاتی سرمایه‌گذاری کنیم و به جای شروع کردن از اشیای جبری آماده با فرایندها آغاز کنیم. عطف به دومی، شواهدی وجود دارد که نشان می‌دهد کامپیوتر می‌تواند به ساخت آن‌ها در ذهن دانش‌آموز کمک کند. (دریفوس[۱۵] و هالوی[۱۶]، ۱۹۸۸؛ ویتس[۱۷] و دمانا[۱۸]، ۱۹۸۸؛ شوارتز[۱۹] و همکاران، ۱۹۹۰؛ بریدنباخ[۲۰] و همکاران، ۱۹۹۲). (البته این نشان نمی‌دهد که معرفی زودهنگام رویکرد تابعی تنها ایراد است یا آغاز کردن با آموزش جبر تابعی در هیچ شرایط نمی‌تواند موفق باشد. به‌عنوان مثال، استفاده‌ی زیاد از نمودارهای کامپیوتری در آموزش تابع تا حدودی ممکن است ترتیب «طبیعی» یادگیری را چنان برعکس کند به طوری که حتی رویکرد ساختار نسبت به جبر برای کودکان نیز در دسترس باشد. بنابراین، فرد باید به یاد آورد

مسئله این است که دانش‌آموز برخلاف ریاضی‌دان، به سادگی به دست‌ورزی‌های نمادین ماشینی عادت می‌کند و اگر این روش به چالش کشیده نشود، او به زودی به نقطه‌ای می‌رسد که برگشتی ندارد و به جای آن‌که این روش به‌عنوان شیوه‌ای موقتی برای نگاه کردن به اشیاء باشد، به‌عنوان دیدگاهی پایدار باقی می‌ماند

که هیچ تغییری در سازمان‌دهی یا ارائه‌ی موضوع به تنهایی برای تسهیل یادگیری معنادار کافی نیست. یک تغییر واقعی برای بهبود به‌وجود نمی‌آید مگر آن‌که معلمان راه‌هایی بیابند تا رضایت دانش‌آموزان را از تلاش برای به‌دست آوردن معانی، بالا ببرند.)

ما امیدواریم پتانسیل بیش‌تری در این ایده‌هایی آموزشی وجود داشته باشد و اکنون در یک تجربه‌ی تدریس این ایده‌ها را به‌طور نظام‌مندی مورد آزمایش قرارداده‌ایم، علی‌رغم باور ما که این روش مفید است، پرسشی وجود دارد که آزاردهنده است: حتی اگر دانش‌آموزان‌مان در به‌دست آوردن یک مجموعه‌ی تغییرپذیر و انعطاف‌پذیر ازدیدگاه‌ها موفق شوند، دانش انعطاف‌پذیر آن‌ها در یک جریان طولانی چقدر پایدار و قوی خواهد بود؟ احتمالاً می‌توان تفکر شبه ساختاری را با بی‌سوادی ثانویه مقایسه کرد. زیرا شیوه‌ی ماشینی، تنبلی ذهنی زیادی را نتیجه می‌دهد: مسئله حل کن‌ها را از نیاز به هوشیاری دائمی و فشاری که به‌طور اجتناب‌ناپذیری با برگشتن و پیش رفتن از یک دیدگاه به دیدگاه دیگر همراه است، معاف می‌کند. همان‌گونه که سوریا[۲۱] تأیید می‌کند ریاضی‌دانان هم تسلیم افسون دست‌ورزی‌های مکانیزه‌ی نمادها می‌شوند:

[آیا متخصص جبر] [معنای اصلی نمادها] را در هر مرحله از عملیات‌هایی که انجام می‌دهد، دنبال می‌کند؟ بی‌تردید، خیر. او فوراً مشاهده‌ی آن‌ها را از دست می‌دهد. تنها دغدغه‌ی او مرتب کردن و ترکیب کردن علائمی که در پیش‌رو دارد براساس قواعد شناخته شده است. او با اطمینان نتایجی را که به این شیوه به‌دست آمده، می‌پذیرد. [نقل شده از هادامارد[۲۲]، ۱۹۴۹، ص ۶۴].

مسئله این است که دانش‌آموز برخلاف ریاضی‌دان، به سادگی به دست‌ورزی‌های نمادین ماشینی عادت می‌کند و اگر این روش به چالش کشیده نشود، او به زودی به نقطه‌ای می‌رسد که برگشتی ندارد و به جای آن‌که این روش به‌عنوان شیوه‌ای موقتی برای نگاه کردن به اشیاباشد، به‌عنوان دیدگاهی پایدار باقی می‌ماند. زمانی‌که این اتفاق بیفتد، دیگر مجالی نیست که دانش‌آموز بتواند تصمیم‌هایش را توضیح دهد. اگر از او بخواهیم دلیل بیاورد، او گیج می‌شود، درست مانند هزارپایی که از او بپرسیم پاهایش را چگونه حرکت می‌دهد. بنابراین، برای اصلاح روش تدریس، به شیوه‌های پیشنهاد شده در بالا، مقابله کردن با مفاهیم شبه ساختاری کافی نیست. بسیار مهم است سعی کنیم دانش‌آموزان ترغیب شوند در هر مرحله‌ی یادگیری، فعالانه برای کسب معانی تلاش کنند. دانش‌آموزان باید جست‌وجوگران معانی باشند. همان‌گونه که دیویس (۱۹۸۸، ص ۱۰) توضیح می‌دهد، آن‌ها باید «از روی عادت» موقعیت‌ها را **تفسیر** کنند، اعمالشان را **تفسیر** کنند و در مورد معانی نمادها، و **معانی** نمادها و عملیات‌ها بیندیشند.»

پی‌نوشت

1. Propositional Formula
2. Truth Set
3. Even
4. Singularities
5. Conception
6. Semantically Debased
7. Pseudo Structural
8. Relational Understanding
9. Wagner
10. Signifier
11. Signified
12. Peacock
13. Gregory
14. Cobb
15. Dreyfus
16. Halevi
17. Waits
18. Demana
19. Schwartz
20. Breidenbach
21. Souriau
22. Hadamard

منبع

Sfard, Anna; Lin chevski, Liiora. (1994). The Gains And The Pitfalls of Reification– The Case of Algebra, **Educational Studies in Mathematics,** 26:191–228.