مسئله‌ی پولیا

جعفر اسدی گرمارودی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده

مقاله‌ی حاضر براساس پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد نگارنده تنظیم شده است. نخستین و مهم‌ترین وظیفه‌ی ریاضیات دوره‌ی دبیرستانی، عبارت است از تأکید بر جنبه‌های منطقی و متکی بر چارچوب حل مسئله (پولیا، ۱۹۶۲). به مرور زمان، چرایی تأکید پولیا بر حل مسئله روشن شد و موجب تحقیقات وسیعی گردید. در این مقاله، ابتدا «مسئله‌ی پولیا[1]» و رابطه‌ی آن با فراشناخت بیان می‌شود. در بخش بعد، به آموزش معلمان از نگاه پولیا پرداخته می‌شود چرا که با شواهدی که از تحقیقات کارآمدی مدارس به‌دست آمده، کلاس‌های درس بیش‌تر از مدارس در تعیین چگونگی عملکرد کودکان اهمیت دارند (رینولدز[2] و مویس[3]، ۲۰۰۱) و به نظر می‌رسد کارآمدی کلاس نیز به‌وجود مدیر و رهبری به‌نام معلم بستگی داشته باشد. بخش مذکور، شامل ده دستورالعمل است که توسط پولیا ارائه شده است.

کلیدواژه‌ها: مسئله‌ی پولیا، حل مسئله، فراشناخت، معلم.

مقدمه: معرفی مسئله‌ی پولیا

مقاله‌ی حاضر براساس پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد نگارنده تنظیم شده است. هنگامی‌که به مقالات و کتاب‌ها در باب حل مسئله رجوع می‌شود تقریباً متنی وجود ندارد که در آن به‌نام جورج پولیا اشاره نشده باشد. کتاب وی به‌نام «چگونه مسئله را حل کنیم» موجب تمایز دو دوره‌ی تاریخی در محدوده‌ی آموزش ریاضی و دنیای حل مسئله شد. حل مسئله پیش از پولیا و حل مسئله پس از او (شونفیلد، ۱۳۶۸). پولیا در سال ۱۹۴۵، کتاب «ریاضیات و استدلال موجه» و در سال ۱۹۶۲ و ۱۹۶۵ کتاب «خلاقیت ریاضی» را در دو جلد تألیف کرد. این کتاب‌ها نشان‌دهنده‌ی ادامه‌ی تفکر حل مسئله‌ی ریاضی پولیا پس از سال ۱۹۴۵ بود. از جنبه‌ی فلسفی، پولیا در حال تبیین دیدگاهی تجربه‌گرایانه از ریاضیات بود، دیدگاهی که ریاضیات را هم‌چون علوم طبیعی، یک رشته‌ی علمی متشکل از کشف‌ها تلقی می‌کند (شونفیلد، ۱۳۶۸). دیدگاه‌های پولیا هماهنگ با دیدگاه‌های علمی مصلحان تربیتی از قبیل ژان‌ژاک روسو (۱۷۶۲) بود که عقیده داشت به جای انباشتن ذهن‌ها، باید به تقویت و توسعه‌ی آن‌ها پرداخت.

دهه‌ی ۱۹۸۰ را می‌توان دهه‌ی نهضت حل مسئله براساس تحقیقات پولیا دانست؛ دهه‌ای که به نظر لستر[4] (۱۹۹۴، نقل شده در رودریگرز و همکاران، ۲۰۰۸)، دامنه‌ی تحقیقات حل مسئله بر مبنای مفاهیم «فراشناخت»، «رابطه‌ی تأثیرات/ باورها با حل مسئله[5]» و «آموزش فراشناخت» بوده است. به عقیده‌ی ایشان، مبنای ورود فراشناخت به پژوهش‌های آموزش ریاضی از آن‌چه که «مسئله‌ی

پولیا» می‌نامند آغاز می‌شود. رودریگرز و همکاران (۲۰۰۸)، مسئله‌ی پولیا را چنین معرفی می‌کنند که «به محض این‌که دانش‌آموزان بر پایه یا مبانی مقدماتی مسلط شدند و دانش لازمه‌ی ریاضی را کسب کردند، چگونه می‌توانیم آن‌ها را وادار کنیم راهبردهای پیچیده‌ای جهت حل مسائل ریاضی واقعی و ابتکاری بسازند؟»

پولیا (۱۹۶۲) خود چنین توضیح می‌دهد:

«در این مطلب تردید نکنید که دانستن چگونگی[۶] یک موضوع در ریاضی، بسیار مهم‌تر از آشنا شدن با یک آگاهی دقیق/ کامل نسبت به آن موضوع است، چرا که این آگاهی را همیشه می‌توان به کمک یک راهنمای مناسب به‌دست آورد. بنابراین، چه در دبیرستان و چه در سایر مؤسسه‌های آموزشی، نه تنها باید دانش‌های معینی را به اطلاع دانش‌آموزان برسانیم، بلکه ضمناً، این بسیار مهم‌تر است که به آن‌ها یاد بدهیم که چگونه و تا چه اندازه لازم است بر موضوع درسی مسلط شوند. تسلط در ریاضیات یعنی چه؟ یعنی توانایی و مهارت در حل مسائل و نه صرفاًمسائل عادی، بلکه مسائلی که نیازمند درجاتی از استقلال اندیشه، عقل سلیم[۷] و ابتکارند. بدین ترتیب، نخستین و مهم‌ترین وظیفه‌ی ریاضیات دوره‌ی دبیرستانی، عبارت است از تأکید بر جنبه‌های منطقی و متکی بر روش حل مسئله. این اعتقاد من است؛ ممکن است شما با تمامی آن موافق نباشید، ولی من فرض را بر این می گذارم که شما هم دست کم، با این مطلب که جریان حل مسئله در خور تأکید است موافق باشید و همین اندازه برای من کافی است» (ص ۱۷).

مسئله‌ی پولیا در دهه‌ی ۱۹۸۰، به سبب گسترش نهضت حل مسئله به اوج خود رسید. شونفلید (۱۹۹۱) با اشاره به مسئله‌ی پولیا، تطور مفهوم فراشناخت را به‌طور هم‌زمان در دهه‌ی ۱۹۷۰ و در سه حوزه‌ی علمی روان‌شناسی، هوش مصنوعی و آموزش می‌داند. وی (۱۹۸۵) با توجه به پژوهش‌هایی که انجام داد، چارچوبی برای بررسی فرآیند حل مسئله معرفی کرد که شامل چهار مؤلفه‌ی **منابع**، **راهبردهای رهیافتی**، **کنترل** و **نظام‌های باوری** بود.

شونفیلد در پژوهش خود (۱۹۸۵)، در ارائه‌ی انتگرال $\int \frac{xdx}{x^2-9}$ به دانشجویان در آغاز آزمونی یک ساعتی با توجه به این‌که این انتگرال با تغییر متغیر به سادگی و در مدت کوتاهی (۱ دقیقه) حل می‌شود، موارد زیر را مشاهده کرد:

۱- چون عبارت (x^2-9) در مخرج کسر قرار داشت، ۲۴ نفر از ۱۷۸ دانشجو با استفاده از تجزیه‌ی کسرها به حل آن پرداختند که به ۵ تا ۱۰ دقیقه وقت نیاز داشتند.

تسلط در ریاضیات یعنی چه؟ یعنی توانایی و مهارت در حل مسائل و نه صرفاً مسائل عادی، بلکه مسائلی که نیازمند درجاتی از استقلال اندیشه، عقل سلیم و ابتکارند

۲- بدتر از حالت اول، ۱۷ نفر با استفاده از جای‌گذاری مثلثاتی $x = 3\sin\theta$ به حل آن پرداختند که زمان مورد نیاز بین ۱۰ الی ۱۵ دقیقه بود.

شونفیلد بعدها توضیح داد که «مشکلی که دانشجویان با این مسئله داشتند در پیدا کردن یک راهبرد یا پیاده کردن آن راهبرد نبود، بلکه مشکل آن‌ها در انتخاب یک روش منطقی و مناسب رای حل مسئله بود. جالب است بدانیم شاگردانی که مسئله را از راه‌های دشوارتری حل کرده بودند، نشان دادند که نسبت به آن‌هایی که از روش ساده‌تر استفاده کرده بودند، بیش تر می‌دانند یا دست کم مباحث دشوارتر ریاضی را بلدند. اما این را هم نشان دادند که تنها آن‌چه که می‌دانی مهم نیست، این‌که چگونه و چه موقع از معلوماتت استفاده کنی هم اهمیت دارد. راه حلی که درست باشد مسلماً زیباست، اما راه حلی که مناسب هم باشد، خیلی بهتر است» (شونفیلد، ۱۳۶۸).

فراشناخت و مسئله‌ی پولیا

فراشناخت به معنای شناخت فرد در مورد فرایندهای شناختی خود می‌باشد. (فلاول[۸]، ۱۹۷۹، نقل شده در شونفیلد، ۱۹۹۱). شونفیلد (۱۹۹۱) سه جنبه‌ی مهم از فراشناخت را مورد بررسی قرار داده است:

۱- دانش فراشناختی: به داوری‌های فرد درباره ظرفیت‌های ذهنی و رفتار خود مربوط می‌شود؛

۲- کنترل یا خودنظمی[۹]: به توانایی فرد در بازبینی، ارزیابی و (اگر لازم باشد) اصلاح رفتار در حین انجام تکالیف پیچیده نظیر حل مسئله‌ی ریاضی مربوط می‌شود. «این عامل به فرد امکان می‌دهد تا مشخص کند که آیا راهبردهایی که به‌کار می‌برد مؤثر هستند یا خیر و اگر لازم باشد، راهبردها را تغییر دهد» (شونفیلد، ۱۹۹۲)

۳- نظام‌های باوری: به مجموعه‌ای از فهمیدن‌ها اطلاق می‌شود که افراد درباره‌ی خودشان، ریاضیات و ماهیت تفکر ریاضی دارند.

فقدان دانش‌های فراشناختی باعث می‌شود که فرد از راهبردهای ناکارآمد (درست اما کند یا فاقد کارایی) حل مسئله استفاده کند.

از جنبه‌های فلسفی، پولیا در حال تبیین دیدگاهی تجربه‌گرایانه از ریاضیات بود، دیدگاهی که ریاضیات را هم‌چون علوم طبیعی، یک رشته‌ی علمی متشکل از کشف‌ها تلقی می‌کند

نخستین و مهم‌ترین وظیفه‌ی ریاضیات دوره‌ی دبیرستانی، عبارت است از تأکید بر جنبه‌های منطقی و متکی بر روش حل مسئله

تنها آن‌چه که می‌دانی مهم نیست، این‌که چگونه و چه موقع از معلوماتت استفاده کنی هم اهمیت دارد. راه حلی که درست باشد مسلماً زیباست، اما راه حلی که مناسب هم باشد، خیلی بهتر است

بنابراین، لازم است که برای یادگیری مؤثرتر، فرآیندهای فراشناختی به‌صورت شفاف‌تری تبیین شوند و خود نظمی، به فرآیندی هوشیار تبدیل گردد (رینولدز و مویس، ۲۰۰۱).

شونفیلد (۱۹۸۷) برای آموزش راهبردهای فراشناختی به دانش‌آموزان، تکنیک‌های زیر را پیشنهاد می‌کند:

۱– رشد آگاهی از فرآیندهای تفکر در بین دانش‌آموزان؛

۲– حل مسئله روی تابلو با نشان دادن راه حل کامل مسئله و نه جواب مختصر؛

۳– کار در کلاس به‌عنوان یک کل برای کار روی مسئله و توجه به نقش معلم به‌عنوان میانجی در بحث دانش‌آموزان.

در دهه‌ی ۱۹۹۰، این مفاهیم [فراشناخت، رابطه‌ی تأثیرات/باورها با حل مسئله و آموزش فراشناخت] جای خود را به واژه‌های دیگری سپردند که بیش‌تر به عوامل اجتماعی– فرهنگی[۱۰] و زمینه–محور[۱۱] از قبیل «تأثیرات اجتماعی[۱۲]» و «حل مسئله در زمینه[۱۳]» یا «حل مسئله‌ی موقعیتی[۱۴]» مربوطند. (لستر، ۱۹۹۴، نقل شده در رودریگرز و همکاران، ۲۰۰۸). آن‌ها هم‌چنین، به نقل از شونفیلد (۲۰۰۷)، بر این مطلب تأکید می‌کنند که از جنبه‌ی نظری، هنوز یک مطلب حل شده باقی مانده است و آن این‌که اگرچه چارچوبی برای توصیف حل مسئله پیشنهاد شده است، اما با این حال نظریه‌ای برای مسئله‌ی پولیا ارائه نشده است.

رودریگرز و همکاران (۲۰۰۸) در این زمینه، جمع‌بندی زیر را ارائه دادند:

الف) مسئله‌ی پولیا هم‌چنان از سوی بسیاری از محققان آموزش ریاضی، به عنوان مسئله‌ای محوری تلقی می‌شود؛

ب) به‌نظر می‌رسد که استفاده از ظرفیت «فراشناخت»، مسئله را به شیوه‌ای رضایت‌بخش حل نکرده است. شواهد این نارسایی، چرخشی است که در تحقیقات حل مسئله از طریق فراشناخت دیده می‌شود که تمایل به بررسی آن براساس عوامل اجتماعی و زمینه– محور ایجاد شده است؛

پ) گسترش مبانی تجربی تحقیقات حل مسئله‌ی پولیا به‌منظور توجه بیش‌تر به بعد اجتماعی– فرهنگی شناخت و شیوه‌های آموزش ریاضی یک نیاز ضروری است.

توصیه‌های پولیا به معلمان

سؤالی که مطرح می‌شود این است که پولیا پیش از همه‌ی این تحقیقات و بحث‌ها برای مسئله‌ی مطرح شده توسط خود، چه اندیشیده است؟ در پاسخ می‌توان به توصیه‌های وی برای آموزش معلمان اشاره کرد که در آثار پولیا، مکرر به‌عنوان «شاگردی و معلمی» به آن اشاره شده است. از نظر پولیا (۱۹۶۲)، «معلمی که می‌خواهد به همه‌ی دانش‌آموزان خود، چه آن‌ها که در آینده به ریاضیات نیاز دارند و چه آن‌ها که از ریاضیات استفاده نخواهند کرد، سود برساند، باید جریان حل مسئله را طوری دنبال کند که یک سوم آن شامل ریاضیات و دو سوم بقیه شامل عقل سلیم باشد. . . البته این کار چندان ساده‌ای نیست، ولی اگر معلم ریاضیات در این امر موفق شود، توانسته است خدمت واقعی خود را به همه‌ی دانش‌آموزان، صرف‌نظر از حرفه و شیوه‌ی زندگی آینده‌ی آن‌ها انجام دهد. این خدمت، بیش‌تر از آن جهت ارزش دارد که توانسته است برای اکثریت دانش‌آموزان که در زندگی آینده‌ی خود نیازی به ریاضیات کار بسته ندارند، مفید واقع شود» (ص ۴۶۴). ایشان (۱۹۶۲) ده دستورالعمل برای معلمان ارائه داد که در این‌جا به اختصار، به هر یک از آن‌ها، اشاره‌ای می‌شود.

۱– به موضوع درسی خود علاقه‌مند باشید.

۲– بر ماده‌ی درسی خود مسلط باشید.

علاقه در جای نخست به این دلیل می‌باشد که تجربه‌ی معلمی

نویسنده نشان می‌دهد که وجود علاقه، دانش لازم را موجب می‌شود.

۳– بدانید از چه راهی می‌توانید آن‌چه در نظر دارید، یاد بدهید؟ بهترین روش یاد دادن را خودتان پیدا کنید.

پولیا (۱۹۶۲)، معلمی را به خصلت‌ها و ویژگی‌های فرد مرتبط می‌داند و معتقد است به همان تعداد که معلم خوب وجود دارد، روش تدریس خوب هم پیدا می‌شود. با این حال، وی تأکید فراوانی به روش‌شناسی در آموزش معلمان داشت.

۴– به چهره‌ی شاگردان خود نگاه کنید تا متوجه انتظارهای آن‌ها بشوید. دشواری‌های آن‌ها را کشف کنید؛ توانایی این را داشته باشید که بتوانید خودتان را به‌جای آنان بگذارید.

کارل راجرز[۱۵] که تأثیر غیرقابل انکاری در آموزش و پرورش انسان‌گرایانه داشته است، سه مفهوم «همدلی»، «اصالت»[۱۶] و «احترام»[۱۷] را ارائه داده است. در کنار تعریف اصالت و احترام، همدلی را توانایی معلم در فهم ادراکات دانش آموزان و انتقال این درک و فهم می‌داند. این مفهوم به معنای تلاش برای قرار گرفتن در موقعیت دانش‌آموز است. اگر معلم از دیدگاه دانش‌آموز آگاه نباشد، رشد دانش‌آموز به خطر می‌افتد (نقل شده در میلر[۱۸]، ۱۹۸۳).

۵– به آگاهی خشک و عریان قناعت نکنید. بکوشید مهارت را که لازمه‌ی عقل و اندیشه است و عادت به کار منظم را در دانش‌آموزان تقویت و تکامل بخشید.

ژان ژاک روسو (۱۷۶۲) معتقد بود «با جوانان خشک و خالی حرف نزید، دلیل و برهان برای آن‌ها نتراشید. اگر می‌خواهید آن‌ها را تحت تأثیر قرار دهید، دلیل و برهان خود را به‌صورت اعمال نشان دهید. دلیل و برهان خشک و خالی می‌تواند عقاید را نشان دهد، اما در عمل ما تأثیر ندارد، ممکن است نگرشی را برملا سازد اما آن‌چه را می‌خواهد بکند، تغییر نمی‌دهد» (ص ۴۵۳). روسو در ادامه اظهار می‌دارد که «مسائل عقلی را در قالب اندرزهای مشکل تعلیم می‌دهیم در حالی‌که تمام آن حرف است و با عمل توأم نیست. مسائل عقلی خالص، عملی را انجام نمی‌دهد بلکه قوه‌ی تفکر را باز می‌دارد و به‌ندرت می‌تواند کسی را تحریک کند و هرگز کار بزرگی انجام نداده است» (ص ۴۵۱). وی هم‌چنین تأکید می‌کند درسی که باعث ناراحتی شود، مفید واقع نخواهد شد.

پولیا (۱۹۶۲) دانش را شامل دو بخش می‌داند، یکی بخش آگاهی (شامل دانش خالص و نظری) و دیگری مهارت‌ها و توانایی به‌کار گرفتن دانش نظری. وی مهارت در ریاضیات را توانایی حل مسئله

به محض این‌که دانش‌آموزان بر پایه یا مبانی مقدماتی مسلط شدند و دانش لازمه‌ی ریاضی را کسب کردند، چگونه می‌توانیم آن‌ها را وادار کنیم راهبردهای پیچیده‌ای جهت حل مسائل ریاضی واقعی و ابتکاری بسازند؟

می‌دانست؛ چیزی که روسو نیز خیلی پیش از او، بر آن تأکید داشت و معتقد بود که بخش عملی دانش می‌تواند آن‌را از حالت نظری خارج کند و در دسترس یادگیرندگان قرار دهد.

۶– بکوشید تا حدس زدن و پیش‌بینی کردن را به آنان بیاموزید.

حدس و آزمایش سنگ بنای همه‌ی راهبردها در آموزش، به‌خصوص در آموزش حل مسئله‌ی ریاضی است. حدس زدن «عقلانی»، «معنی‌دار» و «هدایت آن در جهت درست» در هر کار علمی، نقش عمده‌ای را ایفا می‌کند.

۷– سعی کنید اثبات کردن را به دانش‌آموزان یاد دهید.

پولیا (۱۹۶۲) این دستورالعمل را جمع‌بندی و نتیجه‌گیری‌های دستورالعمل قبلی می‌داند. حدس زدن عقلانی بر پایه‌ی استفاده از قیاس و شباهت، داوری‌های استدلالی را موجب می‌شود. ریاضیات زمینه‌ی مناسبی برای قیاس و استدلال می‌باشد.

۸– در مسئله‌ای که طرح شده است، چیزی را جست‌وجو کنید که برای حل مسئله‌های دیگر مفید است. از موقعیتی که مسئله‌ی مشخص مفروض دارد، روش کلی را کشف کنید.

پولیا (۱۹۶۲) مهارت را بخش مهم و با ارزش‌تر فرهنگ ریاضی می‌دانست. وی اعتقاد داشت هنگام حل مسئله، با منتزع کردن جنبه‌های آموزنده، می‌توان آن‌را برای حل مسئله‌های مشابه به دانش‌آموزان آموخت.

۹– راز خود را بلافاصله فاش نکنید. اجازه دهید دانش‌آموزان تا آن‌جا که می‌توانند تلاش خود را برای حل یا حدس راه حل به‌کار برند. به دانش‌آموزان امکان دهید هر چه بیش‌تر خودشان کشف کنند.

برونر[۱۹] نیز که چهره‌ی مشهوری در روان‌شناسی شناختی است، بر آموزش اکتشافی و اکتشاف توسط دانش‌آموزان تأکید داشت و معتقد بود معلم نباید همه‌ی اطلاعات را به دانش‌آموزان بدهد بلکه باید به او امکان دهد «فراسوی اطلاعات داده شده برود» (کریمی، ۱۳۸۲).

فقدان دانش‌های فراشناختی باعث می‌شود که فرد از راهبردهای ناکارآمد (درست اما کند یا فاقد کارآیی) حل مسئله استفاده کند. بنابراین، لازم است که برای یادگیری مؤثرتر، فرآیندهای فراشناختی به صورت شفاف‌تری تبیین شوند و خودنظمی، به فرآیندی هوشیار تبدیل گردد

۱۰- با اشاره‌های خود، دانش‌آموزان را راهنمایی کنید ولی عقیده‌ی خود را به زور به آن‌ها تحمیل نکنید.

در دیدگاه اجتماعی آموزش و پرورش، نقش معلم انتقال ارزش‌های دموکراتیک است به گونه‌ای که موجب عقلانیت بیش‌تر در دانش‌آموزان شود (میلر، ۱۹۸۳). شفلر[20] (۱۹۶۰) بیان می‌کند که «آموزش واقعیت ها به دانش‌آموز فقط به این معنی نیست که او را وادار کنیم حرف ما را باور کند... تدریس اقتضا می‌کند که در جهت ایجاد باوری تلاش کنیم که متکی به دلایل مورد نظر، اما در چهارچوب فهم و ظرفیت دانش‌آموز است» (نقل شده در میلر، ۱۹۸۳).

در موارد توصیه شده توسط دیگران نیز رویکردهای جدید آموزش حل مسئله را که پولیا بر آن‌ها تأکید داشت، می‌توان مشاهده کرد. به‌طور مثال، موارد ۱، ۴ و ۱۰ به عوامل اجتماعی- فرهنگی و موارد ۶ و ۸ به عوامل زمینه- محور مرتبط‌اند.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

پولیا ریاضی‌دانی بود که براساس تجارب شخصی و با نگاهی واقع‌گرایانه نسبت به آموزش ریاضیات گام برداشت و در این مسیر، خدمات مهمی عرضه کرد. ده دستورالعمل وی برای معلمان و دیگر آثار او نیز، این موضع را نشان می‌دهد و هر جا که لازم بوده است مثال‌های عینی ارائه داده است. با توجه به رویکردهای اجتماعی- فرهنگی به موضوع آموزش حل مسئله، به‌نظر می‌رسد توجه به تجارب معلمان در زمینه‌ها و فرهنگ‌های مختلف و نتایجی که از داخل کلاس‌های درس به دست می‌آورند، می‌تواند در حل مسئله مؤثر باشد. تجربه‌ی آموزشی و پژوهشی نویسنده نشان می‌دهد که توجه به تحقیق عمل[21] به‌عنوان بستری مناسب برای کسب نتایج عینی‌تر، ضروری می‌باشد.

پی‌نوشت

1. Polya's Problem
2. Reynolds
3. Muijs
4. Lester
5. Relation of Affects/ Beliefs to Problem Solving
6. Know- How

۷. برای اطلاع بیش‌تر درباره‌ی عقل سلیم می‌توانید به مقاله‌ی «ریاضیات و عقل سلیم» نوشته‌ی جفری هاوسون، ترجمه‌ی زهرا گویا، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۵۸، مراجعه کنید.

8. Flavell
9. Self- regulation
10. Socio-Cultural
11. Context- based
12. Social Influences
13. Problem Solving in Context
14. Situated Problem Solving
15. Carl Rogers
16. Genuineness
17. Regard
18. John P. Miller
19. Jerome Bruner
20. Scheffler
21. Action Research

منابع

۱. پولیا، ج. (۱۹۶۲). **خلاقیت ریاضی.** ترجمه‌ی پرویز شهریار (۱۳۸۲). تهران، انتشارات فاطمی، چاپ هفتم.

۲. رینولدز، د. و مویس، د. (؟؟) **آموزش مؤثر.** ترجمه‌ی محمدعلی بشارت و حمید شمسی‌پور، تهران. انتشارات رشد، چاپ اول.

۳. شونفیلد، اچ. (؟؟؟) پولیا، حل مسئله و آموزش. ترجمه‌ی سعید ذاکری، (۱۳۶۸). **مجله‌ی نشر ریاضی**، شماره‌ی ۲. صص ۱۵۰-۱۴۳.

۴. روسو، ژان ژاک. (؟؟). **امیل یا آموزش و پرورش.** ترجمه‌ی ع. صبحانی. (۱۳۴۸) تهران، فرخی، چاپ اول.

۵. شونفیلد، اچ. (۱۹۹۴). فراشناخت و ریاضیات، ترجمه‌ی فرهاد کریمی (۱۳۷۸). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی.** شماره‌ی ۵۵، بهار ۱۳۷۸، صص ۸-۴.

۶. میلر، جی. پی. **نظریه‌های برنامه‌ی درسی.** ترجمه‌ی محمود مهرمحمدی. (۱۳۸۶). تهران انتشارات سمت، چاپ چهارم.

۷. کریمی، یوسف. (۱۳۸۲). **روان‌شناسی تربیتی.** تهران، ارسباران، چاپ سوم.

8. Rodriguez, E. Bosch, M. and Gascon, J. A. (2008). Networking Meth: od to Compare Theories Metacognition in Problem Solving Reformulated Within the Anthropological Theory of the Didactic, **ZDM Mathematicss Education**, 2008, 40, 287-301.

9. Shoenfeld, A.H. (1985). **Mathematical Problem Solving**, New York, Academic press.

10. Shoenfeld, A. H. (1987). What's All the Fuss About Metacognition?, In A. H. Schoenfeld (ed). **Cognitive Sience and Mathematics Education**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

11. Shoenfeld, A. H. Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics, In D.A. Grouws (ed) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan.