نقد و بررسی فصل ۳ (مثلثات) حسابان تازه‌تألیف، چاپ ۱۳۸۹ و ۱۳۹۰

مجتبی سلیمی
دبیر ریاضی شهرستان قروه از توابع استان کردستان

اشاره

با عرض خالصانه‌ترین سلام‌ها و احترام و ادب به خدمت دست‌اندرکاران مجلهٔ وزین، غنی و مفید رشـــد آموزش ریاضی از سردبیر گرفته تا بقیه و هم‌چنین با آرزوی توفیق روز افزون برای «دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درســی» و عرض خدا قوّت به تک‌تک آن‌ها. بنده دبیر ریاضی شهرستان قروه از توابع استان کردستان و دارای مدرک کارشناسی ریاضی هستم. مدت ۲۵ سال است که به تدریس ریاضی در دوره‌های راهنمایی و دبیرستان (۵ سال در دورهٔ راهنمایی و ۲۰ سال در دورهٔ متوسطه و پیش‌دانشگاهی) مشغولم. برخی از مسائل باعث شد که روزهٔ سکوتم را بشکنم و مطالبی را به حضورتان ارسال کنم. چون اوایل دهه ۸۰ دوبار با دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، دربارهٔ دورهٔ راهنمایی مکاتبه کردم، اگرچه هر دوبار در چاپ‌های بعدی همان مطالب را اصلاح کردند، ولی دریغ از یک تشکر خشک و خالی (مطالب مربوط به ریاضی سوم راهنمایی بود). اما بعد، با تمام احترامی که برای مؤلفان کتب درســی قبلی و فعلی قائلم، باید اذعان کنم که کتاب حسابان تازه تألیف، گل سرسبد تمام کتاب‌هایی است که تا کنون در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی تألیف شده است، از لحاظ زیبایی و استفاده از علائم مختلف برای مثال‌ها، تمرین در کلاس‌ها و مسائل؛ هم‌چنین، استفاده از رنگ‌آمیزی متنوع برای فصول مختلف بی‌نظیر است و از لحاظ پرداختن به موضوعات که الی ماشاءالله. به عنوان مثال، وقتی قسمت وارون توابع مثلثاتی را در کتاب می‌خوانم، فکر می‌کنم که با دست خودم این قسمت را نوشته‌ام و آنچه که باید گفته شود تا دانش‌آموز جان کلام را بفهمد، گفته شده است؛ بقیهٔ بخش‌ها نیز دست کمی از آن ندارد. با تمام این اوصاف، کاســتی‌هایی در آن به چشـــم می‌خورد، که بنده خودم را ملزم می‌دانم آن‌ها را بیان کنم و بر این باورم که قلب همهٔ ما ایرانی‌ها برای سرافرازی و سربلندی وطن عزیزمان ایران می‌تپد و هیچ‌گاه یکدیگر را مقابل هم نمی‌بینیم. بنده معتقدم که باید مطالبی را که همکاران از اقصی نقاط کشورمان برای مجله ارسال می‌کنند به فال نیک گرفت و از آن‌ها تشکر کرد. چون همهٔ آن‌ها خالصانه و بی‌ریا، تجربهٔ چندین و چند سالهٔ خود را بدون ادّعا و چشم‌داشت ارسال می‌کنند. باور قلبی‌ام این است که اگر کسی اشتباهم را گوشزد کند، باید دست او را ببوسم، به‌هر حال، بنده قسمت کوچکی از حسابان را بررسی و به حضورتان ارسال می‌کنم. خواهشمندم قبول زحمت فرموده، این مطلب را به سمع و نظر مؤلفان حسابان نیز برسانید.

چکیده

چون علم و آگاهی انسان روزبه‌روز افزایش یافته و تکامل می‌یابد، تکیه و تأکید صرف، بدون داشتن دقت کافی ممکن است در برخی موارد ما را از پیشرفت باز داشته و مجبورمان کند درجا بزنیم. همین مسئله مرا بر آن داشت که فصل ۳ را که قابل بحث‌ترین فصل حسابان تازه‌تألیف است، مورد نقد و بررسی قرار دهم.

کلیدواژه‌ها: فصل ۳ (مثلثات) کتاب حسابان تازه تألیف، نقد و بررسی کتاب.

مقدمه

هدف این مقاله، نقد و بررسی و برطرف کردن اشکالات اساسی فصل ۳ (مثلثات) کتاب حسابان تازه تألیف چاپ ۱۳۸۹ و ۱۳۹۰ است.

در کتاب هندسهٔ ۱ دبیرستان، برای دانش‌آموزان قضیه به صورت «نتایج بسیار مفید حاصل از استدلال استنتاجی که همواره درست هستند» تعریف شده است. در صفحهٔ ۱۴ کتاب هندسه ۲ نیز آمده است که «نتیجه‌های کلی همیشه درست هستند، نمونه‌هایی از قضیه می‌باشند.»

حالا با این آگاهی، آیا حکم زیر یک قضیه است؟

* اگر a، b، x، y اعداد حقیقی باشند

الف) اگر $a^x=b^y$ و $a=b$، آن‌گاه $x=y$

ب) اگر $a^x=b^y$ و $x=y$، آن‌گاه $a=b$

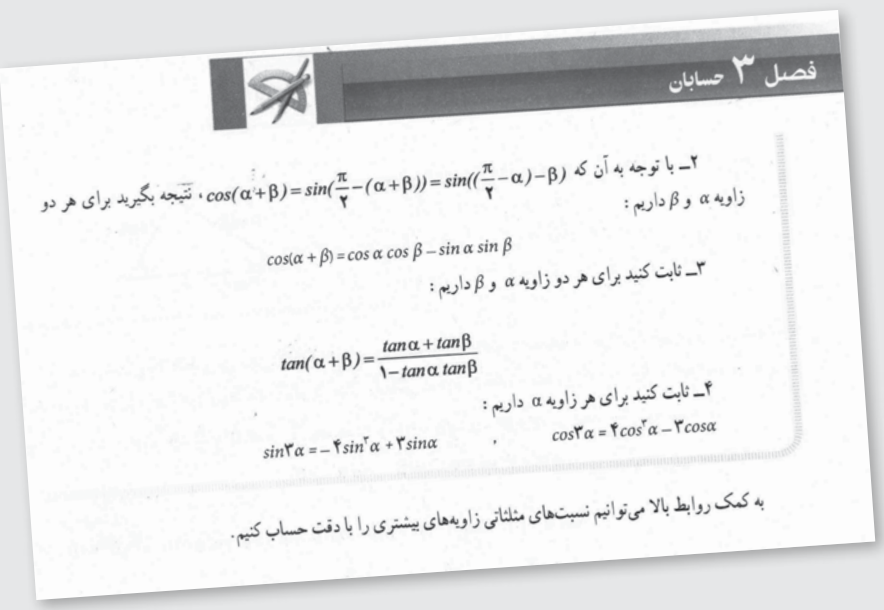
با کمی تأمل درمی‌یابیم که حکم فوق، قضیه نیست، چون قضیه نقض نمی‌پذیرد.

مثال نقض برای الف: $۰^۵=۰^۲$ آن‌گاه $۲\neq۵$. مثال نقض برای ب: $۷^۰=۵^۰$ آن‌گاه $۵\neq۷$ و حکم فوق وقتی قضیه است که در حالت الف) $a\neq۰$ و $b\neq۰$ و در حالت ب) $y\neq۰$ و $x\neq۰$ قید شود.

نواقص

۱. در «تمرین در کلاس ۳» صفحه ۱۱۴ آمده است: ثابت کنید برای هر دو زاویهٔ α و β داریم:

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$ لازم است شرط α و β و $\alpha+\beta$ مضرب فردی از $\frac{\pi}{۲}$ نباشد هم قید شود. مثلاً آیا اگر $\alpha=\frac{\pi}{۶}$ و $\beta=\frac{\pi}{۳}$ و یا $\beta=\alpha=\frac{\pi}{۴}$ و یا $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ و $\beta=\frac{۳\pi}{۲}$ فرض شوند، رابطه برقرار است؟


فصل ۳ حسابان

۲ـ با توجه به آن که $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\frac{\pi}{۲}-(\alpha+\beta))=\sin((\frac{\pi}{۲}-\alpha)-\beta)$، نتیجه بگیرید برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

۳ـ ثابت کنید برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

۴ـ ثابت کنید برای هر زاویه α داریم:

$$\cos۳\alpha=۴\cos^۳\alpha-۳\cos\alpha \quad , \quad \sin۳\alpha=-۴\sin^۳\alpha+۳\sin\alpha$$

به کمک روابط بالا می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های بیشتری را با دقت حساب کنیم.

۲. در مسئلهٔ ۵ صفحه ۱۱۶ آمده است: برای یک زاویهٔ دلخواه α که برای آن $\tan ۲\alpha$ تعریف شده است. درستی تساوی زیر را ثابت کنید: $\tan ۲\alpha=\dfrac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$ بایستی شرط α مضرب فرد $\frac{\pi}{۲}$ نباشد هم قید شود. مثلاً اگر $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ باشد $\tan ۲\alpha$ تعریف شده است ولی $\tan\alpha$ تعریف نشده باشد، باید بگوییم برای یک زاویهٔ دلخواه α که برای آن $\tan\alpha$ و $\tan۲\alpha$ تعریف شده است.

۳. در مسئلهٔ ۶ صفحه ۱۱۶، بایستی بازه از $\left[\pi,\frac{۳\pi}{۲}\right]$ به $\left(\pi,\frac{۳\pi}{۲}\right)$ تغییر یابد.

۴. در مسئلهٔ ۷ صفحه ۱۱۷، برای بندهای (ج) و (د) بایستی شرط x مضرب فرد $\frac{\pi}{۲}$ نباشد، قید شود.

۵. اگرچه بندهای دیگر همگی مهم هستند، ولی شاه بیت این مقاله همین موضوع است. در صفحه ۱۲۲ آمده است:

قضیـه: معادلهٔ $\tan\alpha=\tan\beta$ دارای جواب‌هایی به صورت $\alpha=k\pi+\beta$ است که در آن، k عددی صحیح است. قضیهٔ فوق را ملاک عمل قرار داده و معادلات زیر را حل می‌کنیم:

الف) معادله $\tan x=\tan ۵x$ را حل کنید (مثال ۳ صفحه ۱۲۲).

جواب مؤلفان در کتاب چاپ ۱۳۸۹ این است:

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل $۵x=k\pi+x$ هستند. پس $x=\frac{k\pi}{۴}$. این جواب با توجه به قضیه مطرح شده هیچ مشکلی ندارد. در حالی‌که مثلاً یکی از جواب‌های حاصل از $\frac{k\pi}{۴}$ برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است که به ازای tanx و tan۵x تعریف نشده‌اند.

درحالی‌که جواب آن‌ها در چاپ ۱۳۹۰ چنین است:

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل $۵x=k\pi+x$ هستند. پس $x=\frac{k\pi}{۴}$. البته مقدارهای tanx و tan۵x نیز باید قابل محاسبه باشند، پس هم‌چنین x و ۵x نباید مضرب فردی از $\frac{\pi}{۲}$ باشند.

این جواب هم با توجه به قضیه مطرح شده ایراد دارد. آیا می‌توان قضیه‌ای را مطرح کرد، ولی هنگام استفاده از آن برایش تبصره قایل شد؟ این کارها مصداق ضرب‌المثل معروف

«خانه از پای بست ویران است
خواجه دربند نقش ایوان است»

می‌باشد. یعنی قضیه از همان ابتدا ناقص مطرح شده و این نقص در کتاب نیکلایدس[1] هم وجود دارد. یعنی تا حالا هرچی بوده همین بوده است.

صورت صحیح قضیه: معادلهٔ $\tan\alpha=\tan\beta$ دارای جواب‌هایی به‌صورت $\alpha=k\pi+\beta$ است که در آن α و β مضرب فردی از $\frac{\pi}{۲}$ نیستند و k عددی صحیح است.

ب) معادلهٔ زیر را حل کنید و جواب‌هایی را که در بازه $[-\pi,\pi]$ هستند، تعیین کنید.

جـواب xxx[2]: $x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$ و جواب‌های موجود در بازه $[-\pi,\pi]$ عبارت‌اند از: $\pm\frac{\pi}{۶}$ و $\pm\frac{\pi}{۲}$ و $\pm\frac{۵\pi}{۶}$

جواب xxx: $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ اگرچه تمام جواب‌های حاصل قابل قبول هستند، ولی $x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$ و $x\neq k\pi+\frac{\pi}{۴}$ چه می‌شود؟

ج) جواب کلی معادله $\tan ۳x.\tan ۲x=۱$ کدام است؟ (یکی از سؤالات xxx)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$
۲) $\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$
۳) $\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}$
۴) $\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}$

این مؤسسه جواب درست را $\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}$ اعلام کرده است. این جواب با توجه به قضیه مطرح شده در کتاب درسی حسابان درست است. ولی یکی از جواب‌های حاصل به ازای $k=۲$ برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است که به ازای آن tan۳x تعریف نمی‌شود. پس جواب درست به صورت $\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}$ هستند که مضرب فرد $\frac{\pi}{۲}$ نباشند.

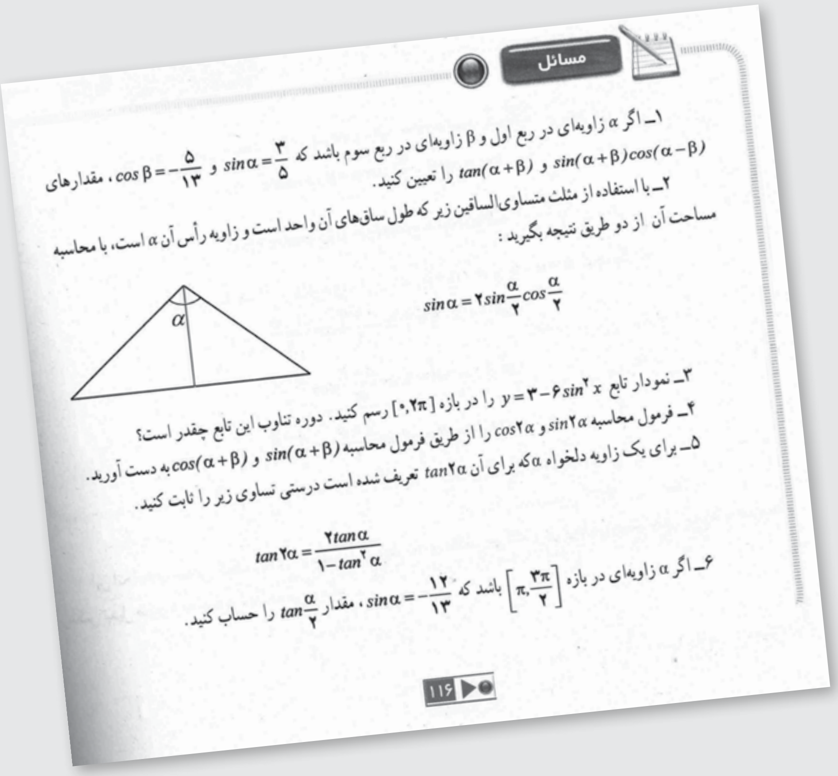
نتیجـه: در حل یک معادله (چه مثلثاتی چه غیرمثلثاتی) بهتر است به یکی از دو روش زیر عمل کنیم:

روش اول: دامنهٔ متغیر معادله را تعیین و معادله را حل می‌کنیم. سپس از جواب‌های به دست آمده آن‌هایی را که در دامنه هستند انتخاب و در معادله امتحان می‌کنیم. هر کدام که در معادله صدق کرد، جواب معادله است.

روش دوم: همان روش ارائه شده در کتاب حسابان است که معادله را حل و جواب‌های حاصل را در معادله امتحان می‌کنیم. آن‌هایی که در معادله صدق می‌کنند، جواب معادله می‌باشند.

۶. در بیان وارون توابع مثلثاتی، اولاً باید اشاره شود که $\sin^{-1}x$ را با Arc sinx هم می‌توان نشان داد[۳] تا وقتی دانش‌آموز رشته ریاضی در جای دیگری با آن مواجه شد، برایش بیگانه نباشد؛ حتی در پانویس باید توضیح داده شود که Arc sinx با arc sinx فرق دارد؛ Arc sinx یعنی زاویه‌ای برحسب رادیان در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ که سینوس آن x است؛ و arc sinx هم یعنی تمام زاویه‌هایی برحسب رادیان که سینوس آن‌ها x است. Arc sinx تابع است، ولی arc sinx یک رابطه است.

این مطلب را به استناد کتاب ریاضی ۲ قبلی نوشته‌ام که در آن آمده بود: arc sinx یعنی تمام کمان‌هایی (قوس‌هایی) که سینوس آن‌ها x است. اگر نادرست است چرا نوشته شده بود و اگر هم درست است که حق با بنده می‌باشد. هم‌چنین، نوشته شده است که «بنا به قرارداد تابع sinx را روی بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ محدود می‌کنند که در این بازه صعودی و یک‌به‌یک است» که باید نوشته شود بنا به قرارداد جهانی (که دانش‌آموزان فکر نکنند در کشورهای دیگر به گونه‌ای دیگر است). تابع sinx را روی بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ محدود می‌کنند که در این بازه، صعودی اکید و یک به یک است. چون تابع صعودی ممکن است یک به یک نباشد، ولی هر تابع صعودی اکید یک به یک است و کلمهٔ اکید را در زیر آن برای $\sin^{-1}x$ نیز قید کنند. لازم است کلمهٔ اکید را برای tanx، cosx، $\cos^{-1}x$، $\tan^{-1}x$ و هم‌چنین Arc cosx و Arc tanx را برای $\cos^{-1}x$ و $\tan^{-1}x$ هم قید کنند. در ادامه، سؤال می‌کنم چه عاملی باعث شده که $\cot^{-1}x$ را در کتاب درسی نیاورند؟ به دانش‌آموزان می‌گوییم با شرط $\alpha \neq \frac{k\pi}{۲}$ که k عددی صحیح است هرجا cotα لازم شد، $\frac{۱}{\tan\alpha}$ را محاسبه کن. برای $\cot^{-1}x$ چه بگوییم؟ بگوییم $\cot^{-1}x = \frac{\pi}{۲} - \tan^{-1}x$؟ این طوری هم نمی‌توان گفت چون در کتاب درسی، اصلاً اسمی از $\cot^{-1}x$ برده نشده چه برسد به اینکه به ازای هر عدد حقیقی x، $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{۲}$.


مسائل

۱ـ اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع سوم باشد که $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ و $\cos\beta = -\frac{۵}{۱۳}$، مقدارهای $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ و $\tan(\alpha+\beta)$ را تعیین کنید.

۲ـ با استفاده از مثلث متساوی‌الساقین زیر که طول ساق‌های آن واحد است و زاویه رأس آن α است، با محاسبه مساحت آن از دو طریق نتیجه بگیرید:

$$\sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$$

۳ـ نمودار تابع $y = ۳ - ۶\sin^۲ x$ را در بازه $[۰,۲\pi]$ رسم کنید. دوره تناوب این تابع چقدر است؟

۴ـ فرمول محاسبه $\sin ۲\alpha$ و $\cos ۲\alpha$ را از طریق فرمول محاسبه $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ به دست آورید.

۵ـ برای یک زاویه دلخواه α که برای آن $\tan ۲\alpha$ تعریف شده است درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$$

۶ـ اگر α زاویه‌ای در بازه $\left[\pi,\frac{۳\pi}{۲}\right]$ باشد که $\sin\alpha = -\frac{۱۲}{۱۳}$، مقدار $\tan\frac{\alpha}{۲}$ را حساب کنید.

۱۱۶

در آخر اضافه می‌کنم که فصل‌های دیگر کتاب حسابان و هم‌چنین راهنمای تدریس حسابان بر روی سایت به آدرس www.math-dept.talif.sch.ir خالی از اشکال نبوده و در صورت نیاز، آن‌ها را ارسال می‌کنم. امیدوارم در چاپ‌های بعدی، تمام اشتباهات چاپی آن اصلاح شود. (به امید آن روز.)

پی‌نوشت

۱. مهارت در ریاضیات مسائل حل شده در مثلثات مؤلف: آنتونی نیکلایدس. مترجم: علی ساوجی. ویراستار مهران اخباریفر. ناشر: مؤسسه انتشارات فاطمی.

۲. برای حفظ حرمت مؤسسات نامبرده شده، بنا به سیاست‌های دفتر انتشارات کمک آموزشی، خط‌مشی مجله رشد آموزش ریاضی و نویسنده مقاله، به جای نام آن‌ها، از علامت xxx استفاده شد. سردبیر

۳. کتاب حسابان (۱) و(۲) -۲۵۸/۱ مؤلفان: دکتر محمدحسین بیژن‌زاده، غلامعلی فرشادی، یدالله ایلخانی‌پور. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.