لیلا خسروشاهی

زاویه‌ای که با تَبَر سه تا شد!

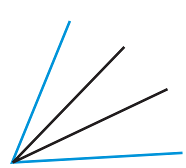
کلیدواژه‌ها: تثلیث زاویه، ترسیم خط‌کش و پرگاری، تثلیث‌گر

این زاویه، اصلاً فکر نمی‌کرد که روزی تبدیل به سه زاویه شود. آن هم به دست یک تبر!

شما هم فکر نکنید که اگر یک تبر به دست بگیرید و بیفتید به جان یک زاویه، می‌توانید به همین راحتی آن را سه قسمت کنید؛ آن هم به سه قسمت مساوی!

ریاضی‌دان‌ها هم ابتدا فکر نمی‌کردند مجبور شوند برای تقسیم زاویه به سه قسمت مساوی، «دست به تبر» شوند! آن‌ها سال‌ها تلاش کردند تا بتوانند روشی پیدا کنند که با استفاده از آن بشود تمام زاویه‌ها را به سه قسمت مساوی تقسیم کرد، بدون این‌که لازم باشد زاویه را اندازه‌گیری کنند.

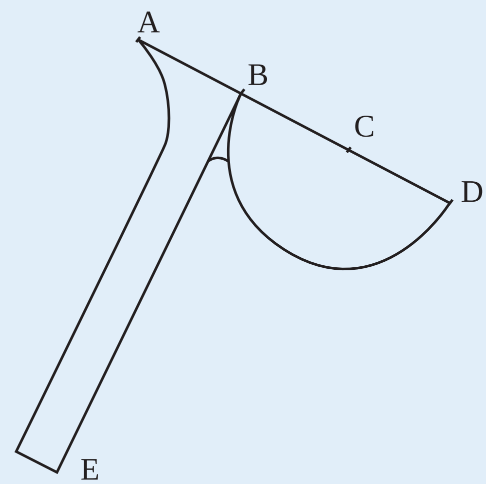
البته ریاضی‌دان‌ها توانسته بودند روشی برای تقسیم زاویه به دو قسمت مساوی بدون نیاز به اندازه‌گیری پیدا کنند. شما هم حتماً در کتاب‌های درسی خود دیده‌اید که چگونه می‌توان با استفاده از خط‌کش و پرگار، نیم‌ساز یک زاویه را رسم کرد و به این ترتیب آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرد. ریاضی‌دان‌ها برای «تقسیم زاویه به سه قسمت مساوی» یا به اصطلاح «تثلیث زاویه» نیز راه‌های متنوعی پیدا کرده‌اند. مثلاً تبری که زاویهٔ داستان ما را سه قسمت کرد، یکی از وسایلی است که برای تثلیث زاویه ابداع شد.



این تبر، یک تبر معمولی، از آن‌هایی که هیزم‌شکن‌ها

استفاده می‌کنند، نبود.

تبر ریاضی‌دان‌ها به شکل زیر بود.



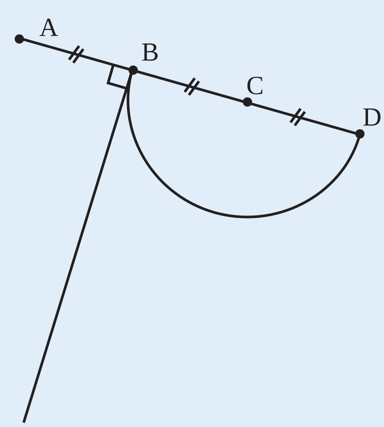
و این خواص را داشت:

$AB=BC=CD$

$EB\perp AB$

سرِ تبر، نیم‌دایره‌ای به مرکز C است.

اجـزای مهمِ ریاضی این تبر به طور سـاده در شـکل زیر نشان داده شده است.

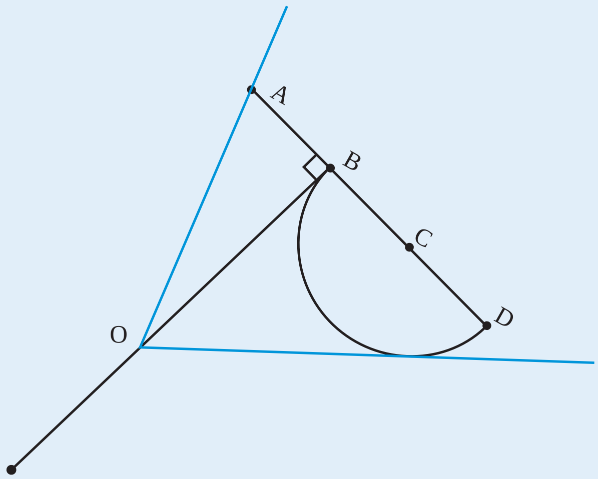


بـرای تثلیـث زاویه به کمک تبر، بایـد آن را طوری روی زاویه قرار داد که:

۱) نیم‌دایره بر یکی از ضلع‌های زاویه مماس شـود؛ یعنی فقط یک نقطهٔ تماس داشته باشند.

۲) نقطهٔ A روی ضلع دیگر دایره قرار بگیرد.

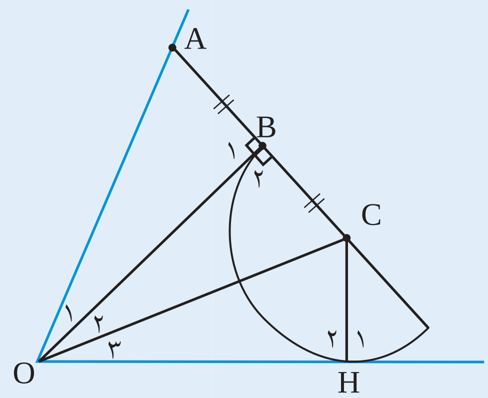
۳) خط BE از رأس زاویه بگذرد.



بـه این ترتیـب اگر نقاط B و C را بـه رأس زاویه وصل کنیم، زاویه به سه قسمت مساوی تقسیم خواهد شد، یعنی

$$\hat{O}_۱=\hat{O}_۲=\hat{O}_۳$$

دلیل این برابری‌ها با استفاده از اثبات برابری مثلث‌ها قابل بیان است.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_1=\hat{B}_2=90^\circ\\ AB=BC\\ BO=BO\end{array}\right\}\overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow}\overset{\triangle}{ABO}=\overset{\triangle}{CBO}\Rightarrow\hat{O}_1=\hat{O}_2$$

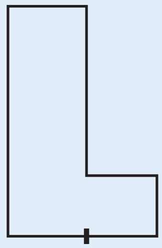
CH شعاعی از دایره است که مرکز را به محل برخورد دایره و خط مماس بر آن وصل کرده است. بعدها در درس هندسه خواهید دید که این شعاع، بر خط مماس عمود می‌شود، بنابراین $\hat{H}_2=90^\circ$

$$\left.\begin{array}{ll}& \hat{B}_2=\hat{H}_2=90^\circ\\ & OC=OC\\ \text{شعاع دایره} & BC=HC\end{array}\right\}\overset{\text{وتر و ضلع}}{\Rightarrow}\quad\overset{\triangle}{BCO}=\overset{\triangle}{HCO}\Rightarrow\hat{O}_2=\hat{O}_3$$

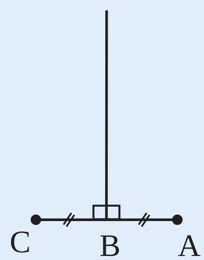
$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ \hat{O}_2=\hat{O}_3\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{O}_1=\hat{O}_2=\hat{O}_3$$

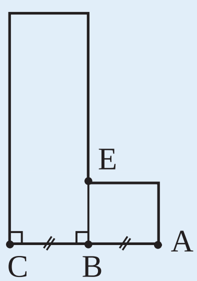
بنابراین ثابت کردیم که این تبر، بدون این‌که نیازی به اندازه‌گیری یک زاویه داشته باشد، می‌تواند آن را به سه زاویهٔ برابر تقسیم کند.

ریاضی‌دان‌ها ابزارهای دیگری هم برای تثلیث زاویه ساخته‌اند؛ مثلاً وسیله‌ای که در زیر می‌بینید، به «گونیای نجاری» معروف است.

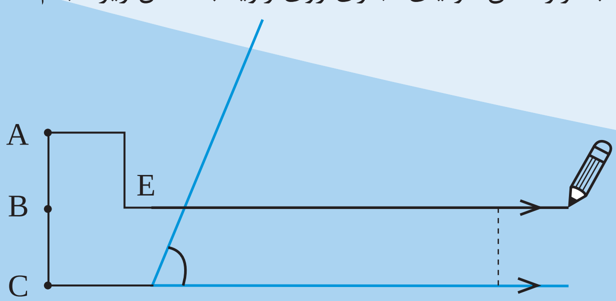


برای ساخت این وسیله باید به این خاصیت مهم توجه داشت که تمام زوایای موجود در شکل قائمه‌اند و AB = BC. اجزای مهمِ ریاضیِ گونیای نجاری را می‌توان در این شکل دید:





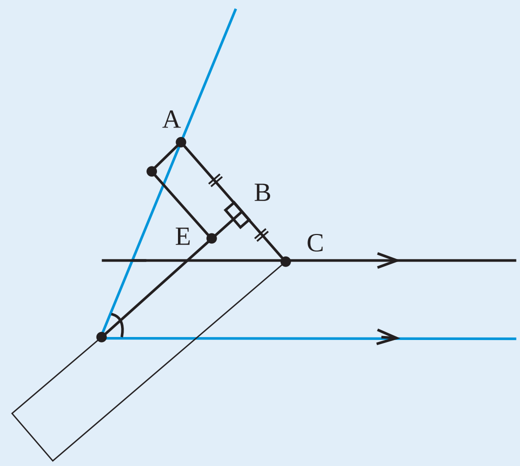
برای تثلیث زاویه به کمک گونیای نجاری، ابتدا خطی مساوی با یکی از اضلاع زاویه رسم می‌کنیم؛ طوری‌که فاصلهٔ خطوط موازی به اندازهٔ پاره‌خط BC باشد. این کار را می‌توان با قرار دادن گونیای نجاری روی زاویه به شکل زیر انجام داد.



سـپس گونیای نجاری را طوری روی زاویه قرار می‌دهیم که:

۱) نقطهٔ C روی خطی که در مرحلهٔ قبل رسـم شده قرار بگیرد.

۲) نقطهٔ A روی ضلع دیگر زاویه قرار بگیرد.

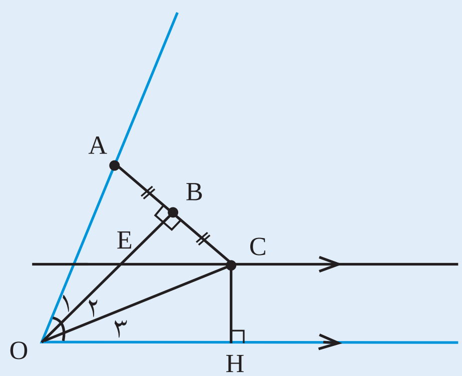


۳) امتدادِ BE از رأس زاویه بگذرد.

به این ترتیب اگر نقاط B و C را به رأس زاویه وصل کنیم، زاویه به سه قسمت مساوی تقسیم خواهد شد؛ یعنی

$$\hat{O}_1=\hat{O}_2=\hat{O}_3$$

(ثابت کنید)



همان‌طور که می‌بینید، این مسـئله شـباهت بسیاری به مسئلهٔ قبل دارد.

در هر دو مسـئله،نقاط A، B، C، H طوری قرار دارند که شرایط زیر برقرار است:

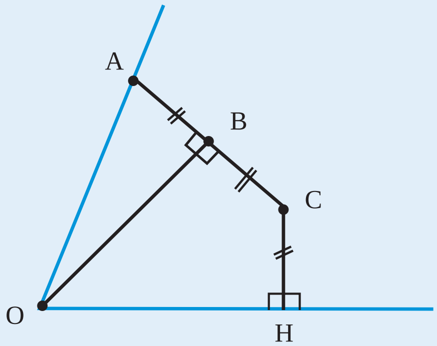
۱) A روی یک ضلع و H روی ضلع دیگر زاویه است؛

۲) CH بر OH عمود است؛

۳) A، B، C روی یک خط راست قرار دارند؛

۴) OB بر AC عمود است؛

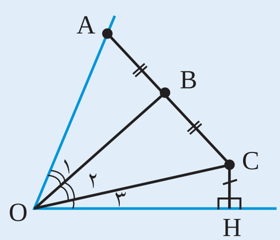
۵) AB=BC=CH؛



در واقع اگر تمام شـرایط بالا برقرار باشـد، با وصل کردن نقـاط C و B به رأس زاویه (نقطهٔ O)، سـه مثلثِ $\overset{\triangle}{ABO}$ و $\overset{\triangle}{COB}$ و $\overset{\triangle}{COH}$ ایجاد می‌شـود که با هم برابرند (چرا؟) و به این ترتیب زاویهٔ O به سه قسمت مساوی تقسیم می‌شود:

$$\hat{O}_1=\hat{O}_2=\hat{O}_3$$

توجه کنید که اگر هریک از این شرایط برقرار نباشد، دیگر زوایای $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ و $\hat{O}_3$ برابر نخواهند بود. مثلاً اگر شـرایط ۱ تا ۴ برقرار باشند اما $AB=BC\neq CH$ ، در این صورت $\overset{\triangle}{ABO}=\overset{\triangle}{COB}\neq\overset{\triangle}{COH}$ و بنابرایـن $\hat{O}_1=\hat{O}_2\neq\hat{O}_3$ ؛ یعنی تثلیث انجام نگرفته است!



ریاضی‌دان‌های ایرانی بسیاری هم روی مسئلهٔ تثلیث زاویه کار کرده‌اند. ابوجعفر خازن، ابوالجود، ابوالحسن هروی، ابوریحان بیرونی، ابوسعید سجزی، صافانی، ابوالوفای بوزجانی و جمشید کاشانی از آن جمله‌اند

«گونیای نجاری» و «تبر» هریک به نوعی شــرایط ۱ تا ۵ را ایجاد کرده‌اند. خوب اســت با مراجعهٔ دوباره به آن‌ها ببینید که هریک چگونه این شرایط را برآورده نموده‌اند. بنابراین این دو وســیله با وجود تفاوت‌های ظاهری، دقیقاً یک کار را انجام می‌دهند و از ایدهٔ مشابهی برای تثلیث زاویه استفاده می‌کنند.

ریاضی‌دان‌هــا روش‌های دیگــری را نیز همــراه ایده‌های متفــاوت برای تثلیث زاویه ابداع کرده‌اند و هنوز هم تلاش در جهت ابداع وسایلی برای تثلیث زاویه، رواج دارد. اکنون نوبت شماست که دست به کار شوید.

۱. با استفاده از مقوا، گونیای نجاری و تبر تثلیث زاویه را بســازید. سپس سعی کنید با استفاده از آن‌ها، زوایای مختلف را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید.

۲. اجــزای مهم گونیای نجاری و تبر را شــناخته‌اید. چه تفاوت‌هــا و چه شــباهت‌هایی بین آن‌ها وجــود دارد؟ این دو وســیله چگونه می‌توانند با وجود این تفاوت‌ها، شرایط یکسانِ ۱ تا ۵ را به وجود بیاورند؟

۳. در این نوشته، برای تثلیث زاویه به کمک تبر یا گونیای نجاری، از زوایای تند استفاده شد. آیا می‌توان با استفاده از این وسایل، زوایای باز را نیز تثلیث کرد؟ چگونه؟ (پاسخ‌های خود به سؤال‌های بالا را برای مجله ارسال کنید).

پی‌نوشت

۱ و ۲. با مراجعه به وبگاه زیر و یا وبگاه مجله، می‌توانید نحوهٔ حرکت دادنِ تبر برای رسیدن به وضعیت مناسب را ببینید:

www.takayaiwamoto.com/Greek-Math/Trisect/Special-Tools-Tools-Tri.html

۳. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید کتاب زیر را مطالعه کنید:
کتاب کوچک ریاضی ۲۶: تثلیث زاویه، تربیع دایره، مؤلفان: پرویز شهریاری/ سیامک جعفری؛ انتشارات مدرسه.