



نمایش اعداد گویای کمتر از درصدهای مختلف

مثالی از ارتباطات و اتصالات درونی ریاضی

وحید چراتی، دبیر ریاضی دوره راهنمایی شهرستان بابل

چکیده

شورای ملی معلمان ریاضی، ارتباطات و اتصالات را به عنوان یکی از استانداردهای مهم آموزش ریاضی معرفی می‌کند و بر به‌کارگیری و استفاده از این مهارت فرایندی در آموزش و یادگیری ریاضی تأکید دارد. معمولاً متداول است که اعداد بزرگ‌تر از ۱ را در مبناهای مختلف نمایش می‌دهند. اما در این مقاله، در مورد چگونگی نمایش اعداد گویای مثبت کوچک‌تر از ۱ در مبناهای مختلف بحث می‌شود. ضمناً با معرفی و نمایش این اعداد به شکل مختوم و متناوب، در مورد جمع و تفریق و ضرب این عددها در هر مبنای به دو روش مستقیم و غیر مستقیم نیز پرداخته می‌شود تا نمونه‌ای برای آموزشگران و یادگیرندگان ریاضی باشد که بدانند چگونه با به‌کارگیری مهارت‌های ریاضی، می‌توان دانسته‌های جدید را بر دانسته‌های قبلی بنا کرد. برای نمونه هم، یک واقعیت ریاضی جالب اما باورنکردنی! یعنی $\frac{1}{(n-1)} = 0.\overline{1}$ ارائه می‌شود.

کلید واژه‌ها: مبنا، بسط اعداد، ارتباطات و اتصالات درونی ریاضی، عدد اعشاری مختوم، عدد اعشاری متناوب.

مقدمه

خود را بر دانش و تجربیات قبلی خود بنا کنند و مفاهیم ریاضی را به گونه‌ای معنادار و منسجم یاد بگیرند. هنگامی که دانش‌آموزان بتوانند ایده‌های ریاضی را به هم پیوند دهند، درک آن‌ها از ریاضیات، عمیق‌تر و پایدارتر خواهد شد. (دافعی، ۱۳۸۸). غیرمرتبط دیدن مفاهیم و گزاره‌ها و الگوریتم‌های

برقراری ارتباطات و اتصالات در ریاضی، باعث ایجاد فهم و درک ریاضی می‌شود و بدون در نظر گرفتن آن‌ها، دانش‌آموزان مجبورند حجم خیلی زیادی از مفاهیم و مهارت‌های مجزا را یاد بگیرند. ولی با استفاده از ارتباطات و اتصالات درونی ریاضی، دانش‌آموزان قادر خواهند بود تا فهم جدید

ریاضی و عدم ملاحظه پیوندها و ارتباطهای درون ساختاری مطالب ریاضی با یکدیگر، از جمله مشکلاتی است که در آموزش و یادگیری ریاضی دیده می‌شود. بسیاری دانش‌آموزانی که خیلی از مفاهیم و عملیات ریاضی را غیر مرتبط و یا کم ارتباط با هم می‌یابند و از ایجاد ارتباطهای بنیانی بین آنها و برداشت‌های یکپارچه و منسجم عاجز هستند (علم‌الهدایی، ۱۳۸۱). تجارب نگارنده در کلاس‌های ضمن خدمت فرهنگیان و مراکز تربیت معلم، تدریس در مدارس مختلف، و بررسی نتایج عملکرد پایان دوره دانش‌آموختگان نیز، مؤید همین امر است. لذا ارائه این مقاله می‌تواند زمینه مناسب و مصداق عینی در کاربرد این مهارت (ارتباطات و اتصالات درون ریاضی) در رشد و توسعه یاددهی و یادگیری دانش ریاضی دبیران و در پی آن، دانش‌آموزان ایران اسلامی باشد.

بخش ۱: مرتبه رقم‌ها بعد از ممیز

در مبنای ۱۰، بعد از ممیز «مرتبه» هر رقم از چپ به راست با توان منفی ۱۰ شروع می‌شود و ادامه می‌یابد، به عنوان نمونه، اولین رقم بعد از ممیز دارای مرتبه 10^{-1} یا $\frac{1}{10}$ است و بعدی مرتبه 10^{-2} یا $\frac{1}{100}$ و به همین ترتیب ادامه دارد.

مثال ۱: بسط عدد مقابل را بنویسید.

$(24/75)_{10} = 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$
فرض کنید که بخواهیم نمایش معمولی عدد $(11/01)_p$ را بنویسیم. ابتدا باید مرتبه رقم‌ها مشخص شود؛ در سمت چپ ممیز، مرتبه رقم‌ها واضح است اما در سمت راست آن با توجه به مبنا و ارتباط با مبنای ۱۰، درمی‌یابیم که اولین رقم بعد از ممیز باید مرتبه 2^{-1} یا $\frac{1}{2}$ و دومین رقم باید مرتبه 2^{-2} یا $\frac{1}{4}$ و سومین رقم باید مرتبه 2^{-3} یا $\frac{1}{8}$ و به همین ترتیب باشد. پس داریم:

$$(11/01)_p = (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0) + (0 \times 2^{-1}) + (1 \times 2^{-2}) \\ = 2 + 1 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$$

مثال ۲: نمایش معمولی عدد $(0/101)_p$ چگونه است؟

با توجه به مرتبه رقم‌ها داریم:

$$(0/101)_p = (1 \times 2^{-1}) + (0 \times 2^{-2}) + (1 \times 2^{-3}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

مثال ۳: نمایش معمولی عدد $(0/21)_p$ چگونه است؟

برای پاسخ‌گویی به این سؤال، ابتدا مرتبه رقم‌ها را مشخص می‌کنیم. با توجه به مبنا و ارتباط با مبنای ۱۰ در می‌یابیم که اولین رقم بعد از ممیز باید مرتبه 3^{-1} یا $\frac{1}{3}$ و دومین رقم باید مرتبه 3^{-2} یا $\frac{1}{9}$ و سومین رقم دارای مرتبه $\frac{1}{27}$ و به همین ترتیب باشد. پس داریم:

$$(0/21)_p = (2 \times 3^{-1}) + (1 \times 3^{-2}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

بنابراین، اگر $(0/abcd...)_{10}$ عددی در مبنای t باشد، مرتبه رقم‌ها بعد از ممیز از چپ به راست با توان منفی t مشخص می‌شود، یعنی a دارای مرتبه t^{-1} و b دارای مرتبه t^{-2} و c دارای مرتبه t^{-3} و به همین ترتیب است. لذا می‌توان نمایش معمولی این دسته از اعداد را در هر مبنا به راحتی نوشت. با توجه به مثال‌های بالا، در می‌یابیم که همه کسرهای تحویل ناپذیری که مخرج آنها توانی از مبنا باشد، نمایش اعشاری آنها به صورت مختوم خواهد بود.

بخش ۲: نمایش کسرهای گویا در مبناهای خواسته شده

فرض کنید می‌خواهیم $\frac{3}{4}$ را به شکل اعشاری در مبنای ۱۰ نمایش دهیم. چون این کسر از ۱ کمتر است، پس در این مبنا، به صورت اعشاری درمی‌آید و قسمت صحیح آن صفر خواهد بود. هم‌چنین، در کتاب ریاضی دوم راهنمایی و کتاب ریاضی گسسته پیش‌دانشگاهی، یاد گرفتیم که برای تبدیل هر عدد در مبنای خواسته شده، از روش تقسیم متوالی استفاده کنیم. با توجه به مبنا و مرتبه رقم‌های بعد از ممیز، پس باید تقسیم بر $\frac{1}{10}$ را در هر مرحله ادامه دهیم تا تعداد $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{100}$ و... در هر مرحله مشخص شود. لازم به ذکر است که در هر مرحله، قسمت صحیح کسر حاصل، تعداد آن مرتبه یا دسته را نشان می‌دهد و قسمت کسری نیز در مرحله بعد تقسیم می‌شود تا تعداد دسته مرتبه بعدی مشخص شود. پس داریم $\frac{3}{4} \div \frac{1}{10} = 7\frac{3}{4}$ یعنی تعداد $\frac{1}{10}$ ها

بخش ۵: تبدیل عددهای اعشاری در هر مبنا به صورت نمایش معمولی

مثال ۸: نمایش معمولی عدد $(0/10)_7$ را بنویسید.
عدد را x فرض می‌کنیم؛ چون دوره گردش ما دو رقمی است، طرفین را در 7^2 ضرب می‌کنیم. البته سمت چپ را در 4 ولی سمت راست را در معادل 4 در مبنای 7 یعنی $(100)_7$ ضرب می‌کنیم تا دو رقم تکراری از قسمت اعشاری به قسمت صحیح وارد شوند. سپس تفریق را در طرفین انجام داده و سمت راست را به معادل مبنای 10 تبدیل کرده و مقدار x را به دست می‌آوریم. این روش، مانند تبدیل اعداد اعشاری متناوب ساده در مبنای 10 است.
$$x = (0/10)_7$$

ضرب طرفین در 7^2 و معادل آن یعنی $(100)_7$
$$4x = (10/10)_7 = 2$$

تفریق طرفین از هم
$$3x = (10)_7 = 2$$

که از تساوی بالا، $x = \frac{2}{3}$ در تمام مبناها نیز این فرایند قابل تعمیم است.

مثال ۹: نمایش معمولی عدد $(0/031)_8$ را بنویسید.
داریم $x = (0/031)_8$ ابتدا چون یک رقم غیر تکراری بعد از ممیز وجود دارد، طرفین را در 5 ضرب می‌کنیم، البته سمت چپ را در 5 ولی سمت راست را در معادل 5 در مبنای 8 یعنی $(10)_8$ ضرب می‌کنیم. لذا داریم $x = (0/31)_8$. از طرفی چون دو رقم تکراری بعد از ممیز وجود دارد، این بار طرفین را در 5^2 ضرب می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت $(31/31)_8 = 125x$. اگر دو رابطه اخیر را از هم کم کنیم داریم:
$$120x = (31)_8 = 16 \Rightarrow x = \frac{2}{15}$$

بخش ۶: جمع، تفریق و ضرب عددهای اعشاری مختوم در هر مبنا

مثال ۱۰: حاصل جمع مقابله را به دست آورید.
$$(0/111)_7 + (0/110)_7 = ()_7$$

به روش غیر مستقیم: ابتدا نمایش معمولی هریک را نوشته، پس از به دست آوردن مجموع، معادل آن را در مبنای 7 نمایش می‌دهیم.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = (1/101)_7$$

به روش مستقیم: در این روش، مانند جمع

و تفریق در مبنای معمولی عمل می‌کنیم. به طور مثال در مبنای 7 ، هر واحد از یک مرتبه، برای مرتبه بعدی 2 واحد محسوب می‌شود.

$$\begin{pmatrix} 0/111 \\ + 0/110 \\ \hline 1/101 \end{pmatrix}_7$$

مثال ۱۱: حاصل تفریق مقابله را به دست آورید.
به روش غیر مستقیم:

$$(0/20)_7 - (0/12)_7 = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{9} = (0/01)_7$$

به روش مستقیم: در این مرحله، از 2 یک واحد قرض می‌گیریم که این یک واحد برای مرتبه بعد، 3 واحد حساب می‌شود و سپس عمل تفریق را انجام می‌دهیم.

$$\begin{pmatrix} 0/20 \\ - 0/12 \\ \hline 0/01 \end{pmatrix}_7$$

مثال ۱۲: حاصل ضرب زیر را به دست آورید.
برای ضرب اعداد اعشاری مختوم در هر مبنا، می‌توان به دو روش اقدام کرد.

به روش غیر مستقیم:
$$(0/11)_7 \times (0/01)_7 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16} = (0/0011)_7$$

به روش مستقیم: ضرب را معمولی انجام داده، در پایان به تعداد اعشار دو عدد، در حاصل ضرب اعشار می‌زنیم.

$$\begin{pmatrix} 0/11 \\ \times 0/01 \\ \hline 0/0011 \end{pmatrix}_7$$

بخش ۷: جمع، تفریق و ضرب اعداد اعشاری متناوب در هر مبنا

به طور کلی، برای جمع، تفریق و ضرب این دسته از اعداد، ابتدا مانند روش‌های بیان شده در بخش‌های قبل، نمایش معمولی هر کدام را نوشته اعمال بالا را بر آن‌ها اجرا کرده، سپس حاصل را به مبنای خواسته شده تبدیل می‌کنیم.

مثال ۱۳: حاصل جمع مقابله را در مبنای 7 به دست آورید.

ابتدا نمایش معمولی هریک از این اعداد را می‌نویسیم و داریم:

به عنوان نمونه، دو مدل اثبات در زیر ارائه می شود.

$$\frac{2}{7} = (\frac{2}{7})_A$$

$$\frac{5}{7} = (\frac{5}{7})_A \quad \text{اثبات (۱)}$$

با جمع طرفین تساوی های بالا خواهیم داشت:

$$\frac{7}{7} = (\frac{7}{7})_A = 1$$

اثبات (۲): به عنوان نمونه می خواهیم نشان دهیم که $(\frac{0}{7})_A = 1$

فرض کنید چنین نباشد (فرض خلف). یعنی $(\frac{0}{7})_A < 1$. بنابراین، بین این دو عدد، باید عدد گویای دیگری مانند M وجود داشته باشد که $0 < M < (\frac{0}{7})_A$ در این صورت، M چیست؟ برای پاسخ به این پرسش، به نمایش اعشاری M توجه کنید. اگر هر کدام از رقم های اعشاری M رقمی به جز 7 باشد، $M < (\frac{0}{7})_A$ با انتخاب M در تناقض است، و اگر تمام رقم ها 7 باشد، آنگاه $M = (\frac{0}{7})_A$ که در هر دو حالت، فرض در تناقض است. پس چنین عددی نمی تواند وجود داشته باشد. بنابراین، فرض خلف باطل و در نتیجه، $(\frac{0}{7})_A = 1$

جمع بندی

در این مقاله، در چند بخش در مورد چگونگی نمایش اعداد گویای مثبت کوچکتر از ۱ در مبنای مختلف و تبدیلات بین آنها بحث شد و در هر بخش، مثال (هایی) برای نشان دادن چگونگی برقراری ارتباط بین مفاهیم ارائه شد. این مطالب می توانند برای تکمیل بخش مبنا در کتاب ریاضی گسسته پیش دانشگاهی رشته ریاضی مورد استفاده قرار گیرند، در حالی که می توانند نمونه ای برای رشد و توسعه دیگر مفاهیم ریاضی هم باشند.

منابع

۱. دافعی، حمید. (۱۳۸۸). ارتباطات و اتصالات درون ریاضی. پایان نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران.
۲. علم الهدی، سید حسن. (۱۳۸۱). راهبردهای نوین در آموزش ریاضی. نشر شیوه، تهران.
۳. رضائی، مانی. (۱۳۹۰). $(\frac{0}{9})_A = 1$ واقعیت ریاضی یا حقیقتی باور نکردنی. رشد آموزش ریاضی. شماره ۱۰۰، صص ۱۹-۲۳. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

$$(\frac{0}{1})_2 + (\frac{0}{1})_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = (\frac{1}{0})_2$$

مثال ۱۴: حاصل جمع مقابل را به دست آورید.

$$(\frac{0}{31})_5 + (\frac{0}{21})_3 = ()_6$$

$$(\frac{0}{31})_5 + (\frac{0}{21})_3 = \frac{2}{15} + \frac{7}{24} = \frac{17}{40} = (\frac{0}{1230})_6$$

البته تمام روش های تبدیل، در بخش های قبل به طور کامل آمده است.

مثال ۱۵: حاصل تفریق مقابل را به دست آورید.

$$(\frac{0}{21})_3 - (\frac{0}{1})_2 = ()_6$$

$$(\frac{0}{21})_3 - (\frac{0}{1})_2 = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = (\frac{0}{12})_6$$

مثال ۱۶: حاصل ضرب مقابل را به دست آورید.

$$(\frac{0}{2})_6 \times (\frac{0}{32})_5 = ()_6$$

پس از انجام تبدیلات داریم:

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{15} = (\frac{0}{24})_6$$

بخش ۸: یک واقعیت ریاضی، اما باور نکردنی!

با توجه به مطالب بخش ۱ درمی یابیم که در مبنای

$$10 \text{ داریم } (\frac{a}{a})_n = \frac{a}{9} = 1 \text{ یعنی } (\frac{0}{9})_n = \frac{9}{9} = 1 \text{ با}$$

توجه به ارتباطات و اتصالات بین مفاهیم ریاضی و مطالب بخش های قبل، در مبنای ۵ داریم:

$$(\frac{0}{1})_5 = \frac{1}{4}$$

$$(\frac{0}{2})_5 = \frac{2}{4}$$

$$(\frac{0}{4})_5 = \frac{4}{4} = 1$$

به طور کلی در هر مبنایی، به این واقعیت ریاضی

می رسیم که؛

$$(\frac{0}{(n-1)})_n = \frac{n-1}{n-1} = 1$$

هر عدد گویا را می توان با تقسیم صورت بر مخرج

آن به صورت اعشاری نمایش داد، اما نمی توان کسری مانند $\frac{p}{q}$ یافت که با عمل تقسیم، نمایش آن به طور

مثال به صورت $(\frac{0}{9})_A$ به دست آید. لذا بسیاری از یادگیرندگان ریاضی، با وجود آن که اثبات های

متعددی را برای برابری $(\frac{0}{(n-1)})_n = \frac{n-1}{n-1} = 1$

می بینند اما این برابری را باور ندارند. (رضائی، ۱۳۹۰)