



یپ بان هار^۱

مترجمان: ابراهیم ریحانی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
خدیجه کریمی کیا، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی
دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

طرح مسئله ریاضی در

سنگاپور مدارس ابتدایی

اشاره

طرح مسئله ریاضی، به معنای تولید مسائل ریاضی و هم‌چنین صورت بندی تازه از مسائل موجود است. این نوشتار بر فرایندهای طرح مسئله که دانش‌آموزان مدرسه ابتدایی با آن درگیرند متمرکز شده است. این فرایندها عبارتند از الف: طرح مباحث ابتدایی/مبنایی، ب: طرح مسائل مرتبط، ج: مفهوم‌سازی برای یک عمل ریاضی، د: درگیر شدن با فراشناخت، و ه: اتصال به تجارب شخصی. در این نوشتار، نمونه‌هایی در مورد استفاده از طرح مسئله در قبل، حین و بعد از حل مسئله ارائه و توضیح داده شده است. استفاده از طرح مسئله برای اهداف مختلف آموزشی از جمله برای توسعه مفاهیم، تمرین و تکلیف، حل مسئله، ارزیابی میزان درک و فهم و ارائه آموزش‌های متفاوت با استفاده از نمونه‌هایی از مدارس سنگاپور، توصیف و تشریح شده است. **کلیدواژه‌ها:** طرح مسئله ریاضی، حل مسئله، مفهوم‌سازی ریاضی، مدارس سنگاپور

۱. مقدمه

تعریف طرح مسئله ریاضی، تولید مسائل جدید و صورت‌بندی مجدد مسائل موجود است (سیلور^۲، ۱۹۹۴). سیلور سه نوع طرح مسئله را - به نام‌های طرح مسئله‌ای که در قبل، حین یا بعد از حل مسئله رخ می‌دهد - مشخص کرده است. تعریف سیلور به این امر اشاره می‌کند که لازم است طرح مسئله ریاضی را در هرگونه بحث و گفت‌وگو درباره حل مسئله ریاضی در نظر بگیریم.

در سنگاپور، چارچوب برنامه درسی ریاضی بر حل مسئله ریاضی متمرکز است. از جمله اهداف برنامه درسی این است که دانش‌آموزان قادر به «صورت‌بندی» و حل مسائل باشند (ص ۵، وزارت آموزش و پرورش، ۲۰۰۶a، ص ۱، وزارت آموزش و پرورش ۲۰۰۶b). هم‌چنین، تکلیف‌های طرح مسئله در کتاب‌های درسی مورد

استفاده در مدارس ابتدایی سنگاپور رایج است (به عنوان

مثال فونگ^۳، راما کریشنان^۴ و گان^۵، ۲۰۰۷).

مزایای استفاده از تکلیف‌های طرح مسئله در کلاس‌های درس ریاضی در تمام پایه‌ها بررسی شده است و نمی‌توان نادیده گرفت که چنین تکلیف‌هایی می‌توانند بر سایر ویژگی‌های دانش‌آموزان تأثیر بگذارند از جمله بر: (۱) استعداد ریاضی، شامل درک و فهم و توانایی حل مسئله، (۲) طرز تلقی‌ها نسبت به ریاضی مانند حس کنجکاوی و علاقه، و (۳) احساس مالکیت نسبت به کار خود (انگلیش^۶، ۱۹۹۷a؛ گروندمیر^۷، ۲۰۰۲؛ کنوت^۸، ۲۰۰۲؛ پرین^۹، ۲۰۰۷).

در بخش اول این نوشتار، برخی پژوهش‌ها راجع به طرح مسئله ریاضی ارائه شده‌اند. به طور خاص، پژوهش‌های منتخب در مورد ارتباط بین حل مسئله و طرح مسئله ریاضی شرح داده شده‌اند. یافته‌های

یک پژوهش درباره دانش‌آموزان سنگاپور با تمرکز بر فرایندهای طرح مسئله ارائه شده‌اند. در بخش دوم نوشتار، نقش‌های متفاوت تکلیف‌های طرح مسئله در کلاس درس توضیح داده شده‌اند.

۱-۲. حل مسئله و طرح مسئله ریاضی

ارتباط بین حل مسئله و طرح مسئله ریاضی، موضوع بسیاری از مطالعات پژوهشی بوده است. دانش‌آموزانی که در حل مسائل غیر معمولی بهتر بوده‌اند «مسئله طرح‌کن»‌های بهتری هم بوده‌اند. سیلور و کای^{۱۰} (۱۹۹۶) دریافتند که توانایی حل مسئله دانش‌آموزان مدارس راهنمایی آمریکا، همبستگی بالایی با توانایی آن‌ها در طرح مسائل پیچیده از نظر معنایی در یک نوع تکلیف طرح مسئله دارد. در یک سری پژوهش‌های متوالی درباره دانش‌آموزان پایه‌های سوم، پنجم و هفتم در استرالیا، انگلیش (b، ۱۹۹۷، c، ۱۹۹۷، ۱۹۹۸) روابطی بین حل مسئله و طرح مسئله پیدا کرد. به ویژه، او نشان داد که توانایی حل مسئله معمولی با طرح مسائل پیچیده محاسباتی - اما نه لزوماً مسائلی با ساختار پیچیده - در ارتباط است. توانایی در حل مسئله‌های بدیع با طرح مسائلی با ساختار پیچیده در ارتباط است. تحقیقات مشخص کرد که در میان دانش‌آموزان سنگاپور، مسئله حل‌کن‌های خوب به طور قابل توجهی نمرات طرح مسئله بالاتری نسبت به مسئله حل‌کن‌های ضعیف داشتند (یپ، ۲۰۰۲). علاوه بر این، معلوم شد زمانی که دانش‌آموزان هیچ تجربه قبلی درباره طرح مسئله نداشتند، رابطه بین حل مسئله و طرح مسئله، وابسته به پایه تحصیلی آن‌ها نبود. در تمام این مطالعات، از دانش‌آموزان خواسته شد که با توجه به برخی شرایط داده شده، مسائلی را طرح کنند. تحقیق بر روی طرح مسئله در طول و بعد از حل مسئله، نسبتاً کمتر انجام شده است.

۳. فرایندهای طرح مسئله ریاضی

کیل پاتریک^{۱۱} (۱۹۸۷) استدلال می‌کند که یکی از فرایندهای شناختی اساسی در طرح مسئله ریاضی، ایجاد پیوستگی است که این نظریه در یک مطالعه توسط سیلور و کای (۱۹۹۶)، مورد تأیید قرار گرفت. وینوگراد^{۱۲} (۱۹۹۰) دریافت که بسیاری از دانش‌آموزان در زمان طرح مسئله اطلاعات را از تجارب یا محیط فیزیکی پیرامون خود تولید و انتخاب می‌کردند. اخیراً، کریستو^{۱۳}، موزولایدز^{۱۴}، پیتالیس^{۱۵}، پانتازی^{۱۶} و سیرامن^{۱۷} (۲۰۰۵)، دانش‌آموزان پایه ششم را به منظور آگاهی از فرایندهایی

که توسط آن‌ها در طول طرح مسئله ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد، مورد مطالعه قرار دادند. از جمله یافته‌هایشان این بود که دانش‌آموزان در حین طرح مسئله، درگیر انتخاب داده‌های کمی شدند.

یافته‌های پژوهش دیگری درباره دانش‌آموزان پایه‌های سوم و پنجم سنگاپور که درگیر طرح مسائل کلامی حساب بودند نشان داد که این دانش‌آموزان، در پنج دسته از فرایندهای طرح مسئله زیر درگیر شدند (یپ، ۲۰۰۲):

۱. طرح مباحث ابتدایی/مبنایی،

۲. طرح مسائل مرتبط،

۳. مفهوم‌سازی برای یک عمل ریاضی،

۴. درگیر شدن با فراشناخت،

۵. اتصال به تجارب شخصی.

۳-۱. طرح مباحث ابتدایی/مبنایی

به نظر کروتسکی^{۱۸} (۱۹۷۶)، دانش‌آموزانی که در ریاضیات خوب هستند هنگامی که متنی حاوی داده‌های عددی به آن‌ها ارائه می‌شود، می‌توانند سؤال‌های پنهان را ببینند. برای مثال، در آزمونی برای شناسایی توانایی ریاضی دانش‌آموزان، از دانش‌آموزان خواسته شد که سؤالی طرح کنند که به دنبال متن زیر بیاید: «مسافتی به طول ۱۵۵ متر با ۲۵ لوله با طول‌های ۵ و ۸ لوله‌گذاری شده است.» سؤال ذکر نشده این بود که «چه تعداد لوله از هر نوع، کار گذاشته شده است؟» سیلور و کای (۱۹۹۶) چنین سؤالاتی را به عنوان مباحث ابتدایی/مبنایی نام‌گذاری کردند.

شکل ۱، یک تکلیف طرح مسئله استفاده شده در مطالعه‌ای به منظور بررسی فرایندهای طرح مسئله را نشان می‌دهد (یپ، ۲۰۰۲). جمله اول رابطه‌ای است که تعداد دختران را در دو کلاس مقایسه می‌کند. جمله دوم یک تخصیص است که تعداد پسران در دو کلاس را توصیف می‌کند.

شکل ۱. یک تکلیف برای طرح مسئله ریاضی (تکلیف ۱)

در کلاس چهارم ابتدایی A، ۳ دختر بیشتر از کلاس چهارم ابتدایی B هستند. ۱۵ پسر در هر کلاس هستند.
۳ سؤال ریاضی درباره دو کلاس بنویسید: اگر مایلید می‌توانید اعداد دیگری به کار برید.

پاسخ‌های دانش‌آموزان چهار نوع بودند (نگاه کنید به جدول ۱). بسیاری از دانش‌آموزان سؤالاتی را برای

یکی از فرایندهای شناختی اساسی در طرح مسئله ریاضی، ایجاد پیوستگی است که این نظریه در یک مطالعه مورد تأیید قرار گرفت. بسیاری از دانش‌آموزان در زمان طرح مسئله اطلاعات را از تجارب یا محیط فیزیکی پیرامون خود تولید و انتخاب می‌کردند

شکل ۲. سؤالات متوالی

چند دختر در کلاس چهارم ابتدایی A وجود دارد؟
چند دختر در کلاس چهارم ابتدایی B وجود دارد؟
پاسخ ۲
اگر ۲۴ دختر در کلاس چهارم ابتدایی B باشند چند دختر
در کلاس چهارم ابتدایی A هست؟
چند دانش‌آموز در چهارم A وجود دارد؟
چند دانش‌آموز در دو کلاس وجود دارد؟

شکل ۳. سؤالات موازی

پاسخ ۱
اگر ۲۰ دختر در کلاس چهارم ابتدایی A باشند چند دانش‌آموز در
کلاس چهارم ابتدایی B هست؟
اگر ۳۳ دانش‌آموز در کلاس چهارم ابتدایی A باشند چند دانش‌آموز
در کلاس چهارم ابتدایی B هست؟
پاسخ ۲
اگر ۳۰ کودک در چهارم A باشند چند کودک در چهارم B هست؟
اگر ۳۲ کودک در چهارم B باشند چند کودک در چهارم A است؟
اگر ۲۱ دختر در چهارم A باشند چند دختر در چهارم B هست؟

نوع دوم سؤالات مرتبط، سؤالات موازی نامیده می‌شود. زمانی گفته می‌شود دانش‌آموزان سؤالات موازی طرح کرده‌اند که سؤالات ساختار یکسان داشته باشند. جواب سؤال قبلی، پاسخ دادن به سؤالات بعدی را تسهیل نمی‌کند. شکل ۳ دو نمونه از چنین پاسخ‌هایی را نشان می‌دهد.

۳-۳. مفهوم‌سازی برای نمادهای ریاضی

یپ (۲۰۰۲) متوجه شد هنگامی که از دانش‌آموزان خواسته شد یک مسئله کلامی طرح کنند به طوری که یکی از مراحل حل آن ضرب 6×4 باشد، آن‌ها برای نشان دادن مفهوم ضرب، مسائلی طرح کردند که به آن‌ها آموزش داده شده بود. به عنوان مثال، هیچ یک از دانش‌آموزان پایه سوم، مسائلی را که شامل مساحت باشند طرح نکردند، به دلیل این که این مفهوم به آن‌ها آموزش داده نشده بود. هم‌چنین، نه دانش‌آموزان پایه سوم و نه دانش‌آموزان پایه پنجم، تجربه‌ای با مسائل ترکیباتی نداشتند، از این رو هیچ کدام از آن‌ها چنین مسائلی طرح نکردند. اگر چه انتظار می‌رفت که در طرح یک مسئله مربوط به ضرب، طرح مسائلی با دو مقدار مشخص برای دانش‌آموزان آسان‌تر باشد، ولی معلوم شد که دانش‌آموزان تمایل دارند سؤالات ضربی دشوارتر از نوع

تعیین تعداد پسران در دو کلاس طرح کردند. پاسخ‌های دسته (نوع) A با پاسخ‌های نوع B مشترک بودند که در آن، دانش‌آموزان سؤالاتی برای تعیین تعداد دختران در کلاس چهارم ابتدایی A با توجه به تعداد دختران در کلاس چهارم ابتدایی B طرح کردند. به طور قابل توجهی، دانش‌آموزان کمتری برای تعیین تعداد دختران در کلاس چهارم ابتدایی B، با توجه به تعداد دختران در کلاس چهارم ابتدایی A سؤالاتی طرح کردند. به همین ترتیب، به دانش‌آموزان کمتری هم سؤالاتی برای تعیین تعداد دختران در یک کلاس، با توجه به تعداد کودکان در کلاس، یا برای تعیین تعداد کودکان در یک کلاس، با توجه به تعداد دختران آن کلاس طرح کردند.

جدول (۱) پاسخ تکلیف ۱

دسته‌بندی پاسخ‌ها	پاسخ‌های نمونه
A	چه تعداد پسر در دو کلاس وجود دارد؟
B	اگر ۳۳ دختر در کلاس چهارم ابتدایی B وجود داشته باشد چند دختر در کلاس چهارم ابتدایی A وجود دارد؟
C	اگر ۴۰ دختر در کلاس چهارم ابتدایی B وجود داشته باشد چند دختر در کلاس چهارم ابتدایی A وجود دارد؟
D	خانم سم در چهارم A تدریسی می‌کند چهارم A، ۲۷ دختر دارد چه تعداد دانش‌آموز در چهارم A وجود دارد؟ اگر ۴۰ دانش‌آموز در کلاس چهارم ابتدایی A باشد چند دختر در چهارم A وجود دارد؟

۳-۲. طرح مسائل مرتبط

کیل پاتریک (۱۹۸۹) بحث می‌کند که یکی از فرایندهای شناختی اساسی درگیر در طرح مسئله، ایجاد پیوستگی‌ها است. سیلور و همکارانش قبلاً این فرایند را در چندین مطالعه بررسی کرده‌اند (لئونگ^{۱۹}، ۱۹۹۳؛ سیلور و کای، ۱۹۹۶؛ سیلور و همکاران، ۱۹۹۶). با استفاده از تکلیف نشان داده شده در جدول ۱، یپ (۲۰۰۲) دریافت که دانش‌آموزان سه نوع از سؤالات مرتبط با یک موقعیت داده شده را طرح کردند. دو گونه از این سه نوع ارتباط در اینجا توصیف شده است. نوع اول از سؤالات مرتبط، سؤالات متوالی نامیده می‌شوند؛ به این معنا که هر سؤال، نیازمند اطلاعاتی از سؤال قبل است. شکل ۲، دو نمونه از چنین پاسخ‌هایی را نشان می‌دهد.

مقایسه‌ای طرح کنند. این می‌تواند به دلیل آن باشد که کتاب‌های درسی پایه سوم سنگاپور، بر مسائل دشوارتر مقایسه‌ای ضرب و نرخ (قیمت) تأکید دارند. مطالعات قبلی با دانش‌آموزان در همان گروه سنی (انگلیش، ۱۹۹۶) نشان داده بود که دانش‌آموزان، تمایل به طرح مسائل ضرب با مقدارهای مشخص داشتند و تعداد کمی از آن‌ها، مسائل مقایسه‌ای برای ضرب طرح کردند. جدول ۲، نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان را نشان می‌دهد.

جدول ۲ مفهوم‌سازی دانش‌آموزان در ارتباط با ضرب

نوع وضعیت	پاسخ‌های نمونه
گروه‌های همتراز	۴ جعبه پرتقال وجود دارد. در هر جعبه ۶ پرتقال وجود دارد. چه تعداد پرتقال موجود است؟
مقایسه‌ای	نام ۶ کارت تلفن جمع‌آوری کرد. من ۴ برابر او کارت تلفن جمع‌آوری کردم. من چند کارت تلفن جمع‌آوری کرده‌ام؟
آرایش مستطیلی	۶ صندلی در یک ردیف وجود دارد. اگر ۴ ردیف وجود داشته باشد چه تعداد صندلی وجود داشته؟
مساحت	یک خانه مستطیل شکل دارای عرض ۴ متر و طول ۶ متر است مساحت خانه مستطیل شکل چقدر است؟
نرخ	احمد یک جعبه به ارزش ۴ دلار خرید. او نیاز دارد ۵ جعبه دیگر بخرد. او برای همه جعبه‌ها چقدر پول باید بپردازد؟

۳-۴. درگیر شدن با فراشناخت

چند نمونه از درگیر شدن دانش‌آموزان با فراشناخت در زمان طرح مسئله در ادامه ارائه شده است. یک دانش‌آموز، نظارت قابل توجهی بر فرایندهای طرح مسئله خود- به وسیله تصحیح مسئله‌ای که طرح کرده بود - نشان داد. وقتی که خواسته شد مسئله‌ای طرح کنند که پاسخ آن ۱۰ باشد، او در ابتدا نوشت «ماری ۶۰ دلار دارد» که آن را تصحیح کرد و گفت «ماری ۳۰ دلار دارد». او سپس ادامه داد «علی ۱/۶ پول ماری را دارد» و بعد، فرد سوم را وارد کرد، که احتمالاً مسئله‌ای با پیچیدگی بیشتر بسازد: «اگر جان و ماری به یک اندازه پول داشته باشند». با این حال، او ماری را به علی تغییر داد و جمله نهایی او چنین شد: «اگر جان و علی یک اندازه پول داشته باشند، ... چقدر است». در این مرحله، او متن خود را تصحیح کرد به این خاطر که احتمالاً پی برده بود که جواب ۱۰ نخواهد شد. او دوباره سؤال

مشروطش را پاک کرد و ادامه داد «و پیتر تمام پول خود را خرج کرده». یکی دیگر از دانش‌آموزان برای تأمین شرطی که جواب مسئله ۱۰ باشد نوشت: «بریتنی اسپیرز ۱۰۰ تا بادکنک دارد. ۱۰ تایشان ترکیدند، ۲۰ تای آن‌ها در هوا رها شدند، ۳۰ تا به سرقت رفتند و ۳۰ تا هم بخشیده شدند. سؤال اولیه او این بود که «نسبت به بادکنک‌های به سرقت رفته، چند تا بخشیده شدند؟» بعد تصمیم گرفت که سؤالش را به صورت یک مسئله

دو مرحله‌ای طرح کند و مرحله دوم را چنین نوشت که «چه تعداد بادکنک باقی مانده است؟» دانش‌آموز توانایی نظارت بر افکار خود را با مراجعه به متن اصلی و تغییر دو عدد نشان داد. بالاخره، متن نهایی‌اش چنین شد: «بریتنی اسپیرز ۱۰۰ تا بادکنک دارد. ۱۰ تای آن‌ها ترکیدند. ۲۰ تا در هوا رها شدند، ۴۰ تا به سرقت رفتند و ۲۰ تا بخشیده شدند.

۳-۵. مرتبط نمودن با تجارب شخصی

الرتون^{۲۰} (۱۹۸۶) نشان داد که محتوا و سبک مسائل طرح شده توسط دانش‌آموزان، به طور منحصر به فردی بازتابی از تجارب و ایده‌های ریاضی آن‌هاست. منون^{۲۱} (۱۹۹۵) دریافت که کودکان، تمایل به طرح مسائلی بر اساس تجارب غیر ریاضی خود دارند. یپ (۲۰۰۲) دریافت که دانش‌آموزان در سنگاپور، در پی ساختن ارتباطاتی بین تجارب غیر ریاضی خود و تجارب ریاضی هستند

دانش‌آموزانی که در ریاضیات خوب هستند هنگامی که متنی حاوی داده‌های عددی به آن‌ها ارائه می‌شود، می‌توانند سؤال‌های پنهان را ببینند

که با مسائل کتاب درسی خود دارند.

یک دانش آموز پنجم ابتدایی، اسامی افراد واقعی را در مسائل خود مورد استفاده قرار داد. همه اسامی او شامل دوستان خوب او و خودش بودند. او همچنین، یک شی را که احتمالاً با آن آشنا بود (یک اسباب بازی محبوب به نام پوکمان) در برخی از مسائلش مورد استفاده قرار داد. زمانی که او مسائل خود را طرح می کرد، آشکارا در حال استفاده کردن از تجارب غیر ریاضی خود بود. به هر حال، تأثیر این کار، تنها در ویژگی های ظاهری مسائلی بود که توسط وی طرح شد. شکل ۴، نمونه ای از مسائل طرح شده توسط این دانش آموز را نشان می دهد.

شکل ۴. مسئله ایمان

کوبین ۲۵ پوکمان دارد.
ایمان ۱۰ پوکمان و هوانگ یونگ ۵ پوکمان دارد.
ایمان و هوانگ یونگ تصمیم گرفتند که پوکمان هایشان را با هم ترکیب کنند. اختلاف بین پوکمان های ایمان و هوانگ یونگ و پوکمان های کوبین چقدر است؟

در یک مورد نادر هم، دانش آموزی برای طرح مسئله های خود، از دانش در یک موضوع درسی دیگر استفاده کرد. او یک مسئله را بر مبنای این حقیقت علمی که از قبل می دانست نوشت که یک حشره ۶ پا دارد و مورچه یک حشره است. او نوشت «۴ مورچه هست و هر مورچه ۶ پا دارد. روی هم چند پا وجود دارد؟»

به نظر می رسد کتاب های درسی تأثیر زیادی بر مسائل مطرح شده توسط دانش آموزان دارند. در بین دانش آموزان سوم ابتدایی، تعجب آور بود که تعداد بیشتری مسائل مقایسه ای (تام ۴ تمبر دارد. کلونین ۶ برابر تام تمبر دارد. کلونین چند تمبر داشته است؟) نسبت به مسائل با مقدار مشخص (۴ جعبه پرتقال وجود دارد و در هر جعبه، ۶ پرتقال است. مجموعاً، چند پرتقال وجود دارد؟) طرح کردند اگر چه که مسائل مقایسه ای از نظر ساختاری، چالش بیشتری ایجاد می کند. تجزیه و تحلیل کتاب درسی نشان داد که کتاب درسی سوم ابتدایی سنگاپور برای آموزش ضرب، بر مسائل مقایسه ای تأکید دارند. ۱۶ مسئله مقایسه ای و ۸ مسئله با مقدار مشخص در کتاب های درسی بود که توسط دانش آموزان شرکت کننده در این تحقیق به کار برده شدند.

هم چنین، کتاب های درسی بیشتر به شکل ظاهری بر دانش آموزان تأثیر گذاشتند. بسیاری از دانش آموزان از اسامی رایج در مسائل کلامی کتاب

درسی مثل «جان» و «مری» استفاده کردند، هر چند که این اسامی در بین هم کلاسی های دانش آموزان مورد مطالعه نادر بود. برای مثال، «جان» شخصیتی بود که فقط { در دو مسئله از نه مسئله کلامی موجود در دو صفحه از کتاب درسی ظاهر شده بود و دانش آموزان مایل به طرح مسائلی در مورد جان و ماری بودند: جان ۱۱ شیرینی داشت و یکی را خورد، الان چند شیرینی دارد؟ یا ماری ۹۵۶ برچسب دارد. جان ۳۲۶ تا بیشتر از ماری برچسب دارد. آن ها روی هم رفته چندتا برچسب دارند؟ و جان ۵ توپ دارد. ماری دو برابر جان توپ دارد. ماری چند توپ داشته؟ برخی از دانش آموزان در مدل سازی مسائل کلامی خود، به تقلید از انواع کتاب درسی، درک خود را از دنیای واقعی کنار گذاشتند. زمانی که از یک دانش آموز پنجم ابتدایی خواسته شد مسئله ای طرح کند که جوابش 4×6 باشد، نوشت بلندی قد جان ۶ متر است و بلندی قد خواهرش ۴ برابر بلندی قد اوست. طول قد خواهرش چقدر است؟ بعضی ها هم این روابط را نادیده گرفتند. مثلاً یک دانش آموز سوم ابتدایی این مسئله را طرح کرد ۱۲ بزرگسال در سالن وجود دارند. تعداد زنان ۳ برابر بزرگسالان است. چند زن در سالن وجود دارند؟ دانش آموز این مسئله را نادیده گرفته که زنان، زیر مجموعه ای از بزرگسالان هستند.

در بخش های قبل، برخی از فرایندهایی که دانش آموزان در حین طرح مسائل ریاضی با آن ها درگیر می شوند توصیف شد. در بخش بعدی، درباره نقش طرح مسئله ریاضی در کلاس درس بحث شده است.

۴. طرح مسئله ریاضی در کلاس درس

استفاده از طرح مسئله ریاضی برای توسعه مفاهیم، ارائه تمرین و تکرار {مشق کردن}، حل مسئله، ابزار سنجش، ابزار انگیزشی و استفاده در کلاس های با توانایی های مختلف، به وسیله نمونه های خاص توضیح داده شده است.

۴-۱. توسعه یک مفهوم

خانم پنگ دو مستطیل را به یک کلاس نشان داد و از دانش آموزان سوم ابتدایی خواست در مورد دو مستطیل سؤال هایی طرح کنند. در بین سؤال های مطرح شده، یکی در مورد اندازه نسبی دو مستطیل بود: کدام مستطیل بزرگ تر است؟

بر اساس سؤال مطرح شده توسط دانش آموزان

برخی از دانش آموزان در مدل سازی مسائل کلامی خود، به تقلید از انواع کتاب درسی، درک خود را از دنیای واقعی کنار گذاشتند

شکل ۵. متن مورد استفاده در کلاس خانم سیتی

دیوید و مایکل از شهر A به شهر B با سرعت‌های متفاوت رانندگی کردند ولی هر دو سرعت خود را در طول سفر تغییر ندادند. دیوید سفر خود را ۳۰ دقیقه زودتر از مایکل آغاز کرد. با این حال، مایکل ۵۰ دقیقه زودتر از دیوید به شهر رسید. وقتی مایکل به شهر B رسید، دیوید ۴/۵ از سفرش را طی کرده بود و در ۷۵ کیلومتری از شهر B قرار داشت.

برخی از سؤالاتی که توسط دانش‌آموزان پرسیده شد عبارت بودند از:

- فاصله بین دو شهر چقدر بود؟

- چه کسی زمان بیشتری برای سفر طی شده صرف

کرد؟ چقدر بیشتر؟

- دیوید چقدر زمان صرف کرد؟ مایکل چقدر؟

- سرعت دیوید چقدر بود؟ سرعت مایکل چقدر بود؟

پس از آن، خانم سیتی از دانش‌آموزان خواست تا در مورد سؤالاتی فکر کنند که مستقیماً با استفاده از داده‌های موجود در متن پاسخ داده می‌شوند و سؤالاتی که پیش از آن که پاسخ داده شوند، نیازمند داده‌های بیشتری هستند.

در حل یک مسئله پیچیده چند مرحله‌ای، دانش‌آموزان باید سؤالات میانی را که نیاز است به آن‌ها جواب دهند، بدانند. معلمان با دادن فرصت‌های زیاد به دانش‌آموزان برای طرح مسئله در درس‌های حل مسئله، در واقع، فرایندهای حل مسئله را به آن‌ها یاد می‌دهند.

۴-۴. ارزیابی درک و فهم

آقای اقبال از دانش‌آموزان سوم ابتدایی خود خواست که سه مسئله کلامی طرح کنند که با انجام عمل ۴×۶ حل شوند. وی هم‌چنین، آن‌ها را تشویق کرد که سؤالاتی طرح کنند که تا حد ممکن متفاوت باشند. او توانست که درک مفهومی دانش‌آموزان خود را از ضرب، با توجه به موقعیت‌هایی که دانش‌آموزان در مسائل کلامی خود از آن‌ها استفاده می‌کردند، ارزیابی کند. {به طور مثال}، دانش‌آموزانی که فاقد درک درستی از ضرب بودند، مسائلی از این قبیل طرح کردند که آنی ۴ شیرینی و بلا ۶ شیرینی دارد. آن‌ها روی هم چند شیرینی دارند؟ یا دیوید ۲۰ کتاب داشت و ۴ کتاب دیگر خرید. دیوید الان چند کتاب دارد؟

در حالی که دانش‌آموزانی که درک درستی از ضرب داشتند، سؤالاتی از این قبیل طرح کردند که باب ۶ سبذگل داشت که در هر سبذ، ۴ گل بود. او چند تا گل

خانم پنگ به منظور کمک به دانش‌آموزان در توسعه مفهوم مساحت یک شکل، درس را به سمت استفاده از کاشی‌های مربعی هدایت کرد.

استفاده از طرح مسئله به دانش‌آموزان در دستیابی به تمرکزی که درس بر آن قرار دارد، کمک می‌کند. سؤال مطرح شده که کدام مستطیل بزرگ‌تر است؟ موجب تمرکز درس بر مساحت می‌شود. زمانی که از طرح مسئله به طور منظم استفاده می‌شود، دانش‌آموزان نیز توانایی تمرکز بر جنبه‌های برجسته موقعیت‌های ارائه شده به آن‌ها را در خود ایجاد می‌کنند.

۲-۴. ارائه تمرین و مشق

آقای عثمان، به جای این که از دانش‌آموزان بخواهد که مساحت‌های اشکال مرکبی را که برای آن‌ها رسم شده محاسبه کنند، از دانش‌آموزان کلاس ششم ابتدایی خود خواست که اشکال مرکبی رسم کنند که شامل دایره‌ها یا بخشی از دایره‌ها باشد، به طوری که مساحت هر شکل ۱۵۴ سانتیمتر مربع باشد. دانش‌آموزان مجاز بودند که از ماشین حساب استفاده کنند.

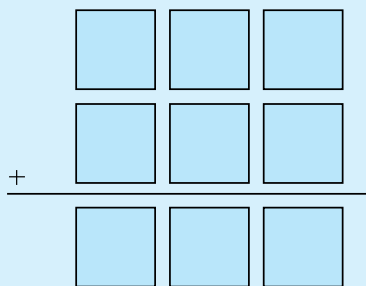
پس از رسم شکل‌های مورد نیاز، دانش‌آموزان به طور مکرر فرمول‌ها را برای محاسبه مساحت اشکال مختلف شامل دایره‌ها به کار بردند. علاوه بر این، دانش‌آموزان این شانس را داشتند که ارزیابی کنند که آیا شکل‌هایشان در شرایط داده شده صدق می‌کند یا خیر. هم‌چنین، آن‌ها این امکان را داشتند تا اشکال نادرست را اصلاح کنند و شکل درست را به دست آورند. علاوه بر این، دانش‌آموزان فرصت داشتند که خلاقیت خود را به کار ببرند و سعی کنند تا با رسم اشکالی که هیچ یک از هم‌کلاسی‌هایشان رسم نکرده‌اند، با یکدیگر رقابت کنند.

استفاده از طرح مسئله به معلمان اجازه می‌دهد تا به ارزش فعالیت‌های تمرین و تکرار دانش‌آموزان از طریق درگیر کردنشان با طیف وسیعی از مهارت‌های مرتبه بالاتر تفکر و عادت‌های ذهنی بپردازند.

۳-۴. حل مسئله

خانم سیتی از دانش‌آموزان ششم ابتدایی خود خواست که براساس متنی از یک مسئله کلامی که او برای تدریس حل مسئله در میبحث سرعت استفاده کرده بود، پرسش‌هایی طرح کنند. به دانش‌آموزان متن شکل ۵ نشان داده شد.

بنویسند، برخی به سرعت موفق به انجام این کار شدند، در حالی که دیگران برای مدت طولانی تلاش کردند.



او از دانش‌آموزانی که به سرعت موفق به پیدا کردن راه حل‌های ممکن شده بودند خواست که از خود سؤالات «چه می‌شود اگر» بپرسند. بعضی از آن‌ها پرسیدند که اگر مجموع یک عدد چهار رقمی باشد چه می‌شود؟ دیگری پرسید که چه می‌شود اگر آن‌ها مجاز به استفاده از رقم مثلاً صفر نبودند؟ سپس خانم گان از این دانش‌آموزان خواست که مسئله را بر مبنای «چه می‌شود اگر» حل کنند. این کار باعث شد که دانش‌آموزان پیشرفته، درگیر تکلیف‌های پرچالش و خود را هبر شوند که به نوبه خود، شکلی از انگیزه بود.

۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار به طرح برخی از فرایندهایی که دانش‌آموزان در زمان طرح مسائل ریاضی درگیر آن می‌شوند، توجه شد. دانستن این فرایندها به معلمان اجازه می‌دهد تا تکلیف‌های طرح مسئله مناسبی برای استفاده در کلاس درس انتخاب کنند. انواع مختلف تکلیف‌های حل مسئله از جمله طرح مسئله قبل از حل مسئله (مانند مثال آقای اقبال)، طرح مسئله در زمان حل مسئله (مانند مثال خانم سیتی) و طرح مسئله پس از حل مسئله (مانند مثال خانم گان)، هر یک نقش‌های گوناگونی را که تکلیف‌های طرح مسئله می‌توانند در کلاس درس ایفا کنند، نشان می‌دهند.

برخی ایده‌ها برای پژوهش در کلاس درس، شامل بررسی مسائلی است که توسط دانش‌آموزان طرح شده و نیز بررسی اثرات طرح مسئله به عنوان یک مداخله‌گر یا میانجی است. تحقیقات درباره مسائل طرح شده توسط دانش‌آموزان می‌توانند به منظور کشف فهم ریاضی و هم‌چنین توانایی عمومی آن‌ها مانند خلاقیت، مورد استفاده قرار گیرد. تحقیقات انجام شده در مورد طرح مسئله به عنوان یک مداخله‌گر، اثرات آن را در حل مسئله و نگرش دانش‌آموزان نشان می‌دهد.

داشت؟ و تام ۶ کارت تلفن و من ۴ برابر او کارت تلفن گرفتم. من چند کارت تلفن دارم؟

هم‌چنین، آقای اقبال قادر به مشاهده این بود که برخی از دانش‌آموزان در سطح پیشرفته‌ای بودند مسائلی را با موقعیت‌هایی طرح می‌کردند که اکثر دانش‌آموزان سوم ابتدایی، قادر نیستند آن‌ها را به ضرب ارتباط دهند. این دانش‌آموزان، مسائلی مانند آرایش مستطیلی (۶ صندلی در یک ردیف وجود دارد. در ۴ ردیف، چند صندلی وجود دارد؟) و نرخ (قیمت) (آقای تان ۶ کیلوگرم ماهی خرید. قیمت هر کیلو ماهی ۴ دلار است. او چقدر پرداخت کرده است؟) طرح کردند.

با استفاده از یک تکلیف طرح مسئله، آقای اقبال توانست فراتر از ارزیابی دانش رویه‌ای دانش‌آموزان، به کسب یک دیدگاه اجمالی از درک مفهومی آن‌ها برسد.

۴-۵. آموزش افتراقی

خانم گوئری مایل به استفاده از طرح مسئله در کلاس خودش است که دانش‌آموزانی با توانایی‌های مختلف در آن هستند. درخواست وی از دانش‌آموزان چهارم ابتدایی برای نوشتن یک مسئله کلامی طوری بود که شامل اعداد $\frac{2}{3}$ ، ۲ و ۲۴ باشد، به دانش‌آموزانی که {با ریاضی} مشکل داشتند اجازه داد که یکی از اعداد حسابی را رها کنند و دانش‌آموزان پیشرفته خود را تشویق کرد که مسائل چند-مرحله‌ای طرح کنند. هم‌چنین، در ادامه از آن‌ها خواست که مسائل خود را پرچالش‌تر کنند.

این کار باعث می‌شود تا دانش‌آموزان مشکل‌دار تکلیف‌هایی انجام دهند که هم در سطح خودشان باشد و هم انگیزه‌بخش باشد. هم‌چنین، طرح مسئله از خسته شدن دانش‌آموزان پیشرفته به خاطر انجام تکلیف‌های استاندارد جلوگیری می‌کند زیرا آن‌ها می‌توانند خود را با تلاش برای کشف چگونگی ساختن سه عدد به گونه‌ای که مسئله را حل کنند، به چالش بیندازند. در حالی که یک دانش‌آموز متوسط ممکن است چنین مسئله‌ای طرح کند که کلاس ابتدایی دارای ۶ پسر و ۲۴ دختر است. $\frac{2}{3}$ دانش‌آموزان پیتزا دوست دارند. چند دانش‌آموز پیتزا دوست دارند؟ دانش‌آموز پیشرفته ممکن است این مسئله را طرح کند که جان ۶ صفحه از یک کتاب را دوشنبه و $\frac{2}{3}$ از صفحات باقی مانده را سه‌شنبه خواند و هنوز ۲۴ صفحه از کتاب باقی مانده است. کتاب چند صفحه دارد؟ خانم گان اغلب از سؤالات «چه می‌شود اگر» در مواجهه با دانش‌آموزان استفاده می‌کند. زمانی که او از دانش‌آموزان سوم ابتدایی‌اش خواست که از ارقام ۰ تا ۹ دقیقاً یک بار استفاده کنند و یک عبارت درست جمع

تحقیقات درباره مسائل طرح شده توسط دانش‌آموزان می‌توانند به منظور کشف فهم ریاضی و هم‌چنین توانایی عمومی آن‌ها مانند خلاقیت، مورد استفاده قرار گیرد

within formal and informal context. *Journal of Research for Mathematics Education*, 29(1), 82-106. Mathematical 116 Problem Solving

7. Fong, H. K., Ramakrishnan, C., & Gan, K. S. (2007). *My Pals Are Here! Maths* Second Edition. Singapore: Marshall Cavendish Education.

8. Grundmeier, T. A. (2002). University students' problem-posing abilities and attitudes towards mathematics. *PRIMUS*, 12, 122-134.

9. Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

10. Knuth, E. J. (2002). Fostering mathematical curiosity. *Mathematics Teacher*, 95, 126-130.

11. Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: The University of Chicago Press.

12. Leung, S. S. (1993). The relations of mathematical knowledge and creative thinking to the mathematical problem posing of prospective elementary school teachers on tasks differing in numerical content. Unpublished doctoral dissertation, University of Pittsburgh.

13. Menon, R. (1995). The role of context in student-constructed questions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 17(1), 25-33.

14. Ministry of Education (2006a). *Mathematics syllabus: Primary*. Singapore: Curriculum Planning and Development Division.

15. Ministry of Education (2006b). *Mathematics syllabus: Secondary*. Singapore: Curriculum Planning and Development Division.

16. Perrin, J. R. (2007). Problem posing at all levels in the calculus classroom. *School Science and Mathematics*, 107(5), 182-192.

17. Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For The Learning of Mathematics*, 14, 19-28.

18. Silver, E. A. & Cai, J. F. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal of Research for Mathematics Education*, 27(5), 521-539.

19. Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal of Research for Mathematics Education*, 27(3), 293-309.

20. Winograd, K. (1990). Writing, solving and sharing original math story problem: Case studies of fifth grade children's cognitive behavior. Unpublished doctoral dissertation, University of Northern Colorado.

21. Yeap, B. H. (2002). Relationship between children's mathematical word problem posing and grade level, problem-solving ability and task type. Unpublished doctoral dissertation, Nanyang Technological University.

1. Yeap Ban Har
2. Silver
3. Fong
4. Ramakrishna
5. Gan
6. English
7. Grundmeier
8. Knuth
9. Perrin
10. Cai
11. Kilpatrick
12. Winograd
13. Christou
14. Mousoulides
15. Pittalis
16. Pantazi
17. Sriraman
18. Krutetskii
19. Leung
20. Ellerton
21. Menon

مرجع

Mathematical Problem Posing in Singapore Primary Schools
 MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING Yearbook 2009, Association of Mathematics Educators (pp 102-116) Author(s): Yeap Ban Har, Associate Professor Mathematics and Mathematics Education Academic Group, National Institute of Education.

منابع

1. Ellerton, N. F. (1986). Children's made up problems: A new perspective of talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 261-271.
2. English, L. D. (1996). Children's problem-posing and problem-solving preferences. In J. Mulligan & M. Mitchelmore (Eds.), *Children's number learning* (pp. 227-242). Adelaide, Australia: The Australian Association of Mathematics Teachers Inc.
3. English, L. D. (1997a). Promoting a problem-posing classroom. *Teaching Children Mathematics*, 4, 172-179.
4. English, L. D. (1997b). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 183-217.
5. English, L. D. (1997c). Seven-grade students problem posing from open-ended situations. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *People in Mathematics Education* (pp. 39-49). Sydney: Mathematics Education Research Group of Australasia Inc.
6. English, L. D. (1998). Children's problem posing