هوشنگ شرقی

المپیاد ریاضی در اسپانیا

کلیدواژه‌ها: المپیاد ریاضی، اسپانیا، نقاط شبکه‌ای، سهمی، نقطهٔ ثابت، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک، مرکز ثقل مثلث

در کشور اسپانیا از سال ۱۹۶۴، المپیادهای ریاضی به‌طور مرتب و در دو نوبت برگزار می‌شوند. در سال‌های اول در هر نوبت به شرکت‌کنندگان هشت مسئله داده می‌شد، اما در سال‌های بعد، مانند المپیاد بین‌المللی ریاضی، شش سؤال در دو روز متوالی داده می‌شود. نخستین حضور اسپانیا در المپیادهای بین‌المللی ریاضی به سال ۱۹۸۳ برمی‌گردد که رتبهٔ بیست و سوم را به‌دست آورد. از آن سال تاکنون کشور اسپانیا مرتباً در این رقابت‌ها حضور داشته و بهترین مقامی که به‌دست آورده، در رقابت‌های ۱۹۸۷ کوبا بود که رتبهٔ بیست و دوم را کسب کرد. ولی در سال‌های بعد روندی به شدت نزولی داشت و تا رتبهٔ شصت و چهارم نیز سقوط کرد. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که این کشور تنها مهد فوتبال و گاوبازی است!

نکتهٔ جالب توجه آن است که به‌رغم نزول مذکور، مسائل مطرح شده در المپیاد ریاضیِ این کشور مسائل قابل قبولی هستند و از سطح کیفی نسبتاً خوبی برخوردارند. این موضوع را می‌توان در متن سؤال‌ها که در پی می‌آیند، مشاهده کرد. البته در مقایسه با سؤال‌های مسابقات کشورهای صاحب نام در المپیاد ریاضی (مانند کشورهای اروپای شرقی، انگلستان، آمریکا، چین، هندوستان و ایران)، این سؤال‌ها بسیار سطح پایین‌تر هستند، اما گاهی هم سؤال‌های بسیار دشوار در میان مسائل آن‌ها دیده می‌شود. این کشور همچنین یک بار در سال ۲۰۰۸ میزبان المپیاد بین‌المللی ریاضی بوده است.

در این‌جا منتخبی از مسائل مطرح شده در المپیادهای سال‌های ۱۹۹۶ و ۱۹۹۷ این کشور را همراه با راه‌حل‌های آن‌ها آورده‌ایم.

صورت مسائل

۱. مجموع توان دوم ۱۰۰ جملهٔ نخست یک دنبالهٔ حسابی را حساب کنید، اگر مجموع ۱۰۰ جملهٔ نخست آن ۱، و مجموع دومین، چهارمین، و... صدمین جملهٔ آن نیز ۱ باشد.

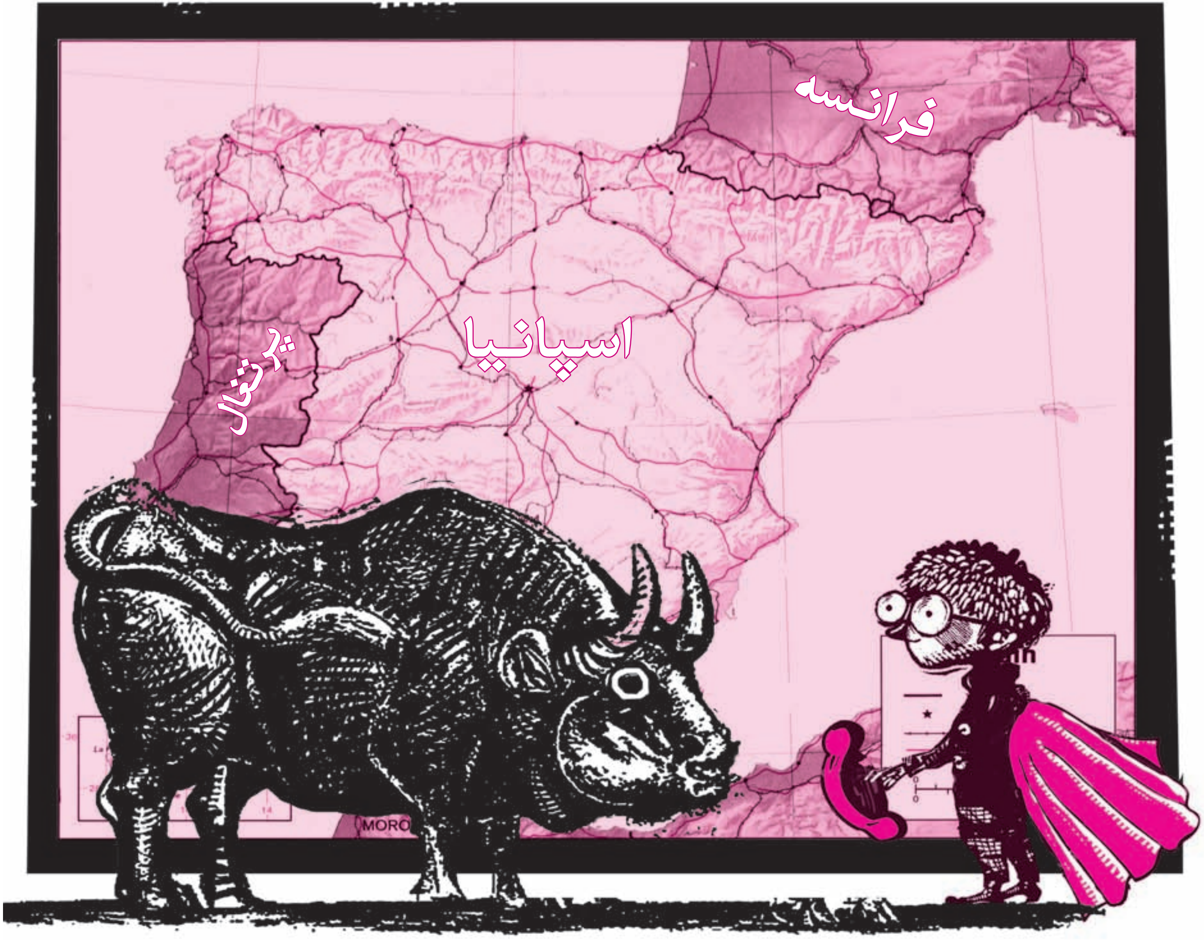
۲. فرض کنید A یک مجموعهٔ ۱۶ عضوی از نقاط شبکه‌ای یک مربع ۴×۴ باشد. بیشترین تعداد اعضای A را بیابید، به‌طوری که هیچ سه تا از آن‌ها تشکیل مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ندهند.

۳. p یک عدد اول است. همهٔ اعداد $k \in Z$ را بیابید که $\sqrt{k^2 - pk}$ عددی صحیح باشد.

۴. همهٔ سهمی‌هایی را به معادلهٔ $y = x^2 + px + q$ که سه نقطهٔ برخورد با محورهای مختصات به‌وجود می‌آورند، در نظر بگیرید. دایرهٔ گذرنده از این سه نقطه را رسم می‌کنیم. ثابت کنید این دایره‌ها از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند.

۵. اعداد طبیعی a و b به صورتی هستند که $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ عددی صحیح است. نشان دهید بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b از $\sqrt{a+b}$ بزرگ‌تر نیست.

۶. فرض کنید G مرکز ثقل مثلث ABC باشد. ثابت کنید که اگر $AB + GC = AC + GB$ آن‌گاه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.



حل مسائل

۱. اگر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی را d و جملهٔ اول آن را a_1 در نظر بگیریم، طبق فرض مسئله داریم:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{100}=S_{100}=\frac{100}{2}[2a_1+99d]=1$$

$$\Rightarrow 2a_1+99d=\frac{1}{50}\Rightarrow 100a_1+4950d=1$$

$$a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{100}=1$$

$$\Rightarrow a_1+d+a_1+3d+\ldots+a_1+99d=1$$

$$\Rightarrow 50a_1+(1+3+5+\ldots+99)d=1$$

$$\Rightarrow 50a_1+\frac{50}{2}[2+49\times 2]d=1$$

$$\Rightarrow 50a_1+2500d=1\Rightarrow -\begin{cases}100a_1+4950d=1\\100a_1+5000d=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow d=\frac{1}{50},\ a_1=-\frac{49}{50}\Rightarrow a_n=-\frac{49}{50}+(n-1)\frac{1}{50}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{50}n-1$$

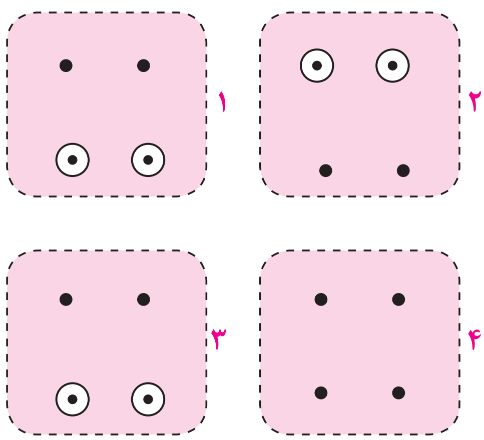
$$\sum_{i=1}^{100}a_i^2=\sum_{i=1}^{100}(\frac{1}{50}i-1)^2=\sum_{i=1}^{100}(\frac{1}{2500}i^2-\frac{2}{50}i+1)$$

$$=\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{100}i^2-\frac{2}{50}\sum_{i=1}^{100}i+100$$

$$=\frac{1}{2500}\times\frac{100\times 101\times 201}{6}-\frac{1}{25}\times\frac{100\times 101}{2}+100$$

$$=\frac{6767}{50}-102=33/34$$

۲. شبکهٔ نقاط را به صورت زیر طبقه‌بندی می‌کنیم. اگر در یکی از این طبقه‌ها سه نقطه را در نظر بگیریم، بدیهی است که این سه نقطه رئوس یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین خواهند بود. پس در هر طبقه می‌توانیم حداکثر دو نقطه را علامت بزنیم.



مطابق شکل، در سه طبقه از این طبقات، در هر یک دو نقطه را جدا کرده‌ایم. اکنون به‌راحتی می‌توان دید که هر یک از نقاط طبقهٔ چهارم را که علامت بزنیم، با دو نقطه از نقاط علامت زده یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین تشکیل

می‌دهد (آن‌ها را خودتان مشخص کنید). بنابراین حداکثر شش نقطه را می‌توان از مجموعهٔ A مشخص کرد که این ویژگی را داشته باشند. در حالت‌های دیگر هم می‌توان به همین صورت استدلال کرد.

۳. طبق فرض: $\sqrt{k^2 - pk} \in Z$. بنابراین:

$$\sqrt{k^2 - pk} = m \Rightarrow k^2 - pk = m^2 \Rightarrow k^2 - pk - m^2 = 0$$
$$\Rightarrow \Delta = p^2 + 4m^2 = t^2 \Rightarrow t^2 - 4m^2 = p^2$$
$$\Rightarrow (t - 2m)(t + 2m) = p^2$$

اکنون حالت‌های زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$\begin{cases} t - 2m = p \\ t + 2m = p \end{cases} \quad \begin{cases} t - 2m = 1 \\ t + 2m = p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t - 2m = p^2 \\ t + 2m = 1 \end{cases}$$

از دستگاه اول نتیجه می‌شود که $t = p$ و $m = 0$ و از آنجا نتیجه می‌شود:

$k^2 - pk = 0 \Rightarrow k = 0$ یا $k = p$

و از دستگاه دوم نتیجه می‌شود:

$m = \frac{p^2 - 1}{4}$ و $t = \frac{p^2 + 1}{2}$

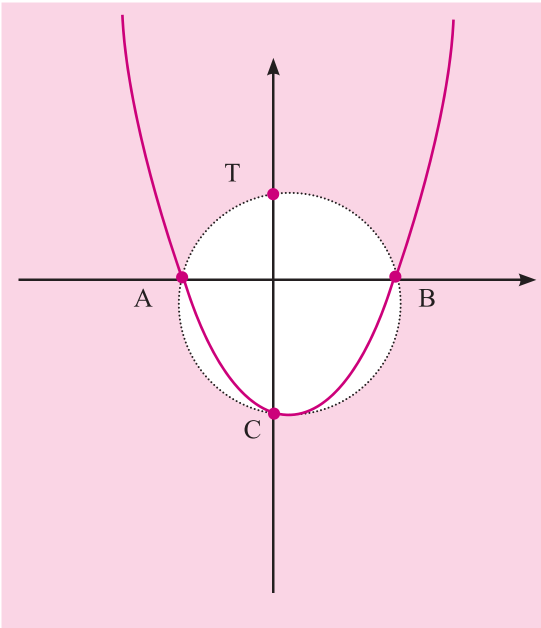
و از آنجا نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta = p^2 + 4\left(\frac{p^2 - 1}{4}\right)^2$$
$$= p^2 + \frac{(p^2 - 1)^2}{4} = \frac{(p^2 - 1)^2 + 4p^2}{4} = \left(\frac{p^2 + 1}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow k = \frac{p \pm \frac{p^2 + 1}{2}}{2}$$
$$\Rightarrow k_1 = \left(\frac{p + 1}{2}\right)^2, k_2 = -\left(\frac{p - 1}{2}\right)^2$$

از دستگاه سوم نیز همین جواب‌ها به‌دست می‌آیند. پس مجموعهٔ جواب‌های k عبارت‌اند از:

$$\{0, p, \left(\frac{p + 1}{2}\right)^2, -\left(\frac{p - 1}{2}\right)^2\}$$

۴. مطابق شکل، اگر سهمی مزبور محور xها را در نقاط A و B و محور yها را در نقطهٔ C قطع کند، مختصات نقاط A و B به صورت $A\left|\begin{matrix} x_1 \\ 0 \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} x_2 \\ 0 \end{matrix}\right.$ خواهد بود که x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + px + q = 0$ هستند. بنابراین $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p$ و $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = q$ و مختصات C به



صورت $C\left|\begin{matrix} 0 \\ q \end{matrix}\right.$ است.

اگر معادلهٔ دایرهٔ گذرنده از این سه نقطه به صورت $y^2 + x^2 + ax + by + c = 0$ باشد، با جای‌گذاری مختصات A، B و C در این معادله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1^2 + ax_1 + c = 0 \\ x_2^2 + ax_2 + c = 0 \\ q^2 + bq + c = 0 \end{cases}$$

از کم کردن دو طرف معادله‌های اول و دوم نتیجه می‌شود:

$$x_1^2 - x_2^2 + a(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + a) = 0$$

و چون: $x_1 \neq x_2$ (چرا؟) پس:

$$a = -(x_1 + x_2) = p$$
$$c = -x_1^2 - ax_1 = -x_1^2 + x_1(x_1 + x_2) = x_1x_2 = q$$

و با جای‌گذاری c در معادلهٔ سوم نتیجه می‌شود:

$$b = -q - 1$$

و از آنجا معادلهٔ دایره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2 + y^2 + px - (q + 1)y + q = 0$$
$$\Rightarrow q(1 - y) + px + (x^2 + y^2 - y) = 0$$

حال اگر سه معادلهٔ $1 - y = 0$، $x = 0$ و $x^2 + y^2 - y = 0$ با هم برقرار باشند، معادلهٔ فوق به ازای جمیع مقادیر p و q برقرار است. اما مقادیر $x = 0$ و $y = 1$ هر سه معادله را برقرار می‌کنند، لذا نقطهٔ $T(0,1)$ که در شکل هم مشخص شده، نقطهٔ ثابتی است که این دایره به ازای همهٔ مقادیر p و q همواره از آن می‌گذرد.

۵. فرض می‌کنیم: $(a,b)=d$. بنابراین: $a=dq$ و $b=dq'$ و در نتیجه:

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{dq+1}{dq'}+\frac{dq'+1}{dq}$$

$$=\frac{dq^2+q+dq'^2+q'}{dqq'}\Rightarrow dqq' \mid dq^2+q+dq'^2+q'$$

$$\Rightarrow d \mid dq^2+dq'^2+q+q' \Rightarrow d \mid q+q'$$

$$\Rightarrow d^2 \mid dq+dq' \Rightarrow d^2 \mid a+b \Rightarrow d^2 \le a+b$$

$$\Rightarrow d \le \sqrt{a+b}$$

۶. با توجه به قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$MB=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},$$

$$NC=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\ (AB=c, AC=b, BC=a)$$

$$\Rightarrow GB=\frac{2}{3}BM=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},$$

$$GC=\frac{2}{3}NC=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}+c=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}+b$$

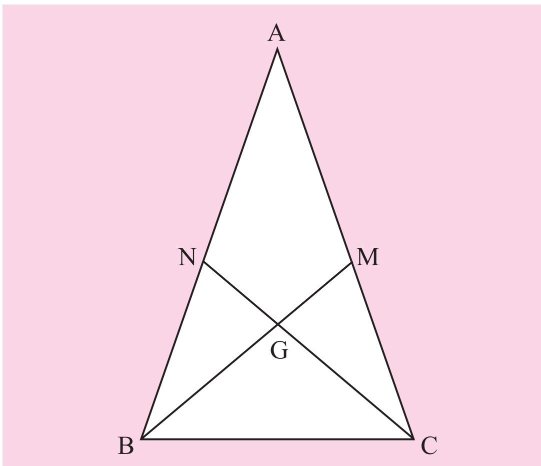
$$\Rightarrow b-c=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}-\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}\right)$$

$$\Rightarrow b-c=\frac{1}{3}\times\frac{(2a^2+2b^2-c^2)-(2a^2+2c^2-b^2)}{\underbrace{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}+\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}_{k}}$$

$$=\frac{3b^2-3c^2}{3k}\Rightarrow b-c=\frac{(b-c)(b+c)}{k}$$

$$\Rightarrow (b-c)\left[\frac{b+c}{k}-1\right]=0$$

می‌توان نشان داد که: $k\neq b+c$ (با برهان خلف ثابت کنید) و در نتیجه $b-c=0$ و از آنجا: $b=c$.



ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول ریاضی‌دانان ایرانی و خارجی

در جدولِ واژه‌های به‌هم ریختهٔ مقابل، نام‌های تعدادی از ریاضی‌دانان قدیم ایران و جهان آمده است. این نام‌ها ممکن است به صورت افقی، عمودی و مورب و از هر دو طرف نوشته شده باشند. همهٔ نام‌ها را به همین ترتیب از جدول خط بزنید. در پایان تعدادی حرف در جدول باقی می‌ماند. از ترکیب این حرف‌ها نام یکی از ریاضی‌دانان ایرانی معاصر به‌دست می‌آید. نام و زندگی نامهٔ مختصری از او را برای ما بفرستید و جایزه‌ای مناسب بگیرید!

ف	ر	م	ا	س	و	پ	ا	پ	ا	ف
ت	ی	ل	ر	و	ت	ن	ا	ک	ی	ا
ل	د	ل	ا	ا	ت	ن	ک	ب	ل	ر
ا	پ	ل	ت	گ	پ	ح	و	ر	گ	ا
ک	ی	ز	ی	ر	ی	ن	ر	ن	ا	ب
س	د	ی	ل	ق	ا	ا	ر	و	ت	ی
ا	هـ	م	ی	چ	ب	ک	ل	ل	ر	ر
پ	ی	ش	ی	ر	ن	ا	د	ی	ا	و
ک	ر	ج	ی	و	گ	س	ل	ا	ت	ن
ا	و	ل	ر	خ	و	ا	ر	ز	م	ی
ک	ف	ک	د	م	و	ر	گ	ا	ن	د

نام‌های ریاضی‌دانان:
اقلیدس، فارابی، نیریزی، فیبوناچی، برنولی، گالوا، تارتاگلیا، بیرونی، دکارت، خوارزمی، تالس، دمورگان، کرونکر، اولر، فوریه، کرجی، پاسکال، والیس، گاوس، کپلر، کانتور، نپر، پاپوس، فرما، تیلر.