دنبالهٔ فیبوناچی با نگاهی متفاوت

رضا فلاح‌مقدم
استادیار دانشگاه فرهنگیان تهران

در ریاضیات الگوی عددی به معنای نظم تکرارشونده است. هرگاه چند عدد براساس نظم مشخصی کنار هم قرار گیرند، تشکیل یک مجموعه را می‌دهند. به نظمی که بین اعضای مجموعه وجود دارد، الگوی آن مجموعه گفته می‌شود. مثلاً ...,۰,۲,۴,۶ یک الگوی عددی برای نمایش عددهای زوج است. یا ...,۱,۲,۴,۸,۱۶,۳۲ یک الگوی عددی برای نمایش توان‌های عدد ۲ است. یکی از زیباترین الگوهای عددی، الگوی عددهای فیبوناچی است. عددهای فیبوناچی عبارت‌اند از: ...,۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳.

کمی فکر کنید، آیا می‌توانید کشف کنید که عدد بعدی چه عددی است؟ بله درست است، عدد بعدی این الگو عدد ۲۱ است. در حقیقت هر عدد بعدی در این الگو، از جمع دو عدد قبلی ساخته می‌شود. به زبان ریاضی در الگوی عددهای فیبوناچی که $F_0=1$ و $F_1=1$ و F_n بیانگر عدد n-ام در الگوی فیبوناچی است.

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	...F_n
۰	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹	

n

(۱+۰=۱)

(۱+۱=۲)

(۱+۲=۳)

(۲+۳=۵)

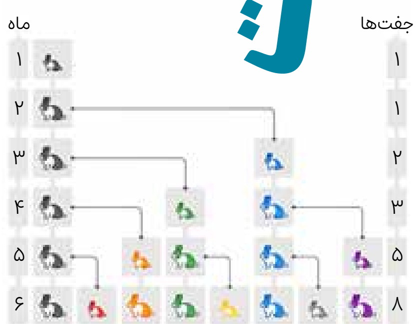
$F_n=(F_{n-1})+(F_{n-2})$

تصویر ۱. عددهای فیبوناچی

لئوناردو فیبوناچی نخستین ریاضی‌دان بزرگ اروپا بود که در قرن سیزدهم میلادی می‌زیست. بیشتر کارهای وی برگرفته از آثار ریاضی‌دانان مسلمان مثل **خوارزمی**، **کرجی** و **ابوکامل** است.

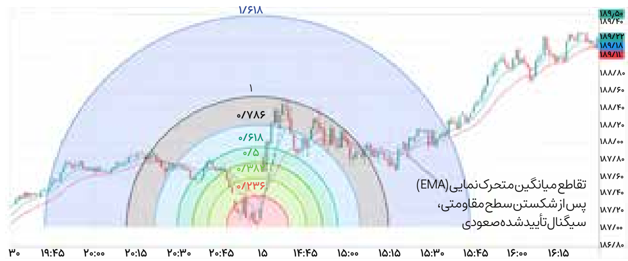
او به کشورهای اسلامی بسیاری مثل مصر و سوریه سفر کرد. او که به برتری روش‌های محاسبهٔ مسلمانان پی برده بود، پس از بازگشت به زادگاه خود در سال ۱۲۰۲ میلادی حاصل آموخته‌هایش را با نوشتن «لیبرآباکی» به معنای «کتاب حساب» به رشتهٔ تحریر درآورد. این کتاب به طور انحصاری بر پایهٔ الگوریتم‌های خوارزمی است.

مجدداً به بحث خودمان برگردیم. فیبوناچی الگوی عددهای خود را براساس الگوی رشد جمعیت خرگوش‌ها ساخت. بعدها مشخص شد این الگوی به ظاهر ساده دارای کاربردهای فراوانی در مهندسی، معماری، اقتصاد و... است. با توجه به اینکه در این باب مقاله‌های زیادی نوشته شده است، خوانندگان محترم را به مطالعهٔ آن‌ها توصیه می‌کنیم.



تصویر ۲. الگوی فیبوناچی برای رشد جمعیت خرگوش‌ها

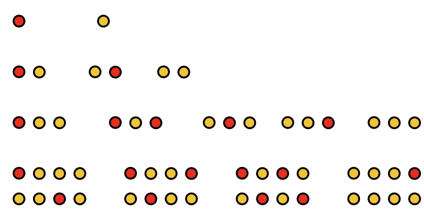
تصویر ۳. کاربرد عددهای فیبوناچی در طبیعت



تصویر ۴. کاربردهای نسبت‌های فیبوناچی در اقتصاد

حال این مسئله را درنظر بگیرید: تعداد حالت‌های ممکن برای فرزندان یک خانواده که هیچ‌گاه در آن خانواده دو دختر متوالی به دنیا نیایند، چند تاست؟

F_n را تعداد حالت‌های ممکن می‌گیریم. زمانی که خانواده دارای یک فرزند باشد دو حالت ممکن است، پس داریم: $F_1=۲$. حال اگر این خانواده دو فرزند داشته باشد، تعداد حالت‌های ممکن سه حالت خواهد شد. زمانی که سه فرزند داشته باشد، تعداد حالت‌های ممکن پنج حالت می‌شود. درحالتی که این خانواده چهار فرزند داشته باشد، تعداد حالت‌های ممکن هشت حالت خواهد شد. برای سهولت کار رنگ قرمز برای یک دختر در خانواده و رنگ زرد را برای یک پسر در خانواده درنظر می‌گیریم (تصویر ۵).

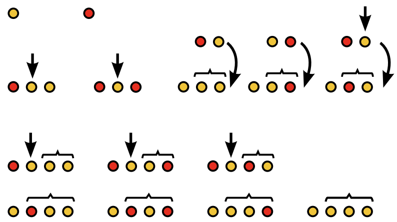


تصویر ۵. تعداد حالت‌های ممکن برای فرزندان خانواده در حالت‌های یک، دو، سه و چهار فرزندی

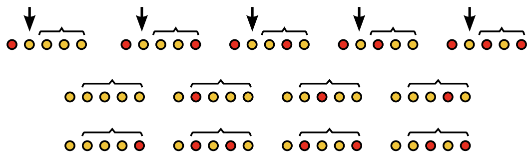
ممکن است دانش‌آموزی متوجه شود که اگر تعداد شمارنده‌ها و تعداد ترکیبات متفاوت رنگ قرمز و رنگ زرد را با هم مقایسه کنیم، از آزمایش دوم به بعد هر تعداد ترکیب برابر است با مجموع تعداد شمارنده‌ها و تعداد ترکیبات آزمایش قبلی با همان تعداد شمارنده. به عبارت دیگر با استفاده از شهود تجربی، او نتیجه می‌گیرد که برای پنج شمارنده پنج حالت چیدمان متفاوت وجود دارد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در این مثال دانش‌آموزان با استفاده از مشاهده‌ها و استدلال استقرایی به نتیجه‌ای رسیده‌اند، اما باید توجه داشت که استقرای تجربی همیشه تضمین نمی‌کند که الگوی مشاهده‌شده برای همهٔ حالت‌ها برقرار باشد. برای اثبات قطعی یک فرمول کلی به دقت بیشتری نیاز است.

به همین دلیل روش دیگری برای نشان دادن اینکه عدد ۱۲ به درستی حدس زده نشده، سازمان‌دهی مجدد شمارنده‌ها با استفاده از راهبرد مفهومی جدیدی است که از طریق آن تعداد ترکیبات بدون مخلوط کردن این عدد با تعداد شمارنده‌ها اضافه می‌شود (تصویر ۶).



تصویر ۶. کاهش به تعداد کمترین شمارنده



تصویر ۷. مورد پنج شمارنده از طریق روش کاهش

همان‌طور که در تصویر ۶ نشان داده شده است، هنگامی که یک ترکیب از شمارنده‌ها با یک رنگ قرمز شروع می‌شود، بعدی باید زرد باشد و این با یک پیکانه (فلش) بالای آن مشخص شده است. در مورد دو شمارنده، یک چنین ترکیبی وجود دارد. در مورد سه شمارنده، دو ترکیب از این قبیل وجود دارد. در مورد چهار شمارنده، سه ترکیب از این قبیل وجود دارد. یک آکولاد بالای دو / سه شمارنده نشان‌دهندهٔ استفاده از ترکیبات با دو / سه شمارنده در توسعهٔ ترکیبات سه / چهار شمارنده است.

ایدهٔ جدید چیدمان شمارنده‌ها در تصویر ۶ برای پنج شمارنده نشان داده شده است. هنگامی که یک ترکیب با یک شمارندهٔ قرمز شروع می‌شود، شمارندهٔ بعدی باید زرد باشد و بنابراین، پنج ترکیب از این قبیل در ردیف سوم تصویر ۵ نشان داده شده است. هنگامی که یک ترکیب با شمارندهٔ زرد شروع می‌شود، چهار شمارندهٔ بعدی را می‌توان به هشت روش نشان داده‌شده در ردیف‌های چهارم و پنجم تصویر ۶ چید. بنابراین پنج شمارنده را می‌توان به ۱۳=۸+۵ روش قرار داد.

به‌طور کلی اگر F_n تعداد حالت‌های فرزندان خانواده دارای n فرزند باشد، می‌توان بسته به رنگ شمارندهٔ اول، n شمارنده را به دو گروه تقسیم کرد. هنگامی که شمارندهٔ اول قرمز است، شمارندهٔ دوم باید زرد باشد. بنابراین محدودیتی برای شمارندهٔ بعدی وجود ندارد. یعنی ۲-n شمارندهٔ باقی‌مانده را می‌توان به $F_{n-۲}$ حالت قرار داد. هنگامی که شمارندهٔ اول زرد است هیچ محدودیتی برای شمارندهٔ بعدی وجود ندارد، بنابراین ۱-n شمارندهٔ باقی‌مانده را می‌توان به $F_{n-۱}$ روش چید؛ یعنی: $F_n = F_{n-۱} + F_{n-۲}$.

منبع

آبراموویچ، سرگی و کانل، مایکل ال.؛ (۲۰۲۱). توسعهٔ دانش عمیق در ریاضی دورهٔ متوسطه. کتابی برای تدریس در عصر فناوری. اشپرینگر. مترجم: رضا فلاح مقدم.