همگرایی در آینه‌های کروی

مسلم قهرمانی
دبیر فیزیک شهرستان سنقر، کارشناس ارشد فیزیک حالت جامد

کلیدواژه‌ها: آینه کروی، محور اصلی، کانون اصلی

با توجه به مطالب کتاب فیزیک۱ و آزمایشگاه هرگاه دسته پرتوهای موازی محور اصلی به یک آینه کروی (مقعر) بتابند، پرتوهای بازتابیدهٔ از یک نقطه روی محور اصلی به نام کانون اصلی آینه خواهند گذشت. اما واقعیت این است که در آینه‌های کروی (مقعر) اولاً هر پرتوی که موازی محور اصلی به آینه مقعر بتابد، پرتو بازتابیدهٔ آن از کانون آینه عبور نمی‌کند. ثانیاً اگر دسته پرتوهای موازی با محور اصلی به یک آینه کروی (مقعر) بتابند پرتوهای بازتابیدهٔ آن‌ها از یک نقطه روی محور اصلی عبور نمی‌کنند.

برای اثبات این موضوع آینه کروی (قسمتی از یک دایره) به مرکز مبدا مختصات و به معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$R^2=y^2+x^2 \qquad (1)$$

مطابق شکل(۱)، پرتو SI به صورت موازی با محور اصلی به آینه تابیده و در نقطه $I(y_.\ ,x_.)$ با آینه برخورد می‌کند. زاویه بین پرتو تابش و سطح آینه (خط MN) برابر α است. چون خط MN در نقطه I بر دایره مماس است بنابراین داریم:

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{-x_.}{\sqrt{R^2-x_.^2}} \qquad (2)$$

با توجه به قانون‌های بازتاب نور این پرتو با همان زاویه از آینه می‌تابد و در نقطه D با محور اصلی آینه برخورد می‌کند. زاویه بین پرتو بازتابیده و محور اصلی آینه برابر 2α است. بنابراین شیب خط ID برابر است با:

$$m=\tan(2\alpha) \qquad (3)$$

با توجه به رابطه $\tan 2\alpha=2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$ و با استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$m=\frac{-2x_.\sqrt{R^2-x_.^2}}{R^2-2x_.^2} \qquad (4)$$

چون خط ID از نقطه $I(x_.,y_.=\sqrt{R^2-x_.^2})$ عبور کرده و شیب آن برابر m است بنابراین معادله این خط برابر است

$$y=(\frac{-2x_.}{R^2-2x_.^2}x+1+\frac{2x_.^2}{R^2-2x_.^2})\sqrt{R^2-x_.^2} \qquad (5)$$

اگر خط ID (پرتو بازتابیده) از کانون آینه با مختصات $F(\frac{-R}{2},0)$ عبور کند در این صورت باید مختصات نقطه F در معادله (۵) صدق کند. ولی با قرار دادن مختصات نقطهٔ F در معادله (۵) متوجه می‌شویم این مختصات در این معادله صدق نمی‌کند، یعنی پرتو بازتابیده از کانون آینه عبور نمی‌کند.

و از طرف دیگر برای اثبات قسمت دوم، محل برخورد خط ID با محور x را به‌دست می‌آوریم. با قراردادن مختصات نقطه $D(x,0)$ در معادله (۵) x محاسبه می‌شود.

$$x=\frac{R^2}{2x_.} \qquad (6)$$

با توجه به این معادله چون پرتوهای موازی با محور اصلی آینه، $x_{\circ}$های متفاوتی دارند بنابراین پرتوهای بازتابیدهٔ آن‌ها xهای متفاوتی خواهند داشت یعنی پرتوهای بازتابیده از یک نقطه عبور نمی‌کنند.

ولی اگر پرتوهای موازی با محور به یک آینه سهموی بتابد پرتوهای بازتابیدهٔ آن‌ها از کانون سهمی عبور خواهند کرد. برای اثبات این مسئله یک سهمی با معادله $y^{۲}=۴fx$ در نظر می‌گیریم. نمودار این سهمی مطابق شکل(۲) است.

مطابق شکل، پرتو SI به صورت موازی با محور اصلی به آینه تابیده و در نقطه $I(x_{\circ},y_{\circ})$ با آینه برخورد می‌کند. زاویه بین پرتو تابش و سطح آینه (خط MN) برابر α است. چون خط MN در نقطه I بر سهمی مماس است بنابراین داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\tan(\alpha)=\frac{۲f}{y_{\circ}} \qquad (۷)$$

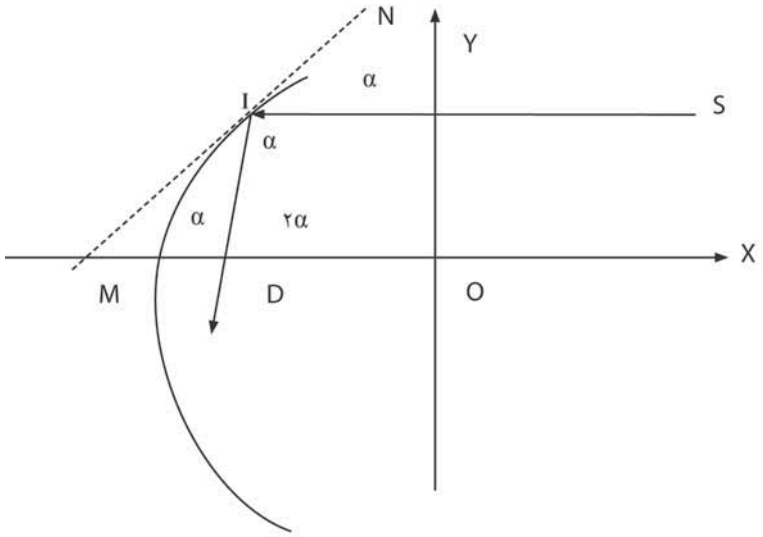
با توجه به قانون‌های بازتاب نور این پرتو با همان زاویه از آینه می‌تابد و در نقطه D با محور اصلی آینه برخورد می‌کند. زاویه بین پرتو بازتاب و محور اصلی آینه برابر ۲α است. بنابراین شیب خط ID برابر است با:

$$m=\tan(۲\alpha)=\frac{\tan^{۲}\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}=\frac{۴fy_{\circ}}{y_{\circ}^{۲}-۴f^{۲}} \qquad (۸)$$

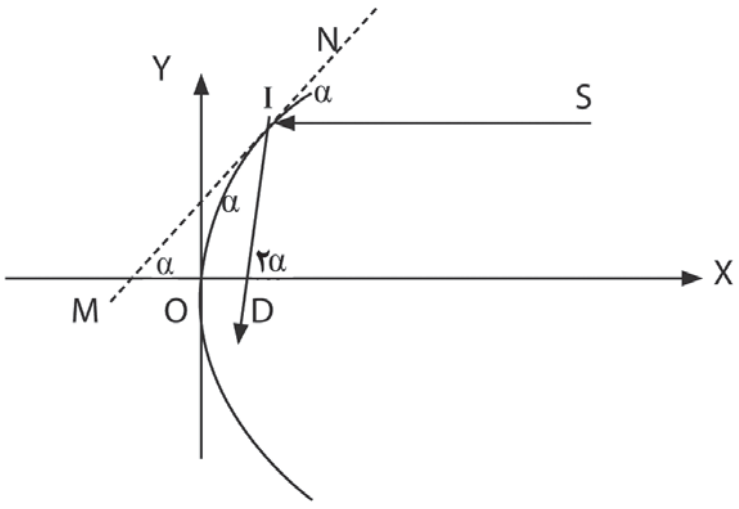
چون خط ID از نقطه $I(\frac{y_{\circ}}{۴f},y_{\circ})$ عبور کرده و شیب آن برابر m است بنابراین معادله این خط برابر است با:

$$y=(\frac{۴fy_{\circ}}{y_{\circ}^{۲}-۴f^{۲}})x+(y_{\circ}-\frac{y_{\circ}^{۳}}{y_{\circ}^{۲}-۴f^{۲}}) \qquad (۹)$$

اگر خط ID (پرتو بازتاب) از کانون آینه با مختصات F(۰,f) عبور کند در این صورت باید مختصات نقطه F در معادله (۹) صدق کند. با قرار دادن مختصات نقطه F در معادله (۹) متوجه می‌شویم این مختصات در این معادله صدق می‌کند، یعنی پرتو بازتابیده از کانون آینه عبور می‌کند.



شکل(۱). پرتو فرودی بر به یک آینه کروی (مقعر)



شکل(۲). پرتو فرودی بر یک آینه سهموی (مقعر)