آموزشی

فرایند استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای

ابراهیم ریحانی ـ فهیمه کلاهدوز
استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی و دبیر ریاضی شهرستان دهاقان

کلیدواژه‌ها: اثبات، اســتدلال، اســتدلال ریاضی، شــهود، خلاقیت، ریاضیات مدرســه‌ای، استدلال تجربی ـ دیداری، استدلال صوری

مقدمه

قضاوت در مورد درستی یک استدلال، قضیه یا گزاره‌ای در ریاضیات، از فرایندی به نام «اثبات» نشئت می‌گیرد. بسیاری از محققان آموزش ریاضی بر این باورند که فرایند استدلال و اثبات برای شناخت و انجام فعالیت‌های ریاضی و توسعهٔ تفکر منطقی ضروری و یکی از ابزارهای مهم در آموزش و یادگیری ریاضیات است. برخی از آنان معتقدند یکی از وظایف اصلی تعلیم و تربیت، پرورش افرادی است که بتوانند به خوبی استدلال کنند و برای تصمیم‌گیری در مسائل زندگی و شرکت در بحث‌های منطقی آماده شوند.

«شورای ملی معلمین ریاضی» (NCTM، ۲۰۰۰) نیز در کتاب «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای» بیان می‌دارد که اســتدلال و اثبات ریاضی، درک و بینش افراد را در پدیده‌های گوناگون توســعه می‌دهد. همچنین، افرادی که اســتدلال می‌کنند و دارای تفکر تحلیلی هســتند، قادرند که الگوها، ســاختارها و نظم موجود در جهان واقعی را به خوبی درک کنند. این شورا اظهار می‌دارد که استدلال و اثبات نباید به عنوان فعالیت‌های ویژه و مخصوصی که به صورت یک موضوع جداگانه و خاص در برنامهٔ درسی است، در نظر گرفته شوند، بلکه این مفاهیم باید به‌طور طبیعی و مداوم در همهٔ بحث‌های کلاسی حضور داشته باشند.

علی‌رغم تأکید فراوان بر اهمیت و نقش استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، بسیاری از تحقیقات در آموزش ریاضی نشــان می‌دهند که دانش‌آموزان در همهٔ ســطوح تحصیلی در درک و فهم، و ساخت اثبات و استدلال‌های منطقی با مشکل مواجه می‌شوند. همچنین، پژوهشگران در تحقیقات خود به این نتیجه رسیده‌اند که برخی از دانش‌آموزان، ضرورت اثبات را درک نکرده و فقط در حد قبول شدن در امتحانات ریاضی برای آن اهمیت قائل‌اند.

با توجه به اهمیت موضوع، درک و فهم تعدادی از دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان از استدلال و اثبات ریاضی و همچنین توانایی آنها در ساخت اثبات، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. بدین منظور پرسش‌نامه‌ای تهیه شد و تعدادی از دانش‌آموزان دختر و پسر که در رشته‌های ریاضی و تجربی مشغول به تحصیل بودند، آن را تکمیل کردند. در مقالهٔ حاضر نتایج این بررسی مطرح می‌شود. در ادامه، پس از بیان ضرورت استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، نمونه‌هایی از استدلال دانش‌آموزان را در فرایند اثبات یک گزارهٔ ریاضی، ارائه خواهیم کرد.

ضرورت و اهمیت استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای

محققان اهمیت اســتدلال و اثبات را در ریاضیــات مدرســه‌ای مورد بحث قرار داده‌اند و در تحقیقات خود نشــان می دهند که درک و فهم ریاضی بدون تأکیــد بر اســتدلال و اثبات غیرممکن اســت. برخی از آنها معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبهٔ ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند. همچنین، آنها در تحقیقات خود نشــان می‌دهند، دانشی که فاقد توجیه کردن اســت، به راحتی می‌تواند غیرمنطقی و غیرمستدل باشد. هنگامی که ریاضیــات به عنوان علمی مســتدل به جای مجموعه‌ای از رویه‌ها

یاد گرفته می‌شود، دانش به‌دست آمده به راحتی می‌تواند بازسازی شود؛ حتی وقتی که حافظه، رویه‌ها را فراموش می‌کند. استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجازه می‌دهد که بین دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند. در واقع، استدلال ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کند، فعالیت‌های ریاضی را به عنوان یک مجموعهٔ منسجم و پیوسته ببینند و مفاهیمشان را به موقعیت‌های دیگر ارتباط دهند.

به‌طور کلی، اثبات در زمینه‌های گوناگون برای افراد مختلف، معانی متفاوتی دارد. داروساز ممکن است با استفاده از آزمایش روی چند نفر، خواص داروی موردنظر را برای درمان یک بیماری به اثبات برساند. برای آماردان، اثبات می‌تواند با یک احتمال معین اتفاق بیفتد. برای دانشمند تجربی، اثبات چیزی است که بتوان آن را آزمود. در زندگی روزانه نیز افراد به‌طور طبیعی از استدلال‌های غیررسمی استفاده می‌کنند که لزوماً درست نیستند؛ زیرا دقت و منطق لازم را ندارند. برای مثال، گاهی در روابط اجتماعی و زندگی روزمره از مثال‌هایی استفاده می‌کنیم که به راحتی ما را در مورد صحت یک رویداد متقاعد می‌کنند، اما ریاضی‌دان با این شواهد و مدارک قانع نمی‌شود.

در واقع ریاضی‌دانان معتقدند که اثبات ریاضی دارای شرایط و ملاک‌های دقیق‌تری است. آنها بر این باورند که استدلال از طریق مشاهده نمی‌تواند ثابت کند، زیرا چشم‌ها می‌توانند ما را منحرف کنند. اندازه‌گیری نمی‌تواند ثابت کند، زیرا اطمینان و اعتبار حاصل از نتیجه‌گیری، به دقت ابزار اندازه‌گیری بستگی دارد. آزمایش نیز به‌طور قطع ثابت نمی‌کند، زیرا نتایج حاصل از آزمایش می‌تواند احتمالی باشد و پایدار نیست. البته در برخی موارد، بین ریاضی‌دانان نیز نظرات و دیدگاه‌های متفاوتی در مورد نقش و اهداف اثبات و آن‌چه که یک اثبات را می‌سازد، مشاهده می‌شود. همان‌گونه که اهمیت اثبات و استدلال‌های منطقی برای ریاضی‌دانان مشخص شده است، دانش‌آموزان و معلمان نیز باید اهمیت و معنای استدلال و اثبات ریاضی را در آموزش درک کنند.

از جمع‌بندی مباحث موجود در تحقیقات مرتبط با استدلال و اثبات می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت که به‌طور کلی، اثبات به معنای ارائهٔ استدلال با استفاده از شواهد و مدارک موجود برای تأیید یا رد یک گزاره به منظور متقاعدکردن خود و یا دیگران است.

هارل و **ساودر** (۲۰۰۷) معتقدند معنای اثبات و نقش آن و هر آن‌چه که اثبات را می‌سازد و همچنین ملاک‌های تأیید و پذیرش اثبات، از شخصی به شخص دیگر و از جامعه‌ای به جامعهٔ دیگر متفاوت است. بسیاری از محققان در زمینهٔ آموزش ریاضی نیز معتقدند که برای ارائهٔ اثبات باید به مخاطبان و جامعهٔ موردنظر توجه داشت. برای مثال، اگر یک دانش‌آموز کلاس دوم ابتدایی بخواهد برای هم‌کلاسی‌هایش ثابت کند که حاصل جمع دو عدد، بزرگ‌تر یا مساوی با عدد بزرگ‌تر است، به احتمال زیاد باید گروهی از دانش‌آموزان را متقاعد کند که هنوز با کسرها و اعداد منفی آشنا نیستند. یا آن‌چه که به عنوان اثبات برای دانش‌آموزان کلاس پنجم مطرح و مورد قبول واقع شده، ممکن است به عنوان یک اثبات ریاضی برای دانش‌آموزان دبیرستانی مناسب نباشد.

در بحث استدلال و اثبات ریاضی، تنها جنبهٔ منطقی مطرح نیست، بلکه کشف، شهود، خلاقیت، تحلیل، توضیح و ارتباطات، همه نقش اساسی دارند.

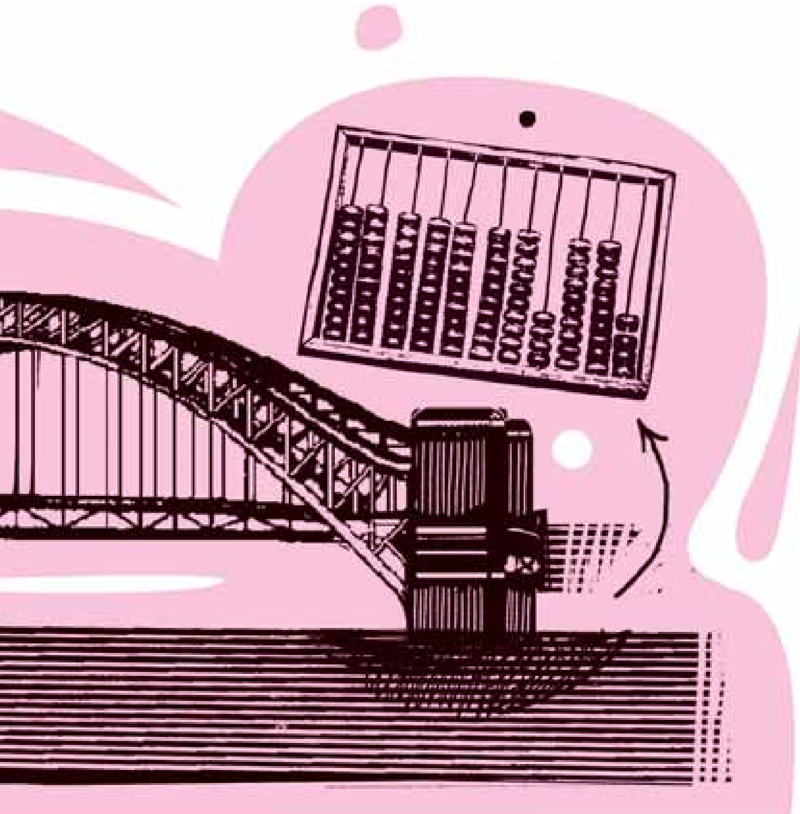
اهمیت اثبات در آموزش چیزی فراتر از تأیید و تصدیق است. اهمیت آن نیز بدین دلیل است که اثبات می‌تواند روش‌ها، مفاهیم و مسیرهای جدیدی را که در ریاضیات کاربرد وسیعی دارند، نشان دهد، اما نتایج ریاضی در نهایت باید به صورت دقیق اثبات شوند.

لازم به ذکر است که استفاده از مثال‌های عددی و شکل‌ها یا ابزار دیگر ریاضی در توضیح مفاهیم پیچیده در همهٔ علوم و به‌خصوص در ریاضیات، بسیار مفید است، اما در مواردی که می‌خواهیم درستی یک گزارهٔ ریاضی را به‌طور کلی نشان دهیم و یا به عبارت دیگر، ثابت کنیم، آن‌گاه باید محدودیت مثال‌ها و شکل‌های ریاضی را در نظر بگیریم. برای مثال، ممکن است که با بررسی چند عدد صحیح و یا اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱ نتیجه بگیریم که مربع هر عدد حقیقی از خود آن عدد بزرگ‌تر است. در صورتی که اگر به اعداد بین ۰ و ۱ توجه کنیم (اعدادی که در بیشتر مثال‌ها نادیده گرفته می‌شوند)، آن‌گاه محدودیت مثال‌ها مشخص می‌شود.

بنابر ضرورت و اهمیت فرایند استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، در این مطالعه نیز عملکرد تعدادی از دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان در این فرایند، از طریق توزیع و جمع‌آوری یک پرسش‌نامه بین آنها، مورد بررسی قرار گرفت که در ادامه، نمونه‌هایی از استدلال آنها برای اثبات درستی یک گزارهٔ ریاضی ارائه خواهد شد.

دانش‌آموزان چگونه استدلال می‌کنند؟

در پرسش‌نامه از دانش‌آموزان خواسته شد که درستی گزارهٔ زیر را ثابت کنند:



حاصل جمع هـر دو عدد فرد، برابر عددی زوج می‌شود.

استدلال برخی از دانش‌آموزان برای اثبات گزارهٔ موردنظر، به شـکل تجربی بود؛ یعنی اسـتدلال‌هایی که براسـاس شـکل (ارائهٔ تصویر) و یـا ارائهٔ تعدادی مثال، درسـتی گزارهٔ موردنظر را تأیید می‌کردند. نمونه‌ای از این استدلال‌ها در نمونه‌های ۱ و ۲ ارائه شده است.

۱. نمونه‌ای از استدلال تجربی ارائه شده توسط دانش‌آموزان

در مثال‌های زیر مشاهده می‌کنیم که جمع دو عدد فرد، عددی زوج است. هرچه مثال بیشـتری بزنیم، باز هم نتیجه تغییری نمی‌کند:

۱۲ =۵+۷، ۶=۳+۳، ۸=۳+۵

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که جمع دو عدد فرد یک عدد زوج می‌شود.

نظـر شـما در مـورد ایـن اسـتدلال چیست؟ آیا شما آن را به عنوان یک اثبات می‌پذیرید؟

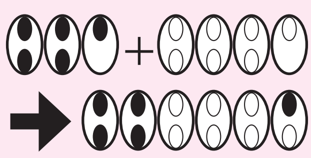
همان‌گونه که می‌دانیم، اسـتفادهٔ درست از مثال‌ها برای درک بهتر مطالب، روشی بسیار مؤثر و مفید است، اما آیا با ارائهٔ چند مثال محدود می‌توانیم به یک نتیجه‌گیری کلی دسـت یابیم؟! حتی گاهی در زندگی روزمره نیز با ارائهٔ چند مثال، از درسـتی یک موضـوع، به‌طور کامل اطمینان پیدا نمی‌کنیم.

فرض کنید که ما ادعا کنیم، جمع هـر دو عدد اول، عددی زوج اسـت و با ارائهٔ سـه مثـال ۸=۵+۳، ۱۲=۷+۵ و ۱۸=۷+۱۱، درسـتی ایـن ادعا را تأیید کنیم. آیا شما هم درسـتی آن‌را تأیید می‌کنید؟ با کمی دقت متوجه می‌شویم کـه در این مثال‌هـا، وجود عـدد اول ۲ را فرامـوش کرده‌ایم. این‌جاسـت که محدودیت مثال‌ها مشخص می‌شود.

به عنوان مثالی دیگر، حاصل عبارت n^2+n+41 را بـه ازای اعـداد طبیعی n=۱,۲,۳,۴,۵ به‌دسـت آوریـد. مقادیر به‌دسـت آمده اعدادی اول هستند. آیا می‌توان گفـت که مقدار عبـارت داده شده به ازای هر عدد طبیعی، عددی اول است؟ برای روشن شدن موضوع عدد ۴۱ را آزمایش کنید.

۲. نمونـه‌ای دیگر از اسـتدلال تجربی ارائه شده توسط دانش‌آموزان

اگر مانند شـکل زیر، اعـداد فرد را دسـته‌بندی کنیم، حاصل جمع به صورت دسته‌های دوتایی در کنار هم قرار می‌گیرند. پس جمع دو عدد فرد نیز یک عدد زوج می‌شود.



این نوع استدلال که آن‌را به عنوان اسـتدلال «تجربی ـ دیداری» مشخص می‌کنیم منطقی اسـت، زیرا دانش‌آموز از شکلی استفاده کرده است که ویژگی بارز و کلی همهٔ اعـداد فرد و اعداد زوج را نشـان می‌دهد. اما به نظر می‌رسـد ارائهٔ چنین استدلالی در دورهٔ متوسطه از طـرف دانش‌آموزان رشـتهٔ ریاضی و تجربی که با زبان ریاضی و شکل نمادین اعداد زوج و فرد آشنا شده‌اند و ضرورت و اهمیت استفاده از زبان ریاضی برای آن‌ها مشخص شده است، کافی نیست.

نمونهٔ دیگری از پاسخ دانش‌آموزان را که بـه عنوان اسـتدلال‌های صوری مشـخص می‌کنیم، در نمونه‌های ۳ و ۴ مشـاهده می‌کنیـد. در این مطالعه، استدلال‌هایی را که صرف‌نظر از درستی یا نادرسـتی آنها با استفاده از نمادهای ریاضی بیان شـده‌اند، استدلال صوری می‌نامیم.

۳. نمونه‌ای از اسـتدلال صـوری ارائه شده توسط دانش‌آموزان

فرض می‌کنیم a عددی فرد باشـد، آن‌گاه: a+a=۲a. یعنی حاصل جمع بر ۲ بخش‌پذیر اسـت. پس حاصل جمـع دو عدد فـرد، عـددی زوج می‌شود.

۴. نمونه‌ای دیگر از استدلال صوری ارائه شده توسط دانش‌آموزان

فرض می‌کنیم که a عددی زوج باشد. پس $(a-1)$ و $(a+1)$ اعدادی فرد هستند و داریم: $2a=(a-1)+(a+1)$. همان‌گونه که نشان داده شد، جواب بر ۲ بخش‌پذیر است، پس زوج است.

شما چه فکر می‌کنید؟ آیا استدلال‌های فوق را به عنوان اثبات گزارهٔ موردنظر می‌پذیرید؟ آیا این استدلال‌ها برای همهٔ اعداد فرد برقرارند؟

با کمی دقت در نمونهٔ ۳ متوجه می‌شویم که دانش‌آموز درستی این گزاره را ثابت می‌کند که: «حاصل جمع هر عدد فرد با خودش، عددی زوج است.» پس هنوز گزاره به‌طور کلی برای هر دو عدد فرد دل‌خواه ثابت نشده است.

در نمونهٔ ۴ نیز، وقتی $(a-1)$ و $(a+1)$ به عنوان دو عدد فرد با هم جمع می‌شوند، توجه داشته باشیم که این دو عدد فرد، متوالی (پشت سر هم) هستند. در واقع دانش‌آموز با ارائهٔ چنین استدلالی، درستی این گزاره را نشان می‌دهد که: «حاصل جمع دو عدد فرد متوالی، عددی زوج است.» پس این استدلال را نیز نمی‌توان به عنوان یک اثبات کلی و صحیح برای گزارهٔ ارائه شده در نظر گرفت. این استدلال تنها برای یک موقعیت خاص درست است.

گاهی دانش‌آموزان فکر می‌کنند که نمادهای ریاضی فقط جنبهٔ تشریفاتی دارند. شاید این نوع نگاه و باور را بتوان در استدلال یکی از دانش‌آموزان مشاهده کرد (نمونهٔ ۵).

۵. باز هم نمونه‌ای دیگر از استدلال صوری ارائه شده توسط یکی از دانش‌آموزان که تنها جنبهٔ نمادین دارد

اگر x و y دو عدد فرد باشند و: $z=x+y$، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} x=z-y \\ y=z-x \end{cases} \Rightarrow x+y=z-y+z-x$$

در نتیجه: $2z=2x+2y$. پس حاصل بر ۲ بخش‌پذیر است. پس جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود.

شاید شما هم به این نتیجه رسیده باشید که استدلال فوق کمی با فرایند دور زدن ارتباط دارد. (البته با عرض معذرت!) باید یک نکته را یادآوری کنیم که وقتی می‌گوییم استدلال‌های تجربی و استفاده از مثال‌های عددی برای اثبات گزاره‌های ریاضی کافی نیست و محدودیت دارد، منظورمان دست و پنجه نرم‌کردن با نمادهای ریاضی و حروف انگلیسی نیست تا شاید به جواب برسیم! همان‌طور که می‌دانیم، هدف استفاده از زبان ریاضی و نمادها در اثبات گزاره‌های ریاضی، خلاصه‌نویسی و عمومیت بخشیدن به مطلب موردنظر است.

برای مثال، وقتی بیان می‌کنیم که: ۴=۲+۲ و ۸=۴+۴، تنها نشان داده‌ایم که جمع عدد ۲ با خودش برابر ۴ و جمع عدد ۴ با خودش برابر ۸ است. اما وقتی فرض می‌کنیم که a یک عدد زوج است و نشان می‌دهیم که: $a+a=2a$. آن‌گاه می‌توانیم نتیجه بگیریم: «حاصل جمع هر عدد زوج دل‌خواه با خودش، عددی زوج می‌شود»، چون بر ۲ بخش‌پذیر است.

در نمونهٔ ۶ نیز نمونه‌ای از استدلال دانش‌آموزان را که به شکل صوری ارائه شده و از لحاظ منطقی درست است مشاهده می‌کنید.

۶. و آخرین نمونه از استدلال صوری ارائه شده توسط یکی از دانش‌آموزان که صحیح است

فرض می‌کنیم $2a+1$ و $2b+1$ دو عدد فرد باشند، به‌طوری‌که: $a, b \in Z$ و داریم:

$$2a+1+2b+1=2a+2b+2=2(a+b+1)$$

پس حاصل جمع دو عدد فرد، یک عدد زوج است، (چون بر ۲ بخش‌پذیر است) و بدین‌گونه درستی گزاره ثابت می‌شود.

در استدلال یاد شده، دانش‌آموز

به‌طور صحیح از نمادهای ریاضی استفاده کرده است؛ به‌گونه‌ای که $2a+1$ و $2b+1$ نماینده‌ای از دو عدد فرد دل‌خواه هستند و در حالت کلی، درستی گزارهٔ موردنظر ثابت می‌شود. البته بجاست که همانند شروع استدلال، در پایان آن نیز اشاره شود که: $(a+b+1)\in Z$.

گاه حتی می‌توان بدون استفاده از نمادهای ریاضی، درستی یک گزاره را به‌طور منطقی ثابت کرد. در این مطالعه، استدلال‌هایی را که دانش‌آموزان صرف‌نظر از درستی یا نادرستی آنها برای تأییدگزارهٔ موردنظر به صورت توضیحی و بدون استفاده از فرمول ریاضی بیان کرده‌اند، تحت عنوان استدلال‌های روایت‌گونه مشخص کرده‌ایم. در نمونهٔ ۷، نمونه‌ای از استدلال روایت‌گونهٔ یک دانش‌آموز را مشاهده می‌کنید.

۷. نمونه‌ای از استدلال روایت‌گونهٔ یکی از دانش‌آموزان

منظور از عدد فرد، عددی است که دارای چند جفت و یک تکه باشد.

مثلاً عدد ۳، *از جمع ۲ و ۱ ساخته می‌شود و عدد ۵ هم برابرست با جمع ۴ و ۱. وقتی ۳ و ۵ را با هم جمع می‌کنیم، تکه‌ها کنار هم و جفت‌ها هم کنار یکدیگر قرار می‌گیرند و داریم،* ۲=۱+۱ و جمع *دو عدد زوج هم زوج می‌شود، یعنی:* ۶=۴+۲. عددهای ۳ و ۵ *را برای مثال گفتم، وگرنه این قانون برای جمع هر دو عدد فرد برقرار است.*

همان‌گونه که در نمونهٔ ۷ مشاهده می‌کنید، دانش‌آموز به شکل توضیحی و بدون استفاده از نمادهای ریاضی درستی گزارهٔ موردنظر را ثابت می‌کند. تعداد کمی از دانش‌آموزان با استفاده از زبان ریاضی و یا به صورت روایت‌گونه، گزارهٔ ارائه شده در پرسش‌نامه را به درستی اثبات کرده‌اند. در صورتی‌که به نظر می‌رسید، گزارهٔ ارائه شده در پرسش‌نامه برای دانش‌آموزان این مقطع، گزارهٔ آشنایی باشد. علاوه بر این، دانش‌آموزان در کتاب‌های ریاضی سال اول و دوم دبیرستان با شکل نمادین اعداد زوج و فرد آشنا می‌شوند، لذا انتظار می‌رفت که عملکرد آنها در فرایند اثبات، عملکرد مناسبی باشد؛ اما نتایج به گونه‌ای دیگر بود.

شما چگونه می‌اندیشید و دلیل عملکرد دانش‌آموزان را چگونه ارزیابی می‌کنید؟ آیا برای توسعهٔ درک و فهم دانش‌آموزان و بهبود توانایی آنها در همهٔ دوره‌های تحصیلی در زمینهٔ استدلال و اثبات ریاضی پیشنهادی دارید؟

لازم به ذکر است که باور و دیدگاه افراد نسبت به مفاهیم استدلال و اثبات، می‌تواند بر توانایی آنها در اثبات درستی یا نادرستی یک ادعا تأثیرگذار باشد. همچنین، آشنایی درست با فرایند استدلال و اثبات و آگاهی از اهداف و کارکردهای آن در ریاضیات مدرسه‌ای نیز می‌تواند ما را در یادگیری بهتر این فرایند یاری رساند. در شماره‌های بعدی این مجله قصد داریم که با مفهوم استدلال و اثبات ریاضی و جایگاه آنها در ریاضیات مدرسه‌ای بیشتر آشنا شویم. تا آن هنگام از شما می‌خواهیم که روی این دو سؤال نیز فکر کنید:

۱. استدلال و اثبات ریاضی را چگونه تعریف می‌کنید؟

۲. با رعایت چه شرایطی می‌توانیم بگوییم که درستی یا نادرستی یک گزارهٔ ریاضی را ثابت کرده‌ایم؟

منابع

۱. تال، دیوید (۱۳۸۵). **ماهیت اثبات ریاضی**. ترجمهٔ عرفان صفر. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، ۸۳، ۱۷-۱۱.

۲. جهانشاهی، محمد (۱۳۸۰). **اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی**. انتشارات مدرسه. چاپ دوم. تهران.

۳. کلاهدوز، فهیمه (۱۳۹۰). **بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی**. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، (دانشکدهٔ علوم پایه). تهران.

4. Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

5. Conner, A. (2007). *Student teachers' conceptions of proof and facilitation of argumentation in secondary mathematics classrooms.* Unpublished doctoral dissertation, The Pennsylvania State University, University Park.

6. Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 5-23.

7. Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on *Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

8. Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in *Mathematics Education,* 31(4), 396-428.

9. NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

10. Varghese, Thomas, (2007). *Student teachers conception of mathematical proof.* Unpuplished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada.