یک نابرابری مرتبط با نقطهٔ ویژه‌ای در مثلث

ترجمه: عباس روح‌الامینی

کلیدواژه‌ها: نقطهٔ داخلی مثلث، نقطهٔ فرمایی، نقطهٔ بروکارد، نابرابری کوشی، قضیهٔ سینوس‌ها، قضیهٔ کسینوس‌ها

مقدمه

F را یک نقطهٔ داخلی مثلث ABC در نظر بگیرید. آن‌گاه F «نقطهٔ فرمایی» مثلث نامیده می‌شود اگر:

$$\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA} = 120^\circ$$

همچنین، Ω را یک نقطهٔ داخلی مثلث ABC در نظر بگیرید. آن‌گاه Ω «نقطهٔ بروکارد» مثلث نامیده می‌شود اگر:

$$\widehat{\Omega AB} = \widehat{\Omega BC} = \widehat{\Omega CA}$$

در مورد نقطهٔ فِرما و نقطهٔ بروکارد مثلث تعدادی مقاله وجود دارد که این مقاله نتیجهٔ جدیدی به آنها افزوده است.

نتیجهٔ مهم

قضیهٔ ۱: فرض کنید F نقطهٔ فرمایی مثلث ABC باشد که: $\widehat{BCA} < 120^\circ$، $\widehat{ABC} < 120^\circ$ و $\widehat{CAB} < 120^\circ$.

و نیز فرض کنید Ω_a، Ω_b و Ω_c به ترتیب نقطه‌های بروکارد مثلث‌های FCA، FBC و FAB را مشخص کنند و بتوانید بنویسید:

$$\widehat{\Omega_a FB} = \widehat{\Omega_a BC} = \widehat{\Omega_a CF} = \alpha$$

$$\widehat{\Omega_b FC} = \widehat{\Omega_b CA} = \widehat{\Omega_b AF} = \beta$$

$$\widehat{\Omega_c AB} = \widehat{\Omega_c BF} = \widehat{\Omega_c FA} = \gamma$$

آن‌گاه داریم:

$$\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta + \mathrm{cotg}\,\gamma \geq 5\sqrt{3}$$

لِم ۱: اگر F نقطه فِرمایی مثلث ABC باشد و: $\widehat{BCA} < 120^\circ$ و $\widehat{ABC} < 120^\circ$ و $\widehat{CAB} < 120^\circ$ و اگر طول اضلاع BC، CA و AB را به‌ترتیب با a، b و c مشخص کنیم و مساحت مثلث ABC را با Δ نشان دهیم، آن‌گاه داریم:

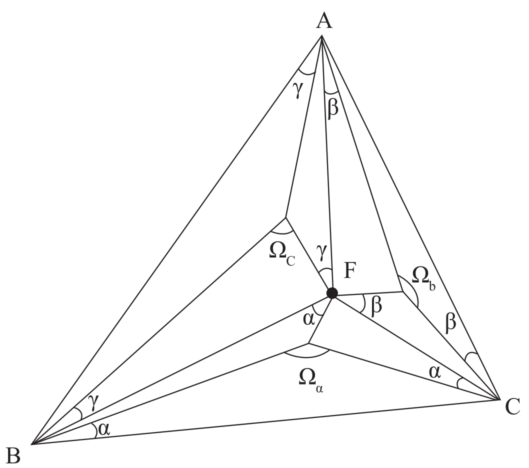
$$(AF+BF+CF)^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + 2\sqrt{3}\Delta$$

اثبات: به کار بردن قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BCF نتیجه می‌دهد:

$$a^2 = BF^2 + CF^2 - 2BF\times CF\mathrm{Coc}\widehat{BFC}$$
$$= BF^2 + CF^2 + BF\times CF$$

به‌طور مشابه:

$$b^2 = CF^2 + AF^2 + CF\times AF$$
$$c^2 = AF^2 + BF^2 + AF\times BF$$



بنابراین:

$$a^2+b^2+c^2 = 2(AF^2+BF^2+CF^2)+AF\times BF+BF\times CF+CF\times AF = 2(AF+BF+CF)^2 - 3(AF\times BF+BF\times CF+CF\times AF)$$

و از آنجا:

$$(AF+BF+CF)^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + \frac{3}{2}(AF\times BF+BF\times CF+CF\times AF)$$

چون:

$$\Delta=\frac{1}{2}AF\times BF\mathrm{Sin}\widehat{AFB}+\frac{1}{2}BF\times CF\mathrm{Sin}\widehat{BFC}+\frac{1}{2}CF\times AF\mathrm{Sin}\widehat{CFA}=\frac{1}{2}AF\times BF\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}BF\times CF\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}CF\times AF\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ما داریم:

$$AF\times BF+BF\times CF+CF\times AF=\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}$$

و بنابراین:

$$(AF+BF+CF)^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\Delta$$

لِم ۲: فرض کنید Ω نقطهٔ بروکارد مثلث ABC باشد و: $\widehat{\Omega AB}=\widehat{\Omega BC}=\widehat{\Omega CA}=\omega$.
طول اضلاع BC، CA و AB را به ترتیب با a و b و c مشخص کنید و مساحت مثلث ABC را Δ بنامید. آن‌گاه داریم:

$$\cot\omega=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

اثبات: به‌کار بردن قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ΩAC نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\Omega A}{\mathrm{Sin}\omega}=\frac{b}{\mathrm{Sin}(180^\circ-\omega-(A-\omega))}=\frac{b}{\mathrm{Sin}A}$$

بنابراین:

$$\Omega A=\frac{b}{\mathrm{Sin}A}\mathrm{Sin}\omega$$

به‌طور مشابه:

$$\Omega B=\frac{c}{\mathrm{Sin}B}\mathrm{Sin}\omega\quad \Omega C=\frac{a}{\mathrm{Sin}C}\mathrm{Sin}\omega$$

داریم:

$$\Delta=\frac{1}{2}\Omega A\times\Omega B\mathrm{Sin}\widehat{A\Omega B}+\frac{1}{2}\Omega B\times\Omega C\mathrm{Sin}\widehat{B\Omega C}+\frac{1}{2}\Omega C\times\Omega A\times\mathrm{Sin}\widehat{C\Omega A}=\frac{1}{2}\frac{b}{\mathrm{Sin}A}\mathrm{Sin}\omega\frac{c}{\mathrm{Sin}B}\mathrm{Sin}\omega\mathrm{Sin}B$$
$$+\frac{1}{2}\frac{c}{\mathrm{Sin}B}\mathrm{Sin}\omega\frac{a}{\mathrm{Sin}C}\mathrm{Sin}\omega\mathrm{Sin}C+\frac{1}{2}\frac{a}{\mathrm{Sin}C}\mathrm{Sin}\omega\frac{b}{\mathrm{Sin}A}\mathrm{Sin}\omega\mathrm{Sin}A=\frac{1}{2}\mathrm{Sin}^2\omega\left(\frac{bc}{\mathrm{Sin}A}+\frac{ca}{\mathrm{Sin}B}+\frac{ab}{\mathrm{Sin}C}\right)$$

همچنین:

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\mathrm{Sin}A=\frac{1}{2}ca\mathrm{Sin}B=\frac{1}{2}ab\mathrm{Sin}C$$

بنابراین:

$$\Delta=\frac{1}{2}\mathrm{Sin}^2\omega\left(bc\frac{bc}{2\Delta}+ca\frac{ca}{2\Delta}+ab\frac{ab}{2\Delta}\right)=\frac{\mathrm{Sin}^2\omega}{4\Delta}(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$$

و در نتیجه:

$$\mathrm{Sin}^2\omega=\frac{4\Delta^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

پس:

$$\cos^2\omega=1-\frac{4\Delta^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-4\Delta^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

بنابراین:

$$\cot\omega=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-4\Delta^2}}{2\Delta}$$

چون:

$$\Delta^2=\left(\frac{1}{2}ab\mathrm{Sin}C\right)^2=\frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2C)$$

داریم:

$$4\Delta^2=a^2b^2\left(1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right)=a^2b^2\,\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}=-\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2)$$

و از آنجا:

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-4\Delta^2=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+\frac{1}{4}(a^4+b^4-c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)=\left(\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\right)^2$$

بنابراین:

$$\cot\omega=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

لِم ۳: اگر x_i اعداد حقیقی و y_i اعداد حقیقی مثبت باشند

$(i=1,2,3,...,n,\ n \ge 2, n \in N)$، آن‌گاه داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i} \ge \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

اثبات: فرض می‌گیریم: $a_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}$ و $b_i = \sqrt{y_i}$

$i=1,2,3,...,n$ و آنها را در نابرابری «کوشی»[1] قرار می‌دهیم:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \ge (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$$

به‌دست می‌آید:

$$(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i})(\sum_{i=1}^{n} y_i) \ge (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

اثبات قضیهٔ ۱: اگر Δ_a، Δ_b و Δ_c مساحت‌های مثلث‌های FBC، FCA و FAB را به‌ترتیب مشخص کنند، چون Ω نقطهٔ بروکارد مثلث FBC است، بنا بر لم ۲ داریم:

$$\cot\alpha = \frac{1}{4\Delta_a}(FB^2 + BC^2 + FC^2)$$

به‌طور مشابه:

$$\cot\beta = \frac{1}{4\Delta_b}(FC^2 + CA^2 + FA^2)$$

$$\cot\gamma = \frac{1}{4\Delta_c}(FA^2 + AB^2 + FB^2)$$

و از آنجا:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{1}{4}(\frac{FB^2}{\Delta_a} + \frac{FC^2}{\Delta_b} + \frac{FA^2}{\Delta_c})$$

$$+\frac{1}{4}(\frac{FC^2}{\Delta_a} + \frac{FA^2}{\Delta_b} + \frac{FB^2}{\Delta_c}) + \frac{1}{4}(\frac{a^2}{\Delta_a} + \frac{b^2}{\Delta_b} + \frac{c^2}{\Delta_c})$$

بنابراین، بنا بر لم ۳:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \ge \frac{1}{4}\frac{(FB+FC+FA)^2}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c}$$

$$\frac{1}{4}\frac{(FC+FA+FB)^2}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c} + \frac{1}{4}\frac{(a+b+c)^2}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c}$$

بنا بر لم ۱ و اینکه $\Delta = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c$، داریم:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \ge \frac{1}{4}\frac{1}{\Delta}(\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + 2\sqrt{3}\Delta)$$

$$\times 2 + \frac{1}{4}\frac{1}{\Delta}(a+b+c)^2 = \frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2+c^2)$$

$$+\sqrt{3} + \frac{1}{4\Delta}(a+b+c)^2 = \frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2+c^2)$$

$$+\frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac) + \sqrt{3}$$

چون:

$$a^2+b^2 \ge 2ab,\ b^2+c^2 \ge 2bc,\ c^2+a^2 \ge 2ac$$

داریم:

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc$$

فرض می‌کنیم $P = \frac{1}{2}(a+b+c)$ و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشد، به‌دست می‌آوریم:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \ge 16r^2P^2 = 16\Delta^2$$

زیرا:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \ge ab.bc + bc.ac + ac.ab$$

$$= abc(a+b+c)$$

اما می‌دانیم که: $abc = 4R\Delta$

بنابراین:

$$abc(a+b+c) = 4R\Delta(2P) = 8(RP\Delta) \ge 8(2rP\Delta)$$

زیرا: $R \ge 2r$، ولی: $\Delta = rp$. بنابراین:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \ge 16\Delta^2$$

از آنجا:

$$(ab+ac+bc)^2 - 2abc(a+b+c) \ge 16\Delta^2$$

و:

$$(ab+ac+bc)^2 \ge 2 \times 4RrP \times 2P + 16\Delta^2$$

$$= 16RrP^2 + 16\Delta^2$$

با استفاده از نابرابری اولر $R \ge 2r$ داریم:

$$(ab+ac+bc)^2 \ge 32r^2P^2 + 16\Delta^2 = 32\Delta^2 + 16\Delta^2$$

$$= 48\Delta^2$$

و یا:

$$ab+bc+ac \ge 4\sqrt{3}\Delta$$

و:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \ge \frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2+c^2)$$

$$+\frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac) + \sqrt{3}$$

$$\ge \frac{1}{4\Delta}(ab+ac+bc) + \frac{3}{4\Delta}(ab+ac+bc) + \sqrt{3}$$

پس:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \ge \frac{1}{\Delta}(ab+bc+ac) + \sqrt{3}$$

$$\ge 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

یعنی:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \ge 5\sqrt{3}$$

بنابراین نابرابری (۱) ثابت شد.

پی‌نوشت

1. Cauchy

منبع

مقاله‌ای از مجله Math. Spectrum (Volume 40 Number1)