بهترین راه کدام است؟

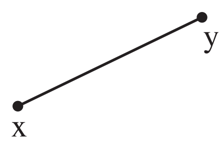
اعداد گنگ، $\sqrt[n]{}$ها و محور اعداد

سپیده چمن‌آرا

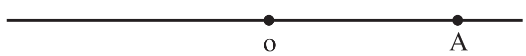
کلیدواژه‌ها: عددهای حقیقی، عددهای گویا، عددهای گنگ، محور اعداد حقیقی، قضیهٔ فیثاغورس

عددهای حقیقی، همه‌جا در اطراف ما هستند: وزن، طول، مساحت و حجم چیزهای دور و برمان، قیمت‌ها، سنّ افراد؛ و خلاصه هر کمیّتی که بتوانیم آن را **اندازه** بگیریم یا بشماریم یا **عددی** به آن نسبت دهیم، بیانگر یک عدد حقیقی است. یکی از کمیّت‌های قابل اندازه‌گیری **طول** پاره‌خط‌هاست. به همین دلیل است که می‌توانیم اعداد را روی یک محور (یعنی یک خط راست) که دارای مبدأ (یعنی صفر) و واحد اندازه‌گیری مشخص (یعنی طول ۱) است، نمایش دهیم.

مجموعهٔ اعداد حقیقی، در واقع از دو زیرمجموعهٔ کاملاً جدا از هم تشکیل شده است: مجموعهٔ عددهای گویا و مجموعهٔ عددهای گنگ. با این‌که هر دو مجموعه نامتناهی هستند و ابتدا و انتهای مشخصی ندارند و بی‌نهایت عضو دارند، اما بد نیست بدانید که تعداد عددهای گنگ، خیلی خیلی خیلی بیشتر از تعداد عددهای گویاست. بنابراین اگر یک پاره‌خط دلخواه به طور تصادفی روی کاغذ بکشید یا یک نقطهٔ دلخواه تصادفی روی محور اعداد بگذارید، احتمال اینکه طول آن پاره‌خط یا عدد متناظر با آن نقطه روی محور، عدد گنگ باشد، خیلی بیشتر است.



شکل ۱. پاره خط به دلخواه

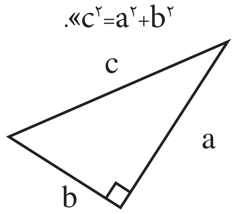


شکل ۲. محور اعداد و یک نقطهٔ A که به تصادف روی آن گذاشته شده است

اما از آنجا که ابزارها و اندازه‌گیری‌ها تنها می‌توانند بیانگر عددهای اعشاری باشند که تعداد ارقام قسمت اعشاری‌شان محدود است، هرگز نمی‌توانیم با اندازه‌گیری با خط‌کش یا حتی ابزارهای خیلی دقیق مثل کولیس و ریزسنج یا ابزارهای اندازه‌گیری دقیقه‌تر(اگر وجود داشته باشد)، پاره‌خطی را که طول آن $\sqrt{2}$ است. اندازه بگیریم.

توجه کنید! نمی‌توانیم **اندازه بگیریم!** ولی می‌توانیم بفهمیم که طول پاره‌خط، $\sqrt{2}$ است. چگونه؟ با استفاده از قضیهٔ معروفِ فیثاغورس که می‌گوید «در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن c و اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن b و a هستند، داریم:

$c^2=a^2+b^2$».

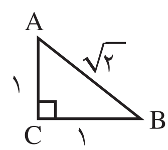


شکل ۳. مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع a و b و c

بنابراین، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای داشته باشیم که هر ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن، ۱ واحد باشد، داریم:

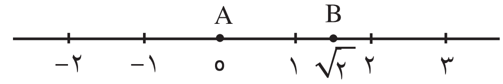
$$\text{وتر}^{۲}=۱^{۲}+۱^{۲}=۱+۱=۲$$

پس مجذور وتر آن مثلث، ۲ است، یعنی طول وتر $\sqrt{۲}$ است.



شکل ۴. مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن $\sqrt{۲}$ است، یعنی طول پاره خط AB، $\sqrt{۲}$ است.

به همین ترتیب اگر بخواهیم بدانیم عدد $\sqrt{۲}$، کجای محور اعداد حقیقی است، کافی است از مبدأ محور، پاره‌خطی به طول $\sqrt{۲}$ را (که وتر همان مثلث ABC در شکل ۴ است) روی محور اعدادی که طول واحد آن با طول ضلع‌های این مثلث هم‌اندازه باشد، در سمت راست مبدأ (یعنی قسمت مثبت محور) جدا کنیم. به این ترتیب،یک سر این پاره‌خط روی صفر و در نتیجه، انتهای آن، نقطهٔ $\sqrt{۲}$ روی محور است.



شکل ۵. نقطهٔ متناظر با $\sqrt{n}$ روی محور اعداد حقیقی.

به این ترتیب به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم روی محور اعداد، هر نقطه‌ای متناظر با هر $\sqrt{n}$ ای را پیدا کنیم. (n عددی طبیعی است). البته توجه کنید که اگر n جذر کامل نداشته باشد، $\sqrt{n}$ یک عدد گنگ خواهد بود. دلیل این موضوع از حوصلهٔ بحث ما خارج است. شما این موضوع را از من بپذیرید. برای مثال می‌خواهیم جای $\sqrt{۳}$ را روی محور اعداد پیدا کنیم و قصد داریم مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که وتر آن $\sqrt{۳}$ باشد. پس باید

$$(\sqrt{۳})^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$$

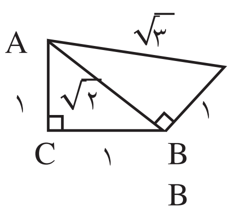
یعنی

$$۳=a^{۲}+b^{۲}$$

پس باید عدد ۳ را به صورت مجموع دو عدد مثبت بنویسیم که این اعداد، در واقع مجذور اندازه‌های ضلع‌های مثلث موردنظر ما هستند. تنها حاصل‌جمعی که برای ۳ می‌توان نوشت

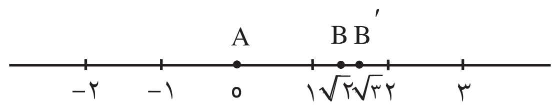
$$۳=۱+۲$$

است. یعنی $a^{۲}=۱$ و $b^{۲}=۲$، پس $a=۱$ و $b=\sqrt{۲}$. یعنی باید مثلثی بکشیم که یک ضلع آن $\sqrt{۲}$ و ضلع دیگر آن، ۱ واحد باشد. از شکل (۴) کمک می‌گیریم و روی ضلع AB که $\sqrt{۲}$ است، پاره‌خطی در نقطهٔ A (یا B) به طول ۱ واحد عمود می‌کنیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع موردنظر ما تشکیل شود وتر آن، طبق قضیهٔ فیثاغورس، $\sqrt{۳}$ باشد.



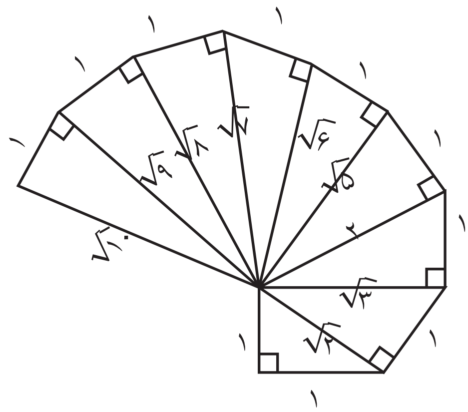
شکل ۶. ترسیم پاره خطی به طول $\sqrt{۳}$

پس نقطهٔ متناظر با $\sqrt{3}$ نیز روی محور اعداد مشخص می‌شود؛



شکل ۷. نقطهٔ متناظر $\sqrt{3}$ روی محور اعداد حقیقی

با این ترتیـب، با عمود کردنِ پاره‌خط‌هایی به طول ۱ واحد به پاره‌خطی به اندازهٔ $\sqrt{n}$ ، مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشـکیل می‌شـود که طبـق قضیهٔ فیثاغورس،وتر آن $\sqrt{n+1}$ اسـت. در شـکل ۸، $\sqrt{4}$ (که همان ۲ اسـت)، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ و ...... و $\sqrt{10}$ را می‌بینید. مشـابه این شکل روی جلد کتاب‌های ریاضی شما ترسیم شده است.



شکل ۸

حال اگر بخواهم $\sqrt{20}$ را رسـم کنم، خوب همیـن کار را ادامه می‌دهم تا به $\sqrt{20}$ برسـم. این کار، خیلی **بی‌دردسـر** اسـت. یک دقیقـه صبر کنید! بی‌دردسـر به چه معنا؟! کشـیدن ۱۹ تا مثلث قائم‌الزاویه‌ی دقیق با اندازه‌های دقیق، کار کم‌دردسری نیست. امّا از یک لحاظ این روش بی‌دردسر است که **نیاز به فکر کردن ندارد!** امّا آیا همیشـه، کاری که فکر کمتری نیاز دارد، ولی به کارِ دستی بیشـتر نیازمند است، بهتر اسـت؟ مثلاً برای ترسیم $\sqrt{20}$ به کمک قضیـهٔ فیثاغورس، می‌توانیم تصور کنیم که اگر وتر مثلث موردنظر ما، $\sqrt{20}$ باشد، اضلاع آن باید چه اندازه‌هایی داشته باشند؟ یعنی

$$(\sqrt{20})^2 = a^2 + b^2$$

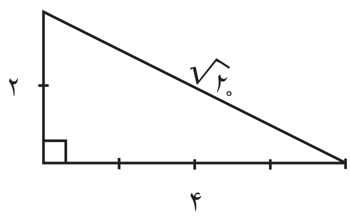
یا

$$20 = a^2 + b^2$$

می‌دانیـم که تمام حاصل جمع‌های ممکن برای عدد ۲۰، با در نظر گرفتن جابه‌جایی در جمع، این‌ها هستند:

۲۰=۱+۱۹
۲۰=۲+۱۸
۲۰=۳+۱۷
۲۰=۴+۱۶
۲۰=۵+۱۵
۲۰=۶+۱۴
۲۰=۷+۱۳
۲۰=۸+۱۲
۲۰=۹+۱۱
۲۰=۱۰+۱۰

و اگـر برای مثال حاصلِ جمع ۱۳+۷=۲۰ را انتخاب کنیم، باید مثلث قائم‌الزاویه‌ای بکشـیم که ضلع‌های زاویـهٔ قائمهٔ آن، $\sqrt{13}$ و $\sqrt{7}$ واحد باشـند تا وتر آن $\sqrt{20}$ بشـود.. خودِ ترسیم $\sqrt{7}$ و $\sqrt{13}$ کلی **دردسـر** دارد! امّا یک لحظه صبر کنید! حاصل جمعِ ۱۶+۴=۲۰ را ببینید. اگر این حاصل جمع را انتخاب کنیم، چون هم ۴ و هم ۱۶ جذر کامل دارند، اضلاع مثلث موردنظر ما باید ۲ و ۴ واحد باشد و ترسیم آن به مراتب از ترسیم ۱۹ تا مثلث روشِ قبلی که در شکل ۸ دیدیم، ساده‌تر است. شکل ۹ را ببینید.



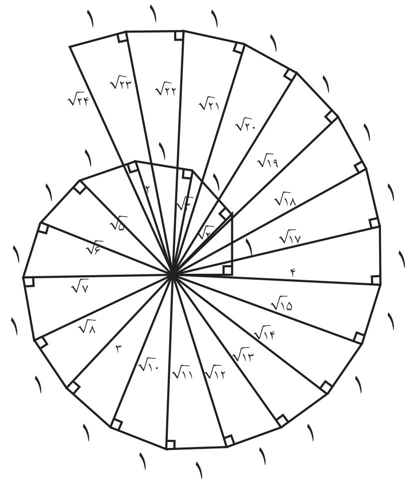
شکل۹. یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن، $\sqrt{20}$ است

پس دیدید که با کمی **فکر کردن** و **بررسـی** همهٔ حالت‌های ممکن و **انتخاب** مناسـب، توانستیم به هدفمان برسیم. این روش به مراتب دقیق‌تر از روش قبلی اسـت، زیرا تعداد دفعات اسـتفاده از ابزارهـای مختلفی مثل خط‌کش و گونیا (یا نقاله) در آن، خیلی کمتر از روش قبل اسـت و می‌دانیم که به هر حال ما در اسـتفاده

عددهای حقیقی، همه‌جا در اطراف ما هستند: وزن، طول، مساحت و حجم چیزهای دور و برمان، قیمت‌ها، سنّ افراد؛ و خلاصه هر کمیّتی که بتوانیم آن را اندازه بگیریم یا بشماریم یا عددی به آن نسبت دهیم، بیانگر یک عدد حقیقی است

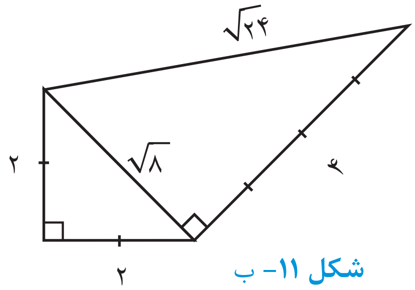
از ابزار، ممکن است خطا داشته باشیم و هرچه تعداد این خط‌ها بیشتر باشد، دقتّ کار ما کمتر می‌شود. حال بیایید $\sqrt{۲۴}$ را بکشیم. شما چه روشی را انتخاب می‌کنید؟

بله درست است؛ یک روش، همان ترسیمِ مثلث‌های متوالی است که به شکل حلزون خواهد شد و پس از چند مرحله مثلث‌ها روی همدیگر می‌افتند و شکل، خیلی شلوغ می‌شود!

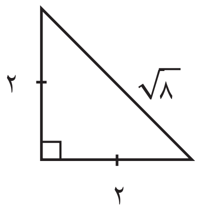


شکل ۱۰

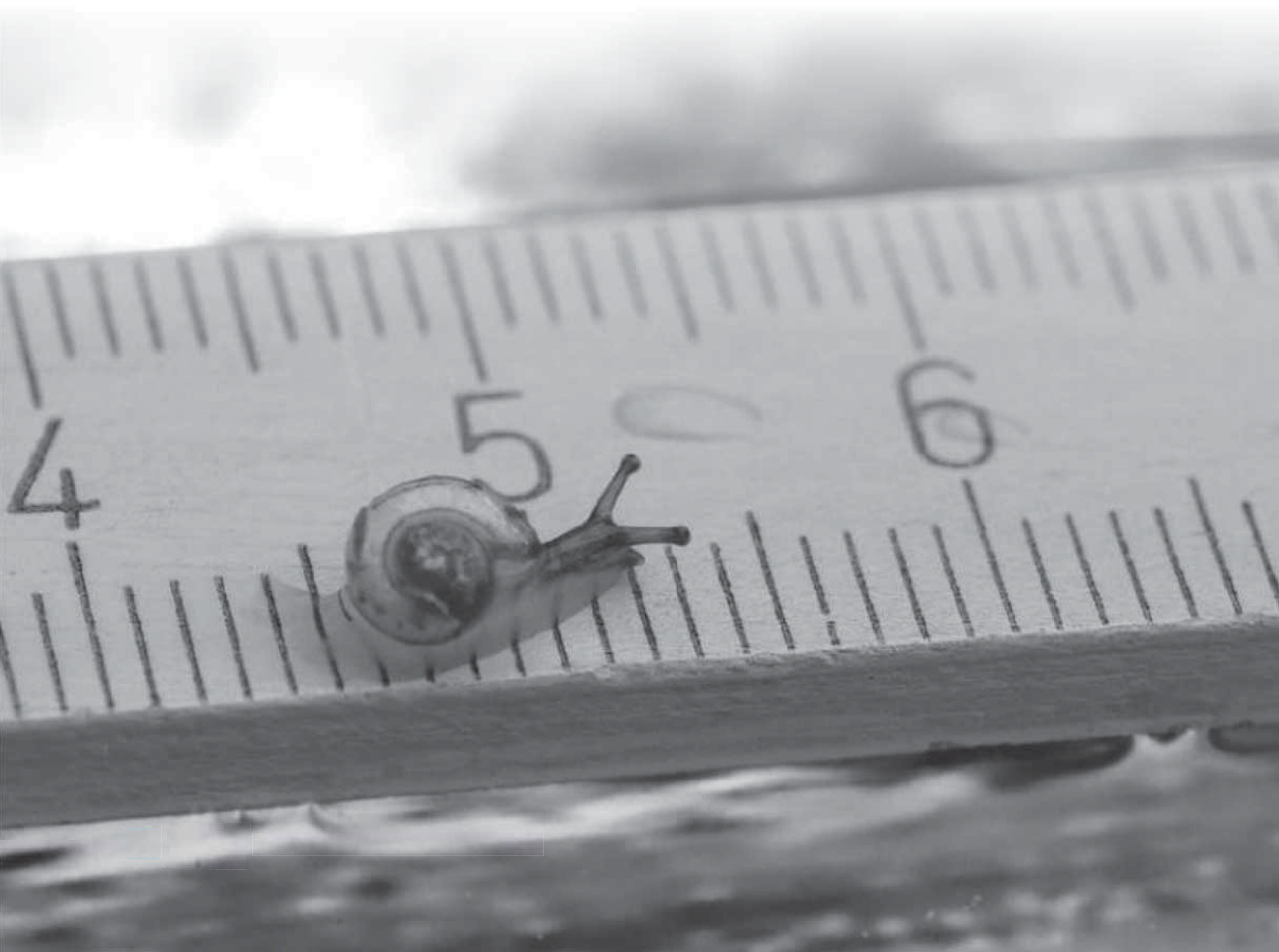
روش دیگر یافتن حاصل‌جمعی **مناسب** برای ۲۴ است که اعداد آن حاصل‌جمع، مجذور کامل باشند، یا لااقل یکی از آنها مجذور کامل باشد. شما چه حاصل‌جمعی را انتخاب می‌کنید؟ من ۲۴=۱۶+۸ را انتخاب کردم، زیرا در هیچ‌یک حاصل‌جمع‌های ممکن برای عدد ۲۴ دو مجذور کامل نداریم، لذا بین آنهایی که یک مجذور کامل دارند، به نظرم ۱۶، ۸ مناسب‌ترند، زیرا خود ۸ می‌تواند به صورت ۴+۴ درآید، یعنی $\sqrt{۸}$ وتر مثلثی به اضلاع ۲ و ۲ باشد. شکل ۱۱ را ببینید:



شکل ۱۱- ب



شکل ۱۱- الف



خوب مثل این‌که کار تمام شــد. امّا یک لحظه صبر کنید! چرا باید حتماً $\sqrt{۲۴}$ وتر یک مثلث قائم‌الزاویه باشــد. شاید یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه باشــد، یعنــی در واقع در یک مثلــث قائم‌الزاویه داشته باشیم:

$$c^{۲} = (\sqrt{۲۴})^{۲} + b^{۲}$$

یا

$$c^{۲}=۲۴+b^{۲}$$

یا

$$۲۴=c^{۲}-b^{۲}$$

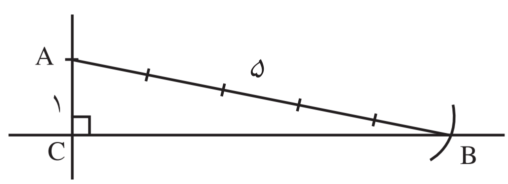
یعنی باید ۲۴ را به صــورت تفاضل دو عدد ببینیم که ترجیحاً هردوی آنها مجذور کامل باشــند. خوب این خیلی راحت‌تر اســت، زیرا:

$$۲۴=۲۵-۱$$

پــس مثلث قائم‌الزاویهٔ ما، یک ضلعــش ۱ واحد، یک ضلع دیگرش $\sqrt{۲۴}$ واحد و وترش ۵ واحد اســت. می‌توانیم با روشــی که در سال دوم راهنمایــی آموخته‌ایم، این مثلــث را به حالت «وتر یک ضلع» رســم کنیم تا ضلع دیگرش که $\sqrt{۲۴}$ اســت، به دست آید. شکل ۱۲ را ببینید.

۱۲. الف) دو خط عمود بر هم رسم کنید.

۱۲. ب) روی یکی، یک واحد جدا کنید.



۱۲. پ) بــا پرگار به مرکز A و شــعاع ۵، کمانی بزنید تا ضلع دیگــر زاویــهٔ قائمه را در B قطــع کند. مثلــث ABC دارای ضلع $BC = \sqrt{۲۴}$ است.

شکل ۱۲. مراحل ترسیم مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۵ و ضلع ۱

پس دیدید که برای ترســیم $\sqrt{۲۴}$ ، تنها یک رویکرد و تنها یک روش وجود ندارد و آخرین روش به دلیل تعداد مراحل کمتری که در آن از ابزار اســتفاده می‌شود، از دقّت و سرعت بالاتری برخوردار است.

حال شما بهترین راه برای ترسیم $\sqrt{۲۷}$ و $\sqrt{۲۸}$ را انتخاب کنید و دلیل انتخاب خود در هر مورد را توضیح دهید.

مجموعهٔ اعداد حقیقی، در واقع از دو زیرمجموعهٔ کاملاً جدا از هم تشکیل شده است: مجموعهٔ عددهای گویا و مجموعهٔ عددهای گنگ