

مفهوم کسر

در دوره ابتدایی

بهرام یوسفی

مدرس بازنشسته تربیت معلم اهواز

اشاره

طبق فرهنگ لغت، کسر جزیی از کل است. اما در بخش‌های مختلف ریاضی، اغلب **کسر** و تقسیم، مترادف هم به کار برده می‌شوند. بدین سبب است که مثلاً مفهوم **عدد مخلوط** و عمل رفع و تجنيس کردن معنا پیدا می‌کند.

چکیده

در این مقاله، سعی شده است برای فهم و درک عمیق‌تر مفهوم کسر، ابتدا نکات کلیدی مشخص شوند تا با تأکید بر آن‌ها، کار آموزش آسان‌تر گردد.

در این راستا، با توجه به هدف، به اهمیت «آموزش واحد اندازه‌گیری» می‌پردازیم و در حد توان مقادیر بزرگ‌تر و کوچک‌تر از واحد را معرفی می‌کنیم، چه به نظر می‌رسد که به کارگیری بعضی واژه‌ها چون «کسر بزرگ‌تر از واحد یا عدد مخلوط» به درستی صورت نگرفته است.

اکنون با احترام، نتایج این تجربیات همراه با موارد کاربردی، حضور کارشناسان و صاحب‌نظران ارایه می‌گردد.

کلیدواژه‌ها: واحد اندازه‌گیری، مفهوم کسر، کسر بزرگ‌تر از واحد، عدد مخلوط، عدد کسری.

مقدمه

هرگاه بخواهیم کار اندازه‌گیری را انجام دهیم، به دو چیز نیاز داریم:

اول شیئی است که باید ابعاد آن را اندازه‌گیری کنیم. یعنی تعیین کمیت مورد سنجش؛

دوم وسیله‌ای است که توسط آن، می‌توان کار اندازه‌گیری را انجام داد، یعنی واحد اندازه‌گیری.

بنابراین، به‌طور مختصر می‌توان گفت که برای اندازه‌گیری، به دو چیز احتیاج است.

۱. **کمیت مورد سنجش:** مقدار چیزی است که باید اندازه‌گیری و سنجیده شود.

۲. **واحد اندازه‌گیری:** همان چیزی است که به کمک آن عمل اندازه‌گیری انجام می‌شود.

کسر

تعریف: کسر به معنی شکستن، خرد کردن و در اصطلاح علم حساب عددی است که کمتر از واحد باشد.

مثل: نصف ($\frac{1}{2}$)، ثلث ($\frac{1}{3}$)، ربع ($\frac{1}{4}$) و خمس ($\frac{1}{5}$)

کسر متعارفی

از آن جایی که کسرهایی نظیر $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ و $\frac{5}{7}$ ، به طور فراوان مورد استفاده است، به آن‌ها کسره‌ای متعارفی می‌گویند.

مخلوط

تعریف: مخلوط یعنی آمیخته شده یا به هم آمیخته

معرفی واحد اندازه‌گیری و شناخت بیشتر کسر

پیش از این اشاره کردیم که برای اندازه‌گیری هر چیزی نیاز به واحد اندازه‌گیری داریم.

تعریف: وسیله‌ای که برای اندازه‌گیری یک کمیت به کار برده می‌شود، واحد اندازه‌گیری نامیده می‌شود. مثلاً در اندازه‌گیری طول، واحد اندازه‌گیری، میلی‌متر، سانتی‌متر و متر است. اکنون اگر با مشخص کردن و داشتن واحد، بخواهیم کار اندازه‌گیری یا سنجش را شروع کنیم سه حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول:

واحد اندازه‌گیری یک یا چند بار به درستی در کمیت مورد سنجش می‌گنجد در این حالت اندازه‌های به دست آمده با عدد طبیعی نمایش داده می‌شوند مانند ۱، ۲، ۳، ...

برای مثال، اگر بخواهید درازای یک طناب را اندازه بگیرید اولین کاری که باید انجام دهید این است که واحدی برای اندازه‌گیری در نظر بگیرید. حال فرض کنیم مدادی را که در دست دارید به عنوان واحد اندازه‌گیری در نظر گرفته می‌خواهید کار اندازه‌گیری را با آن انجام دهید.

اگر به هنگام اندازه‌گیری فقط یک بار مداد روی طناب قرار گیرد و کار اندازه‌گیری تمام بشود، آن وقت می‌گوییم طول طناب برابر یک مداد (واحد) است که اندازه آن را برحسب مداد، با عدد «۱» نشان می‌دهیم.

اگر دو بار مداد روی طناب قرار بگیرد، آن وقت می‌گوییم طناب برابر دو مداد (واحد) است و اندازه آن را با عدد «۲» نمایش می‌دهیم.

و اگر سه بار این اتفاق بیفتد، می‌گوییم طول طناب سه مداد (واحد) و اندازه آن عدد «۳» است و این کار، می‌تواند به همین ترتیب ادامه یابد.

هرگاه بخواهیم کار اندازه‌گیری را انجام دهیم، به دو چیز نیاز داریم:

اول شئی است که باید ابعاد آن را اندازه‌گیری کنیم. یعنی تعیین کمیت مورد سنجش؛
دوم وسیله‌ای است که توسط آن، می‌توان کار اندازه‌گیری را انجام داد، یعنی واحد اندازه‌گیری.

حال اگر واحد اندازه‌گیری متر انتخاب شود، آن‌گاه:
اگر با یک بار اندازه‌گیری کار تمام بشود، می‌گوییم طول طناب برابر با «۱» متر است.

اگر سه بار واحد متر روی طناب قرار بگیرد، آن وقت می‌گوییم طول طناب برابر با «۳» متر است.

اگر پنج بار واحد متر روی طناب قرار بگیرد آن وقت خواهیم گفت طول طناب برابر با «۵» متر است و به همین ترتیب تا طول هر طنابی برحسب این واحد به دست آید.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در این صورت تمام اندازه‌های به دست آمده با عدد طبیعی نشان داده می‌شوند.

نتیجه

اگر کمیتی به طور کامل (عددی صحیح) باشد، یک یا چند برابر واحد اندازه‌گیری است و عددی که پس از اندازه‌گیری آن کمیت به دست می‌آید یک عدد طبیعی نامیده می‌شود.

حالت دوم

واحد اندازه‌گیری یک یا چند بار به طور کامل در کمیت مورد سنجش می‌گنجد، اما در پایان کمی از شئی مورد سنجش باقی می‌ماند که اندازه‌اش از واحد اندازه‌گیری کمتر است و دیگر نمی‌توان با این واحد، اندازه آن مقدار را به صورت یک عدد طبیعی اعلام نمود. در چنین وضعی، اندازه‌های به دست آمده به صورت عددی کسری نشان داده می‌شوند. به شکل زیر توجه کنید:

واحد متر



مثال: فرض کنیم برای یک اندازه‌گیری واحد متر انتخاب شده است. این واحد متر چهار بار روی پاره‌خطی جا بگیرد و در آخر، بخشی از پاره‌خط هم باقی بماند که اندازه‌اش از طول واحد متر کمتر باشد. در چنین وضعی دیگر نمی‌توان با واحد متر آن باقی مانده را اندازه گرفت، این جاست که برای اندازه‌گیری این مقدار اندک، ناچاریم واحد کوچک‌تری را در نظر بگیریم. به همین منظور باید واحد متر را به قسمت‌های مساوی شکست و خرد کرد (مفهوم کسر) تا بتوان واحد کوچک‌تر از آن را به‌دست آورد که مناسب اندازه‌گیری این مقدار کمتر باشد. اکنون با این واحد کوچک‌تر، می‌توان کار اندازه‌گیری را به همین شکل ادامه داد.

مثلاً، فرض کنیم که واحد اصلی را به هشت قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. هر قسمت از آن یک هشتم واحد اصلی نامیده می‌شود که در ریاضی، $\frac{1}{8}$ نمایش داده می‌شود و آن را کسر متعارفی می‌نامند. یعنی اگر واحد $\frac{1}{8}$ ، درست دو بار روی باقی‌مانده پاره‌خط جای بگیرد، اندازه این قسمت از پاره‌خط $\frac{2}{8}$ می‌شود و الی آخر.

اگر اندازه یک پاره‌خط برابر باشد با چهار بار اندازه واحد کامل متر، و $\frac{3}{8}$ ، در این صورت می‌نویسیم:

$$4 + \frac{3}{8} = 4\frac{3}{8}$$

که عدد $4\frac{3}{8}$ ، عدد مخلوط نامیده می‌شود.

حالت سوم

اگر کمیتی را که می‌خواهیم اندازه بگیریم از همان ابتدا مقدارش از واحدی که برای اندازه‌گیری در نظر گرفته‌ایم کوچک‌تر باشد، در آن صورت اندازه به‌دست آمده «کسر» خوانده می‌شود.

توجه کنید مقدار کسر همیشه از هر واحد اندازه‌گیری انتخابی، کمتر است.

و بدین ترتیب است که مجموعه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ و $\frac{3}{4}$ و غیره، به‌دست می‌آید که به هر عضو آن یک کسر متعارفی می‌گویند.

مثال: با استفاده از یک متر مدرج شده، طول یکی از کتاب‌های درسی خود را به‌دست آورید. فرض کنید واحد متر را روی کتاب قرار دادید و بعد از اندازه‌گیری، معلوم شد که طول

کتاب ۲۰ سانتی‌متر است.

سؤال: چرا در اندازه‌گیری قبل که طول پاره‌خط از واحد متر کمتر بود، اندازه به‌دست آمده به صورت کسر $\frac{3}{8}$ نوشته شد. اما در مرحله دوم که طول کتاب از یک متر کمتر است، اندازه به‌دست آمده به‌صورت عدد صحیح ۲۰ سانتی‌متر نوشته می‌شود؟ فکر کنید! از روی خط‌کش خود بگویید سانتی‌متر چه کسری از متر است؟ آیا $\frac{1}{100}$ متر است؟ بله درست است.

تعریف: هرگاه متر را به صد قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت آن یک سانتی‌متر خوانده می‌شود.

اگر قطر یک موی سرتان را اندازه بگیرید خواهید دید که خیلی کوچک‌تر از سانتی‌متر است. از این جهت برای اندازه‌گیری اشیای ریز از واحد دیگری به نام میلی‌متر استفاده می‌شود.

تعریف: اگر سانتی‌متر را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم به هر قسمت آن یک میلی‌متر گفته می‌شود.

سؤال: آیا می‌توان گفت یک میلی‌متر برابر $\frac{1}{1000}$ متر است؟ چرا؟

تعریف دسی‌متر: هرگاه یک متر را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، به هر قسمت آن یک دسی‌متر می‌گوییم:

$$\text{متر} = \frac{1}{10} \text{ دسی‌متر}$$

خلاصه: در اندازه‌گیری اشیای کوچک‌تر از واحد، از کسرهای متر استفاده می‌شود:

$$\text{دسی‌متر} = \frac{1}{10} \text{ متر}$$

$$\text{سانتی‌متر} = \frac{1}{100} \text{ متر}$$

$$\text{میلی‌متر} = \frac{1}{1000} \text{ متر}$$

بحث و بررسی

به‌نظر من، اصطلاح کسر بزرگ‌تر از واحد یا کسر مساوی با واحد، اصطلاح درستی نیست. آخر چگونه می‌شود که چیزی کسر نامیده شود آن‌وقت بزرگ‌تر یا مساوی واحد هم باشد؟ زیرا کسر جزئی از واحد است و در همه موارد، از واحد کوچک‌تر است. بنابراین، کسر به معنای مطلق، مقدارش نمی‌تواند مساوی با واحد یا بزرگ‌تر از آن باشد.

اگر کمیتی را که می‌خواهیم اندازه بگیریم از همان ابتدا مقدارش از واحدی که برای اندازه‌گیری در نظر گرفته‌ایم کوچک‌تر باشد، در آن صورت اندازه به‌دست آمده «کسر» خوانده می‌شود

در مورد اعداد صحیح اگرچه می‌توانیم عدد صحیح «۵» را به صورت کسر $\frac{15}{3}$ نمایش دهیم ولی نمی‌توان آن را کسر نامید. این معنا شاید به مفهوم تقسیم نزدیک‌تر باشد.

$$\begin{cases} 3 \div 5 = \frac{3}{5} \\ 12 \div 7 = \frac{12}{7} \\ 15 \div 3 = 5 \end{cases}$$

البته $\frac{3}{5}$ مفهوم کسر را دارد و آن بدین معناست که واحد به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده و سه قسمت آن انتخاب شده است. یا ۵ گوی داریم که ۳ تا قرمز و ۲ تا از آن‌ها آبی است. نسبت گوی‌های قرمز به آبی $\frac{3}{5}$ است.

در این‌جا اعداد $\frac{3}{5}$ یا $\frac{12}{7}$ از تقسیم ۳ بر ۵ یا ۱۲ بر ۷ به‌دست می‌آید.

در تقسیم در همه موارد، نمی‌توان صورت و مخرج (مقسوم و مقسوم‌علیه) را در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کرد چون در این صورت در باقی‌مانده تقسیم تغییر حاصل می‌شود. در حالی‌که در کسر این‌کار را می‌توان انجام داد و از حاصل آن کسری مساوی با آن به‌دست می‌آید.

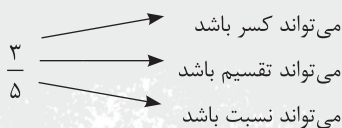
توجیه بیشتر نسبت: پول علی دو برابر پول آرش است. این نسبت را می‌توان به دو صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \text{نسبت پول علی به پول آرش} \\ \frac{2}{1} &= \text{نسبت پول آرش به پول علی} \end{aligned}$$

- در نسبت، می‌توان جای صورت و مخرج را عوض کرد زیرا تغییری در اصل موضوع به‌وجود نمی‌آید. یعنی چه بگوییم علی نصف آرش پول دارد چه بگوییم آرش ۲ برابر علی پول دارد، فرقی ندارد.

آیا در کسر هم می‌توان چنین کاری را انجام داد؟

توجه: الف در یک کسر، مخرج نشان می‌دهد که واحد به چند قسمت مساوی تقسیم شده است و صورت بیان می‌کند که چند قسمت از آن‌ها انتخاب شده است. اما اگر شکلی یا نمایی از یک عدد به صورت کسر دیده شود، با تعریف من، کسر نامیده نمی‌شود مثل $\frac{8}{4}$ ، بلکه می‌توان آن را نمایی از تقسیم $8 \div 4$ به حساب آورد. نماد $\frac{3}{5}$ ، می‌تواند معرف سه مفهوم زیر باشد:



کسر بزرگ‌تر از واحد عدد مخلوط است

از آنجایی‌که در کسرهای بزرگ‌تر از واحد، مجموع یک عدد صحیح و یک کسر است، استفاده از واژه «مخلوط» با معنا است زیرا نمایش این عدد به شکل « $2\frac{1}{2}$ » به‌صورت « $\frac{5}{2}$ » نتیجه عمل ماست.

$$2 + \frac{1}{2} \rightarrow 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

پس در واقع می‌توان گفت: **کسر بزرگ‌تر از واحد، همان عدد مخلوط است.**

همین‌طور نمایش عددی به صورت عدد صحیح و اعشار - مثل $\frac{3}{58}$ - «عدد اعشاری» خوانده می‌شود.

عمل تجنیس: وقتی در تجنیس می‌نویسیم

$$4\frac{2}{3} = \frac{4 \times 3 + 2}{3} = \frac{14}{3}$$

یعنی عدد صحیح ۴ را از جنس کسر می‌کنیم. در این‌جا نیز باید توضیح داده شود که عمل تجنیس هم در حقیقت، همان عمل مخرج مشترک گرفتن در عمل جمع کسرها است.

$$4\frac{2}{3} = \frac{4}{1} + \frac{2}{3} = \frac{12+2}{3}$$

پی‌نوشت

۱. تعریف‌ها از فرهنگ عمید است