مقاله

# استدلال و اثبات

## در آموزش ریاضی

**فهیمه کلاهدوز**، کارشناس ارشد آموزش ریاضی
**ابراهیم ریحانی**، استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
**فریده حمیدی**، استادیار روان‌شناسی، گروه علوم تربیتی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

**بحث بر سر جایگاه استدلال و اثبات در درون خود ریاضیات نیست، بلکه بحث اصلی بر سر این جایگاه در ریاضیات مدرسه‌ای می‌باشد**

**چکیده**

هدف این مقاله، بررسی جایگاه استدلال و اثبات در آموزش ریاضی و بیان مشکلات دانش‌آموزان در دوره‌های مختلف تحصیلی در رابطه با این مفاهیم است. با وجود تأکید زیاد بر اهمیت استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، بسیاری از تحقیقات نشان داده‌اند که اغلب دانش‌آموزان در همه سطوح تحصیلی، در فهم و درک اثبات با مشکل مواجه می‌شوند. تعریف آموزشگران ریاضی از اثبات و کارکردهایی که آن‌ها برای این فرایند در محیط آموزشی بیان می‌نمایند، با تعریف دقیق و رسمی اثبات که در جامعهٔ ریاضیدانان مورد قبول می‌باشد تا حدودی متفاوت است و به عواملی از جمله توانایی ریاضی دانش‌آموزان، سن آن‌ها، مقطع تحصیلی و فهم و درک و تجربهٔ معلمان از اثبات و مانند این‌ها بستگی دارد.

**کلیدواژه‌ها:** استدلال، اثبات ریاضی، آموزش، درک و فهم، مشکلات دانش‌آموزان.

## مقدمه

کوهن[1] (۲۰۰۸) معتقد است که یکی از وظایف آموزش عمومی، آماده کردن محیطی است که دانش‌آموزان در قالب آن بتوانند به‌طور فردی و گروهی برای تصمیم‌گیری در مسایل زندگی و شرکت در بحث‌های منطقی آماده شوند، مهارت‌های استدلالی خود را توسعه دهند و این فعالیت‌ها را با ارزش بدانند تا به رفاه فردی و اجتماعی برسند. با توجه به این‌که یکی از مباحث مهم در آموزش ریاضی نیز، تدریس و یادگیری مهارت‌های مربوط به استدلال و اثبات است، بسیاری از محققان در مورد ماهیت این مفاهیم در آموزش ریاضی، توانایی دانش‌آموزان و مشکلات آن‌ها در زمینه استدلال و اثبات ریاضی به مطالعه پرداخته‌اند (هارل[2] و ساودر[3]، ۱۹۹۸، ۲۰۰۷؛ هنا[4]، ۲۰۰۰؛ هیلی[5] و هویلز[6]، ۲۰۰۰؛ استایلیانیدز[7]، ۲۰۰۷). البته همان‌گونه که گویا (۱۳۸۵) بیان می‌دارد، بحث بر سر جایگاه استدلال و اثبات در درون خود ریاضیات نیست، بلکه بحث اصلی بر سر این جایگاه در ریاضیات مدرسه‌ای می‌باشد. بدین سبب، شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا (NCTM[8]، ۲۰۰۰)، در سند «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای»، یکی از استانداردها را با «استدلال و اثبات» معرفی نموده و در توضیح آن آورده است که برنامه‌های درسی ریاضی از پیش‌دبستانی تا پایان پایه دوازدهم (سال پایانی مدرسه)، باید دانش‌آموزان را قادر سازند تا؛

- استدلال و اثبات را به عنوان جنبه‌های اساسی ریاضیات بشناسند.
- حدسیه‌های ریاضی ساخته و آن‌ها را مورد بررسی قرار دهند.
- ادعاها و اثبات ریاضی را تکمیل کرده و ارزیابی کنند.
- روش‌های مختلف استدلال و اثبات را انتخاب نموده و به‌کار گیرند (ص ۵۶).

در ادامه، به بررسی تعاریف و کارکردهای استدلال و اثبات از نگاه نظریه‌پردازان و محققان در آموزش ریاضی می‌پردازیم.

## استدلال و اثبات در آموزش ریاضی

تعریف‌هایی که توسط ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی در مورد استدلال و اثبات ریاضی ارایه شده و کارکردهایی که برای این مفاهیم بیان گردیده است، متنوع و گاهی متفاوت است، به‌گونه‌ای که این تنوع می‌تواند بر کاربرد و استفاده از آن‌ها در آموزش ریاضی تأثیرگذار باشد. مثلاً، لیتون[9] (۲۰۰۳) معتقد است که استدلال کردن فرایندی است که به عنوان یک میانجی و واسطه عمل می‌کند و اثرات و نشانه‌های خود را تقریباً در هر چیزی که ما انجام می‌دهیم یا در مورد آن فکر می‌کنیم، به‌جای می‌گذارد. هم‌چنین، او استدلال را به عنوان فرایند هماهنگی شواهد، باورها و اندیشه‌ها برای نتیجه‌گیری در مورد آن‌چه درست است یا صحت دارد، تعریف می‌نماید. بال[10] و بس[11] (۲۰۰۳) نیز بیان می‌دارند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبه ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند. این دو در تحقیقات خود، نتیجه گرفته‌اند که دانشی که فاقد توجیه کردن است، به راحتی می‌تواند غیرمنطقی و غیرمستدل باشد. در حالی که موقعی که

**یکی از وظایف آموزش عمومی، آماده کردن محیطی است که دانش‌آموزان در قالب آن بتوانند به‌طور فردی و گروهی برای تصمیم‌گیری در مسایل زندگی و شرکت در بحث‌های منطقی آماده شوند، مهارت‌های استدلالی خود را توسعه دهند و این فعالیت‌ها را با ارزش بدانند تا به رفاه فردی و اجتماعی برسند**

ریاضیات به عنوان یک علم مستدل به‌جای مجموعه‌ای از رویه‌ها یاد گرفته می‌شود، دانش به‌دست آمده، حتی موقعی که حافظه رویه‌ها را فراموش می‌کند، به‌راحتی می‌تواند بازسازی شود. بال و بس (۲۰۰۳)، بر این باورند که استدلال ریاضی، به یادگیرندگان این اجازه را می‌دهد که بین دانش جدید و دانش قبلی خود، ارتباط و اتصال برقرار نمایند.

این بحث‌ها در حالی است که بسیاری از نظریه‌پردازان از نقطه نظر آموزشی و معرفت‌شناسی، درصدد پاسخ‌گویی به این پرسش بوده‌اند که «ماهیت اثبات ریاضی چیست؟» اما جواب نهایی و منحصر به فردی برای آن نیافته‌اند. برای مثال، در شاخه‌های مختلف ریاضی، تعریف‌های مختلفی با شرایط و ملاک‌های متفاوت برای اثبات ارایه شده است. در هر صورت، از نظر بسیاری از ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی، یک اثبات ریاضی دنباله‌ای منطقی و صوری از استدلال‌هایی است که با

مجموعه‌ای از داده‌های معین و مشخص مانند اصول موضوعه، تعاریف، مفروضات و نتایج ثابت شده قبلی شروع می‌شود و با استفاده از مراحل منطقی، به یک نتیجه معتبر می‌رسد (هنا و همکاران، ۲۰۰۴). آن‌ها توضیح می‌دهند که این تعریف، می‌تواند برای یک دانش‌آموز که نوشتن اثبات را شروع کرده، گیج‌کننده و مبهم باشد و سؤالاتی برای او مطرح شود از جمله این‌که

**یک اثبات ریاضی دنباله‌ای منطقی و صوری از استدلال‌هایی است که با مجموعه‌ای از داده‌های معین و مشخص مانند اصول موضوعه، تعاریف، مفروضات و نتایج ثابت شده قبلی شروع می‌شود و با استفاده از مراحل منطقی، به یک نتیجه معتبر می‌رسد**

چگونه تشخیص دهم کدام اصول موضوعه برای شروع اثبات به کار برده می‌شود؟ یا چگونه مراحل منطقی برای استفاده، تشخیص داده می‌شود؟ البته، هنا (۲۰۰۰) توجه به این نکته را ضروری می‌داند که صرفاً در نظر گرفتن جنبه صوری اثبات در آموزش ریاضی کافی نیست و در این زمینه، یک اثبات باید قابلیت توضیح نیز داشته باشد.

با این توجه، استایلیانیدز (۲۰۰۷) فرایند اثبات را در محیط کلاس درس ریاضی، این‌گونه تعریف می‌کند:

اثبات، یک استدلال ریاضی متشکل از دنباله‌ای منطقی و به هم پیوسته از گزاره‌هاست که یک ادعای ریاضی را تأیید یا رد می‌کند و دارای ویژگی‌های زیر است:

- استفاده از گزاره‌های قابل قبول و تأیید شده توسط افراد کلاس که بدون توجیهات بیشتر در دسترس هستند و معتبر می‌باشند.
- به‌کارگیری شکل‌هایی از استدلال که از نظر افراد کلاس، معتبر و شناخته شده‌اند و در حیطه فهم آن‌ها قرار دارد.
- ایجاد ارتباط از طریق اشکال مختلف گفتاری مناسب و قابل فهم در بین اعضای کلاس.

این تعریف، از یک طرف ریاضی را به‌عنوان رشته علمی در نظر گرفته که مستلزم استفاده از گزاره‌ها، الگوها و روش‌های معتبر و مناسب است و از طرف دیگر، دانش‌آموزان را به عنوان یادگیرندگان ریاضی لحاظ کرده است که نیازمند وابستگی اثبات به مفهوم پذیرفته شده و در دسترس برای افراد یک کلاس در یک زمان معین هستند. البته دیدگاه‌های دیگری در مورد ویژگی‌های یک اثبات قابل قبول به‌ویژه در ارتباط با آموزش ریاضی وجود دارد که این تعاریف می‌توانند بر اساس اهدافی باشند که آموزشگران و نظریه‌پردازان برای فرایند اثبات در نظر می‌گیرند. در ادامه، به فهرستی از کارکردها و اهداف اثبات که در تحقیقات دویلی‌یرز[۱۲] (۱۹۹۹)؛ هنا (۲۰۰۰)؛ پاداک[۱۳] (۲۰۰۹)؛ همی[۱۴] (۲۰۱۰) آمده است، اشاره می‌کنیم.

- تصدیق و توجیه (تأیید درستی یک گزاره)
- توضیح (بیان این‌که چرا گزاره مورد نظر درست است)
- متقاعد کردن (برطرف کردن شک)
- سازمان‌دهی (نظام‌وار کردن نتایج در نظام استنتاجی اصول موضوعه)
- کشف (ایجاد نتایج جدید)

- ارتباطات (گفت‌وگوهای معنی‌دار در رابطه با درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضی)
- زیبایی‌شناسی
- ایجاد چالش‌های ذهنی
- ساخت یک نظریهٔ تجربی
- شناسایی مفهوم یک تعریف یا نتایج یک فرضیه
- شناسایی تعاریف
- تلفیق حقیقت‌های شناخته شده در چارچوب‌های جدید
- تعمیم
- فراهم کردن زمینه‌های مناسب برای ساخت و ساز دانش ریاضی جدید و اعتباربخشیدن به آن.

این تنوع نشان می‌دهد که فرایند اثبات، پیچیده است و نیازمند گستره‌ای از شایستگی‌های دانش‌آموزان مثلاً معین کردن فرض‌ها، جداسازی ویژگی‌های معین و سازمان‌دهی استدلال‌های منطقی است. اما لازم است معلمان در ابتدا، برای فهم بهتر اثبات توسط دانش‌آموزان، به‌جای درگیر کردن آن‌ها با نمادهای جبری، تأکید بیشتری بر ایجاد معنا و مفهوم مورد نظر داشته باشند و تنها بر استنتاج‌های صوری و رسمی تکیه نکنند (وارجیس[15]، ۲۰۰۷)، به گفته راس (۲۰۰۰)، معلمان ریاضی باید هر چیزی را تا حدی که در سطح دانش ریاضی دانش‌آموزان، منطقی و مؤثر جلوه می‌کند، توضیح دهند و مهم‌ترین چیز، صادق بودن است. در واقع اگر معلمان از چند مثال و مورد خاص برای بررسی درستی یک گزاره استفاده می‌کنند، به دانش‌آموزان گوشزد نمایند که یک دلیل منطقی نیز مورد نیاز است. هم‌چنین، وی معتقد است که تأکید بر اثبات باید بیشتر بر ارزش آموزشی آن باشد تا صحت صوری آن، زیرا پرداختن به جزئیات تکنیکی اثبات‌ها موجب درک اثبات یا پیدا کردن شهود نسبت به آن نمی‌شود. رکیو[16] و گودینو[17] (۲۰۰۱) هم بر این باورند که اثبات‌های غیررسمی[18]، جایگاه مهمی در آموزش ریاضی دارند و برای رسیدن به استدلال‌های پیشرفته ریاضی ضروری‌اند. آن‌ها معتقدند که استدلال‌های استنتاجی و تحلیلی، اغلب در مراحل کشف و فرایند حل مسئله و اثبات، بی‌ثمر و حتی در برخی موارد مزاحم‌اند، زیرا در فرایند اثبات ضروری است که روش‌های قابل توجهی از استدلال به‌ویژه استدلال تجربی مورد استفاده قرار گیرند و باید دانست که ماهر شدن دانش‌آموز در استدلال‌های استنتاجی، نیازمند زمان است. علاوه بر این، مانسی(۲۰۰۳) معتقد است که قبل از این‌که از دانش‌آموزان خواسته شود تا به نوشتن اثبات بپردازند، باید توانایی و مهارت استدلال ریاضی در آن‌ها توسعه یابد. در واقع، گسترش توانایی دانش‌آموزان برای استدلال و توجیه این‌که چرا یک مفهوم ریاضی برقرار است یا چرا یک رویه خاص کار می‌کند، باید به عنوان قسمت مهمی از آموزش ریاضی محسوب شود. زیرا دانش‌آموزانی که مهارت‌های مربوط به توجیه و استدلال در آن‌ها تقویت نمی‌شود، به احتمال زیاد با مفهوم رسمی اثبات مشکل پیدا خواهند کرد. هارل (۲۰۰۸) نیز ابراز می‌دارد که موقعی که دانش‌آموزان مشغول فعالیت‌های ریاضی هستند، باید اجازه داده شود تا روش‌های فهمیدن و تفکر خود را هر چند که ناقص و اشتباه باشد، ارایه دهند زیرا این کار، در ایجاد دانش رسمی به آن‌ها کمک می‌کند. علاوه بر این، لازم است که معلمان، از فرصت‌های ویژه و تکالیف مختلف برای درگیر کردن دانش‌آموزان در فعالیت‌های مرتبط

**اثبات‌های غیررسمی، جایگاه مهمی در آموزش ریاضی دارند و برای رسیدن به استدلال‌های پیشرفته ریاضی ضروری‌اند**

با اثبات و استدلال آگاه باشند، زیرا در غیر این‌صورت، ممکن است که دانش‌آموزان از تجربه انجام انواع مهم تکالیف اثبات بی‌بهره بمانند (استایلیانیدز و بال، ۲۰۰۸) یعنی، تکالیفی که دانش‌آموزان را صرفاً با رویه‌ها و الگوریتم‌ها مواجه می‌کنند، به ندرت توانایی توسعه تفکر اصیل ریاضی را در آن‌ها دارند.

## مشکلات آموزش اثبات و استدلال

علی‌رغم تأکید زیاد بر اهمیت استدلال و اثبات در آموزش ریاضی و ارایه تعاریف متعدد برای این مفاهیم، تحقیقات نشان می‌دهند که بسیاری از دانش‌آموزان و حتی معلمان ریاضی، در یادگیری و نوشتن اثبات‌های ریاضی مشکل دارند (هارل و ساودر، ۲۰۰۷، ۱۹۹۸؛ استایلیانیدز، ۲۰۰۷، ۲۰۰۵؛ وارجیس، ۲۰۰۷؛ دی وان سپرونسن[19]، ۲۰۰۸). هارل و ساودر (۱۹۹۸، ۲۰۰۷)، برخی از باورهای مشترک و عمومی دانش‌آموزان را درباره این‌که چه چیزی یک اثبات ریاضی را می‌سازد، به‌صورت

زیر، طبقه‌بندی کرده‌اند:

● **آیین**[20]: یک استدلال، در صورتی یک اثبات است که مطابق با آداب و آیین خاص ریاضی باشد. در واقع، دیدگاه فرد بر این اساس است که ساختار رسمی یک اثبات، چیزی است که یک اثبات را معتبر می‌سازد و نه محتوای آن. برای مثال، بعضی از معلمان بر این باورند که استدلال‌های هندسی، تنها به شکل نوشتن فرض و حکم به تفکیک (اثبات‌های دوستونی)، به عنوان اثبات پذیرفته می‌شوند.

● **قدرت مطلقه**[21]: یک استدلال، زمانی یک اثبات است که توسط یک مرجع رسمی مانند معلم یا یک ریاضی‌دان مشهور، ارایه و تأیید شود.

● **استقرایی**[22]: درستی یک گزاره کلی بر اساس یک یا چند مثال، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

● **ادراکی**[23]: از طریق یک شکل مناسب و براساس تصورات ذهنی، شخص نشان دهد که ویژگی مورد نظر، برقرار است.

**موقعی که دانش‌آموزان مشغول فعالیت‌های ریاضی هستند، باید اجازه داده شود تا روش‌های فهمیدن و تفکر خود را هر چند که ناقص و اشتباه باشد، ارایه دهند**

به‌عنوان مثال، در ابتدای یادگیری کسرها، برخی از بچه‌ها به‌طور حسی قضاوت می‌کنند که $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$، چون این‌گونه به نظرشان می‌رسد.

● **نمادین**[24]: برای بررسی درستی یک گزاره، از نمادهای ریاضی استفاده می‌شود که ممکن است معنادار و هدفمند نباشند.

برخی از تحقیقات نیز نشان داده‌اند که دانش‌آموزان، هم در شروع اثبات و هم در خاتمه دادن به آن، مشکل دارند و در توجیه و تشخیص این‌که آیا یک اثبات ارایه شده کامل است یا خیر، ناموفقند و مهارت‌های منطقی مورد نیاز را برای تشخیص نقص‌های موجود در استدلال‌هایشان ندارند (کادوالادرولسکر[25]، ۲۰۰۷). هارل و ساودر (۲۰۰۷) بر این باورند که چون فرایند اثبات یک فعالیت اجتماعی (جمعی) است، در نتیجه اغلب دانش‌آموزان در تعیین و تصمیم این که چه موقع یک اثبات کامل و تمام است، با مشکل مواجه می‌شوند. زیرا اثبات هر گزاره ریاضی، علاوه بر این‌که فرد اثبات‌کننده را در مورد صحت و درستی گزاره و فرایند اثبات متقاعد می‌کند، باید از نظر دقت و اعتبار نیز مورد پذیرش و تأیید جامعه ریاضی واقع گردد. علاوه بر این، مطالعات نشان می‌دهند که بسیاری از دانش‌آموزان حتی در دوره متوسطه، بیشتر با مثال‌ها متقاعد می‌شوند تا اثبات‌های صوری (هارل و ساودر، ۱۹۹۸، هیلی و هویلز، ۲۰۰۰، باقری طاقانکی، ۱۳۸۸). در واقع، یکی از مشکلات اساسی دانش‌آموزان، عدم توانایی آن‌ها در تمایز بین استدلال‌های استقرایی و استنتاجی است و بیشتر آن‌ها، استدلال استقرایی را به عنوان یک تکنیک معتبر برای اثبات می‌پذیرند. برخی از محققان نیز در تحقیقات خود به این نتیجه رسیده‌اند که دانش‌آموزان، نیاز به اثبات را در ریاضی درک نمی‌کنند و اثبات را امری ضروری در ریاضی نمی‌بینند (هارل و ساودر، ۲۰۰۷). دی وانس پرونسن (۲۰۰۸) در مطالعه خود مشاهده نمود که دانش‌آموزان در اثبات چیزی که بدیهی[26] به‌نظر می‌رسد، مشکل دارند و اغلب آن‌ها، از چیزی که یک اثبات را معتبر می‌سازد، آگاه نیستند. البته وی متذکر شده است که تعریف کلمه «بدیهی» برای دانش‌آموزان با توجه به شرایط آموزشی و قوانین و قضایای پذیرفته شده در کلاس درسشان، متفاوت است. هم‌چنین، تحقیقات نشان می‌دهند که اغلب دانشجو معلمان نیز در درک و فهم مسایل مرتبط بااثبات و تشخیص این‌که چه چیزی یک اثبات معتبر را می‌سازد، با مشکل مواجه هستند (رکیو و گودینو، ۲۰۰۱؛ وارجیس، ۲۰۰۷).

## بحث و پیشنهاد

تحقیقات بسیاری توسط محققان و آموزشگران ریاضی در مورد بررسی ماهیت استدلال و اثبات و مشکلاتی که دانش‌آموزان در یادگیری این مفاهیم دارند، انجام گرفته و پیشنهادات و راه‌حل‌های بسیاری نیز ارایه گردیده است که به اختصار، به برخی از آن‌ها در این مقاله اشاره شد. تعاریف و کارکردهای مختلفی برای مفهوم اثبات وجود دارد که تعریف هر جامعه‌ای از این مفاهیم، می‌تواند هدف و کارکرد آن را مشخص نماید. به‌عنوان مثال، تعریف و نقش اثبات در جامعه ریاضی‌دانان، با تعریف و نقش این مفاهیم در دوره‌های مختلف تحصیلی متفاوت است، ولی در هر صورت، این مفاهیم باید به‌گونه‌ای ارایه شوند

**یکی از مشکلات اساسی دانش‌آموزان، عدم توانایی آن‌ها در تمایز بین استدلال‌های استقرایی و استنتاجی است و بیشتر آن‌ها، استدلال استقرایی را به عنوان یک تکنیک معتبر برای اثبات می‌پذیرند. برخی از محققان نیز در تحقیقات خود به این نتیجه رسیده‌اند که دانش‌آموزان، نیاز به اثبات را در ریاضی درک نمی‌کنند و اثبات را امری ضروری در ریاضی نمی‌بینند**

و مورد استفاده قرار گیرند که قابل قبول و مورد پذیرش افراد آن جامعه باشند و اعتبار آن‌ها برای مخاطبان محفوظ بماند. برخی از تحقیقات به استفاده دانش‌آموزان از مثال‌ها و استدلال استقرایی در تأیید گزاره‌ها و عدم توانایی آن‌ها در تمایز بین روش‌های مختلف استدلال و اثبات اشاره می‌کنند. در حالی که بسیاری از ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی، بر اعتبار و دقت در ارایه اثبات تأکید می‌نمایند. همان‌گونه که استایلیانیدز معتقد است، برای ارایه یک اثبات ریاضی در کلاس درس، باید ریاضی به عنوان یک رشته علمی و دانش‌آموزان به عنوان یادگیرندگانی که آمادگی پذیرش یک سری مفاهیم را دارند، مورد توجه قرار گیرند. به‌طور کلی، استفاده از انواع روش‌های استدلال و اثبات برای آموزش و ارایه این مفاهیم در ریاضیات مدرسه‌ای مناسب‌اند، اما این دقت ضروری است که هر کدام از این روش‌ها، باید در جای مناسب خود و با توجه به شرایط دانش‌آموزان مورد استفاده قرار گیرند، به‌گونه‌ای که آن‌ها، برای دقت و رسیدن به اعتبار مورد نیاز، ارزش قائل شوند. علاوه بر این، یکی از وظایف معلمان ریاضی این است که در کلاس درس، فرصت‌ها و شرایطی را فراهم نمایند که در قالب آن، دانش‌آموزان از اهمیت و ضرورت اثبات و استدلال‌های معتبر و کارکردهای مختلف این مفاهیم، آگاه شوند. البته در ریاضیات مدرسه‌ای نباید در ارایه اثبات‌های رسمی شتابزده عمل نمود. در واقع، باید توجه داشت که هرچند این نوع اثبات‌ها معتبر و مورد تأیید جامعه ریاضی است، اما در زمینه آموزش، اثبات‌های غیررسمی نیز به نوبه خود با ارزش‌اند و چنان‌چه محیط حمایتی مناسبی برای پرورش و رشد مهارت‌های استدلالی دانش‌آموزان فراهم شود تا آن‌ها بتوانند در کلاس درس، نظرات خود را بیان نموده و استدلال‌ها و حدسیه‌های همکلاسی‌هایشان را مورد نقد و بررسی قرار دهند و معلم نیز بتواند این جریان را هدایت و کنترل کند، این استدلال‌ها سرانجام می‌توانند به سمت اثبات‌های رسمی سوق یابند.

**پی‌نوشت**

1. Kuhn
2. Harel
3. Sowder
4. Hanna
5. Healy
6. Hoyles
7. Stylianides
8. National Council of Teachers of Mathematics: NCTM
9. Leighton
10. Ball
11. Bass
12. de Villiers
13. Paddack
14. Hemmi
15. Varghese
16. Recio
17. Godino
18. Informal
19. Dee Van Spronsen
20. Ritual
21. Authoritative
22. Inductive
23. Perceptual
24. Symbolic
25. Cadwalladerolsker
26. obvious

**منابع**


۱. گویا، زهرا. (۱۳۸۵). چرا ویژه‌نامه اثبات؟ **مجله رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۸۳. صص. ۳-۲. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲. باقری طاقانکی، حسین (۱۳۸۸). **درک و فهم دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان از اثبات**. پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه شهید بهشتی.

۳. راس، کنت. (۲۰۰۰). ریاضی ورزیدن و اثبات: جایگاه الگوریتم‌ها و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای. ترجمه فاطمه مرادی و محبوبه شریعتی(۱۳۸۵). **مجله رشد آموزش ریاضی**. شماره ۸۳. صص. ۳۰ تا۲۳. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.