مدل‌سازی ریاضی

بستری برای آموزش گفت‌وشنود

زینب آگاه، کارشناس ارشد آموزش ریاضی
محمدرضا فدائی، دانشگاه شهید باهنر کرمان
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی تهران

مقدمه

در گذشته، انتظار این بود که معلم به عنوان متکلم وحده در کلاس درس و با تسلطی که بر موضوع درسی دارد، آن را به دانش‌آموزان انتقال دهد. دانش‌آموزان نیز هم‌چون اسفنجی که آب را جذب نماید، موظف بودند دانش را تمام و کمال از معلمشان دریافت و جذب کنند! اما همان‌طور که کلمنتس و الرتون[1] (۱۹۹۶) اظهار می‌دارند، تاریخ و پژوهش‌های آموزش ریاضی نشان داده‌اند که تدریس به این روش، برای همه دانش‌آموزان مفید نیست. مثلاً، تجربه بسیاری از ما مؤید این است که دانش‌آموزان، سخنان معلم را از یک گوش می‌شنوند و از گوش دیگر بیرون می‌کنند و این مشکلی است که توجه پژوهشگران را به خود جلب نموده است.

ساخت‌وسازگرایان در نقد این نوع تدریس، معتقدند که تدریس، فرآیندی مستمر است که در آن، یادگیرنده نقش فعالی در ساختن دانش خویش دارد و بدین سبب، دانش‌آموز محور آن است و معلم نقش تسهیل‌کننده را دارد و یکی از وظایفش، طراحی فعالیت‌های یادگیری مناسب به گونه‌ای است که دانش‌آموز را درگیر کند و به کسب تجربه‌های جدید توسط وی منتهی شود (لاکروکس[2]، ۱۹۹۱).

در سال‌های اخیر، مدل‌سازی ریاضی به عنوان رویکردی در تدریس ریاضی مطرح شده است که مبتنی بر نظریه‌ای است که معتقد است ذهن و وجود انسان، بر اثر تعامل با محیط، سازماندهی می‌شود. این نظریه نزدیکی زیادی با شناخت موقعیت‌مدار دارد و **اِن‌اَکتیویسم**[3] یا **تعامل‌گرایی** نامیده می‌شود. طرفداران این نظریه، ایجاد فهم ریاضی را تنها از

لازم است معلمان، ماده درسی خود را بشناسند و قدرت تشخیص این که چرا دانش‌آموزان‌شان، پاسخ نادرست داده‌اند یا چرا تعریف کتاب درسی نادقیق است را داشته باشند

طریق توسعه ساختارهای ذهنی نمی‌دانند و اعتقاد دارند که در این میان، گفت‌وشنود فرد با محیط اطرافش نقش کلیدی در یادگیری وی ایفا می‌کند (کالورت[۴]، ۲۰۰۰). تجارب ملموس و خارج از دنیای ریاضی در ذهن کودکان ماندگارتر است و می‌تواند منجر به ارتقای سطح یادگیری آنان گردد. به گفته هالتون[۵] (۲۰۱۰، به نقل از پرولکس[۶]، ۲۰۰۸)، اگرچه تفاوت معناداری بین این نظریه و ساخت‌وسازگرایی وجود دارد، اما می‌توان آن را توسیعی از ساخت و سازگرایی دانست.

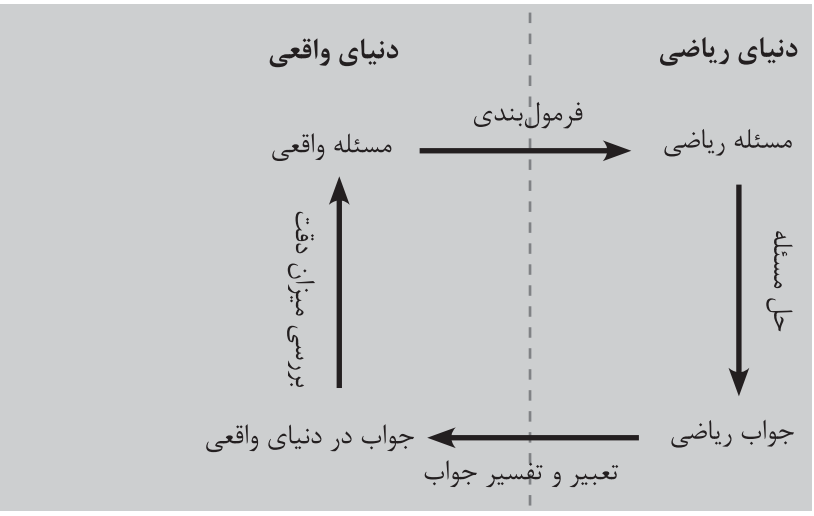
رویکرد مدل‌سازی به تدریس ریاضی ریاضی، ارتباط مستقیمی با این ایده در آموزش ریاضی دارد که به گفته نیس، بلوم و گالبرایت[۷] (۲۰۰۷)، کشورهای بسیاری در سطح جهان بدان توجه کرده‌اند. اما به گفته رفیع‌پور (۱۳۹۰)، تصور عمومی در نظام آموزشی ایران بر آن است که با آموزش مفاهیم ریاضی به صورت مجرد و استفاده از آن مفاهیم به عنوان کاربردهای ریاضی به دانش‌آموزان، آنان قادرند ریاضی را در موقعیت‌های دنیای واقعی به کار گیرند. اما تجربه انگلستان در اواخر دهه ۱۹۵۰ نشان داد که با چنین رویکردی به تدریس ریاضی، نمی‌توان توقع داشت فارغ‌التحصیلان مدرسه‌ای، ریاضی را در موقعیت‌های دنیای واقعی به کار گیرند.

کلیدواژه‌ها: مدل‌سازی ریاضی، آموزش معلمان، یادگیری ـ یاددهی، عملکرد معلمان.

مدل‌سازی ریاضی

مدل‌سازی ریاضی رابطه‌ای است از دنیای واقعی به دنیای ریاضی، به‌طوری که مسئله دنیای واقعی از طریق صورت‌بندی[۸] به یک مسئله ریاضی تبدیل شود. سپس در دنیای ریاضی، این مسئله ریاضی طی فرآیندی، حل می‌شود تا جواب ریاضی مسئله به دست آید. اما این پایان کار نیست و باید جواب به‌دست آمده، به زبان دنیای واقعی تعبیر و تفسیر گردد و در پایان، لازم است که دقت جواب، در دنیای واقعی محک زده شود (سازمان توسعه و همکاری‌های اقتصادی[۹]، ۲۰۰۳). نیس، بلوم و گالبرایت (۲۰۰۶)، از بین تمام مدل‌های ارائه شده، مدلی را بهتر می‌دانند که جواب به‌دست آمده در دنیای واقعی، با مسئله اولیه انطباق بیشتری داشته باشد.

به این چرخه، مدل‌سازی ریاضی گفته می‌شود (شکل ۱) و تبدیل مسئله دنیای واقعی به زبان نمادهای ریاضی یعنی مرحله صورت‌بندی، مدل نامیده می‌شود (سازمان توسعه و همکاری‌های اقتصادی، ۲۰۰۳).



شکل ۱. چرخه مدل‌سازی

شکل ۱ نشان می‌دهد که یک مسئله مدل‌سازی، از دنیای واقعی دانش‌آموزان گرفته می‌شود. این مسئله اولیه، ممکن است ظاهر ریاضی‌وار نداشته باشد، اما دانش‌آموزان با کار گروهی و تعامل با هم‌کلاسی‌های خود در گروه، ریاضی را از دل مسئله بیرون می‌کشند و آن را به یک مسئله ریاضی تبدیل می‌کنند. معلم نیز با گفت‌وشنود و تعامل سازنده با اعضای گروه، این

یک مسئله می‌تواند روش‌های گوناگونی برای حل داشته باشد و به شرطی دانش‌آموز می‌تواند در ساختن دانش ریاضی خود نقش داشته باشد که داشتن حل‌های مختلف برای یک مسئله پذیرفته شده باشد

فرایند را تسهیل می‌کند.

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های یک مسئله مدل‌سازی این است که برای دانش‌آموزان، زمینه‌مدار یا موقعیت‌مدار باشد و از دنیای واقعی آنان گرفته شده باشد. لذا مسائل متناسب با یک فرهنگ، الزاماً مناسب سایر فرهنگ‌ها نیست (گزارش یونسکو، ۱۹۸۴، نقل شده در کلمنتس و الرتون، ۱۹۹۶). ضروری است که مسائل مدل‌سازی برای دانش‌آموزان ملموس باشد یعنی متناسب با سن، شرایط زندگی اجتماعی- فرهنگی و موقعیت جغرافیایی آن‌ها باشد و واقعی باشد تا برایشان چالش برانگیز باشد. چنین فعالیت‌هایی می‌توانند دانش‌آموزان را به ریاضی علاقه‌مند سازند یا دست‌کم، مانع ایجاد نگرش منفی نسبت به ریاضی در آن‌ها شود. اما هدف از قرار دادن تجارب ملموس و موقعیت‌های واقعی در ریاضی، فقط علاقه‌مند کردن دانش‌آموزان نیست، بلکه شرایطی را به وجود می‌آورد تا آنان اهمیت آنچه را که مطالعه می‌کنند، دریابند.

یک مسئله مدل‌سازی، می‌تواند تصور جامع و کاملی از کاربرد ریاضی در جامعه به دانش‌آموزان بدهد و برای مطالعه ریاضی، توسعه مهارت‌ها و انجام پژوهش، به دانش‌آموزان انگیزه دهد (پیرس و استیسی[10]، ۲۰۰۶). هم‌چنین، شکل‌گیری تعبیرها و تفسیرهای متنوع را برای انجام فعالیت‌های ریاضی ممکن می‌سازد. از طرف دیگر، مدل‌سازی موجب توسعه توانایی‌های فراشناختی در دانش‌آموزان می‌شود زیرا این فرایند اغلب به صورت گروهی است و کار گروهی، توانایی‌های ابراز وجود، شنیدن، توضیح دادن و نظایر آن‌ها را ارتقا می‌دهد. به علاوه، دانش‌آموزان با بازتاب بر عملکرد، ذخایر دانشی موجود، مدل ساخته شده، صحبت‌های اعضای گروه با هم و گفت‌وشنودشان با معلم خویش، مهارت‌های فراشناختی خود را توسعه می‌دهند (سازمان توسعه و همکاری‌های اقتصادی، ۲۰۰۳).

اضافه بر فعالیت‌های جمعی، مدل‌سازی ریاضی بر یادگیری فردی نیز تأکید دارد و این همان چیزی است که مورد قبول تعامل‌گراهاست. آن‌ها می‌کوشند فکر و شناخت را در فعالیت‌های عملی بگنجانند و فرق بین دانش و عمل را از طریق تمرکز بر روی گفت‌وشنودِ فرد با محیط اطرافش، از بین ببرند(رید[11]، ۱۹۹۶).

تأثیر عوامل مختلف بر عملکرد معلم

یافته‌های پژوهشی نشان می‌دهند که عوامل متعددی به طور مداوم و محدود، بر رفتار دانش آموزان و پیشرفت تحصیلی آنان اثر می‌گذارند که یکی از آن‌ها، معلمِ کلاس درس و رویکرد او به تدریس ریاضی است. پژوهش‌های واتسون و مورگان[12] (۲۰۰۲)، ایوان و والاچ[13] (۲۰۰۳) و دوئر و انگلیش[14] (۲۰۰۴) نشان می‌دهند که معلمان، از طریق عوامل متنوعی، به ایده‌های ریاضی دانش‌آموزان گوش می‌دهند که به‌طور نمونه، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

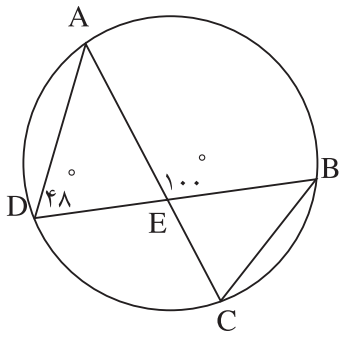
- دانش معلم از ریاضی؛
- تصورات معلم در مورد راه حل‌های یک مسئله؛
- باورهای معلم درباره ماهیت یادگیری؛
- درک معلم از ماهیت تدریس و نقش خویش در کلاس درس؛
- احساس معلم درباره دانش‌آموزان؛
- انتظارات معلم از دانش‌آموزان؛
- موقعیتی که گوش دادن در آن اتفاق می‌افتد؛
- باور معلم نسبت به ریاضی براساس پیشینه قبلی وی؛
- پیش‌زمینه ریاضی و تجربه معلم.

برای مثال، نمونه زیر از کلاس درس معلمی با ۲۰ سال سابقه تدریس در دوره راهنمایی است. این نمونه نشان می‌دهد که

چگونه تصورات وی در مورد راه حل‌های یک مسئله، در نحوهٔ گوش دادن[15] او به دانش‌آموزانش تأثیر می‌گذارد:

معلم شکل ۲ را پای تخته رسم می‌کند و می‌گوید:

معلم: بچه‌ها! به این سؤال توجه کنید. زوایای A، B، C و



E را خواسته. آیا کسی هست که به این جواب بده؟ [چند نفر دستشان را بلند می‌کنند]

معلم: یک... دو... سه... بقیه چی؟ فکر کنید! زاویهٔ E چه زاویه‌ای است؟

یکی از دانش‌آموزان: مرکزی

معلم: نه، مرکزی نیست! مرکزی رو با O نشون می‌دیم

سپس معلم از این دانش‌آموز می‌خواهد برای حل سؤال پای تابلو بیاید.

طیبه می‌نویسد: $\hat{DEA} = ۸۰^\circ$ پس $۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$ و ادامه می‌دهد:

$$\hat{A} = ۱۸۰^\circ - ۱۲۸^\circ$$
$$۴۸^\circ + ۸۰^\circ = ۱۲۸^\circ$$

در اینجا معلم کار او را قطع می‌کند و خطاب به کلاس می‌گوید:

معلم: کسی می‌تونه بگه زاویه خارجی چی بود؟

دانش‌آموزان: ... ؟ [سکوت!]

معلم: زاویهٔ خارجی برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورشه.

و می‌نویسد:

$$\hat{A} = ?$$
$$\hat{A} + \hat{D} = ۱۰۰^\circ$$

معلم: A و B هر دو روبرو به یک کمانن. پس با هم برابرن. C و D هم روبرو به یه کمانن پس با هم برابرن... درسته؟... راه‌های مختلفی داره اما روش شما طولانیه.

در این نمونه واقعی، معلم اجازه نمی‌دهد دانش‌آموز، روش حلش را کامل کند زیرا با روش مورد نظر وی مغایر است. پس به طور مرسوم، حرف دانش‌آموز را قطع می‌کند و به ارایه روش خویش می‌پردازد. این درحالی است که یک مسئله می‌تواند روش‌های گوناگونی برای حل داشته باشد و به شرطی دانش‌آموز می‌تواند در ساختن دانش ریاضی خود نقش داشته باشد که داشتن حل‌های مختلف برای یک مسئله پذیرفته شده باشد. در حالی که تدریس‌هایی که نمونه آن معرفی شد، می‌تواند باعث شکل‌گیری این باور در دانش‌آموزان شود که شاید روش حل آنان نادرست است و باید همیشه به روش معلم خود وفادار بمانند. چنین روش تدریسی، ناخواسته و غیرعمدی، امکان اندیشیدن مستقل را از دانش‌آموزان سلب می‌کند. به گفته رادفورد[16] (۲۰۱۱)، اگر کار دانش‌آموزان بسیار وابسته به‌کار معلم باشد، یادگیری معنادار اتفاق نخواهد افتاد.

این در حالی است که معلمانی که چنین نقشی برای یادگیرنده قایل هستند، با روش تدریس و باورهای آموزشی خود، جور دیگری بر باورهای دانش‌آموزان تأثیرگذارند. نمونه بعدی، بخشی از مصاحبه با معلمی است که دارای ۲۲ سال سابقهٔ تدریس ریاضی است. این نمونه، تأثیر پیشینه قبلی و باور معلم را بر عملکرد فعلی وی نشان می‌دهد.

من همیشه در زمان تحصیل خودم، وقتی معلمم مطلبی مثلاً معادله خط رو درس می‌داد، می‌خواستم بدونم چه کاربردی توی زندگیم داره... این تصورات... این تخیلات... شب

هم‌چنین، معلمان برای آن که یک شنونده فعال باشند، نیازمند آموزش هستند، به این معنا که ایده‌های دانش‌آموزان را بشنوند و آنان را به توصیف و تشریح ایده‌هایشان تشویق نمایند

وقتی می‌خوابیدم بهش فکر می‌کردم، بعدها فهمیدم چقدر می‌تونستم از ریاضی لذت ببرم ولی معلم من درست نگفته بود.... این مثالایی که سر کلاس میارم، تجربه شخصی خودمه، جایی کسی به من یاد نداده.

این اشتیاق و این تجربه باعث شده بود که ایشان، برای ایجاد لذت از ریاضی در دانش‌آموزان خود، چاره‌اندیشی کند و مسایل واقعیِ جالبی پیدا کند. وی در کلاس، برای بیان کاربرد دستگاه‌های مختصات، مثال زیر را انتخاب کرده بود:

فرض کنید مامانتون شما رو بفرسته خرید، برید مغازه ... برنج می‌خرید، چای هم می‌خرید ... یه روز دیگه هم می‌رید از همون چیزا می‌خرید با همون قیمت، فقط مقدارش فرق می‌کنه. به نظر شما چند بار دیگه برید مغازه، می‌فهمید قیمت برنج و چایی چقدره؟

هر چند رفیع‌پور (۱۳۹۰) در پژوهش خود نشان داد که کتاب‌های درسی ایران به ندرت حاوی مسائل مدل‌سازی واقعی هستند، با این وجود آشنا کردن معلمان با این رویکرد سبب می‌شود آن‌ها خود مسائل مناسب را یافته و به دانش‌آموزانشان ارایه کنند.

جمع‌بندی

عوامل متعددی بر عملکرد معلم در کلاس درس تأثیر می‌گذارند، که بعضی از آن‌ها، می‌تواند به معلم در انتخاب مسائل مدل‌سازی مناسب برای تدریس ریاضی در کلاس کمک کند. یکی از این عوامل، طراحی دوره‌های آموزشی مناسب پیش از خدمت و ضمن خدمت برای ورود مؤثر بحث مدل‌سازی ریاضی در برنامه درسی ریاضیات مدرسه‌ای است. علاوه بر این، تجربه و تحقیق نشان داده است که تشکیل کارگاه‌های مدل‌سازی ریاضی به صورت عملی، برای معلمانِ علاقه‌مند به این نوع تدریس، مفید است.

آموزشگران معلمان نیز لازم است توجه داشته باشند که گفت‌وشنود و تعامل در آموزش‌های معلمان، نقش برجسته‌ای دارد و اگر همه مطالب به صورت قطعی و محصول نهایی در اختیار معلمان قرار گیرد، فرصت درک این را که ریاضی علمی تجربی هم هست که نیازمند حدس و آزمایش است، و دانش‌آموزان حق دارند آن را بسازند، خراب کنند و دوباره بسازند (پولاک[۱۷]، ۲۰۰۷) را از دست می‌دهند. لذا اگر فرایند حل یک مسئله مدل‌سازی به درازا انجامید، باید به دانش‌آموزان فرصت داد تا طی بازتاب بر ایده‌های خود و دیگران، این فرآیند را کامل کنند.

هم‌چنین، معلمان برای آن که یک شنونده فعال باشند، نیازمند آموزش هستند (دیویس[۱۸]، ۱۹۹۷)، به این معنا که ایده‌های دانش‌آموزان را بشنوند و آنان را به توصیف و تشریح ایده‌هایشان تشویق نمایند. اما گوش دادن فعال نیازمند این است که ایده‌های دانش‌آموزان را باور داشته باشیم. زمانی که باور داشته باشیم هر آنچه دانش‌آموز می‌گوید بازتابی از درک اوست، آسان‌تر می‌توانیم صبر کنیم تا پاسخی برای یک ایده ساده ریاضی بیابد (ون دوویل[۱۹]، ۲۰۰۱) گاهی حتی یک تأیید ساده معلم هم‌چون «بله»، «آها» یا یک حرکت سر، می‌تواند دانش‌آموز را تشویق کند تا ایده‌اش را دنبال نماید. اگر اظهارنظرهای معلم، رویدادها را واقع‌بینانه و همراه با قدردانی توصیف کند، نتایجی که دانش‌آموز به‌دست می‌آورد، مثبت و سازنده خواهد بود (گینات، ۱۳۸۱). بدین معنا که به دنبال تشویق معلم، دانش‌آموز هم تشویق می‌شود تا ایده‌اش را پیگیری نماید.

پی‌نوشت

1. M. A. Clements & N. F. Ellerton
2. L. N. .Lacroix
3. Enactivism

در حال حاضر، معادل مناسب‌تری به جز «تعامل‌گرایی»، برای این واژه نیافته‌ایم. اگر خوانندگان عزیز واژه مناسب‌تری یافتند، لطف کرده و ما را مطلع کنند.

4. L. G. Calvert
5. Proulx
6. Holton
7. M. Niss.; W. Blum & P. Galbraith
8. Formulate
9. OECD (Organization for Economic Co-operation and Development)
10. R. Pierce & K. Stacey
11. Reid
12. Morgan & Watson
13. Even & Wallach
14. H. Doerr & L. English

۱۵. گوش‌دادن تنها به گوش فرادادن محدود نمی‌شود و شامل مشاهده و احساس کردن است

16. Radford
17. Pollak
18. Davis
19. J. A. Van De Walle

منابع

۱. رفیع‌پور گتابی، ابوالفضل. (اردیبهشت ۱۳۹۰). رویکرد مدل‌سازی و کاربرد به یاددهی و یادگیری ریاضی. **مجموعه مقالات اولین همایش تحول بنیادین در نظام برنامه درسی ایران.** مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد.

۲. گینات، هایم. **روابط معلم و دانش‌آموز.** ترجمه سیاوش سرتیپی (چاپ چهارم، ۱۳۸۱). انتشارات آسونه. تهران.

۳. لاکروکس، لاینال. (۱۹۹۱). مقایسه بین دیدگاه‌های رفتارگرایی و ساخت‌وسازگرایی. ترجمه زهرا گویا (۱۳۸۳). **مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۷۶.** صص. ۱۸ تا ۲۲. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۴. ون دوویل، جان. (۲۰۰۱). توسعه فهم و درک ریاضی. ترجمه سپیده چمن‌آرا (۱۳۸۲). **مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۷۴.** صص.۴ تا ۱۴. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

5. Calvert, L. (2000). Mathematical conversations within the Practice of mathematics. **24th Annual Meeting of Canadian Mathematics Education Study Group**. 123-128.

6. Clements, M. A. & Ellerton, N. F. (1996). **Mathematics education research: Past, present and Future**: UNESCO.

7. Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching**. Journal for Research in Mathematics Education.** 28(3), 355-76.

8. English, L. D. & Doerr, H. M. (2004). Learning through interacting with students' ways of thinking. **27th Annual Conference of The Mathematics Education Research Group of Australia: Mathematics Education for The Third Millennium: Towards 2010.** 215-222.

9. Even, R. & Wallach, T. (2003). On student observation and student assessment. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert & J. Mousley (Eds.). **Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity: Proceedings of The 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.** Vol. 1, pp. 316-323. Melbourne, Australia: Deakin University.

10. Holton, D. L. (2010). Constructivism+ embodied cognition = Enactivism: Theoretical & practical implications for conceptual change. **AERA Annual Conference**. Colorado: AERA.

11. Morgan, C. & Watson, A. (2002). The interpretative nature of teachers′ assessment of students′ mathematics: Issues for equity. **Journal for Research in Mathematics Education.** 33(2), 78-110.

12. Niss, M.; Blum, W. & Galbraith, P. (2007). **Part 1: Introduction. ICMI Study 14: Modeling and applications in mathematics education**, 3- 32.

13. OECD. (2003). **The PISA 2003 assessment framework: Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills.** The Author.

14. Pierce, R. & Stacey, K. (2006). Enhancing image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts**. ZDM**: **The International Journal on Mathematics Education**, 38. 214-225.

15. Radford, L. (2011). Book review: Classroom interaction: Why is it good, really? B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz. (Eds.). (2009) Transformation of knowledge through classroom interaction. **Educational Studies in Mathematics**, **76**,101–115.

16. Reid, D. (1996). Enactivism as a methodology. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.). **Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** (Vol. 4, pp. 203-210). Valencia, Spain: PME.