۸ بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه
آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

کلیدواژه‌ها:
انتگرال، پادمشتق، انتگرال نامعین، انتگرال معین، دستورالعمل انتگرال‌گیری

مقدمه

مبحث انتگرال و قوانین انتگرال‌گیری از جمله مباحث اساسی و پرکاربرد در حسابان است. از زمانی که نیوتن و لایپ‌نیتز به صورت منطقی به معرفی دیفرانسیل و انتگرال پرداختند و نمادهایی را برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری ارائه کردند. تاکنون روش‌های تحلیلی و کلاسیک متفاوتی برای انجام عمل انتگرال‌گیری مطرح شده و کاربردهای زیادی در علوم ریاضی، فیزیک و مکانیک و علوم فنی و مهندسی برای انتگرال ارائه شده است. اهمیت موضوع محاسبهٔ انتگرال معین و نامعین یک تابع تاحدی بالاست که نویسندگان مختلف کتاب‌های بسیاری در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال را در سراسر جهان به چاپ رسانده‌اند و بسیاری از آن‌ها در ایران ترجمه شده و در مقاطع مختلف تحصیلی در سطح دانشگاه تدریس می‌شود. در این راستا، طراحان بسته‌های نرم‌افزاری نیز تلاش کرده‌اند با به‌کارگیری روش‌های ساده و صریح، محاسبهٔ انتگرال یک تابع را در حالات معین و نامعین برای کاربران خود آسان کنند تا بدون نیاز به استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری، حاصل پادمشتق یک تابع یا مقدار انتگرال معین یک تابع را در صورت وجود به‌دست آورند و در کارهای علمی و تحقیقاتی خود استفاده کنند. بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا نیز کارایی و قابلیت بالایی را در محاسبهٔ انتگرال یک تابع مفروض داراست. در این قسمت به معرفی نمادها و دستورالعمل‌های اصلی محاسبهٔ انتگرال یک تابع می‌پردازیم.

دستورالعمل Integrate

می‌دانیم تابع اولیه یا پادمشتق یک تابع مفروض f تابعی چون F است به‌طوری که $F'(x)=f(x)$. دستورالعمل Integrate به صورت کلی زیر، تابع اولیهٔ تابع مفروض f را محاسبه‌می‌کند:

$$\text{Integrate}[f[x],x]$$

مثال ۱: تابع اولیهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۴}$ را به‌دست آورید:

$$\text{Integrate}[x^{۴},x]$$

$$\frac{x^{۵}}{۵}$$

مثال ۲: تابع اولیهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۳}\text{Cos}\,x$ را به‌دست آورید.

$$\text{Integrate}[x^{۳}\text{Cos}[x],x]$$

$$۳(-۲+x^{۲})\text{Cos}[x]+x(-۶+x^{۲})\text{Sin}[x]$$

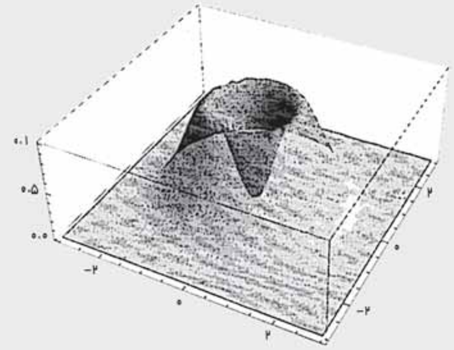
یادآوری می‌شود به منظور اجرای سلول حاوی دستور فوق به طور هم‌زمان دکمه‌های Shift+Enter را باید فشار داد.

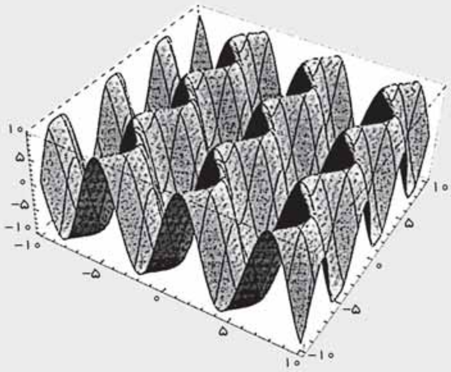
معرفی نماد $\int$: راه دیگر برای محاسبهٔ تابع اولیهٔ یک تابع مفروض، استفاده از نماد $\int\blacksquare d\square$ در پنجرهٔ Basic Math Input است. در این نماد باید به جای ■ ضابطهٔ تابع و به جای □ متغیر انتگرال‌گیری را تایپ کرد. علامت d همان نماد دیفرانسیل است که با حرف d تفاوت دارد. برای اجرای این دستور، روی این نماد کلیک می‌کنیم. سپس در مربع اول ضابطهٔ تابع موردنظر را تایپ می‌کنیم و با فشار دکمهٔ Tab به مربع دوم منتقل می‌شویم و درون این مربع، متغیری را که عمل انتگرال‌گیری روی آن انجام می‌شود، تایپ می‌کنیم.

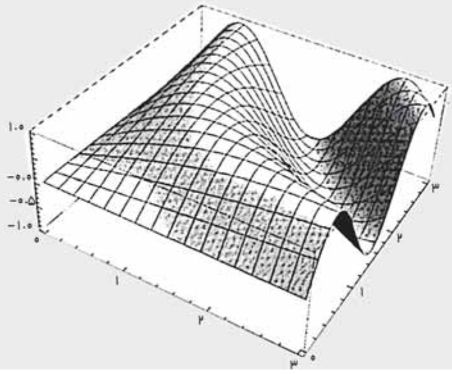
مثال ۳: حاصل $\int\sqrt{x}dx$ را مشخص کنید.

$$\int\sqrt{x}\,dx$$

$$=\frac{۲x^{\frac{۳}{۲}}}{۳}$$







مثال ۴: حاصل $\int e^x \operatorname{Sin} x dx$ را مشخص کنید.

$$\int \text{Exp}[x]\text{Sin}[x]dx$$

$$\frac{۱}{۲}e^x(-\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x])$$

گفتنی است در متمتیکا ثابت انتگرال‌گیری C نوشته شده پس از محاسبهٔ انتگرال نامعین بیان نمی‌شود و فقط تابع اولیهٔ تابع مفروض اعلام خواهد شد.

در مثال زیر انتگرال نامعین چند تابع مفروض محاسبه و اجرا شده است. در نتایج حاصل تابع اولیهٔ تابع زیر علامت انتگرال چاپ می‌شود و ثابت انتگرال‌گیری قید نمی‌شود. به این ترتیب حاصل اجرای $\int \blacksquare d\square$ همان حاصل اجرای دستور Intergrate است.

مثال ۵: مطلوب است $\int x^n dx$ ، $\int \frac{dx}{x}$ ، $\int \operatorname{Sin}^۲ xdx$ و $\int \tan^۲ xdx$.

حل:

$$\int x^n dx$$

$$\frac{x^{۱+n}}{۱+n}$$

$$\int \frac{۱}{x}dx$$

$$\text{Log}[x]$$

$$\int \text{Sin}[x]^۲ dx$$

$$\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۴}\text{Sin}[۲x]$$

$$\int \text{Tan}[x]^۲ dx$$

$$-x+\text{Tan}[x]$$

توجه شود که Log[x] همان Ln(x) را بیان می‌کند. هم‌چنین برای ورود توابع دارای کسر یا توان یا ریشه می‌توان از نمادهای موجود در پنجره Basic Math Input بهر برد و با کلیک روی آن‌ها نماد موردنظر را در زیر علامت $\int$ ایجاد و در مربع‌های مربوط ضابطهٔ تابع موردنظر را تایپ کرد.

مثال ۶: حاصل $\int \frac{du}{\sqrt{u^۲-a^۲}}$ را بیابید.

حل: ابتدا روی نماد $\int \blacksquare d\square$ و سپس در $\blacksquare$ روی نماد $\frac{\blacksquare}{\square}$ کلیک می‌کنیم و در صورت ۱ و در مخرج ابتدا روی $\sqrt{\blacksquare}$ کلیک و سپس روی $\blacksquare^{\square}$ کلیک و $u^۲$ را تایپ می‌کنیم. در ادامه علامت ـ را تایپ و مجدداً روی $\blacksquare^{\square}$ کلیک و $a^۲$ را تایپ می‌کنیم. با فشار دکمهٔ Tab به راحتی از یک مربع به مربع بعدی می‌توان وارد شد.

در نهایت، متغیر u را در $\square$ تایپ و با فشار هم‌زمان Shift+Enter نتیجه را ملاحظه می‌کنیم. توجه شود که اگر متغیر انتگرال‌گیری عوض شود، حاصل انتگرال نیز تغییر خواهد کرد.

نتیجهٔ اجرا، $\text{Ln}(u+\sqrt{u^۲-a^۲})$ است.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{u^۲-a^۲}}du$$

$$\text{Log}[u+\sqrt{-a^۲+u^۲}]$$

انتگرال معین: با استفاده از دستورالعمل Integrate به‌صورت زیر، می‌توان حاصل $\int_a^b f(x)dx$ را دریافت:

$$\text{Integrate}[f[x],\{x,a,b\}]$$

مثال ۷: حاصل $\int_۰^۱ x^۳dx$ را بیابید.

حل:

$$\text{Integrate}[x^3,\{x,0,1\}]$$

$$\frac{1}{4}$$

مثال ۸: حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ را بیابید.

$$\text{Integrate}[\text{Sin}[x],\{x,0,\pi/2\}]$$

$$1$$

معرفی نماد $\int_{\square}^{\square}$: با استفاده از نماد $\int_{\square}^{\square}\blacksquare d\square$ در پنجرهٔ Basic Math Input می‌توان حاصل انتگرال معین یک تابع مفروض را در بازهٔ موردنظر یافت.

مثال ۹: حاصل $\int_{-1}^{1}\big||x|-1\big|dx$ را بیابید.

حل:

$$\int_{-1}^{1}\text{Abs}[\text{Abs}[x]-1]dx$$

$$1$$

مثال ۱۰: حاصل $\int_0^1 xe^x \sin x\,dx$ را بیابید.

حل:

$$\int_0^1 x\,e^x\,\text{Sin}[x]dx$$

$$\frac{1}{2}(-1+e\,\text{Sin}[1])$$

توجه شود که هنگام تایپ تابع مذکور باید بین x و e^x یک فاصله گذاشت. در ضمن، برای تایپ تابع e^x می‌توان از نماد عدد نپر به صورت -- در پنجرهٔ Basic Math Input استفاده کرد که با حرف e معمولی کاملاً متفاوت خواهد بود. این تابع به صورت Exp[x] هم قابل بیان است. هم‌چنین با استفاده از دستورالعمل N می‌توان مقدار عددی حاصل انتگرال معین را مشاهده کرد. برای این کار کافی است پس از نماد d x تایپ کنیم:

$$\int_0^1 x\,e^x\,\text{Sin}[x]dx\,//N$$

$$0/643678$$

N// و سپس سلول حاصل را اجرا کنیم.

مثال ۱۱: در این مثال حاصل $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ و $\int_1^9\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ محاسبه می‌شوند.

حل: دستور عددی N در زیر، مقدار انتگرال معین تابع مذکور را به صورت تقریبی تا ۲۰ رقم اعشار مشخص می‌کند.

$$\int\frac{\text{Cos}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$2\text{Sin}[\sqrt{x}]$$

$$\int_1^9\frac{\text{Cos}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$2(-\text{Sin}[1]+\text{Sin}[3])$$

$$N\left[\int_1^9\frac{\text{Cos}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx,20\right]$$

$$-1/4007019534960585691$$

مثال ۱۲: مطلوب است $\int\frac{dx}{9+x^2}$ و مقدار عددی $\int_{-3}^{3}\frac{dx}{9+x^2}$.

حل: ملاحظه می‌کنیم تابع اولیهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{9+x^2}$ به صورت $\frac{1}{3}\text{Arctan}\frac{x}{3}$ به‌دست می‌آید. هم‌چنین انتگرال معین این تابع در $[-3,3]$ برابر با $\frac{\pi}{6}$ است که مقدار عددی آن با استفاده از دستور N به صورت ۰/۵۲۳۵۹۹ مشخص شده است.

$$\int\frac{1}{9+x^2}dx$$

$$\frac{1}{3}\text{ArcTan}\left[\frac{x}{3}\right]$$

$$\int_{-3}^{3}\frac{1}{9+x^2}dx$$

$$\frac{\pi}{6}$$

$$\int_{-3}^{3}\frac{1}{9+x^2}dx\,//N$$

$$0/523599$$

مثال ۱۳: مطلوب است $\int_{-2}^{2}\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})dx$.

حل: توجه می‌کنیم که تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})$ در $[-2,2]$ تابعی فرد است (یعنی $f(x)+f(-x)=0$). به همین لحاظ حاصل انتگرال معین این

تابع در بازهٔ متقارن [۲,۲−] صفر می‌شود.

$$\int_{-۲}^{۲} \mathrm{Log}\left[x+\sqrt{x^{۲}+۱}\right]dx$$

۰

نکتــه: حاصل انتگــرال معین یک تابــع مفروض را می‌توان در بازه‌هایی چون $[a,+\infty)$ یا $(-\infty,\infty)$ نیز یافت. به این نوع انتگرال‌ها که یکی از دو ســر بازهٔ ∞ باشد ناسره می‌گویند.

مثال ۱۴: مطلوب است $\int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}}dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{۲}}$.

حل:

Integrate[Exp[−x ^ ۲], {x,۰, Infinity}]

$$\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{۱+x^{۲}}dx$$

π

نکته: در صورتی که مقدار انتگرال معین یک تابع در بازهٔ انتگرال‌گیری موجود نباشــد، پس از اجرای این سلول پیغام خاصی در صفحه ظاهر می‌شود.

مثال ۱۵: می‌دانیم $\int_{-۲}^{۳}\frac{dx}{x}$ قابل محاســبه نیســت، زیرا تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ در $[-۲,۳]$ پیوســته نیست و در $x=۰$ تعریف نشده اســت. با اجرای این دستور در متمتیکا پیغامی مبنی بر همگرانبودن انتگرال فوق در این بازه نمایان می‌شود.

$$\int_{-۲}^{۳}\frac{۱}{x}dx$$

Integrate :: idiv : Integral of $\frac{۱}{x}$ does not converge on {−۲, ۳}. >>

$$\int_{-۲}^{۳}\frac{۱}{x}dx$$

نکته: با استفاده از دستورالعمل N Integrate می‌توان مقدار عددی یک انتگرال معین را یافت. این دســتور معادل با این اســت که ابتدا دســتور Integrate اجرا شود و سپس با دستور N مقدار عددی جواب حاصل به‌دست آید.

مثال ۱۶: تابــع اولیهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲^{x}$ و هم‌چنین $\int_{۰}^{۱}f(x)dx$ را به‌صورت تقریبی بیابید.

حل:

Integrate[۲^x , x]

$$\frac{۲^{x}}{\mathrm{Log}[۲]}$$

Integrate[۲^x , {x,۰,۱}]

$$\frac{۱}{\mathrm{Log}[۲]}$$

N[%]

۱/۴۴۲۷

NIntegrate[۲^x , {x,۰,۱}]

۱/۴۴۲۷

نکتــه: در متمتیکا می‌توان از توابع چند متغیری هم انتگرال گرفــت. در صورتی که محدودهٔ هر متغیر در دستور انتگرال‌گیری مشخص شــود حاصل انتگرال معین یک تابع چند متغیری هم قابل محاسبه است.

مثال ۱۷: حاصل $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x}(x^{۲}+y^{۲})dydx$ را بیابید.

حل: در این حالت $۰\le x\le ۱$ و $۰\le y\le x$.

Integrate[x ^ ۲ + y ^ ۲, {x,۰,۱}, {y,۰,x}]

$$\frac{۱}{۳}$$

نکته: با اســتفاده از دســتور مشتق‌گیری D می‌توان مشتق یک تابع دارای علامت انتگرال را محاسبه کرد.

مثال ۱۸: حاصل $\frac{d}{dx}\int_{۱}^{x}\frac{\mathrm{Sin}t}{t}dt$ را بیابید.

حل:

$$D\left[\int_{۱}^{x}\frac{\mathrm{Sin}[t]}{t}dt, x\right]$$

$$\frac{\mathrm{Sin}[x]}{x}$$

در قســمت بعد مثال‌هایی از کاربرد انتگــرال معین را با استفاده از متمتیکا معرفی می‌کنیم.

منابع

۱. کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲ دوره پیش‌دانشگاهی رشتهٔ علوم ریاضی، ۱۳۸۹.

2. Mathematica, Eugene Don, Second edition, Schaum's outline series, Mc Graw Hill, 2009.