آموزش

۲

نظریه اعداد

برای دانش‌آموزان سال چهارم ریاضی

حمیدرضا امیری

چکیده

دراین مقاله نکات مهّم بخش‌هایی از نظریهٔ اعداد، استفاده شده در کنکورهای سراسری و آزاد، همراه با کاربرد آن‌ها در حل مسائل و پرسش‌های ۴ گزینه‌ای، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلیدواژه‌ها:
استقراء، بخش‌پذیری، خوش‌ترتیبی، عاد کردن، مبناها، شمارنده، اعداد اول.

نکات مربوط به اعداد مربع کامل

I) اگر عددی مربع کامل باشد، در تجزیهٔ آن عدد به حاصل ضرب اعداد اول، همهٔ توان‌ها زوج‌اند.

مثال: کوچک‌ترین عددی را که می‌توان در عدد !۸ ضرب کرد تا حاصل عددی مربع کامل باشد، به دست آورید.

حل: $۸! = ۲^۷ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۷$ یا $۸! = ۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲$ که اگر عدد $k = ۲\times۵\times۷$ در آن ضرب شود، به صورت $۸!k = ۲^۸ \times ۳^۲ \times ۵^۲ \times ۷^۲$ در می‌آید و چون توان‌ها همگی زوج‌اند، مربع کامل است.

II) اگر عددی مربع کامل باشد، باید به یکی از ارقام ۰ یا ۱ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۹ ختم شود و لذا اگر عددی به ۲ یا ۳ یا ۷ یا ۸ ختم شود، آن عدد مربع کامل نیست.

III) اگر عددی فرد و مربع کامل باشد، همواره باید به صورت $(۸k+۱)$ باشد. لذا اگر عددی فرد باشد و به شکل $(۸k+۱)$ نباشد، آن عدد مربع کامل نیست.

IV) اگر عددی زوج و مربع کامل باشد، همواره باید بر ۴ نیز بخش‌پذیر باشد. بنابراین اگر عددی زوج باشد و بر ۴ بخش‌پذیر نباشد، آن‌گاه مربع کامل نیست.

V) اگر عددی مضرب ۳ و مربع کامل نیز باشد همواره باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد. لذا اگر عددی بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۹ بخش‌پذیر نباشد آن‌گاه مربع کامل نیست.

و به‌طور کلّی اگر «عددی بر عدد اولِ p بخش‌پذیر و مربع کامل باشد، آن‌گاه همواره بر $p^۲$ بخش‌پذیر است؛ و لذا اگر عددی بر p بخش‌پذیر باشد ولی بر $p^۲$ بخش‌پذیر نباشد و p اول باشد، آن‌گاه آن عدد مربع کامل نیست.»

VI) هر عددی که مربع کامل باشد به یکی از دو صورت $۳k$ و یا $۳k+۱$ است. بنابراین اگر عددی به شکل $۳k$ و یا $۳k+۱$ نباشد آن‌گاه مربع کامل نیست.

زیرا:
$$\begin{cases} a = ۳k \Rightarrow a^۲ = ۹k^۲ = ۳t \\ a = ۳k+۱ \Rightarrow a^۲ = ۹k^۲ + ۶k + ۱ = ۳t+۱ \\ a = ۳k+۲ \Rightarrow a^۲ = ۹k^۲ + ۱۲k + ۴ \\ = ۹k^۲ + ۱۲k + ۳ + ۱ = ۳t' + ۱ \end{cases}$$

نکات مربوط به شمارنده‌های یک عدد

اگر عدد طبیعی m را به صورت استاندارد $m = p_۱^{\alpha_۱} \times p_۲^{\alpha_۲} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ به حاصل ضرب اعداد اول تجزیه کنیم (p_iها اعداد اول و α_i ها اعداد حسابی‌اند)، در این صورت:

I) تعداد شمارنده‌های مثبتِ عدد m از رابطهٔ $T(m) = (\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)...(\alpha_k+۱)$ به دست می‌آید و بنابراین تعداد کلِ شمارنده‌های عدد m، برابر است با $۲T(m)$.

II) حاصل ضرب شمارنده‌های مثبتِ عدد m از رابطه $m^{\frac{T(m)}{۲}}$ به دست می‌آید و حاصل جمع آن‌ها از رابطهٔ $\frac{P_۱^{\alpha_۱+۱}-۱}{P_۱-۱}\times...\times\frac{P_k^{\alpha_k-۱}-۱}{p_k-۱}$ محاسبه می‌شود.

III) اگر m مربع کامل باشد، چون همهٔ α_iها زوج هستند، پس همهٔ $(\alpha_i+۱)$ها فرد خواهند بود و بنابراین $T(m)$ فرد است و اگر m مربع کامل نباشد، حداقل یکی از α_iها فرد است و لذا حداقل یکی از $(\alpha_i+۱)$ها زوج است و در نتیجه $T(m)$ زوج خواهد بود.

مثال: عدد ۲۸۰۰ چند **شمارنده** دارد؟

$۲۸۰۰ = ۲۸\times۱۰۰ = ۲^۲\times۷\times۲^۲\times۵^۲ = ۲^۴\times۵^۲\times۷$

$T(۲۸۰۰) = (۴+۱)\times(۲+۱)\times(۱+۱) = ۳۰$

$\Rightarrow ۲T(۲۸۰۰) = ۲\times۳۰ = ۶۰$

پس ۲۸۰۰ دارای ۶۰ شمارنده است.

تست: چند عدد طبیعی مانند x وجود دارد به قسمی که $۱۲۰|(x+۲)$.

۱) ۱۶ ۲) ۱۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

حل: گزینهٔ ۲، زیرا:

$۱۲۰ = ۶\times۲۰ = ۲\times۳\times۴\times۵ = ۲^۳\times۳\times۵$

$T(۱۲۰) = (۳+۱)\times(۱+۱)\times(۱+۱) = ۱۶$

$x\in N \Leftrightarrow x\geq۱ \Leftrightarrow x+۲\geq۳$

چون باید $x+۲\geq۳$ تا $x\in N$ باشد لذا (x+۲) نمی‌تواند ۱+ یا ۲+ باشد. بنابراین ۱۴ حالت برای (x+۲) قابل قبول است.

تعریف: اگر p عددی اول باشد و k بزرگ‌ترین توانی باشد که $p^k|n$؛ در این صورت می‌نویسیم: $p^k\|n$.

مثال: اگر $۵^۷\|n$، در این صورت برای هر $t>۷$ داریم $۵^t\nmid n$ ولی همواره $۵^۷|n$ و برای هر $m<۷$ نیز $۵^m|n$.

تعداد عامل‌های عدد اول p در n!

اگر p عددی اول باشد، در این صورت تعداد عامل‌های p در n! از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد عامل‌های p در } n! = [\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^۲}]+[\frac{n}{p^۳}]+...+۰+۰+...$$

(چون $p\geq۲$ و n ثابت است، همواره از توانی چون k به بعد $p^k>n$ است و $۰<\frac{n}{p^k}<۱$ و $[\frac{n}{p^k}]=۰$ خواهد بود.)

تست: اگر $۵^k\|۴۲!$ مقدار k کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

حل: گزینهٔ ۲، زیرا:

باید بزرگ‌ترین عددی چون k را بیابیم که $۵^k\|۴۲!$، یعنی تعداد عامل‌های ۵ در ۴۲!؛ که طبق مطالب قبلی این تعداد برابر است با: $[\frac{۴۲}{۵}]+[\frac{۴۲}{۲۵}] = ۸+۱ = ۹$

تست: در سمت راست عدد ۷۳! چند صفر وجود دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۳

حل: گزینهٔ ۲، زیرا:

در یک حاصل ضرب به ازای هر ۲ و ۵ عدد ۱۰ یعنی یک صفر در سمت راست عدد حاصل تولید می‌شود و چون ۲<۵، تعداد عامل‌های ۵ در ۷۳! کم‌تر از تعداد عامل‌های ۲ است و لذا عامل‌های ۵ همان تعداد صفرها در سمت راستِ عدد ۷۳! است:

$[\frac{۷۳}{۵}]+[\frac{۷۳}{۲۵}] = ۱۴+۲ = ۱۶$

تذکر مهم: در حالت کلّی «تعداد صفرهای سمت راستِ عدد n! برابر است با تعداد عامل‌های ۵ در n!» و تعداد عامل‌های عدد $k = p\times q$ (p و q عدد اول هستند) که در آن p>q، در عدد n! برابر است با تعداد عامل‌های عدد p در n!.

برای مثال، تعداد عامل‌های عدد ۲۱ در n! برابر است با تعداد عامل‌های عدد ۷ در n!. (۲۱=۷×۳) هم‌چنین اگر عدد k به صورت $k = p^m$ باشد، تعدادی عامل‌های k در n! را به این صورت به دست می‌آوریم که ابتدا تعداد عامل‌های p را در n! محاسبه و عدد حاصل را بر m تقسیم می‌کنیم (هر m تا p یک عدد k تولید می‌کند) و جزء صحیح این تقسیم جوابِ مسئله است.

مثال: در عدد ۶۹! چند عامل ۸۱ وجود دارد؟

حل: چون $۳^۴ = ۸۱$، پس در این صورت داریم:

$[\frac{۶۹}{۳}]+[\frac{۶۹}{۹}]+[\frac{۶۹}{۲۷}] = ۲۳+۷+۲ = ۳۲, [\frac{۳۲}{۴}] = ۸$

پس ۸ عامل ۸۱ در ۶۹! وجود دارد.

اصل خوش ترتیبی: مجموعهٔ اعداد طبیعی (N) خوش ترتیب است. به عبارت معادل: هر زیرمجموعهٔ ناتهی N عضو ابتدا دارد

> اگر «عددی بر عدد اولِ p بخش‌پذیر و مربع کامل باشد، آن‌گاه همواره بر $p^۲$ بخش‌پذیر است؛ و لذا اگر عددی بر p بخش‌پذیر باشد ولی بر $p^۲$ بخش‌پذیر نباشد و p اول باشد، آن‌گاه آن عدد مربع کامل نیست.»

نکات مهّم

I) تعداد صفرهای سمت راست عدد $k!m!$ که در آن $k > m$، برابر است با تعداد صفرهای سمت راستِ عدد $m!$.

II) تعداد صفرهای سمت راست عدد $k!m!$ برابر است با مجموع تعداد صفرهای سمت راست $k!$ و صفرهای سمت راست $m!$.

III) تعداد صفرهای سمت راست عدد $\frac{k!}{m!}$ $(k > m)$ برابر است با تفاضل تعداد صفرهای سمت راست $m!$ از $k!$.

IV) اگر تعداد اعدادی چون n $(k \le n \le m)$ را بخواهیم که مربع کامل و مضرب p (p اول) باشند، این اعداد باید به شکل $n = p^۲q^۲$ باشند. لذا کافی است نابرابری $k \le p^۲q^۲ \le m$ را حل و تعداد جواب‌های آن را بررسی کنیم.

مثال: چند عدد طبیعی و چهار رقمی وجود دارد که مضرب ۱۳ و مربع کامل باشند؟

حل: چنین اعدادی باید به شکل $n = ۱۶۹k^۲$ باشند، لذا داریم:

$$۱۰۰۰ \le ۱۶۹k^۲ \le ۹۹۹۹ \Rightarrow [\frac{۱۰۰۰}{۱۶۹}] \le k^۲ \le [\frac{۹۹۹۹}{۱۶۹}]$$
$$\Rightarrow ۶ \le k^۲ \le ۵۹$$
$$\Rightarrow [\sqrt{۶}]+۱ \le k \le [\sqrt{۵۹}] \Rightarrow \quad ۳ \le k \le ۷ \Rightarrow k = ۳ \text{ یا ... یا } ۷$$

پس ۵ عدد ٤ رقمی، مربع کامل و مضرب ۱۳ وجود دارد.

مبناها- عددنویسی در مبناهای مختلف

قضیهٔ زیر که در اثبات آن از قضیهٔ تقسیم استفاده می‌شود، نشان می‌دهد که هر عدد طبیعی را می‌توان بر حسب عدد طبیعی مانند $b>۱$ و به شکل منحصربه‌فرد نمایش داد. عدد b را مبنای نمایش عدد n می‌نامیم.

قضیه: اگر $b>۱$ عددی طبیعی باشد، هر عدد طبیعی مانند n را می‌توان به شکل منحصر به‌فرد به صورت $n = r_k b^k + r_{k-۱} b^{k-۱} + ... + r_۲ b^۲ + r_۱ b + r_۰$ نمایش داد که در این تساوی k عددی صحیح و نامنفی است و برای هر $i = ۰,۱,۲,...,k$ همواره $۰ \le r_i \le b-۱$ و $r_k \ne ۰$ است.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\text{I)}\ A = (۱۳۹۱)_{۱۰} = ۱۳۹۱ = ۱\times ۱۰^۳ + ۳\times ۱۰^۳ + ۹\times ۱۰ + ۱$$
$$\text{II)}\ B = (۲۰۱۳)_۷ = ۲\times ۷^۳ + ۰\times ۷^۲ + ۱\times ۷ + ۳ = ۳۵۳$$
$$\text{III)}\ n = (\overline{r_k r_{k-۱} ... r_۲ r_۱ r_۰})_b = r_k b^k + r_{k-۱} b^{k-۱} + ... + r_۲ b^۲ + r_۱ b + r_۰$$

تذکر: ارقام به کار رفته در هر مبنایی چون $b>۱$ کوچک‌تر از b هستند.

(برای مثال: در عدد نویسی در مبنای ٦، حداکثر رقمی که می‌توان به کار برد رقم ۵ است)، زیرا ارقام به کار رفته در مبنای b در واقع باقی‌مانده‌های تقسیم بر b هستند که همواره طبق قضیهٔ تقسیم از b کوچک‌ترند.

نکات مهّم:

I) برای تبدیل یک عدد از مبنای غیر از ۱۰به مبنای ۱۰، کافی است آن عدد را در مبنای داده شده بسط دهیم.

مثال: عدد $A = (۲۱۱۲)_۴$ را در مبنای ۱۰ بنویسید.

حل: کافی است عدد A را در مبنای ٤ بسط دهیم:

$$A = ۲\times ۴^۳ + ۱\times ۴^۲ + ۱\times ۴ + ۳ = ۱۲۸ + ۱۶ + ۴ + ۳ = ۱۵۱$$

II) برای تبدیل عددی از مبنای ۱۰ به مبنای غیر از ۱۰، باید آن عدد را با تقسیمات متوالی در مبنای مورد نظر دسته‌بندی کنیم. وقتی تقسیمات متوالی انجام شد، از آخرین باقی‌مانده و به ترتیب از سمت چپ آن‌ها را کنار هم می‌نویسیم.

مثال: عدد ۱۳۹۱ را در مبنای ۷ بنویسید.

حل: تقسیمات متوالی بر ۷ را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

۱۳۹۱ | ۷
$r_۰ = ۵$ ، ۱۹۸ | ۷
$r_۱ = ۲$ ، ۲۸ | ۷
$r_۲ = ۰$ ، ۴ | ۷
$r_۳ = ۴$ ، ۰

$$۱۳۹۱ = (۴۰۲۵)_۷$$

تست: چند عدد ۴ رقمی در مبنای ۵ وجود دارد؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۹۰۰۰

حل: گزینهٔ۳، زیرا:

$\boxed{۴}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵} \rightarrow$ تعداد اعداد ۴ رقمی در مبنای ۵

$۴\times ۵^۳ = ۵۰۰$: طبق اصل ضرب

(در سمت چپ رقم صفر نمی‌تواند قرار گیرد و در بقیهٔ جایگاه‌ها هر رقم ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ می‌تواند قرار گیرد)

نکته: تعداد کل اعداد k رقمی در مبنای $b>1$ برابر است با $(b-1)\times b^{k-1}$.

نکته: بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد k رقمی در مبنای b برابرند با:

بزرگ‌ترین عدد $\to \left(\overline{(b-1)(b-1)....(b-1)}\right)_b$

کوچک‌ترین عدد $\to (100....0)_b$

نکتهٔ مهّم: اگر بخواهیم عددی را از مبنای b به مبنای b^k ببریم، در این صورت هر k رقم از سمت راستِ آن عدد در مبنای b یک رقم از سمت راست در مبنای b^k است و برعکس، یعنی هر یک رقم از سمت راست در عددی در مبنای b^k، k رقم سمت راستِ آن عدد در مبنای b را تشکیل می‌دهد.

مثال: عدد $A=(1021121)_3$ مفروض است، این عدد را در مبنای ۹ نمایش دهید.

حل: چون $9=3^2$، پس هر دو رقم در A یک رقم در مبنای ۹ است، لذا داریم:

$(21)_3=2\times3+1=7,(11)_3=1\times3+1=4,(02)_3=2,(1)=(01)_3=1$

$\Rightarrow (1021121)_3=(1247)_9$

مثال: عدد $A=(210123)_4$ مفروض است. این عدد را در مبنای ۲ نمایش دهید.

حل: چون $4=2^2$، پس هر یک رقم از A دو رقم از آن عدد درمبنای ۲ را تشکیل می‌دهد. لذا داریم:

$3=(11)_2$

$,2=(10)_2,1=(01)_2,0=(00)_2$

$,1=(01)_2,2=(10)_2\Rightarrow (210123)_4=(100100011011)_2$

قرارداد: اگر مبنای نمایش یک عدد، عددی چون b>۱۰ باشد، در این صورت برای نمایش ارقام در مبناهای بزرگ‌تر از ۱۰ از حروف کوچک انگلیسی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$a=10,b=11,c=12,d=13,e=14,...$

مثال: عدد $A=(1b2a)_{12}$ را در مبنای ۱۰ نمایش دهید.

حل: عدد A را در مبنای ۱۲ بسط می‌دهیم که خواهیم داشت:

$A=1\times12^3+11\times12^2+2\times12+10=1728+1584+24+10=3346$

تست: اگر $(ab)_5+(ba)_4=33$ و عدد $(bab)_6$ را در مبنای ۱۰ بنویسیم، حاصل کدام است؟

۱) ۱۲۹ ۲) ۱۳۹ ۳) ۱۴۱ ۴) ۱۳۸

حل: گزینهٔ ۱، زیرا:

$(ab)_5+(ba)_4=33\Rightarrow 5a+b+4b+a=33$

$\Rightarrow 6a+5b=33 \underset{1\le b\le 3}{\overset{1\le a\le 3}{\Rightarrow}} a=b=3\Rightarrow (bab)_6=(333)_6$

$(333)_6=3\times6^2+3\times6+3=129$

تست: اگر $(213)_x=(134)_{x+1}$، در این صورت $(111)_x$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۵ ۳) ۳۱ ۴) ۲۹

حل: گزینهٔ ۳، زیرا:

$(213)_x=(134)_{x+1}\Rightarrow 2x^2+x+3=(x+1)^2+3(x+1)+4$

$\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow (x-5)(x+1)=0\Rightarrow x=5$ یا $x=-1$

که $x=-1$ قابل قبول نیست (زیرا مبنا باید از یک بزرگ‌تر باشد).

$\Rightarrow (111)_5=1\times5^2+1\times5+1=31$

تست: اگر عدد دو رقمی $(ab)_7$ با عدد $(ba)_9$ برابر باشد، این عدد در مبنای ۱۰ به کدام رقم ختم می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۷

حل: گزینهٔ ۱، زیرا:

$(ab)_7=(ba)_9=7a+b=9b+a\Rightarrow 6a=8b\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{8}{6}$

و چون $a\neq 8$ پس $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$ و بنابراین $a=4$ و $b=3$ پس

$(ab)_7=7a+b=7\times4+3=31\Rightarrow$ رقم یکان=۱

$(ba)_9=9b+a=9\times3+4=31\Rightarrow$ رقم یکان=۱

تست: عدد !۶۵ در مبنای ۶ به چند صفر ختم می‌شود؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۱ ۴) ۲۹

حل: گزینهٔ ۲، زیرا:

در مبنای ۶ هر حاصل ضرب ۲ در ۳ یک ۶ یعنی یک صفر تولید می‌کند (شبیه به مبنای ۱۰ که هر حاصل ضرب ۲×۵ یک صفر ایجاد می‌کرد)، پس کافی است بررسی کنیم در عدد !۶۵ چند عامل ۳ وجود دارد (۲<۳) و در نتیجه خواهیم داشت:

$[\frac{65}{3}]+[\frac{65}{9}]+[\frac{65}{27}]=21+7+2=30$

اگر بخواهیم عددی را از مبنای b به مبنای b^k ببریم، در این صورت هر k رقم از سمت راستِ آن عدد در مبنای b یک رقم از سمت راست در مبنای b^k است و برعکس، یعنی هر یک رقم از سمت راست در عددی در مبنای b^k، k رقم سمت راستِ آن عدد در مبنای b را تشکیل می‌دهد