آموزش

المپیادهای ریاضی

غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها: المپیاد ریاضی، ماتریس، دترمینان، رومانی

ماتریس‌ها

مسائل این بخش را می‌توان با استفاده از ویژگی‌های ماتریس‌هایی حل کرد که شامل ساختار سطر ـ ستونی نیستند. مثال زیر نمونه‌ای از این ماتریس‌هاست:

مثال: ثابت کنید اگر A و B ماتریس‌های n×n باشند، آن‌گاه:

$$\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$$

حل: برای حل این مسئله، ابتدا B را وارون‌پذیر در نظر می‌گیریم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$(I_n - AB) = B^{-1}(I_n - BA)B$$

و در نتیجه:

$$\det(I_n - AB) = \det(B^{-1})\det(I_n - BA)\det B$$
$$= \det(I_n - BA)$$

اگر B وارون‌پذیر نباشد، به‌جای آن، ماتریس $B_x = xI_n + B$ را در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که $\det(xI_n - B)$ یک چندجمله‌ای برحسب x است، ماتریس‌های B_x به ازای جمیع مقادیر x جز تعدادی متناهی از آن‌ها وارون‌پذیرند. بنابراین می‌توانیم از اولین بخش اثبات استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که به ازای جمیع مقادیر x، به استثنای تعدادی متناهی از آن،

$$\det(I_n - AB_x) = \det(I_n - B_x A)$$

اما این دو دترمینان چند جمله‌ای‌هایی برحسب x اند که به ازای بی‌نهایت مقدار x برابرند. بنابراین باید جملات برابر باشند، به‌خصوص به ازای $x = 0$،

$$\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$$

در نتیجه، ملاحظه می‌کنیم اگر $I_n - AB$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $I_n - BA$ نیز وارون‌پذیر است. در این‌جا اثباتی مستقیم از این استلزام به‌دست می‌دهیم. اگر V وارون $I_n - AB$ باشد، آن‌گاه $V(I_n - AB) = I_n$ و در نتیجه $VAB = V - I_n$. بنابراین داریم:

$$(I_n + BVA)(I_n - BA) = I_n - BA + BVA - BVABA$$
$$= I_n - BA + BVA - B(V - I_n)A = I_n$$

در نتیجه: $I_n + BVA$ وارون $I_n - BA$ است.

مسائل

۱. فرض می‌کنیم A و B دو ماتریس مربع و چنان باشند که A+B=AB . ثابت کنید A و B تعویض‌پذیرند.

۲. ثابت کنید اگر A ماتریسی ۴×۵ و B ماتریسی ۵×۴ باشند، آن‌گاه

$$\det(AB - I_5) + \det(BA - I_4) = 0$$

۳. فرض می‌کنیم x، y و z ماتریس‌هایی n×n و چنان باشند که:

$$x + y + z = xy + yz + z.x$$

ثابت کنید برابری‌های زیر هم ارزند:

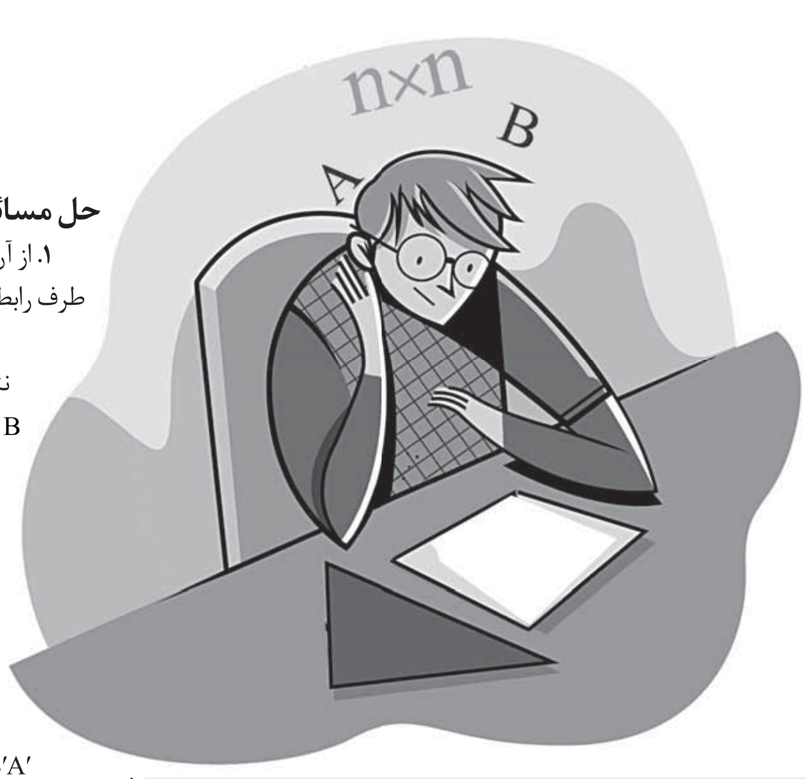
$$xyz = xz - zx$$
$$yzx = yx - xy$$
$$zxy = zy - yz$$

۴. نشان دهید به ازای هر دو ماتریس n×n از B و A، اتحاد زیر برقرار است:

$$\det(I_n - BA) = \det\begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

۵. فرض می‌کنیم N یک ماتریس n×n و چنان باشد که $A^n = \alpha A$ (α عددی حقیقی و متفاوت از ۱ و ۱- است). ثابت کنید ماتریس $A+I_n$ وارون‌پذیر است.

۶. اگر A و B ماتریس‌هایی متفاوت و برقرار کنندهٔ $A^3 = B^3$ و $A^2B = B^2A$ باشند، $AB = o_n$ را بیابید.



۷. ثابت کنید اگر A ماتریسی n×n با درایه‌های حقیقی باشد، در این صورت:

$$\det(A^2 + I_n) \geq 0$$

۸. نشان دهید اگر A و B ماتریس‌هایی n×n با درایه‌های حقیقی باشند و $AB = o_n$، آن‌گاه به ازای اعداد صحیح و مثبت p و q داریم:

$$\det(I_n + A^{2p} + B^{2q}) \geq 0$$

۹. فرض می‌کنیم A، B و C ماتریس‌هایی n×n باشند که دوبه‌دو تعویض‌پذیرند و $ABC = o_n$، ثابت کنید

$$\det(A^3 + B^3 + C^3)\det(A + B + C) \geq 0$$

۱۰. فرض می‌کنیم p و q اعداد حقیقی و چنان باشند که به ازای هر عدد حقیقی x داشته باشیم:

$$x^2 + px + q \neq 0$$

ثابت کنید اگر n عددی صحیح و مثبت و فرد باشد، آن‌گاه به ازای جمیع ماتریس‌های حقیقی X از مرتبهٔ n×n داریم:

$$X^2 + pX + qI_n \neq o_n$$

۱۱. فرض می‌کنیم A و B دو ماتریس n×n باشند و $C = AB - BA$. نشان دهید اگر C هم با A و هم با B تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه عدد صحیحی مانند m چنان موجود است که:

$$C^m = o_n$$

حل مسائل

۱. از آن‌جا که $AB - A - B = o_n$، با افزون I_n به دو طرف رابطه و تجزیه به‌دست می‌آوریم:

$$(I_n - A)(I_n - B) = I_n$$

نتیجه می‌گیریم که $I_n - A$ وارون‌پذیر و وارون آن $I_n - B$ است. در نتیجه:

$$(I_n - B)(I_n - A) = I_n$$

که مستلزم $AB - A - B = o_n$ است. در نتیجه خواهیم داشت: $BA = A + B = AB$

۲. برای به‌دست آوردن ماتریس‌های ۵×۵ از A' و B'، ماتریس‌ها را با صفرها تکمیل می‌کنیم. ماتریس $A'B'$ برابر AB است، در حالی‌که $B'A'$، BA را در گوشهٔ بالا و چپ دارد و هر جای دیگر صفر است. اتحاد مربوط به دترمینان‌ها که در ابتدای بخش مورد بحث قرار گرفت، مستلزم این است که:

$$\det(I_5 - A'B') = \det(I_5 - B'A')$$

بنابراین داریم:

$$\det(I_5 - A'B') = \det(I_5 - AB) = (-1)^5 \det(AB - I_5)$$

نیز از آن‌جا که تنها عنصر ناصفر واقع در سطر آخر $I_5 - B'A'$ در گوشهٔ راست و پایین، ۱ است، و کهاد متناظر $\det(I_4 - BA)$ است، درمی‌یابیم که:

$$\det(I_5 - B'A') = \det(I_4 - BA) = (-1)^4 \det(AB - I_4)$$

و نتیجه به‌دست می‌آید.

۳. با فرض $x + y + z = xy + yz + zx$ ملاحظه می‌کنیم که $xyz = xz - zx$ هم ارز با $xyz + x + y + z = xz - zx + xy + yz + zx$ است. در این صورت داریم:

$$(x - I_n)(y - I_n)(z - I_n) = xyz - xy - yz - xz + x + y + z - I_n = -I_n$$

و ماتریس‌های $(x - I_n)$ و $(y - I_n)$ و $(z - I_n)$ وارون‌پذیرند. با جایگشت دوری گرفتن از عامل‌ها (یعنی با ضرب در سمت راست عامل و وارون آن در چپش) برای مثال،

$$(z - I_n)(x - I_n)(y - I_n) = -I_n$$

را به‌دست می‌آوریم. بنابراین:

$$zxy - xy - zy - zx + x + y + z = o_n$$

که هم ارز است با: $zxy = zy - yz$

این موضوع ثابت می‌کند که اولین برابری از گروه سه‌تایی مستلزم آخری است. با جایگشت حروف، درمی‌یابیم که سه برابری هم‌ارزند.

(مسابقهٔ ریاضی رومانی، ۱۹۸۵: طرح از T.Andreescu و I.V maftei)

۴. برابری

$$\begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_n & -A \\ o_n & I_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n & o_n \\ B & I_n-AB \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهد که ماتریس $۲n\times ۲n$ صورت مسئله را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب ماتریسی با دترمینان برابر یک و ماتریسی با دترمینان برابر $\det(I_n-AB)$ نوشت. بنابراین خواهیم داشت:

$$\det\begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_n \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} I_n & o_n \\ B & I_n-AB \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} I_n & -A \\ o_n & I_n \end{bmatrix}^{-۱}$$
$$=\det(I_n-AB)$$

۵. فرض می‌کنیم $B=A+I_n$. از آن‌جا که $A=B-I_n$، شرط $A^n=\alpha A$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(B-I_n)^n=\alpha(B-I_n)$$

این موضوع مستلزم

$$B^n-\binom{n}{۱}B^{n-۱}+\binom{n}{۲}B^{n-۲}+\ldots+(-۱)^n I_n=\alpha B-\alpha I_n$$

یا

$$B^n-\binom{n}{۱}B^{n-۱}+\binom{n}{۲}B^{n-۲}+\ldots+(-۱)^{n-۱}B-\alpha B$$
$$=\alpha I_n-(-۱)^n I_n$$

است. به این ترتیب داریم:

$$B(B^{n-۱}-\binom{n}{۱}B^{n-۲}+\binom{n}{۲}B^{n-۳}+\ldots+(-۱)^{n-۱}I_n-\alpha I_n)$$
$$=((-۱)^{n+۱}-\alpha)I_n$$

که به روشنی نشان می‌دهد B وارون‌پذیر است، زیرا $(-۱)^{n+۱}-\alpha\neq ۰$

(المپیاد ریاضی رومانی، ۱۹۸۰؛ طرح از c.cocea)

۶. داریم:

$$(A^۲+B^۲)(A-B)=A^۳-A^۲B+AB^۲-B^۳=o_n$$

چون $A\neq B$، این رابطه نشان می‌دهد که $A^۲+B^۲$ دارای یک مقسوم‌علیه صفر است. در نتیجه وارون‌پذیر نیست و بنابراین دترمینانش ۰ است.

(پنجاه و یکمین مسابقهٔ ریاضی پاتنام، ۱۹۹۱)

۷. می‌نویسیم

$$A^۲+I_n=(A+iI_n)(A-iI_n)$$

که i آن واحد موهومی است. اگر $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ...، λ_n ویژه‌مقدارهای A باشند، آن‌گاه ویژه‌مقدارهای $A+iI_n$ عبارت‌اند از:

$$\lambda_۱+i.\lambda_۲+i,\ldots,\lambda_n+i$$

در نتیجه داریم:

$$\det(A+iI_n)=(\lambda_۱+i)(\lambda_۲+i)\ldots(\lambda_n+i)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\det(A-iI_n)=(\lambda_۱-i)(\lambda_۲-i)\ldots(\lambda_n-i)$$

از آن‌جا که A دارای درایه‌های حقیقی است، ویژه‌مقدارهای مختلطش در جفت‌های اعداد مزدوج ظاهر می‌شوند. با استفاده از فرمول‌های

$$(a+bi+i)(a-bi+i)=(a^۲+b^۲-۱)+۲ai$$

و

$$(a+bi-i)(a-bi-i)=(a^۲+b^۲-۱)-۲ai$$

ملاحظه می‌کنیم که $\det(A+iI_n)$ و $\det(A-iI_n)$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب‌های جمله‌ای نوشت که مزدوج مختلط یکدیگرند. در نتیجه، خود دترمینال‌ها مزدوج‌های مختلط یکدیگرند و این مستلزم آن است که حاصل‌ضربشان عددی حقیقی و نامنفی باشد.

۸. بنا به مسئلهٔ پیشین داریم:

$$\det(I_n+A^{۲p})\geq ۰$$

و

$$\det(I_n+B^{۲q})\geq ۰$$

از $AB=o_n$ به دست می‌آوریم:

$$A^{۲p}B^{۲q}=o_n \quad AB=o$$

و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\det(I_n+A^{۲p}+B^{۲q})=\det(I_n+A^{۲p}+B^{۲q}+A^{۲p}B^{۲q})$$
$$=\det((I_n+A^{۲p})(iI_n+B^{۲q}))$$
$$=\det(I_n+A^{۲p})\det(I_n+B^{۲q})\geq o_n$$

(M. and S. Rădulescu)

۹. فرض می‌کنیم $w\neq ۱$ ریشهٔ سوم واحد باشد. از آن‌جا که A، B و C تعویض‌پذیرند و

$$ABC=o_n$$

می‌توان نوشت:

$$A^۳+B^۳+C^۳=A^۳+B^۳+C^۳-۳ABC$$

$$= (A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$$
$$= (A+B+C)(A+wB+w^2C)(A+w^2B)$$
$$= (A+B+C)(A+wB+w^2C)\overline{(A+wB+w^2C)}$$

در نتیجه:

$$\det(A^3+B^3+C^3)\det(A+B+C)$$
$$= \det((A+B+C)^2)\det(A+wB+w^2C)\det\overline{(A+wB+w^2C)}$$
$$= (\det((A+B+C))^2\det(A+wB+w^2C)\det\overline{(A+wB+w^2C)}$$
$$= (\det(A+B+C))^2\left|\det(A+wB+w^2C)\right|^2 \geq 0$$

۱۰. فرض می‌کنیم به ازای ماتریس $n\times n$ از x داشته باشیم:

$$X^2+pX+qI_n = o_n$$

این برابری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(X+\frac{p}{2}I_n)^2 = \frac{p^2-4q}{4}I_n$$

با دترمینان گرفتن از دو طرف و استفاده از این موضوع که $\det(AB) = \det A$

به دست می‌آوریم

$$(\det(X+\frac{p}{2}I_n))^2 = (\frac{p^2-4q}{4})^n$$

سمت چپ این این رابطه نامنفی است و سمت راست آن بنا به فرض، اکیداً منفی است و این تناقض، اثبات را به پایان می‌رساند.

(المپیاد ریاضی رومانی، طرح از T. Andreescu و I.D. Ion)

۱۱. ابتدا باید توجه داشته باشیم که اگر فرض کنیم

$$p(x) = \det(xI_n - B)$$

چند جمله‌ای مشخصهٔ B باشد، آن‌گاه بنا به قضیهٔ کوشی ـهمیلتون،

$$p(B) = o_n$$

از آن‌جا که C با هر دو مورد A و B تعویض می‌شود، داریم:

$$AB^2 - B^2A = (AB-BA)B + B(AB-BA)$$
$$= BC + CB = 2BC$$

با استقرا نشان می‌دهیم که به ازای هر $k>0$، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$AB^k - B^kA = kB^{k-1}C$$

این رابطه به ازای $k=1,2$، برقرار است و با این فرض که به ازای $k-1$ نیز برقرار باشد، داریم

$$AB^k - B^kA = (AB-BA)B^{k-1} + B(AB^{k-1} - B^{k-1}A)$$
$$= CB^{k-1} - B(k-1)B^{k-2}C = kB^{k-1}C$$

که ادعا را به اثبات می‌رساند.

به عنوان نتیجه، به ازای هر چند جمله‌ای q داریم:

$$Aq(B) - q(B)A = q'(B)C$$

که در آن q' مشتق q است؛ به خصوص

$$o_n = A_p(B) - p(B)A = p'(B)C$$

و در نتیجه:

$$Ap'(B)C - p'(B)AC = p''(B)C^2 = o_n$$

بنابراین، به‌طور استقرایی به‌دست می‌آوریم:

$$p^{(k)}(B)C^k = o_n$$

به‌خصوص که:

$$n!C^n = o_n$$

و به این ترتیب، خواهیم داشت $C^n = o_n$؛ و کار تمام است.

(All Union University Student Olympiad, 1976)

اسم وبگاه: Basic Mathematics

نشانی وبگاه: http://www.basic-mathematics.com

ایـــن وبگاه عناوین گوناگونـــی از ریاضی را به صورت درک عمیق و پایه‌ای در قالب مفاهیم و عملیات ریاضی به صورت منظم و به شـکل موضوعات مرتّب‌شـــده به کاربر آموزش می‌دهد. صفحهٔ اصلی این ســـایت شـــامل عناوین زیر است که هریک از آن‌ها زیرعنوان‌هایی دارند و در آن‌ها به تفصیل به یک موضوع پرداخته شده است.

- مقدمه (Introduction)
- حساب (Arithmetic)
- هندسه (Geometry)
- احتمال و آمار (Probability and Statistics)
- دنباله‌ها و الگوها (Sequences and Patterns)
- جبر (Algebra)
- منابع (Resources)
- معلمان (Teachers)