آموزش

مسائل مثلثات

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها:
مثلثات، ریشه‌های معادلهٔ مثلثاتی، معادلهٔ درجهٔ دوم، ریشهٔ حقیقی

مسئلهٔ ۱: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $\tan^۲ x-(۲m+۱)\tan x+۲m=۰$ باشند و داشته باشیم $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{۵}{۳}$، آن‌گاه m را بیابید.

حل:

$$\tan^۲ x-(۲m+۱)\tan x+۲m=۰$$

$$a=۱ \qquad b=-(۲m+۱) \qquad c=۲m$$

چون α و β ریشه‌های این معادلهٔ مثلثاتی‌اند، پس $\tan\alpha$، $\tan\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب tanx خواهند بود. پس می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{b}{a}=۲m+۱$$

$$\tan\alpha.\tan\beta=\frac{c}{a}=۲m$$

داریم: $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}=-\frac{۵}{۳}$

$$\Rightarrow\frac{۲m+۱}{۱-۲m}=-\frac{۵}{۳}\Rightarrow ۶m+۳=-۵+۱۰m$$

$$\Rightarrow ۴m=۸\Rightarrow\boxed{m=۲}$$

مسئلهٔ ۲: معادلهٔ $\tan x+\frac{۲\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}=k$ مفروض است.

الف): به ازای چه مقادیر k، این معادله ریشه‌های حقیقی دارد؟

ب): اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند، k را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$|\tan\alpha-\tan\beta|=۱+\tan\alpha.\tan\beta$$

حل الف:

$$\tan x+\frac{۲\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}=k$$

$$\Rightarrow\tan x+\frac{\cos x(۲\tan x+۱)}{\cos x(\tan x+۱)}=k$$

دو طرف تساوی معادله را در $(\tan x+۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow\tan x(\tan x+۱)+۲\tan x+۱=k(\tan x+۱)$$

$$\Rightarrow\tan^۲ x+\tan x+۲\tan x+۱=k\tan x+k$$

$$\Rightarrow\tan^۲ x+(۳-k)\tan x+(۱-k)=۰\begin{cases}a=۱\\b=۳-k\\c=۱-k\end{cases}$$

شرط وجود جواب: $\Delta\geq۰\Rightarrow b^۲-۴ac\geq۰$

$$\Rightarrow(۳-k)^۲-۴(۱-k)\geq۰\Rightarrow ۹+k^۲-۶k-۴+۴k\geq۰$$

$$\Rightarrow k^۲-۲k+۵\geq۰ \text{ یا } (k^۲-۲k+۱)+۴\geq۰$$

$\Rightarrow\Delta=(k-۱)^۲+۴>۰$ این رابطه همواره برقرار است

یعنی معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب tanx، دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

حل ب:

$$\tan^۲ x+(۳-k)\tan x+(۱-k)=۰$$

$$|\tan\alpha-\tan\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{k^۲-۲k+۵}}{۱}=\sqrt{k^۲-۲k+۵}$$

$$\tan\alpha.\tan\beta=\frac{c}{a}=۱-k$$

$$|\tan\alpha-\tan\beta|=۱+\tan\alpha.\tan\beta$$

$$\sqrt{k^۲-۲k+۵}=۱+۱-k\Rightarrow\sqrt{k^۲-۲k+۵}=۲-k$$

$$\Rightarrow k^۲-۲k+۵=۴+k^۲-۴k$$

$$\Rightarrow ۲k+۱=۰\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲}$$

مسئلهٔ ۳: معادلهٔ $۵\sin x+۱۲\cos x=۱۳$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: داریم:

$$(\frac{۵}{۱۳})^۲+(\frac{۱۲}{۱۳})^۲=\frac{۲۵}{۱۶۹}+\frac{۱۴۴}{۱۶۹}=\frac{۱۶۹}{۱۶۹}=۱$$

بنابراین اگر $\sin\alpha=\frac{۵}{۱۳}$ فرض شود با فرض $۰<\alpha<۹۰^\circ$، می‌توان نوشت $\cos\alpha=\frac{۱۲}{۱۳}$ حال به کمک این مطلب مسئله را حل می‌کنیم.

$$۵\sin x+۱۲\cos x=۱۳$$

دو طرف تساوی معادله را بر ۱۳ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{۵}{۱۳}\sin x+\frac{۱۲}{۱۳}\cos x=۱$$

داشتیم: $۰<\alpha<۹۰^\circ$ و $\cos\alpha=\frac{۱۲}{۱۳}$ و $\sin\alpha=\frac{۵}{۱۳}$

پس: $\sin\alpha.\sin x+\cos\alpha.\cos x=۱$

$$\Rightarrow \cos(x-\alpha)=۱$$

$$\Rightarrow x-\alpha=۲k\pi\Rightarrow x=۲k\pi+\alpha\ ,\ k\in Z$$

مسئلهٔ ۴: اگر $\log_۲\cos\frac{x}{۲}=a$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\log_۲\frac{\cos۲x+۴\cos x+۳}{۲}=۲+۴a$$

حل:

$$\log_۲\frac{\cos۲x+۴\cos x+۳}{۲}=\log_۲\frac{۲\cos^۲x-۱+۴\cos x+۳}{۲}$$

$$=\log_۲\frac{۲\cos^۲x+۴\cos x+۲}{۲}=\log_۲(\cos^۲x+۲\cos x+۱)$$

$$=\log_۲(۱+\cos x)^۲=\log_۲(۲\cos^۲\frac{x}{۲})^۲=\log_۲ ۲^۲.\cos^۴\frac{x}{۲}$$

$$=\log_۲ ۲^۲+\log_۲\cos^۴\frac{x}{۲}=۲\log_۲ ۲+۴\log_۲\cos\frac{x}{۲}=۲+۴a$$

مسئلهٔ ۵: اگر $\sin(۲x+y)=۲\sin y$ و $۰<x,y<\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\tan(x+y)=۳\tan x$$

حل: $x+y=a$ فرض می‌شود $\Rightarrow y=a-x$

داریم: $\sin(۲x+y)=۲\sin y$

$$\sin(x+\underbrace{x+y}_{a})=۲\sin(y)$$

$$\sin(x+a)=۲\sin(a-x)$$

$$\sin x.\cos a+\cos x\sin a=۲(\sin a\cos x-\cos a\sin x)$$

$$\sin x.\cos a+\cos x\sin a=۲\sin a\cos x-۲\cos a\sin x$$

$$\Rightarrow ۳\sin x.\cos a=\sin a.\cos x$$

دو طرف این تساوی را بر $\cos a\cos x\neq ۰$ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{۳\sin x\cos a}{\cos a.\cos x}=\frac{\sin a\cos x}{\cos a.\cos x}\Rightarrow ۳\tan x=\tan a$$

$$\Rightarrow ۳\tan x=\tan(x+y)\quad ▲$$

مسئله ۶: اگر $\sin^۲x-\sin۳x.\sin x=-\frac{۱}{۴}$، آن‌گاه ثابت کنید $\cos۲x=\frac{۱}{۲}$

حل:

$$\sin^۲x-\sin۳x.\sin x=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \underbrace{۲\sin^۲x}-\underbrace{۲\sin۳x.\sin x}=-\frac{۱}{۲}$$

$$۱-\cos۲x-\left[\cos(۳x-x)-\cos(۳x+x)\right]=\frac{۱}{۲}$$

$$۱-\cos۲x-(\cos۲x-\cos۴x)=-\frac{۱}{۲}$$

$$۱-\cos۲x-\cos۲x+\underbrace{\cos۴x}=-\frac{۱}{۲}$$

$$۲\cos^۲۲x-۲\cos۲x+\frac{۱}{۲}=۰$$

$$\cos^۲۲x-\cos۲x+\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow(\cos۲x-\frac{۱}{۲})^۲=۰$$

$$\Rightarrow\cos۲x-\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow\cos۲x=\frac{۱}{۲}\quad ▲$$

مسئلهٔ ۷: اگر $\frac{\sin^۴x}{a}+\frac{\cos^۴x}{b}=\frac{۱}{a+b}$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\frac{\sin^۸x}{a^۳}+\frac{\cos^۸x}{b^۳}=\frac{۱}{(a+b)^۳}$$

حل:

فرض می‌شود $\sin^۲x=y$، $\frac{\sin^۴x}{a}+\frac{\cos^۴x}{b}=\frac{۱}{a+b}$

$$\frac{y^۲}{a}+\frac{(۱-\sin^۲x)^۲}{b}=\frac{۱}{a+b}\Rightarrow\frac{y^۲}{a}+\frac{(۱-y^۲)^۲}{b}=\frac{۱}{a+b}$$

دو طرف تساوی را در a.b ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow\frac{y^۲}{a}+\frac{y^۲-۲y+۱}{b}=\frac{۱}{a+b}$$

$$by^۲+ay^۲-۲ay+a=\frac{a.b}{a+b}$$

$$\Rightarrow(a+b)y^۲-۲ay+a=\frac{ab}{a+b}$$

دو طرف تساوی را در (a+b) ضرب می‌کنیم

$$(a+b)^۲y^۲-۲a(a+b)y+a^۲+ab=ab$$

$$(a+b)^2y^2-2a(a+b)y+a^2=0$$

$$\Rightarrow [(a+b)y-a]^2=0 \Rightarrow (a+b)y-a=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{a}{a+b} \Rightarrow \sin^2 x=\frac{a}{a+b}$$

$$\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-\frac{a}{a+b} \Rightarrow \cos^2 x=\frac{b}{a+b}$$

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{(\sin^2 x)^4}{a^3}+\frac{(\cos^2 x)^4}{b^3}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{a+b}\right)^4}{a^3}+\frac{\left(\frac{b}{a+b}\right)^4}{b^3}=\frac{\frac{a^4}{(a+b)^4}}{a^3}+\frac{\frac{b^4}{(a+b)^4}}{b^3}$$

$$=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{a+b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3} \quad \blacktriangle$$

مسئلهٔ ۸: اگر $\sin 2x \neq 0$ و $\frac{\sin x.\cos x}{\sin x+\cos x-1} \equiv a\sin x + b\cos x + c$، آن‌گاه ثابت کنید: $a=b=c=\frac{1}{2}$

حل:

$$\frac{\sin x.\cos x}{\sin x+\cos x-1}=\frac{\sin x.\cos x}{(\sin x+\cos x)-1}\times\frac{(\sin x+\cos x)+1}{(\sin x+\cos x)+1}$$

$$=\frac{\sin x.\cos x(\sin x+\cos x+1)}{(\sin x+\cos x)^2-1}$$

$$=\frac{\sin x.\cos x(\sin x+\cos x+1)}{\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+2\sin x\cos x-1}$$

$$=\frac{\sin x.\cos x(\sin x+\cos x+1)}{2\sin x.\cos x}$$

$$=\frac{\sin x+\cos x+1}{2}=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\equiv a\sin x+b\cos x+c$$

$$\Rightarrow a=b=c=\frac{1}{2} \quad \blacktriangle$$

مسئلهٔ ۹: اگر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+bx-1=0$ باشند، ثابت کنید: $\tan^3\alpha+\cot^3\alpha=2$

حل:

$$x^2+bx-1=0 \qquad x'=\sin\alpha \;,\; x''=\cos\alpha$$

$$\tan^3\alpha+\cot^3\alpha=\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\frac{\sin^6 x+\cos^6\alpha}{\sin^3\alpha.\cos^3\alpha}$$

$$=\frac{(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})\left[\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha.\cos^2\alpha\right]}{\sin^3\alpha.\cos^3\alpha}$$

$$=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha.\cos^3\alpha}$$

$$=\frac{(\overbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}^{1})^2-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha.\cos^3\alpha}$$

$$=\frac{1-3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha.\cos^3\alpha}=\frac{1-3(\sin\alpha.\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha.\cos\alpha)^3}=\frac{1-3\left(\frac{c}{a}\right)^2}{\left(\frac{c}{a}\right)^3}$$

$$=\frac{1-3(-1)^2}{(-1)^3}=\frac{1-3}{-1}=\frac{-2}{-1}=2 \quad \blacktriangle$$

مسئلهٔ ۱۰: ثابت کنید $\frac{1-4\sin 10^\circ}{\tan 20^\circ}=\tan 40^\circ$

حل:

$$\frac{1-4\sin 10^\circ}{\tan 20^\circ}=\frac{1-4\sin 10^\circ}{\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}=\frac{\cos 20^\circ(1-4\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\cos 20^\circ-4\cos 20^\circ\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ-2(2\cos 20^\circ\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\cos 20^\circ-2(\sin 30^\circ-\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ-2(\frac{1}{2}-\sin 10^\circ)}{2\sin 10^\circ.\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{1-2\sin^2 10^\circ-1+2\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{2\sin 10^\circ(1-\sin 10^\circ)}{2\sin 10^\circ.\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{1-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{1}{\cos 10^\circ}-\tan 10^\circ$$ رابطهٔ (I)

از طرفی می‌توان نوشت:

$$\tan 40^\circ+\tan 10^\circ=\frac{\sin(40^\circ+10^\circ)}{\cos 40^\circ.\cos 10^\circ}=\frac{\sin 50^\circ}{\cos 40^\circ\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{1}{\cos 10^\circ}$$

در رابطهٔ (I) به جای $\frac{1}{\cos 10^\circ}$ مساوی‌اش $(\tan 40^\circ+\tan 10^\circ)$ را قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{\cos 10^\circ}-\tan 10^\circ=\tan 40^\circ+\tan 10^\circ-\tan 10^\circ=\tan 40^\circ \quad \blacktriangle$$