آموزش

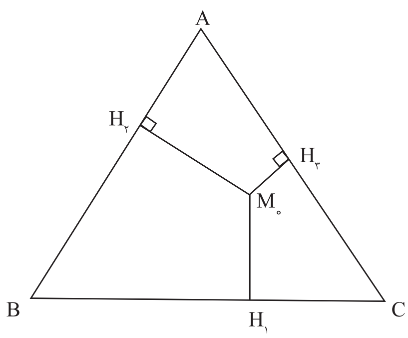
رویکرد هندسی و جبری در آموزش هندسه

مسئله‌هایی از کتاب درسی هندسه

محمدهاشم رستمی

کلیدواژه‌ها: رویکرد هندسی، رویکرد جبری، مختصاتی، افراز، مثلث متساوی‌الاضلاع، دستگاه محورهای مختصات قائم.

مسئله: با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را به‌دست آورید.

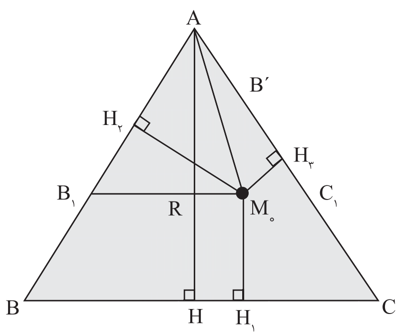


مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a(AB=AC=BC=a) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم M_0 نقطه‌ای واقع در درون این مثلث و M_0H_1، M_0H_2، M_0H_3 به ترتیب فاصله‌های نقطهٔ M_0 از ضلع‌های BC، AB و AC باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که $M_0H_1+M_0H_2+M_0H_3$ مقداری ثابت است و اندازهٔ این مقدار ثابت را به‌دست آوریم.

مسئله را با دو رویکرد هندسی و جبری ـ مختصاتی حل می‌کنیم.

الف) حل به روش هندسی

راه اول: از نقطهٔ M_0 به رأس‌های A، B و C وصل و ارتفاع AH از مثلث ABC را نیز رسم می‌کنیم. چون مثلث ABC به سه مثلث M_0BC، M_0AB و M_0AC افراز شده است، پس می‌توانیم بنویسیم:



$$S_{\Delta M_0BC}+S_{\Delta M_0AB}+S_{\Delta M_0AC}=S_{\Delta ABC} \qquad (۱)$$

اما داریم:

$$BC=AB=AC=a$$

$$S_{\Delta M_0BC}=\frac{1}{2}BC.M_0H_1$$

$$S_{\Delta M_0AB}=\frac{1}{2}AB.M_0H_2$$

$$S_{\Delta M_0AC}=\frac{1}{2}AC.M_0H_3$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC.AH$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{\Delta M_0BC}=\frac{1}{2}a.M_0H_1 \qquad (۲)$$

$$S_{\Delta M_0AB}=\frac{1}{2}a.M_0H_2 \qquad (۳)$$

$$S_{\Delta M_{۰}AC} = \frac{۱}{۲} a.M_{۰}H_{۳} \qquad (۴)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} a.AH = \frac{۱}{۲} a.h_a \qquad (۵)$$

با قراردادن مقدارهای به‌دست آمده از رابطه‌های (۲)، (۳)، (۴) و (۵) در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲} a.M_{۰}H_{۱} + \frac{۱}{۲} a.M_{۰}H_{۲} + \frac{۱}{۲} a.M_{۰}H_{۳} = \frac{۱}{۲} a.AH$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} a(M_{۰}H_{۱} + M_{۰}H_{۲} + M_{۰}H_{۳}) = \frac{۱}{۲} a.AH$$

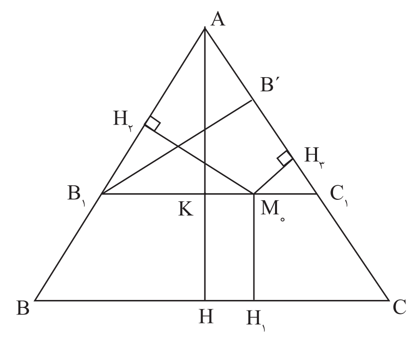
$$\Rightarrow M_{۰}H_{۱} + M_{۰}H_{۲} + M_{۰}H_{۳} = AH = h_a$$

چون $AH=h_a$ مقدار ثابتی است، پس حکم مسئله درست است.

یعنی:

«مجمــوع فاصله‌های هر نقطه واقــع در درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، مقداری ثابت است و این مقدار ثابت، اندازهٔ ارتفاع آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.

راه دوم: ارتفــاع AH از مثلث متســاوی‌الاضلاع ABC را رســم می‌کنیــم و از نقطهٔ $M_{۰}$ خطی موازی ضلع BC رســم می‌کنیــم تا ضلع‌های AB و AC را به ترتیــب در $B_{۱}$ و $C_{۱}$ و ارتفاع AH را در نقطهٔ K قطع کند.

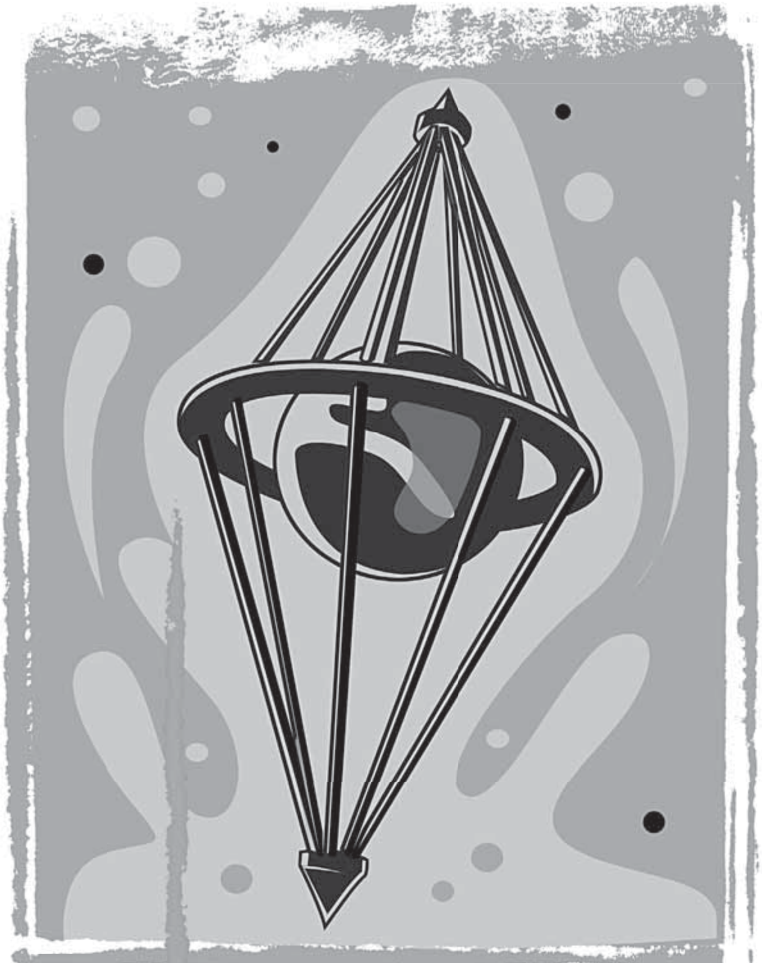


مثلث $AB_{۱}C_{۱}$ مثلثی متساوی‌الاضلاع است که AK ارتفاع وارد بــر قاعدهٔ BC از آن اســت و بنابراین، ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین را نیز دارد که: «مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن مقداری ثابت و مســاوی طول ارتفاع وارد بر یکی از دو ساق است» که در این‌جا به دلیل متســاوی‌الاضلاع بودن مثلث $AB_{۱}C_{۱}$، این مجموع، مساوی ارتفاع AK است. یعنی داریم:

$$M_{۰}H_{۲} + M_{۰}H_{۳} = B_{۱}B' = AK \qquad (۱)$$

از طرفــی چهارضلعــی $HKM_{۰}H_{۱}$ به دلیــل قائمه‌بودن زاویه‌هایش مستطیل است، بنابراین:

$$M_{۰}H_{۱} = KH \qquad (۲)$$



از جمع کردن طرف‌های نظیر دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

مقدار ثابت $= M_{۰}H_{۱} + M_{۰}H_{۲} + M_{۰}H_{۳} = AK + KH = AH = h_a$

پس حکم مسئله درست است.

نکتــهٔ ۱: ثابــت بــودن $M_{۰}H_{۱}+M_{۰}H_{۲}+M_{۰}H_{۳}$ را می‌توان بــا میــل دادن نقطهٔ $M_{۰}$ به ســوی یکــی از رأس‌های مثلث متســاوی‌الاضلاع ABC حدس زد، بدین ترتیب که اگر نقطهٔ $M_{۰}$ را بســیار نزدیــک به رأس A در نظــر بگیریم، $M_{۰}H_{۱}$ به سمت $AH=h_a$ و $M_{۰}H_{۲}$ و $M_{۰}H_{۳}$ به سمت صفر میل خواهند کرد، پس:

$$M_{۰}H_{۱} + M_{۰}H_{۲} + M_{۰}H_{۳} \to h_a + ۰ + ۰ = h_a$$

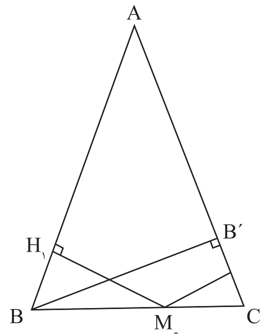
این حدس زدن به حل مسئله کمک می‌کند.

نکتــهٔ ۲: باید توجه کنیم، هر حکمی (هر ویژگی) که در مثلث متساوی‌الساقین برقرار است، در مثلث متساوی‌الاضلاع نیز برقرار است، اما عکس این مطلب درست نیست.

برای مثال:

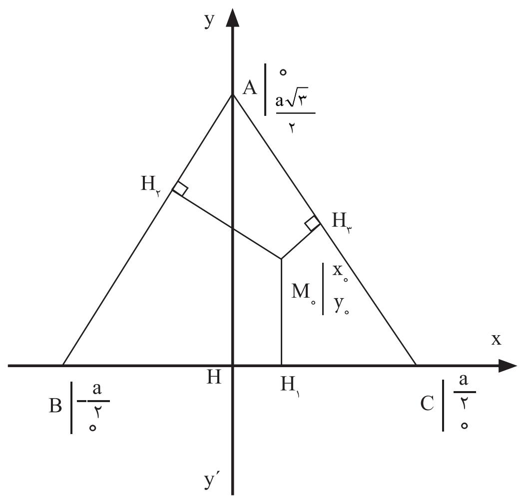
مجمــوع فاصله‌های هر نقطــه واقع بر قاعــدهٔ هر مثلث

متساوی‌السـاقین از دو ساق آن مقدار ثابتی است و این مقدار ثابت مساوی اندازهٔ ارتفاع نظیر یکی از دو ساق مثلث است.



بدیهی اسـت که این ویژگی در مثلث متسـاوی‌الاضلاع نیز برقرار اسـت و ما در راه دوم حل مسـئلهٔ موردنظرمان از آن استفاده کردیم. اما این ویژگی که «مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است»، در مثلث متساوی‌الساقین برقرار نیست. به عبارت دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون هر مثلث متساوی‌الساقین از سه ضلع آن، مقدار ثابتی نیست، بلکه به جای این نقطه در درون مثلث بستگی دارد.

ب) حل به روش جبری ـ مختصاتی



دسـتگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محـور xها روی خط BC و محور yهـا روی خط AH ارتفاع وارد از رأس A بـر قاعدهٔ BC قـرار گیرد و نقطهٔ H همان O مبدأ مختصات باشـد. در این دسـتگاه مختصات با توجه به این‌که $BC = AB = AC = a$ اختیار شـده و $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ است (طول هر ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مساوی $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ اسـت)، مختصات رأس‌های مثلث متسـاوی‌الاضلاع ABC در این دستگاه مختصات به‌صورت زیر خواهد بود:

$$A = \left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right),\ B = \left(-\frac{a}{2}, 0\right),\ C = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

اکنون فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه $M_0 = (x_0, y_0)$ واقع در درون مثلث ABC از سـه ضلع AB، BC و AC را به کمک دستور فاصلـهٔ نقطه از خط، یعنـی $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ که فاصلهٔ نقطهٔ $M_0 = (x_0, y_0)$ از خط $L : ax + by + c = 0$ را نشـان می‌دهد، به‌دسـت می‌آوریم. برای این کار نخسـت لازم است معادلهٔ خط‌های AB، BC و AC را با توجه به داشتن مختصات رأس‌های A، B و C بنویسیم و سپس فاصلهٔ $M_0 = (x_0, y_0)$ از این خط‌ها، یعنی طول پاره‌خط‌های M_0H_1، M_0H_2 و M_0H_3 را به‌دست آوریم. در نتیجه داریم:

$$B = \left(-\frac{a}{2}, 0\right), C = \left(\frac{a}{2}, 0\right) \Rightarrow BC : y = 0$$

$$A = \left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), B = \left(-\frac{a}{2}, 0\right) \Rightarrow AB : \frac{x}{-\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow AB : -x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{a}{2} = 0$$

$$A = \left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$\Rightarrow AC : \frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow AC : x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{a}{2} = 0$$

اکنون خواهیم داشت:

$$M_0H_1 = \frac{|y_0|}{1} = |y_0|$$

$$M_0H_2 = \frac{\left|-x_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_0 - \frac{a}{2}\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}y_0 + \frac{a}{2}\right)$$

$$M_0H_3 = \frac{\left|x_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_0 - \frac{a}{2}\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-x_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}y_0 + \frac{a}{2}\right)$$

و از آن‌جا با توجه به این‌که در این دستگاه، مختصات قائم اختیار شده و $y_0 \geq 0$ است، خواهیم داشت:

$$M_0H_1 + M_0H_2 + M_0H_3 = y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 - \frac{1}{2}y_0 + \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

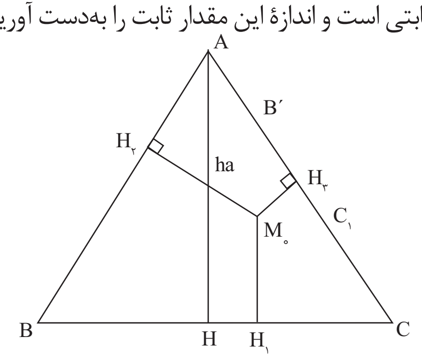
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0-\frac{1}{2}y_0+\frac{\sqrt{3}}{4}a=y_0-y_0+\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{a\sqrt{3}}{2}=h$$

پس حکم مسئله برقرار است.

نکتهٔ ۱: دستگاه محورهای مختصات قائم xoy را می‌توان به دو صورت مشابه نیز در نظر گرفت، چنان‌که محور xها روی یکی از دو ضلع دیگر مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و محور yها روی ارتفاع نظیر آن ضلع باشد. محاسبه‌ها مشابه محاسبهٔ انجام شده در بالاست.

نکتهٔ ۲: دستگاه محورهای مختصات قائم xoy را می‌توان در صفحهٔ مثلث ABC به صورت‌های دیگر نیز در نظر گرفت، چنان‌که محور xها یا yها روی هیچ‌یک از ضلع‌های مثلث قرار نگیرد و هیچ ارتفاعی از مثلث نیز محور دستگاه مختصات قائم انتخاب شده نباشد. اما محاسبه‌ها در این نوع انتخاب مشکل‌تر خواهد شد.

مثال ۱: مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر داده شده است. با رویکرد جبری ـ مختصاتی ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون این مثلث از سه ضلع آن مقدار ثابتی است و اندازهٔ این مقدار ثابت را به‌دست آورید.

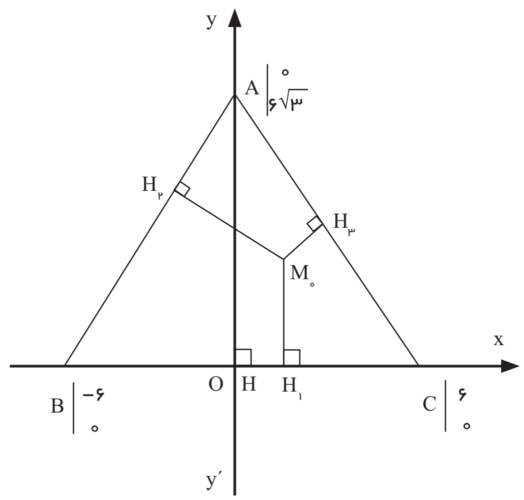


حل: در حالت کلی ثابت کردیم که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC از سه ضلع آن مقدار ثابتی است و اندازه‌های این مقدار ثابت مساوی طول ارتفاع این مثلث متساوی‌الاضلاع است. پس اگر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر a باشد، اندازهٔ مقدار ثابت موردنظر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است. با توجه به این مطلب، مقدار ثابت موردنظر در این مسئله برابر است با:

$$h_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

اما اگر بخواهیم مسئله را بدون استفاده از حل در حالت کلی حل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱۲ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم. محور xها را روی خط BC و محور yها را روی ارتفاع AH و نقطهٔ H پای برخورد خط AH با خط BC را مبدأ مختصات می‌گیریم. در این دستگاه مختصات، مختصات رأس‌های B، A و C به صورت زیر است:

$$A=(0,6\sqrt{3})\,,\ B=(-6,0)\,,\ C=(6,0)$$



معادلهٔ ضلع‌های AB، BC و AC نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$BC: y=0$$

$$AB:\frac{x}{-6}+\frac{y}{6\sqrt{3}}=1\Rightarrow -x+\frac{\sqrt{3}}{3}y-6=0$$

$$AC:\frac{x}{6}+\frac{y}{6\sqrt{3}}=1\Rightarrow x+\frac{\sqrt{3}}{3}y-6=0$$

اکنون اگر $M_0=(x_0,y_0)$ نقطه‌ای دلخواه واقع در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، M_0H_1، M_0H_2 و M_0H_3 که به‌ترتیب فاصله‌های نقطهٔ M_0 از ضلع‌های AB، BC و AC هستند، برابرند با:

$$M_0H_1=|y_0|$$

$$M_0H_2=\frac{\left|-x_0+\frac{\sqrt{3}}{3}y_0-6\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|-x_0+\frac{\sqrt{3}}{3}y_0-6\right|$$

$$M_0H_3=\frac{\left|x_0+\frac{\sqrt{3}}{3}y_0-6\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|x_0+\frac{\sqrt{3}}{3}y_0-6\right|$$

با توجه به نامنفی بودن y_0 و این‌که $x_0\in[-6,6]$ خواهیم داشت:

$$M_0H_1+M_0H_2+M_0H_3$$

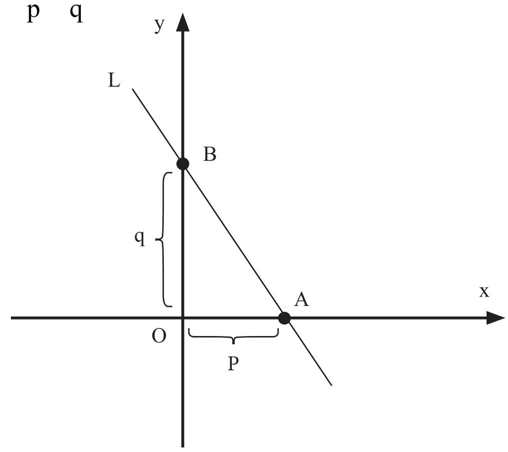
$$=y_0+\frac{\sqrt{3}}{2}(x_0-\frac{\sqrt{3}}{3}y_0+6-x_0-\frac{\sqrt{3}}{3}y_0+6)$$

$$= y_۰ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(\frac{-۲\sqrt{۳}}{۳}y_۰ + ۱۲\right) = y_۰ - y_۰ + ۶\sqrt{۳} = ۶\sqrt{۳} = h_a$$

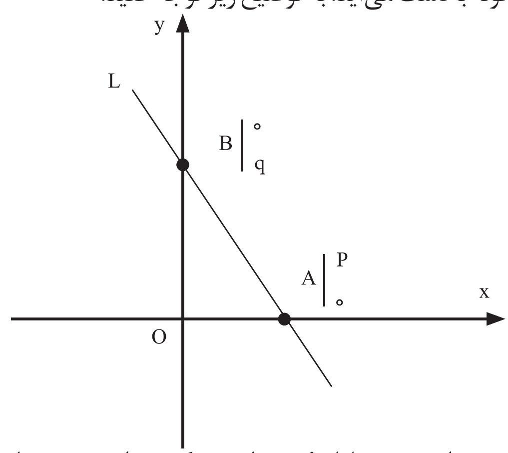
به‌طوری که دیده می‌شـود محاسبه از حالت کلی خیلی سـاده‌تر نیست. پس اگر در مسـئله اثبات مستقیم مطلب را نخواهیم، هم‌چنان که دیدید می‌توانیم از حل مسئله در حالت کلی استفاده کنیم.

نکتـهٔ مهم: اگر خط راسـتی مانند L محور xهـا را در نقطهٔ $A=(p,۰)$ و محور yها را در نقطهٔ $B=(۰,q)$ قطع کند، p را طـول از مبدأ خط L و q را عرض از مبدأ خط L می‌نامند. در این حالت معادلهٔ خط L به صورت زیر است:

$$L: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = ۱$$



که ما از این دسـتور برای نوشتن معادلهٔ ضلع‌های AB و AC در روش جبری ـ مختصاتی استفاده کردیم. اما این دستور چگونه به‌دست می‌آید. به توضیح زیر توجه کنید.



می‌دانیـم معادلـهٔ خطـی کـه از دو نقطـهٔ $A=(x_۱,y_۱)$ و $B=(x_۲,y_۲)$ می‌گـذرد و بـه صـورت $y-y_۱=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱)$ است. پس معادلهٔ خطی که از دو نقطه $A=(p,۰)$ و $B=(۰,q)$ می‌گذرد، چنین خواهد بود:

$$A\left|\begin{matrix} x_۱=p \\ y_۱=۰ \end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix} x_۲=۰ \\ y_۲=q \end{matrix}\right. \Rightarrow y-۰=\frac{q-۰}{۰-p}(x-p)$$

$$\Rightarrow y=\frac{-q}{p}(x-p) \Rightarrow py=-qx+pq$$

$$\Rightarrow px+py=pq \Rightarrow \frac{qx}{pq}+\frac{py}{pq}=\frac{pq}{pq}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$$

بنابرایـن معادلهٔ خطی که طول از مبدأ آن مسـاوی p و عرض از مبدأ آن مساوی q است، به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱}$$

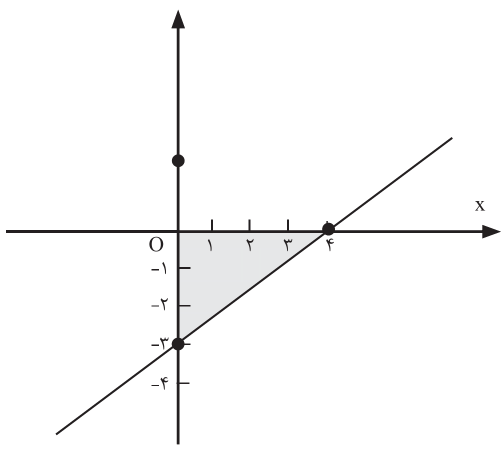
مثال ۱: معادلهٔ خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن $\frac{۱}{۲}$ و عرض از مبدأ آن $-\frac{۱}{۳}$ باشد.

حل: داریم:

$$p=+\frac{۱}{۲}, q=-\frac{۱}{۳}, \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱ \Rightarrow \frac{x}{\frac{۱}{۲}}+\frac{y}{-\frac{۱}{۳}}=۱$$

$\Rightarrow ۲x-۳y=۱$ معادلهٔ خط خواسته شده

مثال ۲: مساحت مثلث حاصل از برخورد محورهای مختصات و خط L به معادلهٔ $۳x-۴y-۱۲=۰$ را تعیین کنید.



حل: مختصات نقطه‌های برخورد خط L با محورهای مختصات را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$y=۰ \xrightarrow{\text{در معادلهٔ } L} ۳x-۱۲=۰ \Rightarrow ۳x=۱۲ \Rightarrow x=۴$$

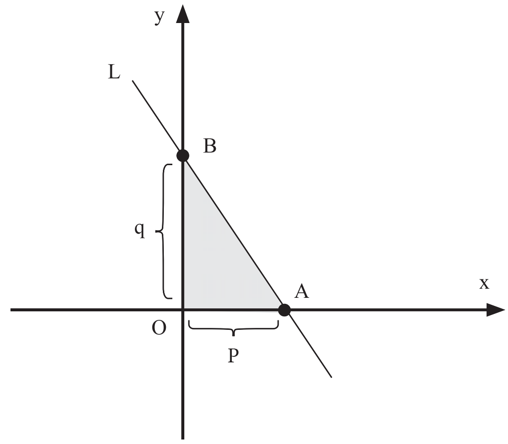
$\Rightarrow A=(۴,۰)$ نقطهٔ برخورد با محور طول‌ها (xها)

$$x=۰ \xrightarrow{\text{در معادلهٔ } L} ۰-۴y-۱۲=۰-۴y=۱۲ \Rightarrow y=\frac{۱۲}{-۴}=-۳$$

نقطهٔ برخورد با محور عرض‌ها (yها) $\Rightarrow B=(۰,-۳)$

مثلث موردنظر، مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB ($\hat{O}=۹۰^\circ$) است. اما مساحت این مثلث برابر است.

$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}|OA||OB|=\frac{۱}{۲}|۴||-۳|=\frac{۱}{۲}\times۴\times۳=۶$$ واحد سطح



نکته: مســاحت مثلث ایجاد شــده بین محورهای مختصات و خــط L در صورتی‌کــه طول از مبــدأ این خط، یعنی نقطهٔ برخوردش با محور طول‌ها p و عرض از مبدأ آن، یعنی عرض نقطهٔ برخوردش با محور عرض‌ها q باشد، مساوی $S=\frac{۱}{۲}|pq|$ است (شکل)؛ زیرا داریم:

$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}|OA||OB|=\frac{۱}{۲}|p||q|=\frac{۱}{۲}|pq|$$

مثال ۳: خط $L:x+(m-۱)y=۶$ داده شده است. مقدار m را چنان تعیین کنید که مساحت مثلث حاصل از برخورد این خط و محورهای مختصات مساوی ۹ واحد سطح باشد.

حل: می‌دانیم مســاحت مثلث ایجاد شده بین محورهای مختصات و خط L که طول از مبدأ آن p و عرض از مبدأ آن q است مساوی $S=\frac{۱}{۲}|pq|$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$L:x+(m-۱)y=۶,\ x=۰\Rightarrow y=\frac{۶}{m-۱}=q$$

$$y=۰\Rightarrow x=۶=p,\ S=\frac{۱}{۲}|pq|$$

$$\Rightarrow ۹=\frac{۱}{۲}\left|۶\times\frac{۶}{m-۱}\right|=\frac{۱}{۲}\left|\frac{۳۶}{m-۱}\right|=\frac{۱۸}{|m-۱|}$$

$$\Rightarrow ۹|m-۱|=۱۸\Rightarrow |m-۱|=۲\Rightarrow m-۱=+۲\Rightarrow \boxed{m=۳}$$

$$m-۱=-۲\Rightarrow \boxed{m=-۱}$$

مثال ۴: یک دسته خط به معادلهٔ زیر داده شده است:

$$mx+(۲m-۱)y=m+۳$$

الف) ثابت کنید که این دسته خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد و مختصات نقطهٔ ثابتی را که این دســته خط از آن می‌گذرد، تعیین کنید.

ب) مســاحت مثلث حاصل از برخورد این دســته خط و محورهای مختصات را برحسب پارامتر m به‌دست آورید.

پ) آیا می‌توانید مقدار m را چنان بیابید که مساحت مثلث حاصل از این دسته خط و محورهای مختصات کمترین مقدار ممکن یا بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل: الف) معادلهٔ خط L را نسبت به پارامتر مرتب می‌کنیم.

آن‌گاه یک بار ضریب پارامتر و بار دیگر بقیهٔ معادله را (که مســتقل از پارامتر است) مساوی صفر قرار می‌دهیم و با حل دســتگاه دو معادلهٔ دو مجهولی حاصل مختصات نقطهٔ ثابتی را کــه خط L از آن نقطــه می‌گذرد (در صورت وجود) تعیین می‌کنیم. داریم:

$$mx+(۲m-۱)y=m+۳$$
$$\Rightarrow mx+۲my-y-m-۳=۰$$
$$\Rightarrow m(x+۲y-۱)-y-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x+۲y-۱=۰\\-y-۳=۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow y=-۳\Rightarrow x-۶-۱=۰\Rightarrow x=۷\Rightarrow N=(۷,-۳)$$

نقطهٔ ثابت خواسته شده.

نکته: مختصات نقطهٔ ثابتی را که دســته خط از آن می‌گذرد به روش دیگری نیز می‌توان به‌دســت آورد، به این ترتیب که به جای پارامتر m دو مقدار دلخواه قرار می‌دهیم تا معادلهٔ دو خط از دسته خط داده شده به‌دست آید. آن‌گاه مختصات نقطهٔ برخورد این دو خط را به‌دســت می‌آوریم. این نقطه در صورت وجود همان نقطهٔ ثابت دسته خط است. بنابراین داریم:

$$m=۰\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دسته خط}}-y=۳\Rightarrow y=-۳$$

$$m=۱\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دسته خط}}x+y=۴\Rightarrow x-۳=۴\Rightarrow x=۷$$

$$\Rightarrow N=(۷,-۳)$$

ب) برای محاسبهٔ مســاحت مثلث حاصل از برخورد این دسته خط و محورهای مختصات برحسب پارامتر m، p طول از مبدأ و q عرض از مبدأ این خط را به‌دست می‌آوریم و از دستور $S=\frac{۱}{۲}|pq|$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$x=۰\Rightarrow(۲m-۱)y=m+۳\Rightarrow y=\frac{m+۳}{۲m-۱}=q$$

عرض از مبدأ

طول از مبدأ $y = 0 \Rightarrow mx = m + 3 \Rightarrow x = \frac{m+3}{m} = p$

مساحت مثلث موردنظر $S = \frac{1}{2}|pq| = \frac{1}{2}\left|\frac{m+3}{m} \times \frac{m+3}{2m-1}\right|$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\frac{(m+3)^2}{m(2m-1)}\right| = \frac{(m+3)^2}{|4m^2 - 2m|}$$

$$4m^2 - 2m = 0 \Rightarrow 2m(2m-1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = \frac{1}{2}$$

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4m^2 - 2m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow m < 0,\ m > \frac{1}{2} \Rightarrow |4m^2 - 2m| = 4m^2 - 2m$$

$$0 < m < \frac{1}{2} \Rightarrow |4m^2 - 2m| = -4m^2 + 2m$$

و از آن‌جا خواهیم داشت:

$$m < 0, m > \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{(m+3)^2}{4m^2 - 2m} \qquad (1)$$

$$0 < m < \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{(m+3)^2}{-4m^2 + 2m} = -\frac{(m+3)^2}{4m^2 - 2m} \qquad (2)$$

پ) حالت (۱) را در نظر می‌گیریم و مقداری از m را که به ازای آن S ماکزیمم یا می‌نیمم می‌شود به‌دست می‌آوریم. خواهیم داشت:

$S = \frac{(m+3)^2}{4m^2 - 2m}$ S (m)(m

$$\Rightarrow S' = \frac{2(m+3)(4m^2 - 2m) - (8m-2)(m+3)^2}{(4m^2 - 2m)^2}$$

$$\Rightarrow S' = \frac{2(m+3)(4m^2 - 2m - 4m^2 - 11m + 3)}{(4m^2 - 2m)^2}$$

$$\Rightarrow S' = \frac{2(m+3)(-13m+3)}{(4m^2 - 2m)^2}, S' = 0$$

$$\Rightarrow 2(m+3)(-13m+3) = 0 \Rightarrow m + 3 = 0, m = -3,$$

$$-13m + 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{13}$$

جدول تغییرات S نسبت به m در این حالت، به صورت زیر است:

(I)

m	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{13}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
s'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
s	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-42 max	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$

(که البته بازهٔ $(0, \frac{1}{2})$ را باید از آن کنار بگذاریم، ولی برای درک بهتر، در جدول آمده است.)

در حالت (۲) نیز با توجه به این‌که ضابطهٔ S نسبت به m قرینه شده است، بدون مشتق‌گیری، جدول تغییرات S نسبت به m را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

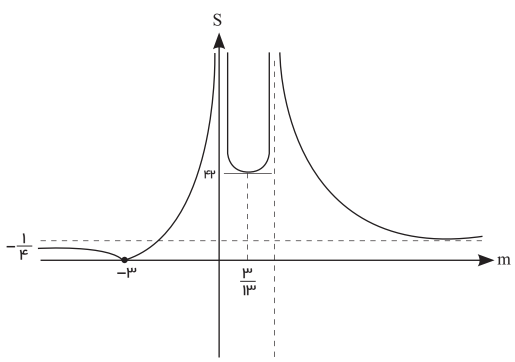
(II)

m	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{13}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
s'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖		
s	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	42 min	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$

(که البته فقط بازهٔ $(0, \frac{1}{2})$ آن مورد قبول است، ولی برای درک بهتر، همهٔ جدول را رسم کرده‌ایم.)

از ترکیب دو جدول I و II، جدول تغییرات S را به ازای $m \in R$ به صورت زیر رسم شده و نمودار S نسبت به m را نیز رسم می‌کنیم و از آن‌جا به سادگی می‌توانیم ماکزیمم و می‌نیمم‌های S را تشخیص دهیم:

m	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{13}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
s'		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
s	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	42 min	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$



و با توجه به این نمودار روشن است که در حالت کلی می‌نیمم S مساوی صفر است (که به ازای $m = -3$ حاصل می‌شود ـ در این حالت معادله خط به صورت $-3x - 7y = 0$ درمی‌آید و خط از مبداء مختصات می‌گذرد و در نتیجه S مساوی صفر می‌شود.) ولی به ازای $0 < m < \frac{1}{2}$، S یک می‌نیمم نسبی به ازای $m = \frac{3}{13}$ دارد که مساوی ۴۲ است. S دارای ماکزیمم نمی‌باشد (یعنی به‌طور بی‌کران قابل افزایش است و با نزدیک شدن m به $\frac{1}{2}$ و یا صفر، به $+\infty$ میل می‌کند) و به ازای $m = 0$ یا $m = \frac{1}{2}$، خط با محورها موازی شده و مثلثی تشکیل نمی‌شود. همچنین اگر m بی‌نهایت بزرگ و مثبت یا بی‌نهایت کوچک و منفی اختیار شود، S به $\frac{1}{4}$ نزدیک می‌شود.