همنهشتی ۱

حمیدرضا امیری

کلیدواژه‌ها: پیمانه، رابطهٔ هم‌ارزی، کلاس هم‌ارزی، انعکاسی، تقارنی، تعدّی، معادلهٔ سیّاله، معادلهٔ همنهشتی.

تعریــف: اگــر a و b دو عدد صحیح و m عددی طبیعی باشــد، در این صورت می‌گوییم a و b به پیمانهٔ m با یکدیگر همنهشت‌اند و می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$ هرگاه، (a-b) بر m بخش‌پذیر باشد یا $m|(a-b)$، یعنی:

$$a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow m|a-b \text{ یا } a-b=mk \quad (k\in Z)$$

مثال: دو عدد ۶۵ و ۳۷ به پیمانهٔ ۷ با یکدیگر همنهشت‌اند، زیرا $7|(65-37)=28$.

مثال: اگر $12\overset{p}{\equiv}72$ و p عددی اول باشد، در این صورت داریم:

$$12\overset{p}{\equiv}72 \to p|12-72 \to p|-60 \to p=2 \text{ یا } p=3 \text{ یا } p=5$$

قضیه: رابطهٔ $\overset{m}{\equiv}$ روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

این قضیه گویای این مطلب است که رابطهٔ همنهشتی به پیمانهٔ m سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی (ترایایی) دارد:

اثبات:

$$\text{I})\forall a\in Z, m|a-a \to a\overset{m}{\equiv}a$$

$$\text{II})\forall a,b\in Z, a\overset{m}{\equiv}b \to m|a-b \to m|b-a \to b\overset{m}{\equiv}a$$

$$\text{III})\forall a,b,c\in Z, a\overset{m}{\equiv}b, b\overset{m}{\equiv}c \to m|b-a, m|b-c \to m|(a-b)+(b-c) \to m|a-c \to a\overset{m}{\equiv}c$$

تذکر مهم: چون رابطهٔ $\overset{m}{\equiv}$ روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی است، لذا این رابطه Z را به m کلاس هم‌ارزی به‌صورت زیر افراز می‌کند.

$$[0]_m=\{x\in Z|x\overset{m}{\equiv}0\}=\{x\in Z|x=mk\}$$

$$[1]_m=\{x\in Z|x\overset{m}{\equiv}1\}=\{x\in Z|x=mk+1\}$$

$$\vdots$$

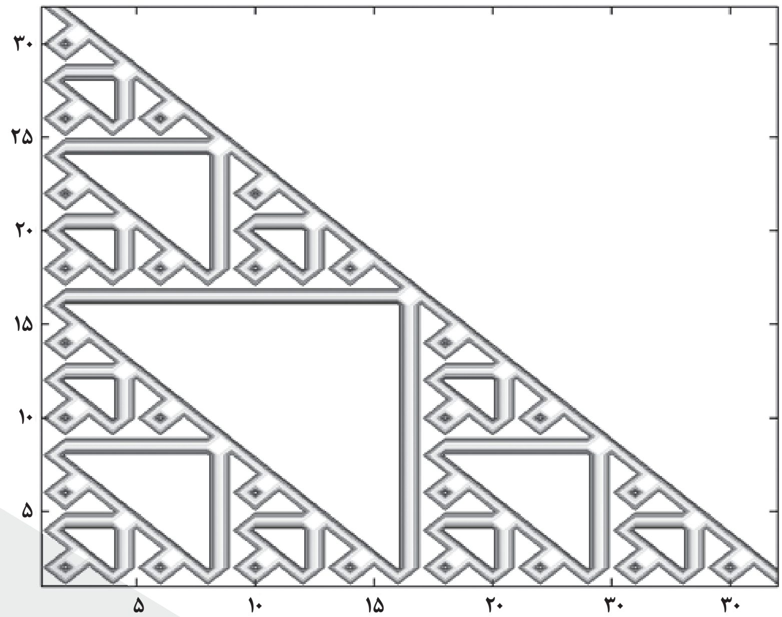
$$[m-1]_m=\{x\in Z|x\overset{m}{\equiv}m-1\}=\{x\in Z|x=mk+(m-1)\}$$

توجه داریم که از تعریف کلاس‌های هم‌ارزی و خواص آن‌ها و نیز تعریف افراز نتیجه می‌شود که:

I) هیچ دو کلاس هم‌ارزی عضو مشترک ندارند.

II) هر دو عضو یک کلاس هم‌ارزی به پیمانهٔ m با یکدیگر همنهشت‌اند و به عکس، اگر دو عدد صحیح به پیمانهٔ m با یکدیگر همنهشت باشند این دو عدد در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند و باقی‌مانده‌های تقسیم آن‌ها بر m مساوی‌اند.

III) $[a]_m=[a+mk]_m \quad (k\in Z)$



۱. عدد ۱۳۹۱ به کدام دسته یا کلاس هم‌ارزی به پیمانهٔ ۷ تعلق دارد؟

۱) ۴۴

۲) ۱۲۲

۳) ۲۹۶-

۴) ۱۰۱

حل: گزینهٔ (۳)

$$\left.\begin{array}{l} -۲۹۶ = ۷(-۴۳)+۵ \\ ۱۳۹۱ = ۷(۱۹۸)+۵ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۳۹۱ \overset{m}{\equiv} -۲۹۶$$

۲. در صورتی که داشته باشیم $[۷x+۲]_۴ = [۶x-۳]_۴$، کدام گزینه درست است؟

۱) $x = ۵k+۱$ ۲) $x = ۴k+۱$ ۳) $x = ۴k+۲$ ۴) $x = ۴k+۳$

حل: گزینهٔ (۴)

$$[۷x+۲]_۴ = [۶x-۳]_۴ \to ۷x+۲ \overset{۴}{\equiv} ۶x-۳ \to ۷x-۶x \overset{۴}{\equiv} -۳-۲ \to x \overset{۴}{\equiv} -۵ \overset{۴}{\equiv} ۳ \to x = ۴k+۳$$

ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow ka \overset{|k|m}{\equiv} kb$

۳) $a \overset{m}{\equiv} b \to ac \overset{m}{\equiv} bc$

۴) $a \overset{m}{\equiv} b \to a^n \overset{m}{\equiv} b^n \ (n \in N)$

۵) $a \overset{m}{\equiv} b, n|m \to a \overset{n}{\equiv} b$

۶) $a \overset{m}{\equiv} b, c \overset{m}{\equiv} d \to a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d, a \pm d \overset{m}{\equiv} b \pm c$

۷) $a \overset{m}{\equiv} b, c \overset{m}{\equiv} d \to ac \overset{m}{\equiv} bd, ad \overset{m}{\equiv} bc$

۸) $a \overset{m}{\equiv} b, a \overset{n}{\equiv} b \to a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

(نتیجهٔ ۸) $a \overset{m}{\equiv} b, a \overset{n}{\equiv} b, (m,n)=۱ \to a \overset{mn}{\equiv} b$

۹) $a \overset{m}{\equiv} b, b \overset{n}{\equiv} c \to a \overset{(m,n)}{\equiv} c$

اگر a را بر m تقسیم کنیم و باقی‌ماندهٔ تقسیم r باشد، در این صورت (a، یعنی مقسوم، با باقی‌مانده، به پیمانهٔ مقسوم‌علیه، یعنی m هم‌نهشت است).

۱۱) $a \overset{m}{\equiv} b \to a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

(به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از دو طرف کم کرد).

(حالت خاص ۱۱) $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{t=۰} a \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

(می‌توانیم فقط به یک طرف رابطهٔ $\overset{m}{\equiv}$ هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کنیم).

۱۲) $a \overset{m}{\equiv} b \to (a,m) \overset{m}{\equiv} (b,m)$

۱۳) $ab \overset{m}{\equiv} ac, (a,m) = d \to b \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} c$

(نتیجهٔ ۱۳) $ab \overset{m}{\equiv} ac, (a,m) = ۱ \to b \overset{m}{\equiv} c$

قضیهٔ اصلی هم‌نهشتی‌ها: شرط لازم و کافی برای این‌که $a \overset{m}{\equiv} b$ باشد آن است که باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر m، مساوی باشند، یعنی:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow \begin{cases} a = mq_۱ + r \\ b = mq_۲ + r \end{cases}$$

مثال‌ها و مسائل مهم

مثال ۱: عدد ۱۳۹۲ به پیمانهٔ ۱۴ با کدام عدد هم‌نهشت است؟

حل: کافی است عدد ۱۳۹۲ را بر ۱۴ تقسیم کنیم. طبق ویژگی ۱۰ باقی‌ماندهٔ تقسیم جواب مسئلهٔ ماست.

$$1392 = 14\times 99 + 6 \rightarrow 1392 \overset{14}{\equiv} 6$$

مثال ۲: اگر $a \overset{7}{\equiv} -11$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۷ را بیابید.

حل: طبق ویژگی ۱۱ و حالت خاص آن کافی است دو برابر پیمانه را به ۱۱- اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$a \overset{7}{\equiv} -11 \rightarrow a \overset{7}{\equiv} -11+14 \rightarrow a \overset{7}{\equiv} 3 \rightarrow 7 | a-3 \rightarrow a-3 = 7k \rightarrow a = 7k+3 \rightarrow r = 3$$

مسئلهٔ ۱: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 49^{1391}\times 102$ را بر ۲۴ بیابید.

$$49 \overset{24}{\equiv} 1 \rightarrow 49^{1391} \overset{24}{\equiv} 1 \rightarrow 49^{1391}\times 102 \overset{24}{\equiv} 102 \overset{24}{\equiv} 6 \rightarrow r = 6$$

مسئلهٔ ۲: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 59^{1391}\times 7 - 290$ را بر ۲۸ بیابید.

$$59 \overset{28}{\equiv} 3 \rightarrow 59^{1391} \overset{28}{\equiv} 3^{1391},\ 3^3 \overset{28}{\equiv} -1,\ 1391 = 3\times 463 + 2 \rightarrow (3^3)^{463}\times 3^2 \overset{28}{\equiv} (-1)^{463}\times 3^2 \rightarrow 3^{1391} \overset{28}{\equiv} -9$$

$$\rightarrow 3^{1391}\times 7 \overset{28}{\equiv} -9\times 7 = -63 \overset{28}{\equiv} 21 \rightarrow 3^{1391}\times 7 \overset{28}{\equiv} 21,\ 290 \overset{28}{\equiv} 10 \rightarrow 3^{1391}\times 7 - 290 \overset{28}{\equiv} 21 - 10 = 11 \rightarrow r = 11$$

مسئلهٔ ۳: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 53^{2013}\times 48 - 52^{2011}\times 9$ را بر ۱۷ بیابید.

$$53 \overset{17}{\equiv} 2,\ 2^4 \overset{17}{\equiv} -1,\ 2013 = 503\times 4 + 1 \rightarrow (2^4)^{503}\times 2^1 \overset{17}{\equiv} (-1)^{503}\times 2 = -2,\ 48 \overset{17}{\equiv} 14 \overset{17}{\equiv} -3 \rightarrow 2^{2013}\times 48 \overset{17}{\equiv} (-2)\times(-3) = 6$$

$$52 \overset{17}{\equiv} 1 \rightarrow 52^{2011} \overset{17}{\equiv} 1^{2011} \rightarrow 52^{2011}\times 9 \overset{17}{\equiv} 1\times 9 = 9 \rightarrow A \overset{17}{\equiv} 6 - 9 = -3 \overset{17}{\equiv} 14 \rightarrow r = 14$$

قضیه‌های مهم و کاربردی

قضیهٔ اویلر: اگر a عددی صحیح و $(a,m) = 1, m \in N$ در این صورت $a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$

یادآوری: $\varphi(m)$ همان تعداد اعداد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی m است که نسبت به m اول‌اند و اگر $m = p_1^{k_1}\times p_2^{k_2}\times \ldots \times p_n^{k_n}$ تجزیه‌ای استاندارد برای m باشد، در این صورت $\varphi(m) = m(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\ldots(1-\frac{1}{p_n})$.

مسئلهٔ ۴: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 17^{1202}\times 9$ را بر ۳۶ بیابید.

قضیهٔ فرما: اگر p عددی اول باشد و $(a,p) = 1, a \in Z$ در این صورت، $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$.

(اگر در قضیهٔ اویلر به جای m عدد p قرار دهیم با توجه به این‌که اگر p اول باشد $\varphi(p) = p-1$، حکم به‌دست می‌آید)

نتیجهٔ قضیهٔ فرما: اگر p عددی اول باشد و $a \in Z$، در این صورت $a^p \overset{p}{\equiv} a$.

مسئلهٔ ۵: باقی ماندهٔ تقسیم عدد $A = 17^{2001} - 19^{2002}$ را بر ۱۰۱ بیابید.

101 اول است $, (101,17) = 1\ ,\ (101,19) = 1 \rightarrow$ فرما $17^{100} \overset{101}{\equiv} 1,\ 19^{100} \overset{101}{\equiv} 1 \rightarrow (17^{100})^{20}\times 17 \overset{101}{\equiv} 1^{20}\times 17 = 17$

$$(19^{100})^{20}\times 19^2 \overset{101}{\equiv} 1^{20}\times 19^2,\ 19^2 = 361 \overset{101}{\equiv} 58 \rightarrow A \overset{101}{\equiv} 17 - 58 = -41 \overset{101}{\equiv} 60 \rightarrow r = 60$$

مسئلهٔ ۶: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = \sum_{k=1}^{66} k^{16} + \sum_{k=1}^{39} k^{17}$ را بر ۱۷ بیابید.

$$\sum_{k=1}^{66} k^{16} = 1^{16} + 2^{16} + \ldots + 17^{16} + \ldots + 34^{16} + \ldots + 51^{16} + \ldots + 66^{16}$$

(چون ۱۷ اول است، هر عددی که مضرب ۱۷ نباشد نسبت به ۱۷ اول است).

$$\sum_{k=1}^{66} k^{16} \overset{17}{\equiv} \underbrace{1+1+\ldots+1}_{16} + 0 + \underbrace{1+\ldots+1}_{16} + 0 + \underbrace{1+\ldots+1}_{16} + 0 + \underbrace{1+\ldots+1}_{15},\ 16 \overset{17}{\equiv} -1,\ 15 \overset{17}{\equiv} -2 \rightarrow \sum_{k=1}^{66} k^{16} \overset{17}{\equiv} -1-1-1-2 = -5$$

$$\sum_{k=1}^{66} k^{17} = 1^{17} + 2^{17} + \ldots + 39^{17} \overset{17}{\equiv} 1 + 2 + \ldots + 39 = \frac{39\times 40}{2} = 39\times 20 \overset{17}{\equiv} 5\times 3 = 15\ (39 \overset{17}{\equiv} 5,\ 20 \overset{17}{\equiv} 3)$$

$$\rightarrow A \overset{17}{\equiv} -5 + 15 = 10 \rightarrow r = 10$$

مسئلهٔ ۷: اگر a ، b و c مضرب ۷ نباشند باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = a^{1392} + 2b^{1392} - 4c^{1392}$ را بر ۷ بیابید.

$$(7,a)=1 \rightarrow \text{فرما} \ a^{6} \overset{7}{\equiv} 1 \rightarrow (a^{6})^{232} \overset{7}{\equiv} 1 \rightarrow a^{1392} \overset{7}{\equiv} 1$$

و به همین ترتیب $b^{1392} \overset{7}{\equiv} 1$ و $c^{1392} \overset{7}{\equiv} 1$؛ بنابراین:

$$A \overset{7}{\equiv} 1+2\times 1-4\times 1=-1 \overset{7}{\equiv} 6 \rightarrow r=6$$

قضیهٔ ویلسون: اگر p عددی اول باشد، در این صورت، $(p-1)! \overset{p}{\equiv} (-1)$.

مسئلهٔ ۸: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 18! \times 90$ را بر ۱۹ بیابید.

$$\text{اول است } 19 \rightarrow \text{ویلسون} \ (19-1)! \overset{19}{\equiv} (-1) \rightarrow 18! \overset{19}{\equiv} -1, 90 \overset{19}{\equiv} 14 \rightarrow 18! \times 90 \overset{19}{\equiv} (-1)\times 14 = -14, -14 \overset{19}{\equiv} 5 \rightarrow r=5$$

قوانین یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد طبیعی بر ۲، ۳، ۴، ۵ و...

اگر $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0}$ عددی n رقمی و بسط عدد A در مبنای ۱۰ به شکل زیر مفروض باشد، داریم:

$$A = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \ldots + 10^{2}a_2 + 10a_1 + a_0$$

I) بخش‌پذیری و باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۳ و ۹

$$10 \overset{9,3}{\equiv} 1 \xrightarrow{k\in Z} 10^{k} \overset{9,3}{\equiv} 1 \rightarrow A \overset{9,3}{\equiv} 1\times a_{n-1} + 1\times a_{n-2} + \ldots + 1\times a_2 + 1\times a_1 + a_0 \rightarrow A \overset{9,3}{\equiv} (a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد طبیعی مانند A بر ۳ و ۹ با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقامش بر ۳ و ۹ برابر است.

II) بخش‌پذیری بر ۴، ۸، ۱۶، ... و 2^k

$$10 \overset{4}{\equiv} 2, 10^{2} \overset{4}{\equiv} 0 \xrightarrow{k\geq 2} 10^{k} \overset{4}{\equiv} 0 \rightarrow A \overset{4}{\equiv} \overline{a_1a_0}\ (4=2^{2}), 10^{3} \overset{8}{\equiv} 0 \xrightarrow{k\geq 3} 10^{k} \overset{8}{\equiv} 0 \rightarrow A \overset{8}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0}\ \ (8=2^{3})$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A بر 2^k با باقی‌ماندهٔ تقسیم k رقم سمت راست A بر 2^k برابر است،یعنی:

$$A \overset{2^k}{\equiv} (\overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0})$$

III) بخش‌پذیری بر ۱۱

$$10 \overset{11}{\equiv} -1 \rightarrow \begin{cases} 10^{k} \overset{11}{\equiv} 1 & (k=2n) \\ 10^{k} \overset{11}{\equiv} -1 & (k=2n+1) \end{cases}$$

$$A = a_0 + 10a_1 + 10^{2}a_2 + \ldots + 10^{n-1}a_{n-1} \rightarrow A \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1}$$

تمرین: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 9498324256$ را بر ۱۱ بیابید.

$$10 \overset{5,2}{\equiv} 0 \xrightarrow{k\in N} 10^{k} \overset{5,2}{\equiv} 0 \rightarrow A \overset{5,2}{\equiv} a_0 + 0\times a_1 + \ldots + 0\times a^{n-1} \rightarrow A \overset{5,2}{\equiv} a_0$$

(یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲ و ۵، برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲ و ۵). $4954387 \overset{2}{\equiv} 1$ و $4954387 \overset{5}{\equiv} 1$

IV) بخش‌پذیری بر ۱۰ و یافتن رقم یکان اعداد توان‌دار

$$10 \overset{10}{\equiv} 0 \xrightarrow{k\in N} 10^{k} \overset{10}{\equiv} 0 \rightarrow A \overset{10}{\equiv} a_0 \quad (a_0 < 10)$$

(یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۰، برابر است با رقم یکانش).

قضیه: شرط لازم و کافی برای $A \overset{10}{\equiv} B$ آن است که رقم یکان A و B برابر باشد.

۳. اگر دو عدد $(4a+2)$ و $(5a+3)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(7a+2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینهٔ (۱)؛ زیرا طبق قضیهٔ قبل، این دو عدد به پیمانهٔ ۱۰ با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و داریم:

$$5a+5 \overset{10}{\equiv} 4a+2 \rightarrow 5a-4a \overset{10}{\equiv} 2-5 \rightarrow a \overset{10}{\equiv} -3, -3 \overset{10}{\equiv} 7 \rightarrow a \overset{10}{\equiv} 7 \ \text{رقم یکان a، ۷ است}$$

$$a \overset{10}{\equiv} 7 \rightarrow 7a+2 \overset{10}{\equiv} 7\times 7+2 = 51 \overset{10}{\equiv} 1$$

(پس رقم یکان عدد $7a+2$ همان ۱ است).

رقم یکان اعداد توان‌دار به صورت A^n

I) اگر عدد A به ۰ یا ۱ یا ۵ یا ۶ ختم شود، در این صورت A^n نیز متناظراً به صفر یا ۱ یا ۵ یا ۶ ختم می‌شود.

II) اگر عدد A به ۴ ختم شود، در این صورت برای هر n زوج عدد A^n به ۶ و برای هر n فرد به ۴ ختم می‌شود.

III) اگر عدد A به ۹ ختم شود، آن‌گاه برای هر n زوج عدد A^n به ۱ و برای هر n فرد به ۹ ختم می‌شود.

IV) برای یافتن رقم یکان اعدادی به صورت A^n که در آن‌ها عدد A به ۲ یا ۳ یا ۷ یا ۸ ختم می‌شود از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه: رقم یکان توان‌های متوالی اعداد طبیعی هر ۴ بار یک مرتبه تکرار می‌شود، یعنی: $A^n \overset{۱۰}{\equiv} A^{n+۴}$ $(n \in N)$

با توجه به قضیهٔ قبل برای یافتن رقم یکان عدد A^n کافی است n را بر ۴ تقسیم کنیم. اگر $n = ۴k + r$ و $r \neq ۰$ در این صورت $A^n = A^{۴k+r} \overset{۱۰}{\equiv} A^r \overset{۱۰}{\equiv} a_۰^r$ ($a_۰$ رقم یکان A است) و اگر $n = ۴k$ $(r = ۰)$ در این صورت $A^n = A^{۴k} \overset{۱۰}{\equiv} A^۴ \overset{۱۰}{\equiv} a_۰^۴$ ($a_۰$ رقم یکان A است).

مثال: مطلوب است رقم یکان عدد ۷×۱۳۹۲^{۱۳۹۳}.

$$۱۳۹۳ = ۴\times(۳۴۸)+۱ \rightarrow ۱۳۹۲^{۱۳۹۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۱ \rightarrow ۱۳۹۲^{۱۳۹۳} \times ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۲\times ۷ = ۱۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \rightarrow \text{رقم یکان} = ۴$$

مثال: مطلوب است رقم یکان عدد $A = ۴۹۹^{۱۳۴۲} \times ۶ + ۸۵۳^{۱۳۹۲} \times ۸$.

$$۱۳۴۲ = ۲k \rightarrow ۴۹۹^{۱۳۴۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \rightarrow ۴۹۹^{۱۳۴۲} \times ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۶$$

$$۱۳۹۲ = ۴\times ۳۴۸ \rightarrow ۸۵۳^{۱۳۹۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^۴ = ۸۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \rightarrow ۸۵۳^{۱۳۹۲} \times ۸ \overset{۱۰}{\equiv} ۱\times ۸ = ۸ \rightarrow A \overset{۱۰}{\equiv} ۶+۸ = ۱۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

مثال: رقم یکان اعداد زیر را بیابید:

$$\text{I)}\ A = ۲۱۶^{۶۱۲} - ۵۱۹^{۹۱۵} \times ۷ + ۱۳۹۳^{۳۹۳۱} \times ۴ - ۵۹۴^{۷^۹} \times ۳$$

$$\text{II)}\ B = \sum_{k=۱}^{۱۳۹۲} k!$$

$$\text{III)}\ C = [۱ + ۳^{۱۳۹۲} + ۹^{۱۳۹۲} + ۲^{۱۳۹۲}]^{۱۳۹۲}$$

$$\text{IV)}\ D = ۴۵۳^{۲۰۱۳!+۳} + ۵۹۹^{۱۰۱!} \times ۴ - ۸۰۷^{۸۰۷!+۲۰۱!}$$

حل:

$$\text{I)}\ ۲۱۶^{۶۱۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \ \text{و}\ ۹۱۵\ \text{فرد است} \Rightarrow ۵۱۹^{۹۱۵} \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۵۱۹^{۹۱۵} \times ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۹\times ۷ = ۶۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

$$\Rightarrow ۵۱۹^{۹۱۵} \times ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳,\ ۳۹۳۱ = ۴k + ۳$$

$$\Rightarrow ۱۳۹۳^{۳۹۳۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۱۳۹۳^{۳۹۳۱} \times ۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۷\times ۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۸$$

$$۷^۹ = ۲k+۱\ (\text{فرد است}) \Rightarrow ۵۹۴^{۷^۹} \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۵۹۴^{۷^۹} \times ۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۴\times ۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$$

$$\Rightarrow A \overset{۱۰}{\equiv} ۶ - ۳ + ۸ - ۲ = ۹ \Rightarrow \text{رقم یکان } A\text{، ۹ است}$$

$$\text{II)}\ B = \sum_{k=۱}^{۱۳۹۲} k! = ۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \ldots + ۱۳۹۲!$$

$$\Rightarrow B \overset{۱۰}{\equiv} ۱+۲+۶+۴+۰+۰+\ldots+۰ = ۱۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \rightarrow \text{رقم یکان } B$$

(توجه دارید که $۴! = ۲۴$ و $۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$ برای هر $n \geq ۵$ همواره $n! \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ است).

$$\text{III)}\ ۲^{\underset{۱۴}{۱۳۹۲}} = ۲^{۴k} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \Rightarrow C \overset{۱۰}{\equiv} [۱+۱+۱+۶]^{۱۳۹۲} \equiv ۹^{۱۳۹۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۱$$

$$\text{IV)}\ n! \equiv ۰\ (\text{برای هر } n \geq ۴) \ \text{و}\ k! = ۲n\ (\text{برای هر } n \geq ۲)$$

$$\Rightarrow ۴۵۳^{۲۰۱۳!+۳} = ۴۵۳^{۴k+۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۷,\ ۵۹۹^{۱۰۱!} = ۵۹۹^{۲n} \overset{۱۰}{\equiv} ۱\ (\text{۱۰۱! زوج است})$$

$$\Rightarrow ۵۹۹^{۱۰۱!} \times ۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴,\ ۸۰۷! = ۴k,\ ۲۰۱! = ۴k'$$

$$\Rightarrow ۸۰۷^{۸۰۷!+۲۰۱!} = ۸۰۷^{۴m} \overset{۱۰}{\equiv} ۷^۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow D \overset{۱۰}{\equiv} ۷+۴-۱ = ۱۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \rightarrow \text{رقم یکان}$$