خم‌ها

غلامرضا یاسی‌پور

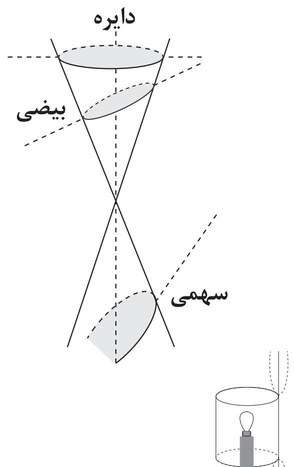
ترسیم یک خم یا منحنی[1] آسان است. نقاش‌ها همواره آن را انجام می‌دهند؛ آرشیتکت‌ها گستره‌ای از ساختمان‌های جدید را در خم‌های هلالی یا منحنی مدرن قرار می‌دهند؛ بازیکن بیسبال، توپی را خمیده می‌اندازد؛ ورزشکاران در زمین بازی از مسیر خم‌دار می‌گذرند و هنگامی‌که توپی را شوت می‌کنند، توپ در یک مسیر خم‌دار حرکت می‌کند. اما، اگر از ما بپرسند «خم چیست؟» پاسخ آن‌قدرها هم ساده نیست.

کلیدواژه‌ها:
خم، منحنی، خم کلاسیک، مقاطع مخروطی، مارپیچ، مارپیچ لگاریتمی، خم جبری، خم ژوردان، خم فضا ـ پرکننده

ریاضی‌دان‌ها قرن‌هاست که خم‌ها را از دیدگاه‌های بسیار مورد مطالعه قرار داده‌اند. این بررسی با یونانیان آغاز شد و خم‌های مورد مطالعهٔ آنان، امروزه به خم‌های «کلاسیک» موسوم‌اند.

خم‌های کلاسیک

اولین خانواده در قلمرو خم‌های کلاسیک، خم‌هایی هستند که آن‌ها را مقاطع مخروطی[2] می‌نامیم. اعضای این خانواده عبارت‌اند از دایره[3]، بیضی[4]، سهمی[5] و هذلولی[6]. مخروط ساخته شده از مخروط دوبل، یعنی دو بستنی قیفی را که به هم وصل شده باشند و یکی از آن‌ها سروته قرار گرفته باشد، در نظر بگیرید. با بریدن این شکل، بسته به وضعیت صفحه با محور قائم مخروط، صفحه‌ای مسطح همچون دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی پدید خواهد آمد.



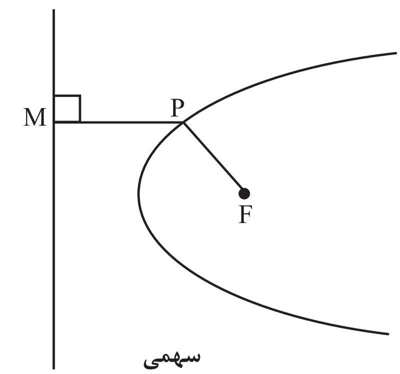
می‌توانیم مخروطی را به صورت تصویر یک دایره بر یک پرده تصور کنیم. پرتوهای نورانی از لامپ واقع در یک آباژور استوانه‌ای، مخروط دوگانه‌ای تشکیل می‌دهند که در آن چراغ تصاویری از بالا و پایین لبه‌های دایره‌ای آباژور می‌اندازد. تصویر واقع بر سقف یک دایره است، اما چون چراغ را یک بر کنیم، این دایره تبدیل به بیضی می‌شود. از طرف دیگر، تصویر بر دیوار خمی دو بخشی، یعنی هذلولی را به‌دست می‌دهد.

مخروطی‌ها را می‌توان از طریق حرکت نقطه بر صفحه نیز توصیف کرد. این روش موسوم به روش «مکان هندسی»[7] محبوب یونانیان است و برخلاف تعریف تصویری مخروطی، با طول سروکار دارد. اگر نقطه‌ای چنان حرکت کند که فاصله‌اش از یک نقطهٔ ثابت همواره یکسان بماند، دایره به‌دست می‌آوریم. اگر نقطه چنان حرکت کند که مجموع فواصلش از دو نقطهٔ ثابت (کانون‌ها) مقداری ثابت باشد، بیضی حاصل می‌شود (آن‌جا که دو کانون یکی شوند، بیضی تبدیل به دایره می‌شود). بیضی سرنخ حرکت سیّارات است. در ۱۶۰۹، یوهانس کِپلر[8]، ستاره‌شناس آلمانی، با ردکردن ایدهٔ قدیمی مدارهای دایره‌ای، اعلام کرد که سیارات پیرامون خورشید در مسیر بیضی شکل حرکت می‌کنند.

اما اگر نقطه‌ای چنان حرکت کند که فاصله‌اش از یک نقطه (کانون[9] F) برابر فاصلهٔ قائمش از خطی معلوم (هادی)[10] باشد، آن‌قدرها آشکار نیست. در این حالت سهمی را به‌دست

ژاکوب بِرنولی از ریاضی‌دانان مشهور سوئیس، به قدری شیفتهٔ مارپیچ لگاریتمی بود که دوست داشت آن را بر آرامگاهش در باسل کنده‌کاری کنند

می‌آوریم. ســهمی ویژگی‌هایــی دارد. اگر یک منبع نورانی در کانون F قرار گیرد، تمام پرتوهای نورانی انتشــار یافته موازی PMاند. از طرف دیگر، اگر سیگنال‌های تلویزیون از ماهواره‌ای فرســتاده شــوند با دیش دریافت‌کنندهٔ سهمی‌شکل برخورد کنند، در کانون جمع می‌شوند و به تلویزیون می‌رسند.

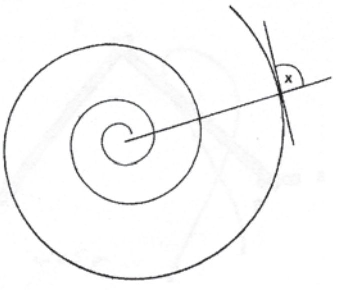


سهمی

اگر تکه چوبی را حول نقطه‌ای دوران دهیم، هر نقطهٔ ثابت واقــع بر آن، یک دایره را می‌پیمایــد، اما اگر بگذاریم علاوه بر دوران چــوب، نقطه‌ای در امتــداد آن حرکت کند، نقطهٔ مورد بحث یک مارپیچ[۱۱] تولید می‌کنــد. فیثاغورس به این مارپیچ علاقهٔ بسیار داشــت. قرن‌ها بعد، لئوناردو داوینچی ده سال از عمر خود را صرف بررســی انواع متفاوتشان کرد، در حالی‌که رِنه‌دِکارت[۱۲] رســاله‌ای دربارهٔ آن‌ها نوشت. مارپیچ لگاریتمی[۱۳] به مارپیچ متساوی‌الزّوایا[۱۴] نیز موسوم است، زیرا با یک شعاع و مماس در نقطهٔ برخورد آن شعاع و مارپیچ، زوایای برابر تشکیل می‌دهد.

ژاکوب بِرنولی[۱۵] از ریاضی‌دانان مشهور سوئیس، به قدری شــیفتهٔ مارپیــچ لگاریتمی بود که دوســت داشــت آن را بر آرامگاهش در باسل[۱۶] کنده‌کاری کنند. ایمانوئل سوئدنبورگ[۱۷]، «مرد رُنِســانس»، مارپیچ مــورد بحث را کامل‌ترین اشــکال می‌دانســت. یــک مارپیچ ســه‌بُعدی که به دور یک اســتوانه می‌پیچد، به مارپیچ حلزونی[۱۸] موســوم اســت. دو مورد از این مارپیچ‌ها، یعنی حلزونی‌های دوگانه، ســاختار اصلی DNA را تشکیل می‌دهند.

بسیاری از خم‌های کلاسیک، همچون حلزونی[۱۹]، پروانه[۲۰] و بیضی شــکل[۲۱]های گوناگــون، موجودند. دلــوار[۲۲] نام خود را از شــبیه قلب بودن گرفته اســت. خم زنجیره‌ای[۲۳] موضوع تحقیق در قرن هجدهم بود و به عنوان خم ســاخته شــده از زنجیری آویزان بین دو نقطه شناخته می‌شد. خم زنجیره‌ای، خــم موجــود در پل‌هــای معلقِ آویــزان بیــن دو دکل قائم است.



مارپیچ‌لگاریتمی

یکی از موارد تحقیق خم‌ها در قرن نوزدهم، خم‌هایی بود که میله‌های مکانیکی ایجاد می‌کردند. مســائلی از این دست، طرح مسئله‌ای بود که جیمز وات[۲۴] مهندس اسکاتلندی، به‌طور تقریبی آن‌ها را حل کرده بود؛ میله‌های متصل به یکدیگر برای تبدیل حرکت دایره‌ای[۲۵] به حرکت خطی[۲۶]. گام مزبور در عصر بخار گامی مهم به سمت جلو بود.

ساده‌ترین این ابزارهای مکانیکی، حرکت سه میله است که در آن میله‌ها در مکان‌های ثابتی واقع در انتهای هر یک به‌هم وصل شده‌اند. اگر «میلهٔ اتصال»، PQ در هر طرف حرکت کند، مشخص می‌شود که مکان هندسی نقطه‌ای واقع بر آن، خمی از درجهٔ شش، یعنی خم مسدّسی یا درجه شش[۲۷] است.

خم‌های جبری

اینک، پیــرو کارهای دِکارت، که بــا معرفی مختصات x، y، z و محورهــای دکارتــی[۲۸] (به نام خــود او) که انقلابی در هندســه به وجود آورد، مقاطع مخروطی می‌توانســتند مانند معادلات جبری مورد بررســی قرار گیرند. برای مثال، دایره‌ای به شعاع ۱ دارای معادلهٔ

$$x^2+y^2=1$$

اســت که مانند جمیــع مخروطی‌ها، معادلــه‌ای از درجهٔ دوم است. به این ترتیب، شاخهٔ جدیدی از هندسه، موسوم به هندسهٔ جبری[۲۹] بالیدن گرفت.

ایزاک نیوتون در یک بررسی عمده، خم‌هایی را که با معادلات درجهٔ سوم یا خم‌های مکعبی تعریف می‌شدند، دسته‌بندی کرد. به این ترتیب، با مقایســه با چهار مخروط اساسی، ۷۸ نوع خم یافت شد که در پنج دسته یا رده گروه‌بندی شدند. انواع مختلف خم‌های درجه چهار[۳۰] آن‌قدر زیاد و ادامه‌دار است که دسته‌بندی کامل هیچ‌گاه انجام نگرفته است.

اما بررســی خم‌ها به عنوان معادلات جبری، تمام داستان نیست، زیرا خم‌های بسیاری از قبیل زنجیره‌ای‌ها، سیکلوئیدها یا چرخ‌زادها[۳۱] (خم‌هایی که نقطه‌ای واقع بر چرخی دوران کننده

می‌پیماید) و مارپیچ‌ها را به سادگی نمی‌توان در قالب معادلات جبری بیان کرد.

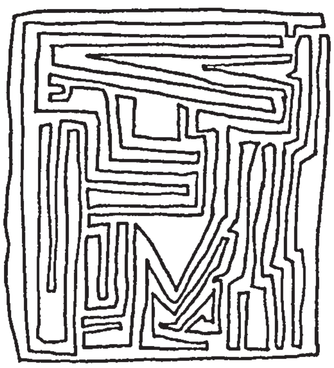
یک تعریف

آنچه ریاضی‌دان‌ها به دنبالش بودند، تعریف خود خم بود، نه فقط مثال‌های خاصی از آن. کَمیل ژوردان[۳۲] نظریهٔ خم‌هایی را مطرح کرد که بر تعریف یک خم، برحسب نقطه‌های متغیر بنا شده بود.

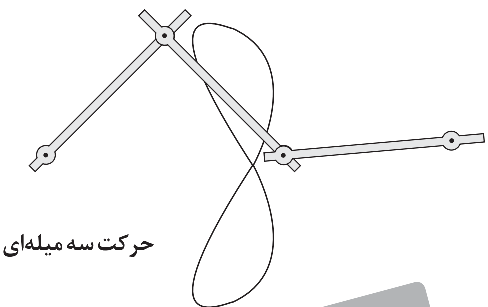
در این مورد مثالی می‌آوریم. اگر فرض کنیم $x=t^2$ و $y=2t$، در آن صورت به ازای مقادیر مختلف t، نقاط بسیاری به‌دست می‌آوریم که می‌توانیم به صورت مختصات (x, y) بنویسیم. برای نمونه، اگر t=۰، نقطهٔ (۰، ۰) به‌دست می‌آید؛ t=۱، نقطهٔ (۲، ۱) را می‌دهد؛ و همین‌طور تا آخر. اگر این نقاط را بر محورهای y-x رسم کنیم (نقطه‌ها را به هم وصل کنیم) یک سهمی به‌دست می‌آید. ژوردان ایدهٔ نقاط ردیابی شدهٔ مورد بحث را اصلاح کرد. از نظر وی، این روش، روش تعریف یک خم به‌شمار می‌رفت.

خم‌های ژوردان می‌توانند، حتی زمانی که شبیه دایره‌اند، از این جهت پیچیده و تودرتو باشند که «ساده»اند (یعنی خودشان را قطع نمی‌کنند) و«بسته»اند (یعنی آغاز و انجام ندارند). قضیهٔ معروف ژوردان معنادار است، چون بر این پایه است که یک خم ساده و بسته، درون و برون دارد و وضوح ظاهری‌اش گول‌زننده است.

در ایتالیا، جوزپه پِئانو[۳۳]، در سال ۱۸۹۰ نشان داد که طبق تعریف ژوردان، یک مربع پُر ـ درون یک خم است. او با ارائهٔ این نظریه، شور و هیجانی به‌وجود آورد. وی توانست نقاطی را بر یک مربع چنان قرار دهد که همهٔ آن‌ها بتوانند «ردیابی شوند» و در همان حال از تعریف ژوردان پیروی کنند. این خم که به خم فضا ـ پرکننده موسوم شد رخنه‌ای در تعریف ژوردان به‌وجود آورد، زیرا روشن است که مربع در مفهوم قراردادی، خم نیست.



یک خم ساده و بستهٔ ژوردان



حرکت سه میله‌ای

مثال‌های خم‌های فضا ـ پرکننده و دیگر مثال‌های نامعقول، به این انجامید که بار دیگر ریاضی‌دان‌ها به تختهٔ رسم برگردند و در مورد پایه‌های نظریهٔ خم‌ها بیندیشند. به این ترتیب، پرسشی اساسی دربارهٔ تعریف بهتری از یک خم مطرح شد. این کار در آغاز قرن بیستم، ریاضیات را به حوزهٔ جدید توپولوژی[۳۴] کشاند.

چند تاریخچه

حدود ۳۰۰ قبل از میلاد: اقلیدس به تعریف مقاطع مخروطی پرداخت.

حدود ۲۵۰ قبل از میلاد: ارشمیدس دربارهٔ مارپیچ‌ها تحقیق کرد.

حدود ۲۲۵ قبل از میلاد: آپولونیوس پرگایی[۳۵] مخروطیات[۳۶] را انتشار داد.

۱۷۰۴ میلادی: نیوتن خم‌های مکعبی را دسته‌بندی کرد.

۱۸۹۰ میلادی: پِئانو[۳۷] ثابت کرد یک مربع صلب[۳۸] یک خم است (خم فضا ـ پرکننده).

دههٔ ۱۹۲۰ میلادی: مِنگِر[۳۹] و یوریسُن[۴۰] خم‌ها را به عنوان بخشی از توپولوژی تعریف کردند.

پی‌نوشت ....

1. curve
2. conic sections
3. circle
4. ellipse
5. parabola
6. hyperbola
7. locus
8. Johannes Kepler
9. focus
10. directrix
11. spiral
12. René Descartes
13. logarithmic spiral
14. equiangular
15. Jacob Bernoulli
16. Basle
17. Emanuel Swedenborg
18. helix
19. limaçon
20. lemniscate
21. oval
22. cardioid
23. catenary curve
24. James Watt
25. circular motion
26. linear motion
27. sextic curve
28. Cartesian axes
29. algebraic geometry
30. quartic curves
31. cycloids
32. Camile Jordan
33. Giuseppe Peano
34. topology
35. Apollonius of Perga
36. Conics
37. Peano
38. solid square
39. Menger
40. Urysohn