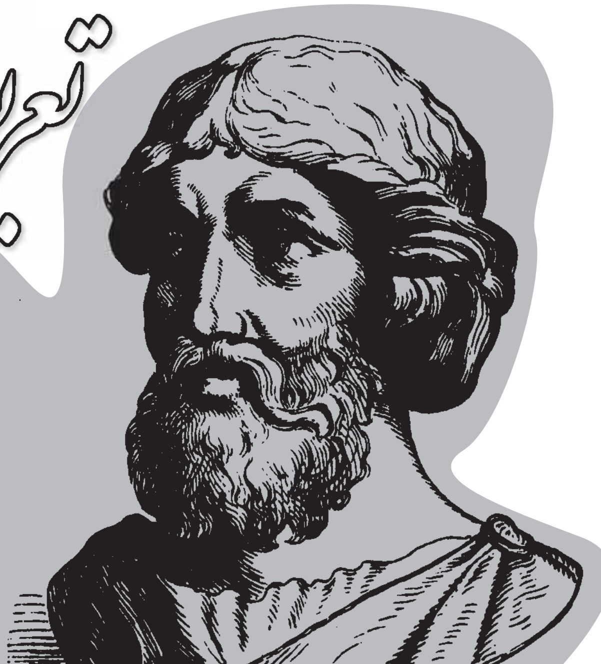
مقاله

# آیا فیثاغورسیان راه بهتری برای تعریف عدد حقیقی نداشتند؟

مهدی رجبعلی‌پور[1]

**با گرامیداشت صدمین سال تولد مهندس علیرضا افضلی‌پور، بنیانگذار دانشگاه کرمان قطب جبر خطی و بهینه‌یابی دانشگاه شهید باهنر کرمان و دانشگاه آزاد اسلامی کرمان**




## چکیده

مطالعه تحولات تاریخی یک موضوع درسی می‌تواند کمک مؤثری در تعیین محتوای آن درس در مقاطع مختلف سنی باشد. به هر حال، موضوعاتی را هم سراغ داریم که رشد تاریخی آن‌ها بن‌بست‌هایی بر سر راه ریاضی به‌وجود آورده و پژوهشگر باید دلایل چنین پدیده‌هایی را شناسایی کند تا در برنامه‌ریزی محتوایی خود مدنظر داشته باشد. یکی از این موارد، پیدایش مفهوم کسر، و به‌طور کلی مفهوم عدد حقیقی، می‌باشد که یک‌بار در تاریخ ریاضیات مصر و بار دیگر در تاریخ ریاضیات یونان، موانعی جدی بر سر راه رشد ریاضی به‌وجود آورد. هدف ویژه این مقاله، آسیب‌شناسی و بررسی امکانات موجود زمان یونانیان برای جایگزین‌های منطقی تعریف کسرها و عددهای حقیقی است.

**کلیدواژه‌ها:** آموزش ریاضی، تاریخ ریاضی، کسر متعارفی، کسر مصرفی، تناسب، کسر مسلسل، جذب اصم.

## سیری در تاریخ

اعداد طبیعی را انسان‌های ماقبل تاریخ به خوبی درک کرده بودند و کسرها را نیز در حد نیاز درک می‌کردند. بنا به مدارک یافت شده، از یازده هزار سال پیش، تندیس‌ها یا تصویرهایی برای نمایش تعداد و حسابداری ابتدایی به‌کار می‌رفته است. اما پیشینه نمادهای کسری که در شهرنشین‌های ایلامی و مصری یافت شده، فراتر از ۳ هزار سال قبل از میلاد نمی‌رود. در مورد کسرهای ایلامی مطالعه دقیقی به‌عمل نیامده و مدارک کافی در دست نیست و ما چیز چندانی در مورد آن نداریم. سومری‌ها (و جانشینان بابلی‌شان) عدد واحد را یک «درجه» فرض می‌کردند و کسرهایی مانند «نیم»، «یک سوم»، «یک چهارم»، «دو پنجم»، «یک ششم»، «سه هشتم»، ... را به ترتیب به صورت «۳۰ دقیقه»، «۲۰ دقیقه»، «۱۵ دقیقه»، «۲۴ دقیقه»، «۱۰ دقیقه»، «۲۲ دقیقه» و «۱۰ ثانیه»، ... بیان می‌کردند. مدارکی وجود دارد که بابلی‌ها عددهایی مانند «هفت»، «یازده» و غیره را وارون‌ناپذیر می‌نامیدند؛ این به معنای آن بود که واحد را نمی‌توانستند به «هفت» یا «یازده» قسمت مساوی تقسیم کنند و گرچه مسئله را تقریبی حل می‌کردند ولی نمایش دقیقی برای کسرهای «یک هفتم»، «یک یازدهم» و غیره نداشتند. ما امروزه قادریم کسر «یک هفتم» را با بسط بی‌نهایت آن در مبنای ۶۰ نمایش دهیم و هنگام کاربرد از هر کجا که مناسب دیدیم بسط را قیچی کنیم؛ ولی ریاضی‌دانان مبتدی بابلی، توانایی درک مفهوم بی‌نهایت را نداشتند و لذا حسابشان در همین‌جا به بن‌بست می‌رسید. مصریان، تصادفاً از بن‌بست بابلی‌ها شروع کرده بودند و به سادگی، «نمادِ نوعیِ» کسرهای «یک چهارم»، «یک هشتم»، «یک شانزدهم»، «یک سی‌ودوم»، و «یک شصت و چهارم» را که به‌تدریج در فرهنگشان شکل گرفته و با دخالت کاهنان که در دوره‌های فترت جای ریاضی‌دانان را می‌گرفتند از تقدسی هم برخوردار شده بودند، به یک «نماد نوعی» برای همه کسرهای یکین (یعنی $1/n$ها) تعمیم دادند. اگر دخالت کاهنان مصری نبود، سیر طبیعی ریاضیات به یک «نماد کلی» برای همه کسرها دست می‌یافت ولی به هر حال کسرهای مصری به‌همین‌جا پایان یافت و پیشرفتی نکرد. (وقتی که قرار است کسر «یک هشتم» نمادی از «ابروی راست» خدا خورشید باشد، کسر «سه‌هشتم» چه معنایی می‌تواند داشته باشد!) اطلاعات زیادی در مورد کسرهای مصری در دست است که به‌طور مبسوط در مقاله [۴] آمده است.

منجمان و مهندسان یونانی با «اختلاط» ریاضیات بابلی و مصری محاسبات خود را انجام می‌دادند ولی ریاضی‌دانان یونانی، با رشد فلسفه و فشار فیلسوفان، نیازمند «ترکیبی» از دانش‌های بشری برای ایجاد یک نظریه جامع و فراگیر ریاضی بودند. آنان، به برکت ریاضیات مصری، کسری‌های یکین را بی‌آن‌که نیازی به بسط بی‌نهایت باشد درک می‌کردند و به یمن ریاضیات بابلی نیز بر مضارب آن‌ها مسلط بودند؛ لذا، از دیدگاه یونانیان، کسر متعارفی $p/q$ یعنی $p$ تا $1/q$؛ گرچه به صراحت گفته نمی‌شد، ولی به عبارت دیگر یک «زوج مرتب» بود که نمایشگر تقسیم «واحد» به $p$ قسمت مساوی، و انتخاب $q$ قسمت آن بود. تالس با الهام از مهندسان و ریاضی‌دانان مصری، به خوبی می‌دانست که اگر خطی دو ضلع از مثلثی را قطع کند و موازی با ضلع سوم باشد، آنگاه قطعاتی که روی ضلع اول ایجاد می‌شود با قطعات نظیر بر ضلع دوم متناسب است. وی که حدود ۶ قرن قبل از میلاد زندگی می‌کرد، همه عددهای حقیقی (مثبت) را به صورت خارج قسمت دو عدد طبیعی $p$ و $q$ می‌دید. دلیل ما، روش اثباتی است که به او منسوب کرده‌اند: واحدی انتخاب کنید که دقیقاً $p$ و $q$ بار دو قطعه روی ضلع اول را پیمانه کند؛ دیده می‌شود که واحد دیگری وجود دارد که قطعات متناظر را به ترتیب $p$ و $q$ بار پیمانه می‌کند. این تصور، تا نیم قرن بعد که فیثاغورس ظهور کرد و مکتب مذهبی ریاضی خود را بنیان گذاشت، بر باورها غالب بود و در حقیقت یکی از رکن‌های فلسفی عقیدتی فیثاغورس محسوب می‌شد.

روایت است که یکی از شاگردان این مکتب و به احتمال زیاد پس از مرگ بانی آن، جذر ۲ را معادل یک کسر متعارفی گرفت و با برهان خلف به تناقض رسید. افشای این امر، خشم فیثاغورسیان را برانگیخت و بساط آنان را به‌هم ریخت. کاشف که به کتمان حقیقت ریاضی نمی‌شد، به روایتی اعدام و به

روایت دیگر از مکتب طرد شد. (زبان حال ریاضیات به گوسفندی می‌مانست که بزرگی از دهان گرگش رها ساخت و شبانگاه بر حلقومش کارد گذاشت!) منجمان و مهندسان یونانی، با گنگ بودن جذر ۲ مشکلی نداشتند و تنها دغدغه‌شان یافتن تقریب مطلوبی از آن به صورت کسرهای مصری یا بسط‌های شصت‌شصتی متناهی بابلی بود. مثلاً بسط متناهی زیر به عنوان تقریبی از جذر ۲ در بسیاری از کارهای مهندسی و نجومی کفایت می‌کرد:

۱ درجه، ۲۴ دقیقه، ۵۱ ثانیه.

ریاضی‌دانان پیشرفته یونان هم نمی‌بایست مشکلی با پذیرش یک بسط شصت‌شصتی نامتناهی به جای جذر ۲ داشته باشند اما مشاجرات بین فیلسوفان پیوسته‌گرا و گسسته‌گرا، و داغ‌تر شدن آن توسط باطل‌نماهای زنون، چنان جنجالی در جامعه علمی به راه انداخت که ریاضی‌دانان مجال اظهارنظر مستقل نیافتند. پیروزی هر یک از طرفین چیزی جز مصیبت برای ریاضیات و به‌طور کلی جامعه نداشت و سرنوشت چنین بود که پیوسته‌گراها پیروز شوند و هر نوع کار با بی‌نهایت ممنوع گردد چرا که اصل پیوستگی بر مفهوم بی‌نهایت استوار بود و باطل‌نماهای زنون هم هر نوع کار با بی‌نهایت را به ریشخند می‌گرفت. در نتیجه هیچ راهی برای نمایش اعداد حقیقی (مثبت) باقی نماند و ریاضی‌دانان برای تعریف آن‌ها ناچار از کاربرد پاره‌خط‌های هندسی شدند چرا که جذر مسئله‌ساز عدد ۲ نیز می‌توانست وتر یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین باشد. حساب همچنان در قلمرو عددهای گویا باقی ماند و مبحث عددهای حقیقی به هندسه رانده شد. علم حساب راهی را در پیش گرفت که امروزه با عنوان نظریه اعداد، و در حالت‌های میان‌رشته‌ای با عناوین مختلفی همچون نظریه آماری اعداد، نظریه تحلیلی اعداد، و غیره به حیات خود ادامه می‌دهد. از سوی دیگر با راندن اعداد حقیقی به هندسه، رشته‌ای به نام جبر هندسی زاده شد که تا پایان عصر طلائی اسلام به حیات خود ادامه داد و به مرور با جذب در گرایش‌های نوبنیاد منحل گردید.

در جبر هندسی یونانیان، رده هم‌ارزی تمام پاره‌خط‌های قابل انطباق، نمایشگر یک عدد حقیقی بود. پاره‌خطی را به عنوان واحد در نظر می‌گرفتند و به کمک قضایای هندسی، پاره‌خط‌ها را با هم مقایسه می‌کردند. به‌ویژه، می‌توانستند همه عددها را به صورت پاره‌خط‌های OM روی یک نیم‌محور معین OX نمایش دهند. در حالی‌که جمع و تفریق دو عدد به کمک خط‌کش و پرگار تعریف شد، ضرب سرنوشت دیگری پیدا کرد: حاصل‌ضرب دو پاره‌خط، مساحت مربع مستطیلی بود به آن ابعاد؛ در نتیجه، حاصل‌ضرب دو کمیت هم‌جنس، کمیتی از جنس دیگر شد!

از این‌که آیا رابطه‌ای بین طول‌های پاره‌خط‌ها و مساحت‌های مستطیل‌ها برقرار کردند یا نه اطلاعی نداریم ولی مطمئناً در تناظر هر عدد حقیقی c با مساحت مستطیلی به درازای c و پهنای ۱ تردیدی نداشتند؛ از عکس این مطلب بی‌خبریم. تساوی دو مربع مستطیل قابل انطباق نمی‌توانست تعریفی برای تساوی $ab=cd$ بدهد. معلوم نبود که حاصل جمع دو مساحت چه می‌شود: آیا معادله‌ای مانند $ab+cd=xy$ قابل حل بود؟ شاید هیچ‌یک از مسائل فوق به ذهن یونانیان خطور نکرد و حتی دغدغه تقسیم دو عدد به وجود نیامد. در اینجا هم از همان ابتکار قبلی خود در نمایش اعداد گویا به صورت جفت مرتب $m/n$ بهره جستند. جنس این مفهوم در مورد دو کمیت هم‌جنس، موجودی مطلق بود و شاید تنها دغدغه یونانیان، تساوی دو نسبت $a/c$ و $d/b$ بود.

مسئله اخیر را اودوکسوس برای افلاتون چنین حل کرد؛ مبنای استدلال را بر این گذاشت که اگر $a/c = d/b$، آنگاه نباید هیچ عدد گویایی مانند $m/n$ بین $a/c$ و $d/b$ قرار گیرد. حال، چون تعریفی برای تناسب نداشتند، اودوکسوس در ذهن خود کسر گویای $m/n$ را با $a/c$ طرفین وسطین کرد و سه حالت خوش تعریف زیر را تشخیص داد:

(i) $na < mc$,

(ii) $na = mc$,

(iii) $na > mc$.

(در اینجا $na$ را می‌توان حاصل جمع n کمیت مساوی a تعریف کرد نه مساحت مستطیلی با درازا و پهنای n و a.)

اودوکسوس به‌طور شهودی می‌پذیرفت که نامساوی (i) به مفهوم $a/c < m/n$، تساوی (ii) به مفهوم $a/c = m/n$ و تساوی (iii) به مفهوم $a/c > m/n$ می‌باشد. لذا برای تساوی نسبت به دو

کمیت همجنس a و c با نسبت دو کمیت هم‌جنس d و b، لازم و کافی است که متناظر به رابطه‌های (i) و (ii) و (iii)، رابطه‌های (i′) و (ii′) و (iii′) به ترتیب زیر برقرار باشد:

(i′) $nd < mb$,

(ii′) $nd = mb$,

(iii′) $nd > mb$.

بـا فرض این‌که قضیه در حالت سـاده پیمایش‌پذیری حل شـده باشـد، اثبات حالت کلی را می‌توان با اسـتفاده از روابط (i)، (ii)، (iii)، (i′)، (ii′) و (iii′) به‌دست آورد.

بدین ترتیب مشکل تناسب برای آکادمی افلاتون حل شد ولی مسائل دیگری را که در بالا یاد کردیم، یا از چشم آنان به‌دور ماند و یا دیگر نخواستند به این‌گونه مسائل بپردازند. همان‌طور که گفتیم، مشابه این کار را در مقابل باطل‌نماهای بی‌نهایت آگین زنون هم انجام داده بودند؛ حکم کردند کسی حق ندارد از بی‌نهایت بزرگ‌ها و بی‌نهایت کوچک‌ها صحبت کند! حتی سه قرن بعد، ریاضی‌دان بزرگی همچون ارشمیدس مجبور بود مسائلی را در خفا به روش‌های بی‌نهایت کوچکی ـ بی‌نهایت بزرگی حل کند و پس از رسیدن به جواب، آن‌ها را به زبان باب طبع آکادمی درآورد. اودوکسوس با همه احترامی که برای افلاتون قائل بود ولی همکاری با او را ادامه نداد و به شهر دیگری مهاجرت کرد و مدرسه‌ای به سلیقه خود بنیان گذاشت؛ کاری که ارسطوی منطق‌دان پس از مرگ افلاتون انجام داد.

محدودیت‌هایی که آکادمی افلاتون بر ریاضیات یونانی تحمیل کرد، باعث رکود ریاضی شد. نبوغ ارشمیدس هم که راه‌های متنوع و آفریننده‌ای را برای ریاضی‌دانان گشود به دلایل زیر نتوانست مانع از این افول شود. یکی این‌که رومیان عملگرا و بیزار از ریاضیات محض بر مناطق یونانی‌نشین اروپا مسلط شدند و گرچه ارشمیدس برخلاف میل رومیان در این نبردها کشته شد، اگر زنده هم می‌ماند توقعات علمی رومیان در جهان‌بینی کلی او نمی‌گنجید. دیگر این که آکادمی افلاتون نیز فقط به آن دست‌آوردهایی اهمیت می‌داد که در چارچوب مکتبشان می‌بود وگرنه ارشمیدس مجبور نبود برای رسیدن به حل مسائل، شگردهای ریاضی غیرمجاز خود را در خفا به‌کار گیرد و سپس به ترجمه آن‌ها به زبان مجاز آکادمی تلاش کند.

بیش از دو هزار سال گذشته تا ریاضی‌دانان امروزی، با کشف تصادفی یک کتاب دعا و در حقیقت نامه شسته شده ارشمیدس به اراتستن، به رازهای ارشمیدس پی ببرند. ریاضی‌دانان بعد از ارشمیدس که به تدریج به اسکندریه مصر مهاجرت کردند، گرچه شارحان و مرورگران قابلی بودند، ولی خلاقیت تازه‌ای از خود نشان ندادند و با فاصله گرفتن از اجتماع، حتی قادر به حفظ موقعیت خود در میان مردم هم نبودند؛ به‌وضع فجیعی از آتن و اسکندریه بیرون رانده شدند و کتابخانه‌هایشان دو سه قرن قبل از ظهور اسلام به تاراج رفت و یا سوخته شد. بدین ترتیب بود که اروپا در سیاهی قرون وسطی فرو رفت و اگر برمکیان با پشتیبانی خلفای عباسی اقدام به خرید و جمع‌آوری باقی‌مانده کتاب‌ها نمی‌کردند، تداوم دانش بشری سرنوشت دیگری پیدا می‌کرد. برخی از ریاضیدانان اسلامی، به‌ویژه محمدبن موسی خوارزمی که به ریاضیات هندی و ایرانی گرایش شدید داشتند، با رواج حساب هندی و گسترش آن به اروپا با عنوان الگوریتم (الخوارزمی)، گام مؤثری در جهت کم‌رنگ کردن تفاوت بین عددهای گویا و گنگ برداشتند. یونانی مآبانی همچون ابوعبدالله محمدبن عیسی ماهانی نیز که دل‌خوشی از تعریف ادوکسوسی تناسب نداشتند، با ابداع کسرهای مسلسل، گام دیگری در جهت نزدیکی دو مفهوم عدد گنگ و گویا برداشتند و با کار خود بیم از فرایندهای بی‌نهایتی را کاهش دادند. شاید عمر خیام را بتوان آخرین ریاضی‌دانی دانست که به جبر هندسی پایبند بود و پس از انتشار رساله خود در حل هندسی تقریباً کامل همه اصناف معادلات درجه سه، ریاضی‌دانان را به جهات تازه‌ای سوق داد و برایشان آشکار ساخت که برای رفع مشکلات روزافزونشان باید به حل‌های عددی نیز توجه کند. رواج بسط‌های شصت‌شصتی و دهدهی و اثبات عدم کارآیی عددهای هندسی، راه را برای ریاضیاتی هموار ساخت که اگر با فشار اشعریون، به اروپا انتقال نمی‌یافت و بومی وطن می‌شد، مایه افتخار ریاضی‌دانان ایرانی می‌بود.

مقاله را با مثالی به پایان می‌رسانیم که می‌توانست جانشینی برای تعریف سامانه عددهای حقیقی باشد و کلیه اجزاء آن در اختیار یونانیان بود؛ دستپاچگی و فشار عجولانه پیروان مکتب‌های مختلف مذهبی فلسفی، آنان را از توجه به آن محروم

**منجمان و مهندسان یونانی با «اختلاط» ریاضیات بابلی و مصری محاسبات خود را انجام می‌دادند ولی ریاضی‌دانان یونانی، با رشد فلسفه و فشار فیلسوفان، نیازمند «ترکیبی» از دانش‌های بشری برای ایجاد یک نظریه جامع و فراگیر ریاضی بودند.**

کرد و سرنوشت ریاضیات را به بحث‌های بیهوده فلاسفه گره زد. این‌که درک بسط‌های بی‌نهایتی برای یونانیان زودرس بود می‌پذیریم و بیراهه رفتن اتم‌گرایان را در کاربرد مفهوم بی‌نهایت کوچک‌ها و رسیدن به عددی که صفر نبود ولی از همه عددهای مثبت کوچک‌تر بود اذعان داریم. و می‌پذیریم که جامعه علمی یونان از تعریف عدد حقیقی به صورت یک پاره‌خط ناگزیر بود. اما، ریاضی‌دانان یونانی می‌توانستند حاصل‌ضرب دو پاره‌خط را چنان تعریف کنند که از سامانه عددهای حقیقی بیرون نرود: برای تعریف حاصل‌ضرب دو پاره‌خط، دو نیم محور OX و OY را که بر یک راستا نیستند در نظر بگیرید؛ پاره‌خط‌های OA و OC را بر OX و پاره‌خط‌های OU و OB را بر OY چنان جدا کنید که OU=۱ و AU||BC؛ همه این عملیات، در چارچوب هندسه‌های زمان تالس و فیثاغورس یا، به اصطلاح امروزی، هندسه اقلیدسی قابل درک و امکان‌پذیر بود؛ حال OC را حاصل‌ضرب OA و OB بگیرید؛ همچنین OB را خارج‌قسمت OC÷OA گرفته و توجه کنید که در حالت خاصی که عوامل ضرب یا تقسیم اعدادی گویا باشند، آنگاه عملیات هندسی جدید با عملیات حسابی قدیم تطابق می‌کند. بنابراین چهار عمل اصلی جمع و ضرب و تفریق و تقسیم را چنان می‌توان تعریف کرد که حاصل هر چهار عمل از یک جنس بوده و خاصیت‌های جابه‌جایی، انجمنی و پخشی جمع و ضرب نیز به راحتی قابل اثبات باشند.

## آسیب‌شناسی

از بحث‌های بالا می‌توان به نتایج زیر رسید.

**الف)** درگیر کردن ریاضیات با فلسفه و مذهب به نفع هیچ‌یک از طرفین نیست و مانع از دقت ریاضیات و خلوص فلسفه و مذهب می‌شود. در ریاضیات باید همیشه توجه کرد که اصول آن الهام گرفته از مشاهدات فیزیکی است و در عین حال ماهیتی کاملاً ذهنی و مستقل از حرکت و جسمیت دارد. هیچ اصلی در ریاضیات از عالم بالا نازل نشده و بشر به میل خود می‌تواند اصول و تعاریف مدل‌های ریاضی را تغییر دهد مشروط به آن‌که تناقضی در دستگاه به وجود آمده مشاهده نگردد. به فرض آن‌که تناقضی در دستگاه یافت شود با کمال صداقت آن را اعلام و در جهت تصحیح الگویی که به‌وجود آورده اقدام یا اصولاً آن را رها کند.

**ب)** بحث ما، این نظر آقای پاسبانی [۱] را تأیید می‌کند که بهتر است تعریف کسرهای دهدهی یا دودویی و غیره به دوره دبیرستان موکول شود و در دبستان فقط به کسرهای متعارفی و عملیات ساده روی آن‌ها پرداخت شود.

**ج)** زیبایی یا قدمت یک مطلب یا روش، دلیلی بر گنجاندن آن در برنامه درسی نمی‌شود بلکه باید فایده آن در رشد فکری و آمادگی شهروندی دانش‌آموز به اثبات رسد. بنابراین کپی‌سازی برنامه‌های درسی قدیم بدون بازنگری معلمان و آموزشگران کاری بیهوده است. تزریق فرمول‌های ذهنی در ازای روش‌هایی که دانش‌آموز را به اندیشه و درک یک مفهوم ریاضی مانند جمع کسرها زیان‌آور است. البته پس از آن‌که دانش‌آموز بر مفهوم مسلط شود، آموختن راه‌های میان‌بر برایش لذت‌بخش خواهد بود و قدر آن‌ها را بهتر خواهد دانست.

**د)** مطالعه و کار با عددهای مرکب (ساعت، درجه، دقیقه و غیره) بهترین راه برای آماده‌سازی دانش‌آموزان دوره راهنمایی با کسرهای دهدهی و دودویی است که البته باید فاصله زمانی کافی بین این موضوعات رعایت گردد تا دانش‌آموز هر یک را به‌خاطر اهمیت خود آن موضوع هضم کند نه صرفاً به عنوان یک پیش‌نیاز برای مطلبی دیگر.

### پی‌نوشت

۱. این پژوهش با حمایت کرسی پژوهشی صندوق حمایت از پژوهشگران کشور انجام شده است.

### منابع

۱. پاسبانی، حسین. گفت‌وگوی خصوصی. تیرماه ۱۳۸۹.
۲. رجبعلی‌پور، مهدی. کسرهای مصری. فرهنگ و اندیشه ریاضی. انجمن ریاضی ایران. تهران ۱۳۸۸، صص ۱ تا ۳۸.
۳. گرینبرگ، ماروین جی. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ترجمهٔ م. هـ. شفیعی‌ها. چاپ دوم، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۶۳.