فاطمه علی‌پور ندوشن[1]، دکتر اسمعیل بابلیان[2]، محمد نشان[3]
۱. دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات
۲. دانشگاه تربیت معلم تهران
۳. دبیر ریاضی آموزش و پرورش ناحیه ۳ کرج

بررسی دانش ریاضی معلمان ریاضی

چکیده

در حال حاضر، در آموزش ریاضی، یک تمایل رو به رشد، در ارتباط با انواع دانش ریاضی، که معلمان برای تدریس مؤثر ریاضیات باید بدانند، با عنوان «ریاضیات برای تدریس»[1] شناخته شده است. مطالعات جدید نشان داده‌اند که تنها دانستن ریاضیات به عنوان یک موضوع درسی برای آماده کردن معلمان ریاضی کافی نیست. بنابراین، نسل جدیدی از پژوهشگران به الزاماتی برای آموزش معلمان ریاضی رسیده‌اند که از جمله می‌توان به دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس اشاره کرد (گویا، ۱۳۸۸). بال و همکاران (۲۰۰۵)، چارچوبی برای دانش مورد نیاز تدریس، شامل چهار حوزه تفکیک شده **دانش محتوایی عمومی، دانش محتوایی تخصصی، دانش محتوا و دانش‌آموزان و دانش محتوا و تدریس** را معرفی کردند. این چارچوب، نظر پژوهشگران را جلب کرد تا با استفاده از آن، میزان دانش معلمان ریاضی درس جبر و احتمال شهرستان کرج را در حوزه‌های فوق بررسی کند.

برای این کار، از روش توصیفی استفاده شد که محقق به توصیف انواع دانش مورد نیاز تدرسی جامعه آماری از طریق سرشماری، با توزیع پرسش‌نامه در جامعه آماری به بررسی و تحقق مورد نظر پرداخت. ۵۰٪ از پاسخ‌دهندگان، بیش از نصف نمره دانشِ محتواییِ عمومی، ۳۷/۵٪ بیش از نصف نمره دانشِ محتواییِ تخصصی، ۱۵/۶۲٪ بیش از نصف نمره دانشِ محتوا و دانش‌آموزان و ۱۷/۱۹٪ از پاسخ‌دهندگان، بیش از نصف نمره دانش محتوا و تدریس را کسب کردند.

کلیدواژه‌ها: دانش محتوایی عمومی، دانش محتوایی تخصصی، دانش محتوا و دانش‌آموزان، دانش محتوا و تدریس، کتاب درسی جبر و امتحان، دانش معلمان، تدریس ریاضیات، تحقیق کمی.

مقدمه

در حال حاضر، در آموزش ریاضی، یک تمایل رو به رشد در ارتباط با دانشِ ریاضی وجود دارند که معلمان برای تدریس مؤثر ریاضیات باید بدانند. این دانش‌ها عنوان «ریاضیات برای تدریس» شناخته شده‌اند (کوتسوپولس[۲] و لاوین[۳]، ۲۰۰۸؛ به نقل از آدلر و دیویس، ۲۰۰۶؛ بال[۴] و همکاران، ۲۰۰۵؛ دیویس و اسمیت، ۲۰۰۶). هید[۵] و دیگران (۱۹۹۱)، تأثیر دانشِ محتواییِ معلمانِ ریاضی دبیرستان را بر برنامه‌ریزی آموزشی و فعالیت‌های کلاسی نشان می‌دهد (ویلبرن[۶] و لانگ[۷]، ۲۰۱۰). معتبرترین نتایج، از تأثیر دانشِ محتواییِ معلم، پژوهش‌هایی هستند که نشان می‌دهند موفقیت دانش‌آموز، زمانی بیشتر است که معلمان دارای دانش زیادی در مورد ساختارهای موضوعی تدریسشان هستند (پاتنام و بورکو[۸]، ۲۰۰۰). شولمن[۹] (۱۹۸۶) صراحتاً بیان می‌کند که معلمان باید شیوه‌های بیان و تنظیم موضوع درسی را یاد بگیرند. بال و همکاران (۲۰۰۵)، چارچوبی برای دانشِ مورد نیاز تدریس، شامل چهار حوزه منفک از هم دانش محتواییِ عمومی، دانشِ محتواییِ تخصصی، دانشِ محتوا و دانش‌آموزان و دانشِ محتوا و تدریس معرفی کردند.

این چارچوب نظر پژوهشگران را جلب کرد تا در راستای این نظریه، میزان دانشِ ریاضی را در درس جبر و احتمال در شهرستان کرج، در حوزه‌های فوق بررسی کند.

بیان مسأله

آموزش و یادگیری ریاضیات و سنجش درک ریاضی آن‌ها، فرآیندهای پیچیده هستند که در آن، معلمان و یادگیرندگان به‌گونه‌ای مستقیم با یکدیگر در ارتباطند.

بسیاری از معلمان ریاضی، از ضعف و عدم آمادگی دانش‌آموزان خود در درک مناسب ریاضی، گله دارند و سهم خویش را در بروز مشکلات یادگیری آنان اندک می‌شمارند، در حالی که طرز تلقی معلمان ریاضی از ریاضیات و شناختی که از مخاطبان خود دارند، و نیز روش‌های تدریس آن‌ها، بر یادگیری فردی دانش‌آموزان در پردازش‌های ذهنی، یادگیری، انگیزش‌ها و نگرش‌ها سرچشمه می‌گیرند. اما مشکلات برون‌ریاضی با منشأ برون‌فردی، ریشه در عوامل فرهنگی، اجتماعی، آموزشی و چگونگی تدریس و برخورد معلمان دارد. شناسایی علمی مشکلات و آسیب‌شناختی رفتار و پیشرفت ریاضی فراگیران و تلاش واقع‌بینانه برای رفع آن‌ها موضوع جدی آموزش ریاضی و رسالتی سنگین بر دوش همهٔ کسانی است که به نوعی به تدریس و فعالیت در ریاضیات مشغولند (علم الهدایی، ۱۳۸۱).

در میان این عوامل، نقش معلمان از دیرباز به عنوان نقش اصلی در اجرا و تأمین آموزش کیفی شناخته شده است. «قضاوت دربارهٔ تدریس کارآمد را می‌توان براساس دانش و آگاهی معلم در هر درس و مهارت‌های آموزشی وی انجام داد.» (دانش پژوه، ۱۳۸۲ به نقل از لاکهیه و وسپور). هم‌چنین، مطالعات جدید بیانگر این است که تنها دانستن ریاضی به عنوان یک موضوع درسی، برای آماده کردن معلمان ریاضی کافی نیست. از این‌رو، نسل جدیدی از پژوهشگران به الزاماتی برای آموزش معلمان رسیده‌اند که از جمله می‌توان به دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس اشاره کرد (گویا، ۱۳۸۰).

بسیاری از معلمان ریاضی، از ضعف و عدم آمادگی دانش‌آموزان خود در درک مناسب ریاضی، گله دارند و سهم خویش را در بروز مشکلات یادگیری آنان اندک می‌شمارند

اهمیت و ضرورت مسأله

در دهه‌های گذشته، دانشِ ریاضی معلمان، یک موضوع نگران‌کننده بود (هیل و همکاران، ۲۰۰۴). بینش‌های نظری و تجربی جدید در کار تدریس، (مانند شولمن ۱۹۸۶، ۱۹۸۷ و

مطالعات جدید بیانگر این است که تنها دانستن ریاضی به عنوان یک موضوع درسی، برای آماده کردن معلمان ریاضی کافی نیست

ویلسون[۱۰]، شولمن و ریچرت[۱۱]، ۱۹۸۷). توجه بیشتر نسبت به نقشی که چنین دانشی در آموزش معلم و کیفیت تدریسش ایفا می‌کند، برانگیخته است (NCTAF[۱۲]، ۱۹۹۶). مطالعات دیگری، مفهوم و تنوع دانش ریاضی مورد نیاز تدریس معلمان را مستند کرده است (بال ۱۹۹۰، ما[۱۳]، ۱۹۹۹). نتایج این تلاش‌ها در استانداردهای تدریس به وسیله INTASC[۱۴]- هیئت استانداردهای حرفه‌ای تدریس- هم‌چنین به‌وسیلهٔ بسیاری از کشورها، مکان‌ها و سازمان‌های تدریس حرفه‌ای مانند NCTM نیز منعکس شده‌اند (هیل و همکاران، ۲۰۰۴).

مروری بر ادبیات موضوع

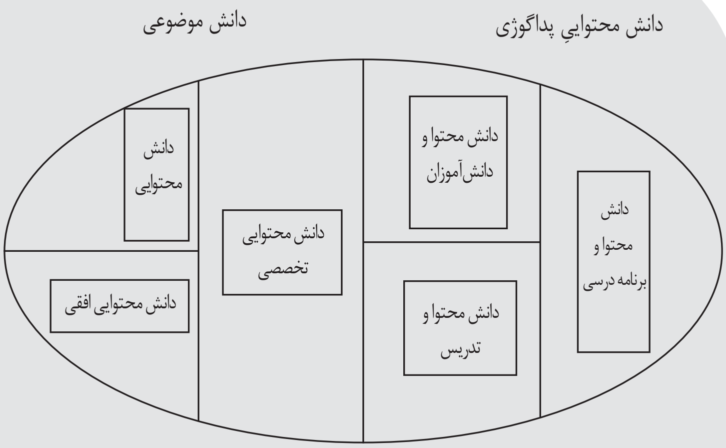
مباحث زیادی در مورد تفسیر زیربناییِ آنچه دانش ریاضی مورد نیاز و موثر برای تدریس ریاضی است، وجود داشته است (ویلبرن و لانگ، ۲۰۱۰). در اواسط دهه ۸۰، شولمن و همکارانش، ایده دانش محتوایی پداگوژی را به عنوان نوع خاصی از دانش موضوعی[۱۵] مورد نیاز تدریس معرفی کردند (هیل[۱۶]، بال و شیلینگ[۱۷]، ۲۰۰۴). مفهوم دانش محتواییِ پداگوژی برای آشنایی با موضوعاتی که برای کودکان جالب یا مشکل است، مفیدترین نتایج را برای تدریس یک ایده محتواییِ خاص و خطاها و سوءبرداشت‌های بارز یادگیرندگان، به عنوان مکملی برای دانش پداگوژی عمومی و دانش موضوعی ارائه کرد. این نام‌گذاری با عنوان «دانش محتواییِ پداگوژی» نه‌تنها تأکیدی بر اهمیت درک محتوایِ درسی در تدریس است، بلکه هم‌چنین، ادعا می‌کند که دانش فردی از یک موضوع، برای تدریس آن موضوع کافی نیست. (منظور از دانش فردی از یک موضوع، یعنی آن‌چه یک فرد تحصیل کرده باید از موضوع بداند.) این تمایز، گامی مهم در ارتباط با ایجاد شرایط و منابع لازم برای تدریس اثربخش ارائه کرد. محققان با کار عمیق در رشته‌های متفاوت درسی، اهمیت دانش محتواییِ لازم را برای تدریس بررسی کردند. مثلاً، بال و همکارانش (۲۰۰۱)، به نوشتن و آزمایش پرداختند تا بتوانند رشد دانش محتواییِ معلمان را برای تدریس و چگونگی تأثیر چنین دانشی بر پیشرفت دانش‌آموزان اندازه‌گیری کنند. پرسش آن‌ها این بود که چه دانش ریاضیاتی لازم است تا به یادگیری ریاضیات دانش‌آموزان کمک کند؟ محققان نشان دادند که در ریاضیات، آن‌چه معلمان، ممکن است نیاز داشته باشند؛ مثلاً در مورد کسرها، ارزش مکانی یا ضریب زاویه؛ با آن‌چه برای دیگران ممکن است کافی باشد، متفاوت است (بال، ۱۹۹۰، ۱۹۸۹، ۱۹۹۱، بورکو و همکاران، ۱۹۹۰؛ هارت و اسمیت، ۱۹۸۵). برخلاف این گنجینه از تحقیقات، هیل و بال و شیلینگ (۲۰۰۴) استدلال کردند که محتوای ریاضیات فعلی که معلمان باید برای تدریس بدانند، هنوز هم باید با دقت نگاشته شود. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که دانش مورد نیاز معلمان برای تدریس ریاضی ابعاد مختلفی دارد و شامل دانش موضوعات مختلف ریاضی (مثلاً اعداد، اعمال و جبر) و حوزه‌های مختلف (مانند دانش محتوایی، دانش محتوا و دانش‌آموزان) است. در حالی که بسیاری از معلمان ریاضی دبیرستانی، در رشتهٔ ریاضی تحصیل کرده‌اند، دانش موضوعی این معلمان، عموماً فاقد عمیق است (ویلبرن و لانگ، ۲۰۱۰؛ به نقل از بری‌یان[۱۸] ۱۹۹۱). به‌طور کلی دانش موضوعی معلمان ریاضی، به تعداد دوره‌های آموزشی دانشگاه، میانگین نمره آن‌ها یا نمرات آزمون استاندارد بستگی ندارد (ویلبرن و لانگ، ۲۰۱۰؛ به نقل از اون[۱۹]، ۱۹۹۳، بال ۱۹۹۰). گویا (۱۳۸۶) بیان می‌کند که «دانش حرفه‌ای معلمان باید به‌جای بررسی درستی و نادرستی یک انتخاب، به افزایش آگاهی نافذ معلمان از امکانات و ارتقای توانایی‌های آن‌ها در مورد تصمیم‌گیری‌های آگاهانه بپردازد». معلمان اغلب رابطه‌ای بین وقایع و رخدادهای کلاس درس خود و تعمیم‌هایی که در مورد تدریس و یادگیری در دانشگاه‌ها به آن‌ها آموزش داده می‌شود، نمی‌بینند. به گزارش اکثر معلمان، تا زمانی که خودشان شروع به تدریس نکرده‌اند، چیز ارزشمندی در مورد تدریس نیاموخته‌اند. استانداردها و برنامه‌های درسی جدید به معلمانی نیازمند است که درک عمیقی از موضوعات درسی خود داشته باشند (گویا، ۱۳۸۶).

دانش ریاضی برای تدریس و ساختارهایش

بال، بس، اسلیپ و تامس (۲۰۰۵)، چارچوبی برای دانش ریاضی مورد نیاز تدریس ارائه کردند. این چارچوب، شامل چهار حوزه متمایز دانش محتواییِ عمومی (CCK)، دانش محتواییِ تخصصی (SCK)، دانش محتوا و دانش‌آموزان (KCS) و دانش محتوا و تدریس(KCT) است. در چارچوب پیشنهادی آن‌ها، KCS و KCT به دانش محتواییِ پداگوژی شولمن نسبت داده شده است و به‌جای شروع از برنامه درسی یا استانداردهای مورد نیاز یادگیری دانش‌آموزان، تأکید بر موضوعی است که مستلزم تدریس است بدین ترتیب، بال و همکاران (۲۰۰۸) تلاش کردند تا نظریه دانش مورد نیاز تدریس شولمن را توسعه دهند (شکل ۱ را ببینید).

منظور از دانش محتواییِ عمومی ریاضی، دانش ریاضی برنامه درسی مدرسه‌ای مانند اعداد اول، توانایی ضرب کسرها، تبدیل کسرها به اعداد اعشاری و از این قبیل است. لازم است معلمان، ماده درسی خود را بشناسند و قدرت تشخیص این که چرا دانش‌آموزان‌شان، پاسخ نادرست داده‌اند یا چرا تعریف کتاب درسی نادقیق است را داشته باشند. معلمان باید عبارات و نمادها را به درستی به‌کار ببرند و قادر به انجام کاری باشند که از دانش‌آموزانشان انتظار انجامش را دارند (بال و دیگران، ۲۰۰۸).

دانشِ محتوا و دانش‌آموزان، ترکیب دانستن درباره دانش‌آموزان و دانستن درباره ریاضیات است. لازم است که معلمان، به آنچه که دانش‌آموزان به دانستن آن‌ها تمایل دارند، در مورد آن فکر کنند و آن‌چه را که باعث گیج شدن آن‌ها می‌شود، پیش‌بینی کنند. به خصوص هنگام انتخاب مثال، معلمان آن مثال‌ها به‌گونه‌ای باشند که دانش‌آموزان به آن علاقه ایجاد کنند و باعث ایجاد انگیزه در آن‌ها شود. معلمان باید قادر باشند تفکر برآمده از درک دانش‌آموزان[۲۰] و ناقص[۲۱] را که گاهی از زبان آن‌ها بیان می‌شود، تفسیر کنند. هم‌چنین، با اشتباهات رایج و تصمیم‌گیری در مورد این‌که دانش‌آموزان کدام یک از خطا را بیشتر مرتکب می‌شوند، آشنا باشند. هر کدام از این وظایف، مستلزم تعامل بین درک ریاضیات تخصصی و آشنایی با دانش‌آموزان و تفکر ریاضی آن‌هاست. «در هر حال دانشِ دانش‌آموز و محتوا، ترکیبی شامل اندیشه‌ها و رویه‌های[۲۲] خاص ریاضی و آشنایی با آن‌چه دانش‌آموزان، اغلب می‌اندیشند یا انجام می‌دهند، است.» (بال و همکاران، ۲۰۰۸).



شکل۱) حوزه‌های دانش ریاضی برای تدریس (بال و همکاران، ۲۰۰۸)

روش تحقیق

این پژوهش، به صورت توصیفی انجام شد که در آن پژوهشگر (نویسنده اول) به توصیف دانش محتواییِ عمومی، دانش محتواییِ تخصصی، دانش محتوا و دانش‌آموزان و دانش محتوا و تدریس معلمان پرداخت. سپس ارتباط بین متغیرهای سابقه تدریس، جنسیت، نوع مدرک و میزان تحصیلات را با انواع دانش معلمان مورد سنجش قرار داد.

ویژگی‌های پژوهش

افراد شرکت‌کننده در این پژوهش معلمان ریاضی درس جبر و احتمال بودند که در نواحی چهارگانه کرج، در سال تحصیلی ۸۹-۸۸ مشغول تدریس بودند این مطالعه به صورت سرشماری انجام شد و تعداد افراد شرکت‌کننده ۶۴ نفر بود.

نوع دانش	محتوایی عمومی	محتوایی تخصصی	محتوا و دانش‌آموزان	محتوا و تدریس
ضریب پایایی	۰/۸۲	۰/۸۴	۰/۹۱	۰/۸۳

روش اجرای پژوهش

ابتدا استناد یافته‌های پژوهشی این حوزه، پارامترهای مختلف مربوط به دانش‌های مورد نیاز تدریس تعیین شدند. سپس، پرسش نامه‌ای براساس اهداف و سؤالات تحقیق، مطابق با سرفصل‌های کتاب درسی جبر و احتمال سوم دبیرستان، تنظیم شد. این پرسش‌نامه شامل یازده سؤال تشریحی بود که هشت سؤال آن دقیقاً از مسائل کتاب درسی جبر و احتمال انتخاب شده بود. یکی دیگر از سؤالات، مسئله امتحان نهایی هماهنگ کشوری خرداد ۸۶ و یک سؤال دیگر، شبیه مسئله کتاب درسی جبر و احتمال، با کمی تغییر (تبدیل n به n+۱) و دیگری در محدوده محتوایِ کتاب درسی جبر و احتمال بود.

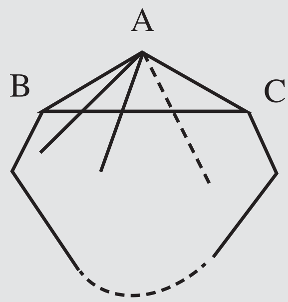
اعتبار محتوای پرسش‌نامه توسط استادان راهنما، مشاور و چند تن از دبیران ریاضی، تأیید شد. ابتدا تحقیق مقدماتی با ۲۰ نفر انجام شد و پایایی داده‌ها، در این تحقیق، جهت تعیین پایایی پرسش‌نامه از آزمون «آلفای کرونباخ» استفاده و پایایی پرسش‌نامه ۰/۸۵ برآورد شد. ضریب پایایی دانش‌ها نیز از طریق آلفای کرونباخ بررسی شد که نتایج آن در جدول ۱ آمده است. مقادیر آلفای محاسبه شده نشان می‌دهد که سؤالات مربوط به هر دانش، از همبستگی درونی قابل قبولی برخوردارند.(**جدول بالا**)

بعضی از سؤالات پرسش‌نامه و توصیف پاسخ‌های معلمان

سؤال اول) با استفاده از اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-۳)}{۲}$.

(سؤال قسمت الف صفحه ۱۵ کتاب درسی جبر و احتمال سال تحصیلی ۸۹-۸۸)

پاسخ:



P(n): تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب $= \frac{n(n-۳)}{۲}\ ,\ n \geq ۳$

آزمون فرض:

P(۳): تعداد قطرهای هر مثلث $= \frac{۳(۳-۳)}{۲} = ۰$ درست است

فرض استقراء:

P(k): تعداد قطرهای هر k ضلعی محدب $= \frac{k(k-۳)}{۲}$

حکم استقرا:

P(k+۱): تعداد قطرهای هر (k+۱) ضلعی محدب $= \frac{(k+۱)(k-۲)}{۲}$

اثبات: یک (k+۱) ضلعی محدب دلخواه انتخاب می‌کنیم. (شکل ۴-۱ را ببینید.) از سه رأس مجاور همِ A، B و C نقاط B و C را به هم وصل می‌کنیم تا یک مثلث و یک k ضلعی محدب تشکیل شود.

BC تعداد قطرهایی که از A می‌گذرد

تعداد قطرهای (k+۱) ضلعی محدب = تعداد قطرهای k ضلعی محدب + $[(k+۱)-۳]+۱ =$

$$\frac{k(k-۳)}{۲} + k - ۱ = \frac{k^۲ - ۳k + ۲k - ۲}{۲} = \frac{k^۲ - k - ۲}{۲} = \frac{(k+۱)(k-۲)}{۲}.$$

بسیاری از معلمان ریاضی، از ضعف و عدم آمادگی دانش‌آموزان خود در درک مناسب ریاضی، گله دارند و سهم خویش را در بروز مشکلات یادگیری آنان اندک می‌شمارند

توضیح عبارت داخل کروشه: تعداد رئوس، $k+۱$ است. اگر از رأس A به رئوس دیگر وصل کنیم قطر به‌وجود می‌آید مگر به رأس‌های A ، B و C. پس سه رأس کم می‌شود. ضمناً BC در $(k+۱)$ ضلعی یک قطر است در صورتی که در k ضلعی، یک ضلع است.

نتایج تحلیل پاسخ‌های داده شده به این سؤال:

۲۷ نفر پاسخ‌دهنده، $P(n)$ را غلط نوشتند و به جای یک گزاره‌نما، از یک عبارت ریاضی به صورت زیر استفاده کردند:

$$P(n)=\frac{n(n-۳)}{۲}$$

۱۷ نفر در اثبات حکم استقراء به جای $(k+۱)$ ضلعی با k ضلعی شروع کردند، به‌طوری که k ضلعی را در نظر گرفته، یک رأس به آن اضافه نموده و روند اثبات را ادامه دادند. در صورتی که در حکم استقراء، ساخت $(k+۱)$ ضلعی موردنظر نیست، بلکه محاسبه تعداد قطرهای یک $(k+۱)$ ضلعی دلخواه لازم است.

یک نفر بیان کرد که «این مسئله با استقرای ریاضی حل نمی‌شود، زیرا در تعداد قطرها، نظم خاصی وجود ندارد.» و از استدلال استقرایی استفاده کرد. ۹ نفر، آزمون فرض را به جای سه ضلعی (مثلث)، با چهارضلعی شروع کردند. یک نفر، به غلط بودن صورت سؤال اشاره کرده و صورت سؤال را به شکلی ناصحیح عوض کرد. یک نفر هم آزمون فرض را انجام نداد.

۱ نفر، با بی‌دقتی تمام برای محاسبه تعداد قطرهای $k+۱$ ضلعی بدین صورت عمل کرده است:

تعداد قطرهای $(k+۱)$ ضلعی = تعداد قطرهای k ضلعی + $\frac{k+۱}{۲}$

از کجا آورده؟

$$=\frac{(k+۱)(k-۲)}{۲}\;\frac{k(k-۳)}{۲}+\frac{k+۱}{۱}=\frac{k^۲-۲k+۲}{۲}$$

در تجزیه صورت اشتباه کرده!   از کجا آورده؟

در اثبات فوق، هویت عدد $\frac{k+۱}{۲}$ معلوم نیست که در طرف دیگر به $\frac{k+۱}{۱}$ تبدیل شده و در تساوی بعدی، برای جمع دو کسر، همان $\frac{k+۱}{۲}$ در نظر گرفته شده و در تجزیه به غلط $k^۲-۲k+۲$ را به صورت $(k+۱)(k-۲)$ درآورده است. یک نفر برای استدلال تعداد قطرها، از استدلال استقرایی استفاده کرده، ۲ نفر بدون هیچ مقدمه‌ای، عدد $\frac{k(k-۳)}{۲}$ را با $k-۱$ جمع کرده و طرف دوم تساوی را به‌دست آوردند. هم‌چنین، ۲۱ نفر بدون بیان دلیل اشاره کردند که $k-۱$ قطر به قطرهای k ضلعی اضافه می‌شود و ۸ نفر بدون توضیح لازم، تعداد $(k-۲)+۱$ قطر را به قطرهای k ضلعی اضافه کردند. بالاخره، ۲ نفر عدد $(k-۲)+۱$ را اضافه کردند و فقط ۷ نفر به‌طور کامل به سؤال پاسخ دادند.

سؤال دوم) به استقراء ثابت کنید

$۱+۳+...+(۲n+۱)=(n+۱)^۲$ (سؤال ۱ قسمت پ صفحه ۱۴ کتاب درسی جبر و احتمال سال تحصیلی ۸۹-۸۸ با کمی تغییر)

پاسخ:

آزمون فرض: درست است

$$n=۱:۱+۳=(۱+۱)^۲\Rightarrow ۴=۴$$

فرض استقراء:

$$n=k:۱+۳+...+(۲k+۱)=(k+۱)^۲$$

حکم استقراء:

$$n=k+۱:۱+۳+...+۲(k+۳)=(k+۲)^۲$$

اثبات:

$$۱+۳+...+(۲k+۱)+(۲k+۳)=(k+۱)^۲+(۲k+۳)$$
$$=k^۲+۴k+۴=(k+۲)^۲$$

بنابراین، حکم فوق به ازای هر عدد طبیعی n برقرار است.

بحث در مورد پاسخ‌های داده شده به این سؤال:

از بین پاسخ‌دهندگان، ۱۰ نفر سؤال را غلط پنداشتند (زیرا آزمون فرض را به صورت $(۱+۱)^۲=۱$ نوشتند) و از پاسخ دادن به سؤال صرف‌نظر کردند. ۷ نفر، سؤال را به همان دلیل فوق غلط پنداشتند و صورت سؤال را به شکل $۱+۳+...+(۲n+۱)=n^۲$ تغییر دادند، سپس آن را حل کردند که این همان مسئله کتاب درسی جبر و احتمال، صفحه ۱۴ است. یک نفر، در طرف چپ تساوی $P(۱)$ دچار مشکل شده آن را رها کرد و اصلاً چیزی

ننوشت. ۸ نفر بدون این‌که طرف اول تساوی حکم را بنویسند، به اثبات پرداختند؛ یعنی اثبات را با $(k+1)^2+(2k+3)$ شروع کردند.

۴۶ نفر به این سؤال پاسخ صحیح دادند که یک نفر، عدد ۱ را به طرف دوم تساوی منتقل کرد، سپس آن را با استقراء حل نمود. یک نفر، طرف راست حکم را به توان رسانده سپس از طرفین عدد ۱ را ساده کرد و آن را با استقراء حل کرد. یک نفر هم به جای $=$، از علامت $\Rightarrow$ استفاده کرد.

در بررسی پاسخ‌های به این سؤال، مشاهده شد که عده‌ای به جای این‌که از یک طرف تساوی شروع و با استدلال استنتاجی به طرف دیگر تساوی برسند، از اواسط کار شروع به استدلال می‌کنند که منجر به استدلالی ناقص می‌شود، به طوری که ارزش تساوی برای دانش‌آموز مشخص نمی‌شود.

سؤال سوم) رابطهٔ R در Z به صورت $xRy \Leftrightarrow 3|x-y$ تعریف شده است. ثابت کنید R یک رابطه بازتابی است (سؤال ۱ صفحه ۷۰ کتاب درسی جبر و احتمال سال تحصیلی ۸۹-۸۸).

پاسخ: بازتابی است.

$$\forall x \in Z; 3|0 \Rightarrow 3|x-x \Rightarrow xRx$$

تحلیل پاسخ‌ها

۲۳ نفر، رابطهٔ بازتابی را به صورت عکس نوشتند. یعنی به جای اثبات گزاره شرطی $p \Rightarrow q$، گزاره شرطی $q \Rightarrow p$ را به این صورت ثابت کردند:

$$\forall x \in Z; xRx \Rightarrow 3|x-x \Rightarrow 3|0$$

۴۱ نفر نیز به این سؤال، پاسخ درست دادند.

سؤال چهارم) دانش‌آموزی مسئله زیر را حل کرده است. درستی یا نادرستی راه‌حل او را بررسی کنید. برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S داریم $P(A)=P(B)=1$. نشان دهید $P(A \cap B)=1$

(تمرین ۶ صفحه ۱۲۱ کتاب درسی جبر و احتمال سال تحصیلی ۸۹-۸۸).

راه‌حل دانش‌آموز:

$$P(A)=P(B)=1 \Rightarrow A=B=S$$
$$P(A \cap B)=P(S \cap S)=P(S)=1$$

راه‌حل درست:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=1+1-P(A \cap B)$$
$$=2-P(A \cap B)$$

$$\begin{cases} P(A \cup B) \le 1 \\ P(A \cap B) \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-P(A \cap B) \le 1 \Rightarrow P(A \cap B) \le 1 \\ P(A \cap B) \le 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow P(A \cap B)=1$$

توضیح: از $P(A)=P(B)=1$ نمی‌توان $A=B=S$ را نتیجه گرفت. زیرا اگر $S=[0,2]$ و $A=(0,2]$ و $B=[0,2)$ آنگاه $P(A)=P(B)=P(S)$ ولی $A \neq B \neq C$.

تحلیل پاسخ‌ها

یک نفر بیان کرد که باید قبلاً ثابت می‌شد که چرا $A=B=S$. ولی خودش، همان راه‌حل دانش‌آموز را به عنوان اثبات، تکرار کرد. ۴ نفر به دلیل نادرست بودن اثبات دانش‌آموز اشاره کردند ولی اثبات صحیح را انجام ندادند. ۲ نفر، به نادرستیِ پاسخ اشاره نمودند ولی توضیح نادقیقی ارائه کردند و گفتند که «A و B باید مستقل باشند یعنی جدا از هم، در صورتی که A و B برابرند!» در حالی که دو مقولهٔ «مستقل» و «جدا از هم» دو تعریف متفاوت دارند، زیرا دو پیشامد زمانی مستقل از هم هستند که رخ دادن یکی، تأثیری بر رخ دادن دیگری نداشته باشد و زمانی جدا از هم هستند که اشتراک دو پیشامد تهی باشد.

از این گذشته، ۴ نفر به نادرستی پاسخ اشاره کردند ولی دلیل مناسبی برای آن ارائه ندادند. یک نفر هم فقط به نادرستی پاسخ اشاره کرده بود و هیچ دلیل و اثباتی برای آن نیاورده بود. ۳ نفر ادعا کردند راه‌حل دانش‌آموز در فضای گسسته درست و در فضای پیوسته نادرست است. ۳ نفر به نادرستی پاسخ دانش‌آموز اشاره کرده و دلیل درست آن را نوشته بودند. این در حالی بود

که ۷ نفر به درستی، ثابت کردند که $P(A\cap B)=1$، ولی به دلیل غلط‌بودن راه‌حل دانش‌آموز اشاره نکردند. ۳ نفر هم فضا را فقط گسسته در نظر گرفتند و همان اثبات‌های دانش‌آموز را تکرار کردند. اما اکثریت ۳۱ نفری، بیان کردند که «راه‌حل دانش‌آموز کاملاً درست است» و یک نفر با تردید، بیان کرد که «این راه‌حل ناصحیح نیست»، ۱ نفر هم اظهار کرده بود که «به نظرم درستی راه‌حل، بعید می‌آید. ولی دلیلی برای آن ندارم».

دیگری بیان کرده بود که «اثبات اشتباه است» و همان مطالب دانش‌آموز را با نتیجه‌گیری از متمم پیشامد نوشته بود. یک نفر دیگر نیز نوشته بود که «راه‌حل فوق با کمی اغماض از یک دانش‌آموز پذیرفته است» و بعد خودش دقیقاً، همان راه‌حل دانش‌آموز را تکرار کرده بود. بالاخره، یک نفر گفته بود که «راه‌حل دانش‌آموز کاملاً درست می‌باشد و حل او نشان‌دهنده درک مفهوم احتمال و ارتباط پیشامدها با فضای نمونه آن‌ها می‌باشد» و ۴ نفر، هیچ پاسخی ندادند.

سؤال پنجم) نظر تحلیلی خود را در مورد صورت سؤال زیر و پاسخ آن بنویسید (آزمون هماهنگ کشوری ۸۶/۳/۲۳).

رابطهٔ R در $Z^2-\{(0,0)\}$ به صورت مقابل تعریف شده است:

$$(a,b)R(c,d)\Rightarrow \frac{a}{b^3}=\frac{c}{d^3}$$

نشان دهید R یک رابطه هم ارزی است.

پاسخ:

۱) $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow \frac{a}{b^3}=\frac{c}{b^3}$

۲) $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow \frac{a}{b^3}=\frac{c}{d^3}\Rightarrow \frac{c}{d^3}=\frac{a}{b^3}\Rightarrow (c,d)R(a,b)$

۳) $$\left.\begin{array}{l}(a,b)R(c,d)\Rightarrow \frac{a}{b^3}=\frac{c}{d^3}\\ (c,d)R(e,f)\Rightarrow \frac{c}{d^3}=\frac{e}{f^3}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{b^3}=\frac{e}{f^3}\Rightarrow (a,b)R(e,f)$$

مشکلات برون‌ریاضی با منشأ درون‌فردی، از ویژگی‌های فردی دانش‌آموزان در پردازش‌های ذهنی، یادگیری، انگیزش‌ها و نگرش‌ها سرچشمه می‌گیرند

چون R هر سه خاصیت بازتابی، تقارنی و ترایایی را دارد، پس R یک رابطه هم‌ارزی است.

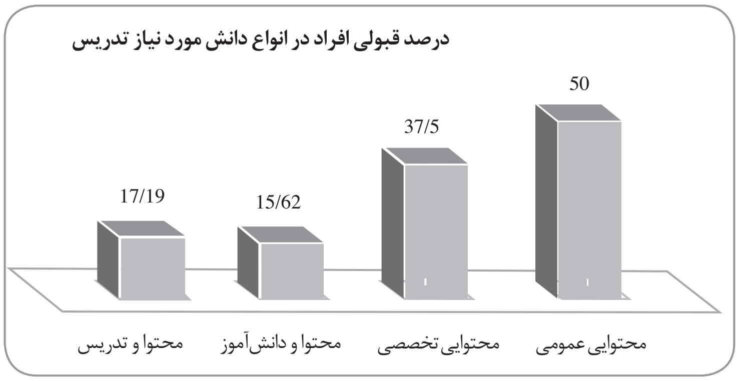
پاسخ:

صورت مسئله دارای دو اشکال عمده است. اول آن‌که تعریف باید به صورت دو شرطی بیان شود. دوم آن‌که رابطه باید روی $(Z-\{0\})^2$ تعریف شود. یعنی به جای $Z^2-\{(0,0)\}$ باید $(Z-\{0\})^2$ باشد تا تعریف داده شده درست باشد.

تحلیل پاسخ‌ها

در ابتدای هر گزاره شرطی، یک نفر به سؤال و پاسخ، یک کلمه «اگر» افزود در حالی‌که یک دیگر نوشت که «چون رابطه صورت مسئله دو شرطی نیست، پس دو شرطی بودن رابطه‌های ۱ و ۲ الزاماً درست نمی‌باشد». علاوه بر این، یک نفر هم نوشته بود. «رابطهٔ R در $Z^2-\{(0,0),(a,0),(b,0)\}$ تعریف شود» و بعضی متوجه اشکال «مخرج نباید صفر باشد» شده بودند ولی قادر به رفع اشکال آن در صورت سؤال نبودند. اما یک نفر دیگر گفته بود که «سؤالی بسیار مناسب برای سنجش میزان تسلط فراگیران بر مفهوم خواص هم‌ارزی روابط است» و دیگری بیان نموده بود که یک نفر گفته، «چون تعریف $(a,b)R(c,d)\Rightarrow \frac{a}{b^3}=\frac{c}{d^3}$ به صورت یک شرطی بیان شده، باید اثبات بازتابی‌بودن و تقارنی به صورت یک شرطی بیان شود». یک نفر هم اشکال سؤال را به درستی تشخیص داده بود. اما ۹ نفر پاسخی ارائه ندادند و ۲ نفر، نظری در مورد سؤال نداشتند. البته ۱۹ نفر گفتند که «سؤال و پاسخ آن کاملاً صحیح است» و ۵ نفر، متوجه اشکالات نشدند و اشکال‌های بی‌اساس گرفتند. با این حال، ۳ نفر به یک طرفه بودن ترکیب شرطی سؤال اشکال گرفتند و ۲۱ نفر، فقط به صفر نبودن مخرج اشاره کردند و گفتند که «باید رابطه در $Z-\{0\}$ تعریف شود.»

موفقیت دانش‌آموز، زمانی بیشتر است که معلمان دارای دانش زیادی در مورد ساختارهای موضوعی تدریسشان هستند



تذکر: در پاسخ به سؤالات تحقیق، نمره قبولی بزرگ‌تر یا مساوی نصف امتیاز کامل هر دانش محسوب شد.

بررسی سطح دشواری تدریس موضوعات کتاب جبر و احتمال

در راستای بررسی پاسخ‌های معلمان در نظرسنجی پیوست پرسش‌نامه، نتایج زیر به دست آمد.

♦ ۱۲/۵٪ معلمان به اشکال در تدریس استقرای ریاضی (فصل ۱ کتاب درسی) اشاره کردند.

♦ ۱۶٪ آزمون‌شوندگان، به اشکال در تدریس جبر مجموعه‌ها (فصل ۲ کتاب درسی) اشاره کردند.

♦ ۳/۵٪ معلمان به اشکال در تدریس هم‌ارزی (فصل ۳ کتاب درسی) اشاره کردند.

♦ ۷/۸٪ معلمان به اشکال در تدریس و حل تمرینات مربوط به احتمال (فصل ۴ کتاب درسی) اشاره کردند (به‌ویژه احتمال پیوسته).

♦ ۶/۳٪ معلمان به کمبود بحث منطق ریاضی در کتاب درسی اشاره کردند.

♦ ۵۴٪ معلمان ابراز کردند که «مشکلی ندارند» یا به مشکلی اشاره نکردند.

۴. اشتباهاتی که معلمان در پاسخ‌هایشان مرتکب شدند

♦ برخی از معلمان در حل مسائل، به جملات فارسی توجهی نداشتند و فقط به علائم و نمادها توجه کردند. همان‌طور که در حل مسئله ۷ توسط دانش‌آموز، به برگشت‌پذیری روابط شرطی اشاره شده بود، ولی ۲۰٪ از معلمان بیان کردند که یکی از اشکالات راه‌حل‌های دانش‌آموزان، نگذاشتن علامت ⇔ است.

♦ برخی از معلمان، بین استدلال استقرایی و استقرای ریاضی تمایزی قائل نشدند.

♦ برخی از معلمان، صورت سؤال را به دقت نخواندند و به تمام قسمت‌های آن پاسخ ندادند.

نتیجه‌گیری

• دانش مورد نیاز تدریس ریاضی در دوره متوسطه، دارای کاستی‌هایی است که لازم است مسئولان آموزشی برای حل این معضل، چاره‌ای بیندیشند.

• آموزش‌های پیش از خدمت و ضمن خدمت معلمان ریاضی دوره متوسطه، از کارایی لازم برخوردار نیست.

• دانش مورد نیاز تدریس بسیاری از معلمان ریاضی دبیرستان، فاقد عمق کافی است.

پیشنهادهای این تحقیق

• پیشنهاد می‌شود که دانشگاه‌ها و مراکز تربیت معلم، برای دانشجویان، دوره‌های کارآموزی به صورت حضور در کلاس درس دبیران با تجربه برگزار کنند.

• دانش‌های مورد نیاز تدریس ریاضی، به صورت علمی و عملی در دانشگاه‌ها تدریس شود.

• کتاب‌های درسی مطابق با آخرین دستاوردهای آموزش ریاضی، تدوین و تألیف گردند.

پی‌نوشت

1. mathematics for teaching
2. Kotsopoulos
3. Lavigne
4. Ball
5. Heid
6. Jane M Wilburne
7. Michael Long
8. Putnum and Borko
9. Shulman
10. wilson
11. Richert
12. National Commission on Teaching and America's Future
13. Ma
14. Inter State New Teacher Assessment and Support Consortiums
15. Subject matter knowledge
16. Hill
17. Schiling
18. Bryan
19. Even
20. Eemerging
21. incomplete
22. procedures

منابع

۱. علم‌الهدایی، سیدحسن. (۱۳۸۱). **راهبردهای نوین در آموزش ریاضی**، نشر شیوه.

۲. گویا، زهرا، (۱۳۸۰)، توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی: یک ضرورت. **مجله رشد آموزش ریاضی**، ۶۴، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش‌وپرورش.

۳. گویا، زهرا، (۱۳۸۶). آموزش معلمان: چشم‌انداز ارائه شده در یکی از سندهای پروژه ۲۰۶۱، **مجله رشد آموزش ریاضی**. ۸۹، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۴. گویا، زهرا، (۱۳۸۸)، دفتر محتوای پداگوژی برای تدریس ریاضی، گزارش چهلمین کنفرانس ریاضی کشور. دانشگاه صنعتی شریف.

5. Ball D. L., (2003), **Mathematical Proficiency foe all Students: Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education**, RAND Mathematics Study Panel.

6. Ball D. L., Bass H., Sleep L. & Thames M., (2005), **A Theory of Mathematical Knowledge for Teaching.** University of Michigan.

7. Ball D. L., Thames M. H. & Phelps G., (2008), **Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?** Journal of Teacher Education American Association of Colleges for Teacher Education (AACTE).

8. Ball D., & et al. (2001). **Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge**, In V Richardson (Ed.), Handbook of resarch on teaching (4^{th} ed).

9. Grossman P. L., (1990). **The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education**, New York: Teachers College Press.

10. Hill H., Ball, D. & Schilling, S., **Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching**, The elementary school journal, vol 105, No 1, 2004.

11. Kotsopoulos D. & S. Lavigne. (2008). **examining mathematics for teaching through an analysis of teachers' perceptions of student learning paths,** International Electronic Jouranl of Mathematics Education, Volume 3, Number 1.

12. National Commission of Teaching and America's Future, (1996), **What matters most: Teaching and America's Future.** New York: Author.

13. National Council of Teachers of Mathematics, (1991), **Professional standards of teaching mathematics,** Reston, Virginia: NCTM.

14. National Council of Teachers of Mathematics, (2000), **Principles and standards for school mathematics.** Reston, Virginia: NCTM, Accessible at http://www.nctm.org.

15. National Council of Teachers of Mathematics, (2003), **The use of technology in the learning and teaching of mathematics,** NCTN, position statement.

16. Putnam, R. T., & Borko, H., (2000), **What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning?**, Educational Researcher, 29(1).

17. Shulman L. S., (1986). **Those who understand: Knowledge growth in teaching,** Educational Researcher, 15(2).

18. Shulman L. S., (1987), **Knowledge and teaching: Foundations of new reform,** Harvard Educational Review, 57.

19. U. S. Department of Education, (2002), **Meeting the highly qualified teachers challenge: The Secretary's annual report on teacher quality**, Washington, DC: U. S, Department of Education, Office of Postsencondary Education, Office of Policy, Planning, and Innovation.

20. Wilburne J M. & Long, M., (2010), **Secondary Pre-Service Teachers' Content knowledge for State Assessments: Implications for Mathematics Education Programs**, IUMPST, Vol. 1. [www.k-12prep.math.ttu.edu].

21. Wilson, S. M., Shulman, L. S., & Richert, A., (1987), **different ways of konwing: Representations of knowledge in teaching**, In J. Calderhead (Ed.), Exploring, teacher thinking. Sussex: Holt, Rinehart & Winston.