مقاله

یوسف آذرنگ
کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان سردشت(آذربایجان‌غربی)

پیوستگی از شهود تا دقت

مقدمه

اگر حسابان را یکی از شاخه‌های مهم و زیبای ریاضی تلقی کنیم، باید بپذیریم که مفهوم پیوستگی هم از مفاهیم مهم و کاربردی این حوزه است؛ به‌گونه‌ای که درسراسر کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، کاربرد مفهوم پیوستگی در قالب قضیه‌های گوناگون به چشم می‌خورد. درک این مفهوم و به‌کارگیری روابط و قضیه‌های آن، وابسته به درک مفاهیم کلیدی دیگری است که از مفاهیم پربار حسابان به‌شمار می‌آیند.

در این حوزه، مشکلات یادگیری دانش‌آموزان تنها مربوط به جبر و اعمال ریاضی مربوط به آن‌ها نیست، بلکه در بیشتر موارد، مربوط به مفاهیمی‌اند که به‌صورت جدیدی نشان داده می‌شوند و به نوعی با فرآیندهای نامتناهی درگیرند. به‌طور مثال، در محاسبه $\lim_{x\to ۱}(۴x-۷)$، هرچند با یک عمل جبری ساده به جواب می‌رسیم ولی عملاً درگیر فرآیندی نامتناهی هستیم و تفکر حسابانی چهره غالب‌تری نسبت به تفکر جبری دارد.

کار کردن با این دو نوع تفکر و رسیدن از تفکر جبری به تفکر آنالیزی کار ساده‌ای نیست و نیازمند این است که مسیر شهود به دقت، با تأمل و درک مناسبی طی شود.

در این مقاله، در ارتباط با پیوستگی که یکی از مفاهیم اصلی حسابان است، به موارد زیر اشاره می‌شود.

۱- تعریف پیوستگی ۲- مفاهیم درگیر با مفهوم پیوستگی ۳- پیوستگی و قضایای آن

علاوه‌بر این‌ها، مواردی از تعبیرها و بررسی‌های دانش‌آموزان ذکر شده است تا نشان دهیم چیزی که با زبان شهود قابل بیان است، کافی نیست و در بیشتر موارد، دقت لازم ریاضی را ندارد.

کلیدواژه‌ها: شهود، پیوستگی تابع، بدفهمی، مشکلات یادگیری، حسابان.

تعریف پیوستگی

در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال آمده است که «به‌طور شهودی، تابعی را در نقطه a پیوسته گویند که نمودار آن در نقطه a بریدگی یا پرش نداشته باشد» (تعریف ۱).

در کتاب‌های درسی حسابان و ریاضی۳ هم با ذکر مثال‌های

متعدد مشابه، از همین تعریف شهودی استفاده شده است. تجربه تدریس کلاسی نویسنده نشان می‌دهد که اگر بعد از همین تعریف، به دانش‌آموزان نمودار چند تابع را بدهیم و از آنان بخواهیم پیوستگی آن‌ها را بررسی کنند، دانش‌آموزان در پاسخ به آن‌ها با مشکل خاصی مواجه نمی‌شوند و مفهوم پیوستگی را با زبان نمودارها به راحتی درک می‌کنند. درواقع، این تعریف شهودی است بدین دلیل که تکیه‌اش بر اشکال هندسی از جمله نمودارهای عینی و قابل فهم هستند. از این جهت در ریاضی، اغلب برای شهودی کردن یک مطلب، نمودارها به کار گرفته می‌شوند. در مقابل به تعریف مجرد پیوستگی با استفاده از مفهوم حد توجه کنیم:

«تابع f در نقطه a پیوسته است، هرگاه در یک همسایگی a تعریف شده و حد آن در a برابر f(a) باشد؛ یعنی $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ »(تعریف ۲).

اگر به دنبال این تعریف، از دانش‌آموزان بخواهید که پیوستگی توابع زیر را در نقطهٔ داده شده بررسی کنند؛

$۱)\ f(x) = \sqrt{x}$ در $x = ۰$

$۲)\ f(x) = \dfrac{۱}{[x-۱]}$ در $x = ۱$

$۳)\ f(x) = \sqrt{x^۳ - x^۲}$ در $x = ۰$

به نظر شما چه تعداد از دانش‌آموزان قادرند به پاسخ درست برسند؟

چون می‌دانیم دانش‌آموزان قبل از مفهوم پیوستگی، با مفهوم حد، تابع و همسایگی آشنا شده‌اند. لذا انتظار داریم برمبنای تعریف پیوستگی و مفاهیم خوانده شده به درستی به جواب برسند. ولی تجربه تدریس نشان می‌دهد که همیشه کار به این سادگی نیست، زیرا بسیاری از دانش‌آموزان در برخورد با این مسایل، با مشکل مواجه می‌شوند و به راحتی و با دقت کافی نمی‌توانند مفهوم پیوستگی را در این توابع بررسی کنند. پس چه کار باید کرد؟

از آنجا که دانش‌آموزان با مفهوم همسایگی تا حدودی آشنایی دارند، بهتر است آن‌ها را راهنمایی کنیم که در اولین قدم، رفتار توابع را در نقطه داده شده بررسی کنند.

اگر بخواهیم تعاریف (۱) و (۲) پیوستگی را با هم مقایسه کنیم، می‌بینیم که دانش‌آموزان در استفاده از تعریف (۲) نیازمند دقت و تأمل بیشتری هستند، زیرا آن‌ها باید مفاهیم بیشتری را بازخوانی

یافته‌های تحقیقی نشان می‌دهند که حد نیز مانند تابع، دو صورت فرآیندی و شییء دارد، یعنی فرآیندی است که مرتباً تکرار می‌شود و گاهی نتیجه آن یک مقدار است. نماد lim در عبارت $\lim\limits_{x \to a} f(x)$، تابع f را به کار می‌برد و طی فرآیندی نامتناهی، درصورت امکان آن‌را به صورت یک مقدار عددی نشان می‌دهد

کنند. علاوه‌بر این‌ها، وقتی یک تابع به صورت یک عبارت جبری (و نه یک نمودار) معرفی می‌شود، ایجاد ارتباط معنادار بین مفاهیم هم مشکل‌تر خواهد شد. لذا حرکت از شهود نموداری -که ملموس است- به سمت تجرید، دشوارتر به نظر می‌رسد.

برای تسهیل این مسیر، طبق تجربه خویش، برای تقویت تفکر ریاضی دانش‌آموزان (و نه صرفاً انجام دادن اعمال) در فاصلهٔ بین این دو تعریف، از سؤالاتی مشابه سؤال زیر استفاده می‌کنم:

سؤال: نمودار تابعی را رسم کنید یا ضابطه تابعی را بنویسید که در آن، شرایط زیر برقرار باشد:

$\lim\limits_{x \to ۱} f(x) = f \quad (۱)$ و $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = f \quad (۲)$

طرح سؤالاتی مانند این، موجب می‌شود دانش‌آموزان ارتباط بهتری بین تعاریف پیوستگی برقرار کنند و حالت‌های نمادین را به شکل نموداری ببینند. چنین ارتباطی باعث می‌شود تفکر ریاضی دانش‌آموزان از انجام اعمال نمادین و کار روی عبارت‌های جبری فراتر رود. از طرفی دیگر، دانش‌آموزی که قادر است صورت‌های نمادین و جبری را به زبان نمودارها بیان کند و سؤالاتی را پاسخ دهد که بر عکس ارزشیابی‌های معمول است، نشان می‌دهد که ریاضیات را با تصور و تفکر بهتری درک کرده است و گام مهمی در راستای تقویت فهم ریاضی خود برداشته است.

البته کار به همین‌جا ختم نمی‌شود؛ اگر بخواهیم واقعاً نشان دهیم پیوستگی f در نقطهٔ a چه مفهومی دارد، باید روش $\varepsilon - \delta$ را به کار ببریم؛ یعنی از همسایگی‌ها به عنوان ابزاری کارآمد در حوزهٔ حسابان استفاده شود تا به کمک آن، کاری عاری از خطا انجام داده باشیم و به آن نظم و دقت ریاضی ببخشیم.

f در a پیوسته است

هرگاه: $\forall \varepsilon > ۰\ \exists \delta > ۰ \quad \ni \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

(تعریف۳)

تفکر آنالیزی چهره غالب‌تری نسبت به تفکر جبری دارد. کار کردن با این دو نوع تفکر و رسیدن از تفکر جبری به تفکر آنالیزی کار ساده‌ای نیست و نیازمند این است که مسیر شهود، با تأمل و دقت و درک مناسبی طی شود

این تعریف به همان اندازه که کارآمد و دقیق است غیرشهودی و مجرد نیز به نظر می‌آید، شاید به همین دلیل باشد که اکنون جایگاهی برای آن در کتاب‌های درسی مدرسه‌ای درنظر گرفته نشده است.

بنابراین، فرآیند دقت بخشیدن به مفهوم یا تعریف پیوستگی، مسیری را طی می‌کند که سرچشمهٔ اولیهٔ آن نمودارهایی هستند که شهود، آنها را لمس می‌کند و در عالم ریاضی با بیان روابط و مفاهیم جبری و آنالیزی تا جایی پیش می‌رود که گاهی با همین شهود اولیه در تعارض قرار می‌گیرند؛ و این‌جاست که در برخی موارد از خود می‌پرسیم «این تعاریف واقعاً بیانگر چه مفاهیمی‌اند؟»

مفاهیم مرتبط با مفهوم پیوستگی

پاسخ دادن به سؤالات پیوستگی، نیازمند آگاهی از مفاهیمی است که بار پیوستگی را به دوش می‌کشند؛ مفاهیمی مانند اعداد حقیقی، تابع، حد و همسایگی که درک هر یک از این‌ها، موجب تقویت شهود می‌شود و کار ارتقای شهود به سمت تجرید را آسان‌تر می‌کنند.

در اینجا، اشاره‌ای به چند مورد می‌شود.

– **اعداد حقیقی:** درک بسیاری از مفاهیم ریاضی وابسته به درک اعداد حقیقی است زیرا مفاهیم حسابان روی مفهوم «حرکت» بنا شده‌اند و این حرکت در چارچوب اعداد حقیقی و درک مناسب آن‌ها توجیه‌پذیر است. هرچند که لازم نیست پیچیدگی‌های اعداد حقیقی در دبیرستان به نمایش گذاشته شود، ولی باید بپذیریم که درک مفهوم پیوستگی و مفاهیم مشابه آن، بر درک اعداد حقیقی استوار است که مفهوم میل کردن به یک عدد و همسایگی، جزو این موارد است.

اگر از دانش‌آموزان خواسته شود پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x^2<2 \\ 2+x & x^2\geq 2 \end{cases}$ را در R بررسی کنند، آن‌ها باید با توجه به دو ضابطه‌ای بودن تابع f، نقاطی از دامنه را بررسی کنند که پیوستگی در آن‌ها روشن نیست؛ یعنی تشخیص این نقاط و بررسی رفتار تابع f در همسایگی آن نقاط اهمیت ویژه‌ای دارد.

– **توابع** از مفاهیم اساسی در حسابان به شمار می‌آیند. در این حوزه، توابع بیشتر به عنوان اشیایی تلقی می‌شوند که روی آن‌ها اعمال ریاضی انجام می‌شود؛ بدین معنی که وقتی از تابعی حد می‌گیریم، شیء مورد استفاده در این عمل، تابع است. در این مرحله، دانش‌آموز باید به درک درستی از مفهوم تابع رسیده باشد تا بتواند اعمال خاصی مانند حدگیری، مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را روی آن‌ها انجام دهد. توابع به صورت‌های متفاوتی نشان داده می‌شوند و به لحاظ انتزاعی بودن نیز، در سطوح متنوعی قرار دارند. به عنوان مثال، شاید درک توابع مثلثاتی، قدر مطلق و جزء صحیح، مشکل‌تر از درک توابع چندجمله‌ای باشد. این‌ها بدین معنی است که اگر از دانش‌آموزان بخواهیم پیوستگی تابع $f(x)=2-x^2$ را در R بررسی کنند، با رسم نمودار آن به سادگی می‌توانند از عهدهٔ آن برآیند یا با عملیات جبری ساده می‌توانند تعریف پیوستگی را در آن به کار گیرند و به جواب برسند. ولی اگر پیوستگی تابع

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} & x<0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & x=0 \\ [1-x] & x>0 \end{cases}$$

در نقطه‌ای مانند $x=0$ موردنظر باشد، آن‌ها باید بازخوانی مناسبی از توابع کسری، رادیکالی، مثلثاتی و جزء صحیح داشته باشند و قواعد حاکم بر آن‌ها را بدانند تا در هر مرحله، بادقت گام بردارند و به جواب درست برسند. طبعاً رسم نمودار توابع در چنین مواردی ساده نیست، لذا به جاست که دانش‌آموزان از شهود جبری خوبی برخوردار باشند.

– **حد** در کتاب‌های درسی ایران، پیوستگی به دنبال حد می‌آید. برهمین مبنا لازم است دانش‌آموزان ابتدا با مفهوم حد آشنا شوند.

یافته‌های تحقیقی نشان می‌دهند که حد نیز مانند تابع، دو صورت فرآیندی و شییء دارد، یعنی فرآیندی است که مرتباً تکرار می‌شود و گاهی نتیجه آن یک مقدار است. نماد lim در

عبارت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$، تابع f را به کار می‌برد و طی فرآیندی نامتناهی، درصورت امکان آن‌را به صورت یک مقدار عددی نشان می‌دهد.

پیوستگی و قضایای آن

قضایا، نتایج خلاصه شده و به دست آمده از استدلال استنتاجی‌اند و در حل مسایل، استفاده از آن‌ها نتایجی فوری به همراه دارد. به همین اندازه هم، دقت در به‌کارگیری آن‌ها مهم و لازم است.

حال سؤال اصلی این است که در کتاب‌های درسی، قضایای پیوستگی چه جایگاهی دارند و نقش آن‌ها در حل مسایل چیست و دانش‌آموزان در حل مسایل تا چه اندازه از آن‌ها استفاده می‌کنند. به‌طور مثال، به دو قضیه زیر توجه کنید:

قضیه ۱: اگر f در a پیوسته باشد، $|f|$ نیز در a پیوسته است.

قضیه ۲: اگر g در a و f در g(a) پیوسته باشد، fog هم در a پیوسته است.

حال باتوجه به این دو قضیه، سؤال‌های زیر را از دانش‌آموزان بپرسید.

پیوستگی تابع $f(a)=\left|\dfrac{x}{x^{2}-1}\right|$ را در هر نقطه از دامنه‌اش بررسی کنید.

اگر $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ و $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ ، تابع fog در چند نقطه ناپیوسته است؟

اگر دانش‌آموزان بتوانند دو قضیه بالا را به کار گیرند،پاسخ به این سؤال‌ها کار ساده‌ای است. ولی عملاً دیده‌ایم که آن‌ها کمتر به سراغ قضیه‌ها می‌روند؛ زیرا روش‌های دیگری هم برای حل آن‌ها وجود دارد که دانش‌آموزان در پناه آن‌ها مطمئن‌ترند.

البته در کتاب ریاضی۳ و حسابان (چاپ جدید - ۸۹)، اشاره‌ای به قضایای پیوستگی نشده است و این از نکات برجستهٔ این کتاب‌هاست، زیرا نخواسته‌اند بی‌درنگ و بدون تامل قضیه‌های پیوستگی را خشک و خالی به دنبال هم ردیف کنند. قضیه‌ها (حداقل در نگاه اول) شاید تصویرهای شهودی از خود نشان ندهند، لذا به کار گرفتن آنها در حل مسایل مستلزم دقت و درک مفهومی است. به سؤال زیر توجه کنید:

تحت چه شرایطی برای f و g در همسایگی a داریم:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) \qquad (۱)$$

در حسابان به تساوی (۱) اشاره شده است و در حساب دیفرانسیل و انتگرال هم قضیه‌ای بدون اثبات از آن وجود دارد.

در مجموع، می‌خواهم تأکید کنم که ردیف کردن پشت سر هم قضایا در کتاب‌های درسی، دردی را دوا نمی‌کند چون دانش‌آموزان نه‌تنها نمی‌توانند (یا کم‌تر می‌توانند) تصوری شهودی از آن مفاهیم ایجاد کنند، بلکه در حل مسایل هم کمک زیادی به آنان نمی‌کنند

برای درک این تساوی و شرایط لازم برای برقراری آن، بهتر است نگاهی به تعریف پیوستگی داشته باشیم:

f در x=a پیوسته است در نتیجه

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x) \qquad (۲)$$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) می‌توان گفت تساوی (۱) زمانی برقرار است که $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ وجود داشته باشد و در f در مقدار $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ پیوسته باشد.

البته این تنها یک تصویر ساده و کم‌دقت از برقراری تساوی (۱) است که برای درک ابتدایی از آن، مفید به نظر می‌رسد.

در ارتباط با پیوستگی و کاربرد آن، یکی از مهم‌ترین قضیه‌ها، قضیه مقدار میانی است که استفادهٔ چشمگیر آن در حساب دیفرانسیل و انتگرال واضح است. این قضیه و نتایج آن درباب یافتن وجود ریشه‌ای برای معادلهٔ $f(x)=0$ که تابع f شرایط قضیه را دارد، کمک شایانی خواهد کرد.

اهمیت موضوع در اینجاست که دانش‌آموزان در برخورد با مسایل مربوطه، چگونه می‌توانند شرایط قضیه را از دل آن‌ها بیرون بکشند و از آن‌ها استفاده کنند؟ به طور مثال، اگر از دانش‌آموزان بپرسیم ؛ آیا تابع $f(x)=\cos x-x$ محور xها را در بازهٔ (۱ و ۰) قطع می‌کند یا خیر؟ چیزی که شاید دانش‌آموزان را با مشکل مواجه کند، در قدم اول به‌خاطر آوردن قضیه و در ادامه، فراهم آوردن شرایط لازم برای به‌کارگیری آن است. یعنی در نگاه اول، احتمال دارد آنان بر سر چند راهی قرار گیرند که از چه چیزی استفاده کنند. حتی درمورد وجود ماکزیمم و می‌نیمم مطلق یک تابع پیوسته بر بازه $[a,b]$، دانش‌آموزان به سختی به‌خاطر می‌آورند که قبلاً در ارتباط با آن، قضیه‌ای را خوانده‌اند که در آن صورت، مسئله بدیهی و روشن می‌شد.

در مجموع، می‌خواهم تأکید کنم که پشت سر هم ردیف کردن قضایا در کتاب‌های درسی، دردی را دوا نمی‌کند چون دانش‌آموزان نه‌تنها نمی‌توانند (یا کمتر می‌توانند) تصوری

دانش‌آموزان صورت فرآیندی حد را طوری می‌بینند که هم‌چنان ادامه دارد و به نتیجه آن به عنوان مقداری مشخص، شک دارند

شهودی از آن ایجاد کنند، بلکه در حل مسایل هم کمک زیادی به آنان نمی‌کنند.

جدای از تمام موارد ذکر شده، گاهی با مسایلی روبه‌رو می‌شویم که تضاد آشکار بین شهود و دقت ریاضی در آن به‌خوبی مشهود است. به عنوان مثال، چرا برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\in Q \\ ۰ & x\notin Q \end{cases}$ در نقطه $x=۰$ ، از دنباله‌ها و حد دنباله‌ها استفاده می‌کنیم؟ آیا به این دلیل است که تصویر روشنی از نمودار f نداریم، یا استفاده از تعاریف قبلی دراین مورد ناکارآمدند؟ آیا بدین دلیل است که دامنه f به صورت اجتماع اعداد گنگ و گویاست و ما مرز مشخصی برای جدا کردن آن‌ها نداریم؟ یا چیزی غیر از این‌ها؟

یک بررسی تجربی

در این بررسی، پاسخ‌ها و توضیحات دانش‌آموزان کلاس درس نویسنده در جواب دادن به سؤال زیر منعکس شده است.

سؤال: عبارت ۷x+۲ را درنظر بگیرید.

الف – مقدار آن را به ازای x=۲ به دست آورید.

ب – مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}(۷x+۲)$ را پیدا کنید.

آیا دو مقدار به دست آمده در (الف) و (ب) با هم متفاوتند؟ پاسخ دهید.

این یکی از سؤالاتی بود که به دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی رشته ریاضی داده شد. هدف این بود که معلوم شود تا چه اندازه دانش‌آموزان، درک درستی از مفهوم حد و پیوستگی دارند و تا چه اندازه قادرند برای اعمال ریاضی خود توضیح کافی و قابل قبول ارایه دهند.

پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال جای تأمل داشت:

– بخشی از دانش‌آموزان باتوجه به برابری مقدار تابع و مقدار حد در x=۲ و اشاره به پیوسته بودن آن، بیان کرده بودند که «دو مقدار هیچ تفاوتی با هم ندارند».

– بخشی دیگر از دانش‌آموزان، هرچند که مقدار ۱۶ را در هر دو قسمت (الف) و (ب) پیدا کرده بودند، ولی در توضیح فرآیند کار خود، نوشته بودند که «این دو مقدار ۱۶، یکی نیستند». تعدادی از آن‌ها نوشته بودند که در قسمت (الف)، مقدار مطلق ۱۶ به دست می‌آید، ولی در قسمت (ب)، در بی‌نهایت به ۱۶ می‌رسد. «برخی دیگر اشاره کرده بودند که «هرچه x به ۲ نزدیک‌تر می‌شود، مقدار f(x) هم بیشتر خواهد شد و ماکزیمم این میل کردن، برابر ۱۶ است.»

– دسته‌ای دیگر از دانش‌آموزان در توضیح راه‌حل‌های خود، به موارد دیگری اشاره کرده بودند. مثلاً تعدادی نوشته بودند که «در ظاهر، دو مقدار با هم برابرند ولی در حد به اندازه ε با هم فرق دارند». دانش‌آموزی هم نوشته بود $۱۶<\lim\limits_{x\to ۲}f(x)<۱۷$ و دانش‌آموز دیگری با نوشتن ۱۶^{+}، ۱۶^{-} و۱۶ اشاره به نابرابری آنها کرده بود. دانش‌آموزی دیگر هم با این توضیح که «نمی‌توان گفت در حالت حدی مقدار به دست آمده برابر مقدار غیرحدی است» نوشته بود که «تفاوت بسیار کمی با هم دارند» و در ادامه نوشته بود « $\lim\limits_{x\to ۲}(۷x+۲)=۱۶\pm\varepsilon$ »

جالب است که برخی از دانش‌آموزان، ابراز کرده بودند «این دو مقدار در عمل با هم فرق دارند، ولی ازلحاظ جایگذاری متفاوت نیستند.»

نمونه‌های زیر، عیناً از دست‌نوشته‌های دانش‌آموزان گرفته شده است.

الف) $۷x+۲=۷\times ۲+۲=۱۶$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}(۷x+۲)=۱۶$

بله دو مقدار به صورت جزئی متفاوتند آن مقدار در قسمت (الف) خود ۱۶ است ولی در قسمت (ب) حد این تابع است و آن دقیقاً ۱۶ نیست. بلکه ازطرف راست یا چپ خیلی‌خیلی به آن نزدیک شده و مقدار حدی آن است.

بله چون وقتی در حد، x به سمت ۲ میل می‌کند $\lim\limits_{x\to ۲}(۷x+۲)=۷\times ۲+۲=۱۶$ مقدار تابع به سمت ۱۶ میل می‌کند ولی به خود ۱۶ نمی‌رسد $\lim\limits_{x\to ۲}(۷x+۲)=۷\times ۲+۲=۱۶$ ولی در الف مقدار تابع را به ازای x=۲ قرار می‌دهیم و مقدار تابع برابر ۱۶ می‌شود.

الف) $۷\times ۲+۲=۱۴+۲=۱۶$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}(۷x+۲)=۱۶$

تقریباً یکی هستند ولی یک تفاوت هست، آن‌هم این است که در قسمت ب چون x میل می‌کند به ۲ و هیچ‌گاه به ۲ نمی‌رسد پس حاصل هم میل می‌کند به ۱۶ ولی هیچ‌گاه به ۱۶ نمی‌رسد ولی بسیار به ۱۶ نزدیک می‌شود.

$$y = ۷x + ۲ \xrightarrow{x=۲} y = ۱۶$$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}(۷x+۲) = ۱۶$

این دو مقدار با هم متفاوتند اما چون در هنگام حد گرفتن مقادیر را خیلی نزدیک به عدد ۲ در نظر می‌گیریم (برای تقریبی و راحت کار) عدد ۲ را در معادله جایگذاری می‌کنیم (در صورت مبهم نبودن) و برای این‌که دقیق‌تر به‌دست بیاوریم، باید مقادیر نزدیک (چه از راست و چه از چپ) به ۲ را در نظر گرفته و مقدار تابع را به ازای آن مقادیر به‌دست آوریم که چون بعد از محاسبهٔ همهٔ مقادیر مشاهده می‌شود که حدِ گرفته شده خیلی به عدد ۱۶ نزدیک می‌شود، پس ما (به طور قرارداد) خود عدد ۱۶ را حد تابع فوق در نظر می‌گیریم. در صورتی که منظور از حدگیری تابع در نقطهٔ $x=۲$ ، خود عدد نیست.

به‌راستی اگر این دو مقدار با هم یکی نیستند، پیوستگی تابع $f(x) = ۷x + ۲$ در نقطه $x=۲$ چه معنایی پیدا می‌کند؟ توضیحات این دانش‌آموزان در حل این سؤال به‌روشنی نشان می‌دهد که آن‌ها به راحتی قادر به درک دو وجه فرآیندی و شیئی حد نیستند. آن‌ها، در برخی موارد، به مقدار حد (۱۶) توجه نشان داده‌اند و در موارد بیشتری، به چهرهٔ فرآیندی حد توجه داشته‌اند. اشاره کردن به نابرابری دو مقدار به دست آمده از قسمت‌های(الف) و (ب) نمایانگر این مطلب است که برای آن‌ها، دو وجه مفهوم حد، در تعارض با یکدیگرند. پس چگونه می‌توان پیوستگی تابع $y=f(x)$ را در نقطه $x=a$ بر مبنای تعریف $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ توضیح داد؟

چرا دانش‌آموزان نسبت به عدد ۱۶ به عنوان مقدار حد تردید دارند؟ چگونه می‌توان این بدفهمی را اصلاح کرد؟

به نظر می‌رسد توجه کردن به اعمال ریاضی در حوزه جبر و حسابان و تأکید بر تفاوت‌های این دو، اهمیت اساسی دارد. در تساوی $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ پیدا کردن مقدار $f(a)$ عملی جبری است که طی یک فرآیند نامتناهی به‌دست می‌آید. ولی سمت چپ تساوی عملی آنالیزی (حسابان) است که برای پیدا کردن جواب، از جبر و روش‌های جبری کمک می‌گیریم. تقابل این دو عمل جبری و آنالیزی (حسابان) که یکی بیانگر فرآیندی متناهی و دیگری فرآیندی نامتناهی است، در تعریف پیوستگی یکی از ظرافت‌های ریاضی است و بهتر است دانش‌آموزان را متوجه این نکته کنیم که عدد ۱۶، هم می‌تواند محصول یکی از فرآیندهای متناهی مثل $f(۲)$ باشد و هم محصول یک فرآیند

طی کردن مسیر از شهود به دقت، همواره چالش‌برانگیز است و در بحث پیوستگی نیز همانند سایر مفاهیم حسابان، نمودارها در ایجاد یک تصور شهودی اولیه مفیدند، ولی هرچه از صورت‌های هندسی و نموداری فاصله بگیریم، کار شهود هم سخت‌تر می‌شود

نامتناهی مانند $\lim\limits_{x\to ۲}(۷x+۲)$ و این قواعد و رویه‌ها هستند که چنین فرآیندهایی را کتمان می‌کنند.

نکته آموزشی مهم این است که تا زمانی که از دانش‌آموزان توضیح نخواهیم، مشخص نمی‌شود که آن‌ها تصور روشنی از این مفاهیم ندارند.

یافته‌های تجربی اشاره می‌شود که نشان می‌دهند دانش‌آموزان صورت فرآیندی حد را طوری می‌بینند که همچنان ادامه دارد و به نتیجه آن به عنوان مقداری مشخص شک دارند.

نتیجه‌گیری

تأمل و دقت در به‌کارگیری تعریف پیوستگی و استفاده از قضیه‌های آن، نیازمند یک تصور شهودی از آن است. این تصور زمانی پایدار است که تلفیق مناسبی از صورت‌های ریاضی (انواع بازنمایی‌ها) را دربر داشته باشد. لذا تقویت تفکر ریاضی در گرو رشد و ارتقای شهود است که در حالت‌های مختلف با ریاضی و مفاهیم آن درگیر است.

طی کردن مسیر از شهود به دقت، همواره چالش‌برانگیز است و در بحث پیوستگی نیز همانند سایر مفاهیم حسابان، نمودارها در ایجاد یک تصور شهودی اولیه مفیدند، ولی هرچه از صورت‌های هندسی و نموداری فاصله بگیریم، کار شهود هم سخت‌تر می‌شود. در مراحل بالاتر، شهود با مفاهیم دیگری مانند اعداد حقیقی، توابع، روابط جبری و مهم‌تر از همه با مفهوم بی‌نهایت درگیر است که ارتقای آن ضروری است. بنابراین، فرآیند دقت بخشیدن به مفهوم پیوستگی کاری دشوار است، زیرا مفاهیم حسابان از بستر بی‌نهایت‌ها رشد کرده‌اند.

منابع

کتاب‌های درسی حسابان، ریاضی ۳، حساب دیفرانسیل و انتگرال