تغییر شکل؛ راهبردی برای حل مسئله

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی دبیرستان سعادت سمنان

چکیده

یکی از راهبردهای حل مسئله، رسم شکل است و توصیه می‌شود که برای حل مسئله شکل مناسبی رسم شود. اما فقط رسم شکل کافی نیست و در برخی از مسئله‌ها با تغییر شکل مناسب، مسئله راحت‌تر حل می‌گردد. البته این تغییر، به نگاه شخص و تسلط او بر موضوع بستگی دارد. در این مقاله، به حل چند مسئله با استفاده از این راهبرد پرداخته می‌شود.

کلیدواژه‌ها: راهبرد حل مسئله، تغییر شکل.

اولین مسئله‌ای که مورد بررسی قرار می‌گیرد، یافتن طول می‌نیمم در صفحه‌ی ۱۶۶ کتاب حسابان سال سوم رشته‌ی ریاضی ـ فیزیک نظام جدید آموزش متوسطه است.

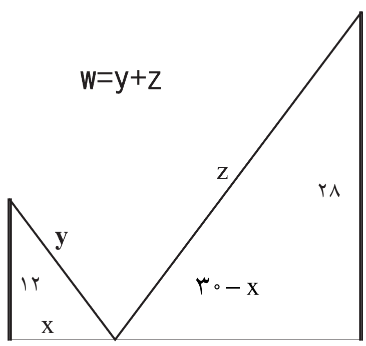
مسئله‌ی ۱. طول می‌نیمم

دو تیر برق به فاصله‌ی ۳۰ متر از هم قرار دارند. ارتفاع یکی ۱۲ متر و دیگری برابر ۲۸ متر است. این دو تیر می‌بایست توسط دو سیم نگه داشته شوند به طوری که هر دو به نقطه‌ای در سطح زمین (با میخ) متصل شده و سر دیگر آن‌ها به انتهای هر تیر برسد. میخ را در کجا بکوییم تا کمترین مقدار سیم مصرف شود؟

روش اول: استفاده از مشتق

حل. فرض کنیم w طول سیمی باشد که می‌بایست می‌نیمم شود. با استفاده از شکل ۱ داریم

شکل ۱



$$w = y + z$$

با دو بار استفاده ازقضیه‌ی فیثاغورس، w برحسب x به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$w = \sqrt{x^2+144} + \sqrt{x^2-60x+1684},\quad 0 \le x \le 30$$

از w مشتق می‌گیریم

$$w' = \frac{x}{\sqrt{x^2+144}} + \frac{x-30}{\sqrt{x^2-60x+1684}}$$

مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$x^2(x^2-60x+1384) = (30-x)^2(x^2+144)$$

پس از ساده شدن، به معادله‌ی

$$320(x-9)(2x+45) = 0$$

می‌رسیم.

جواب مثبت این معادله ۹ است و با در نظر گرفتن نقاط بحرانی داریم

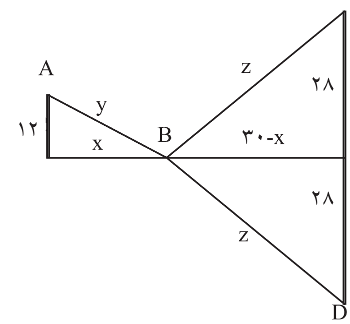
$$w(0) = 53/4$$
$$w(9) = 50$$
$$w(30) = 60/31$$

یعنی سیم باید در فاصله‌ی ۹ متری تیر ۱۲ متری به زمین متصل گردد و طول آن ۵۰ متر باشد.

مسئله‌ی فوق هر چند مثال خوبی برای مبحث کاربرد مشتق است، ولی این راه‌حل، بهترین نیست. حال با تغییر شکل، به راه‌حل دیگری دست می‌یابیم.

روش دوم: تغییر شکل

در این روش، شکل را عوض کرده و از خاصیت بازتاب استفاده می‌کنیم (شکل ۲).



شکل ۲

با توجه به خاصیت بازتاب، طول مسیر ABC و مسیر ABD برابر است، و می‌دانیم که کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه، خط راست است. پس محل برخورد پاره‌خط AD با خط افق، محل اتصال با زمین بوده و طول آن کوتاه‌ترین می‌باشد. با توجه به این موضوع، در معادله‌ی خط AD، y را صفر قرار می‌دهیم

$$y = ۱۲ + \frac{-۴}{۳}x \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow x = ۹$$

در ضمن با کمک قضیه‌ی فیثاغورس، طول AD به دست می‌آید.

$$AD = \sqrt{(۳۰)^۲ + (۴۰)^۲} = ۵۰$$

به عبارتی، با یک تغییر شکل، راه‌حل مسئله کوتاه شده و بدون استفاده از ابزار مشتق، با ظرافت حل می‌شود و بدین سبب، در پایه‌های پایین‌تر نیز قابلیت طرح را پیدا می‌کند. یعنی با استفاده از این راهبرد، مسئله‌ای از سال سوم متوسطه به مسئله‌ای برای سال سوم راهنمایی تغییر پیدا کرد.

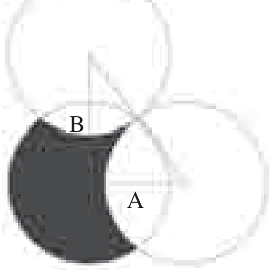
این مسئله، روایت‌های دیگری نیز دارد که به نمونه‌ای از آن، اشاره می‌کنم:

«روایت کرده‌اند که زن شیر دوشی در ساحل رودخانه‌ای زندگی می‌کرد. او گاوش را در همان طرف رودخانه در فاصله‌ای دورتر به درخت می‌بست. زن شیر دوش برای دوشیدن شیر گاو هر روز فاصله‌ی بین خانه و باربند گاوش را طی می‌کرد. ضمناً هر بار می‌بایست خود را به کنار رودخانه برساند و ظرف شیردوشی را در آب رودخانه بشوید و سپس به باربند گاوش برود. او می‌دانست که مسیرهای زیادی از خانه به رودخانه و باربند وجود دارد. اگرچه او از این نکته‌ی جالب و مهم هم آگاهی داشت که در بین همه‌ی این مسیرها، مسیری وجود دارد که از همه کوتاه‌تر است، ولی نمی‌دانست آن را چگونه می‌تواند بیابد. اگر می‌توانید به او کمک کنید.»

مسئله‌ی ۲. مسئله‌ای از سؤالات آزمون مرحله‌ی اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور در سال ۱۳۸۰

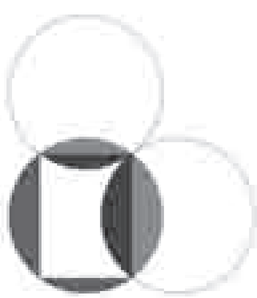
سه دایره‌ی $C_۳$ و $C_۲$ و $C_۱$ به شعاع ۵ و مراکز $O_۳$ و $O_۲$ و $O_۱$ طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که $O_۱O_۳ = ۸$ و $O_۱O_۲ = ۶$ و $O_۱O_۲$ بر $O_۱O_۳$ عمود است. مساحت ناحیه‌ای از $C_۱$ که با $C_۲$ و $C_۳$ تداخل ندارد، چقدر است؟

حل. با توجه به ساختار مسئله ابتدا باید شکل دقیقی رسم کنیم (شکل ۳).



شکل ۳

هدف، محاسبه‌ی مساحت قسمت تیره رنگ می‌باشد که شکل منظمی ندارد. حال کمی شکل را تغییر می‌دهیم (شکل ۴).



شکل ۴

مساحت مورد نظر برابر است با مساحت دایره منهای مساحت قسمت‌های A و B. با توجه به تقارن، مساحت مورد نظر برابر است با مساحت دایره منهای مساحت ناحیه‌ی خاکستری.

بنابراین، با یک تغییر شکل، مسئله حل می‌شود (شکل ۵) و جواب، برابر است با مساحت مستطیلی به طول ۸ و عرض ۶.

شکل ۵

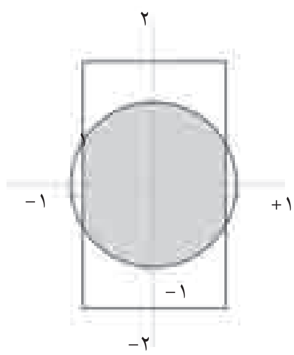
مسئله‌ی ۳. مسئله‌ی حشره

حشره‌ای را با نخی به طول ۱ متر، به وسط یک استوانه به ارتفاع ۳ و محیط قاعده‌ی $\sqrt{۳}$ متر، از بیرون بسته‌ایم! مساحت قسمتی از استوانه که حشره می‌تواند به آن برود چقدر است؟

شکل ۶

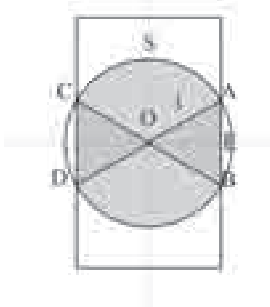
حل. اگر استوانه وجود نداشته باشد، قسمت‌هایی که حشره می‌تواند پرواز کند درون یک کره به شعاع ۱ متر است و وقتی استوانه در فضای موجود قرار گیرد، مساحت موردنظر درون کره واقع می‌شود. برای پیدا کردن این مساحت، روش معلومی وجود ندارد. به این منظور، شکل را تغییر می‌دهیم.

برای تغییر شکل، از نقطه‌ی مقابل محل اتصال نخ، خطی موازی محور استوانه رسم کرده و استوانه را به یک مستطیل تبدیل می‌کنیم.



شکل ۷

با این تبدیل، قسمت‌هایی از مستطیل که درون دایره قرار دارد، مساحت موردنظر است. چرا که حشره مسافتی که طی می‌کند در دو حالت حداکثر یک متر است. پس آن‌را حساب می‌کنیم. دوباره شکل را تغییر می‌دهیم و شکل جدید را به قسمت‌های مناسب تقسیم می‌کنیم.



شکل ۸

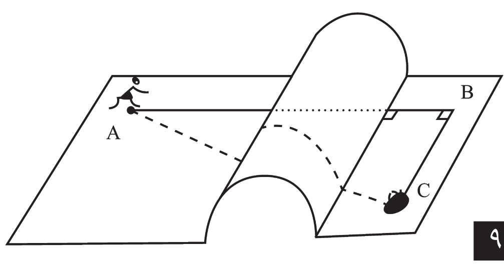
$$OA = ۱,\ \ OE = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AE = \frac{۱}{۲}$$

اما در مثلث OAE، ضلع روبه‌رو به وتر نصف وتر است. پس زاویه‌ی AOE، ۳۰ درجه و کمان AOS، ۶۰ درجه می‌باشد. شکل از دو مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ متر و دو قطاع دایره به زاویه‌ی ۱۲۰ درجه تشکیل شده است که با هم، $\frac{۲}{۳}$ مساحت دایره را تشکیل می‌دهند، یعنی $\frac{۲}{۳}\pi$. بنابراین

$$S = ۲S_{AOB} + ۲S_{AOC} = \frac{۲}{۳}\pi + ۲(\frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۱) = \frac{۲}{۳}\pi + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مسئله‌ی ۴. مورچه و مورچه‌خوار

در شکل ۹، مثلث ABC قائم‌الزاویه است. $(\hat{B} = ۹۰^\circ)$ و $AB = ۱۰ - \pi$ و $BC = ۶$. نیم استوانه‌ای با شعاع واحد و محور عمود بر AB، بین نقاط A و C مانع شده است. مورچه از ترس مورچه‌خوار باید هرچه سریع‌تر از نقطه‌ی A به لانه‌اش در نقطه‌ی C برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن را حساب کنید.



شکل ۹

حل. برای حل مسئله، صفحه‌ی کاغذ را در امتداد AB کشیده آن‌را صاف می‌کنیم. با توجه به این‌که محیط استوانه ۲π است،

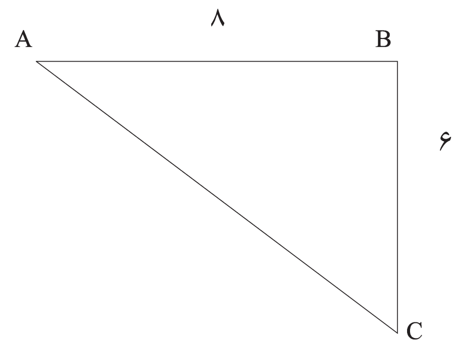
در شکل جدید (شکل ۱۰) داریم

$$AB = 10 - \pi - 2 + \frac{2\pi}{2} = 8 \ ، \ BC = 6$$

پس با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس

$$AC = 10$$

حال پاره‌خط AC را رنگ‌آمیزی کرده و شکل را به حالت اول برمی‌گردانیم. مسیر بر روی استوانه معلوم می‌شود و طول آن، ۱۰ است.



شکل ۱۰

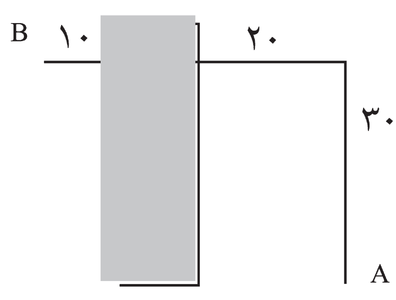
جمع‌بندی

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا هر تغییر شکلی مجاز است؟

برای پاسخ به این سؤال، مسئله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

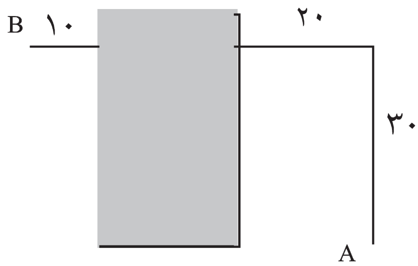
مسئله‌ی ۵. مطابق شکل، یک دونده در نقطه‌ی A قرار دارد و می‌خواهد در کم‌ترین زمان ممکن، خود را به نقطه‌ی B برساند. در مسیر حرکت او، یک جاده‌ی گلی وجود دارد که باعث می‌شود سرعت حرکت دونده حین گذر از آن، به نصف کاهش یابد. سرعت حرکت دونده روی آسفالت ۱۰ متر بر ثانیه است. کم‌ترین زمان ممکن را که دونده برای رسیدن به نقطه‌ی B لازم دارد، پیدا کنید.

گزینه‌های پیشنهادی این سؤال $\sqrt{20}$، $\sqrt{34}$، $\sqrt{30}$، $\sqrt{26}$ و ۵ می‌باشند.



شکل ۱۱

راه‌حل اول. چون سرعت در منطقه‌ی گل‌آلود نصف می‌شود، پس عرض این ناحیه را دو برابر می‌کنیم تا با همان سرعت قبل در این ناحیه حرکت کند. (شکل ۱۲)



شکل ۱۲

با این تغییر شکل، جواب $\sqrt{34}$ می‌باشد که نادرست است. دلیل این است که تبدیلی که انجام داده‌ایم فقط در صورتی درست است که حرکت فقط افقی باشد و حرکت‌هایی که در سایر جهت‌ها صورت بگیرند، با این تبدیل جور در نمی‌آیند. به عبارتی، این تبدیل طول را حفظ نمی‌کند. پس برای رفع این مشکل، تمام ابعاد شکل را دو برابر می‌کنیم و فرض می‌کنیم دونده در کل مسیر با یک سرعت حرکت کند. در این صورت، کوتاه‌ترین مسیر خط AB است و کوتاه‌ترین زمان $\sqrt{51}$ می‌شود که جزء گزینه‌ها نیست. این نشان می‌دهد این تغییر شکل‌ها، نادرست هستند.

آیا تغییر شکل در مسئله‌ی مورچه و مورچه‌خوار طول را حفظ می‌کند؟

در این مسئله، تغییر شکل فقط در نیم استوانه است و سایر قسمت‌ها تغییری نکرده است. به عبارتی، خطی فرضی از A به C در نظر گرفته‌ایم و فقط روی نیم استوانه با تبدیل آن به مستطیل، کوتاه‌ترین مسیر را یافته‌ایم.

مسئله‌ی پل‌های کونیسبرگ نیز از جمله مسائلی است که با تغییر شکل حل می‌شوند.

از مسائل بالا می‌توان نتیجه گرفت که تغییر شکل در بسیاری از موارد سبب می‌شود که مسئله راحت‌تر حل شود، اما باید دقت کرد که هر تغییر شکلی مجاز نیست. به عبارتی، تغییر شکل باید با توجه به ساختار مسئله صورت بگیرد.

منابع

۱. بیژن‌زاده، حسین؛ فرشادی، غلامعلی؛ ایلخانی‌پور، یدالله (۱۳۸۷). **حسابان**. شرکت چاپ و نشر کتب درسی.

۲. رستگار، آرش؛ حاجی بابایی، جواد. (۱۳۸۳). **آموزش هنر حل مسئله**. شرکت چاپ و نشر کتب درسی.