روایت همکاران

تانژانت

چه زاویه‌ای ۱۰۰۰ است؟

با تشکر از ماشین حساب!

حسین غفاری
دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی و دبیر ریاضی شهرری

اشاره

به‌دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

یکی از تمرین‌های صفحه‌ی ۱۴۳ کتاب درسی ریاضی اول دبیرستان، از دانش‌آموزان می‌خواهد تانژانت زاویه‌های ۲۳، ۳۰، ۴۰، ۴۵ و ۶۰ درجه را محاسبه و در جدولی یادداشت کنند. در این تمرین، پیشنهاد شده است که محاسبه‌ی تانژانت به‌طور تقریبی و با استفاده از رسم مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌گیری اضلاع مثلث با خط‌کش و محاسبه‌ی نسبت‌ها انجام شود. تمرین بعد از دانش‌آموزان می‌خواهد با توجه به جدول به‌دست آمده، بگویند که با بزرگ‌تر شدن اندازه‌ی زاویه‌ی حاده، تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟

وقتی از دانش‌آموزان خواستم پاسخ‌های خود را به این سؤال در کلاس به بحث بگذارند، پاسخ اغلب دانش‌آموزان این بود که «با بزرگ‌تر شدن زاویه‌ی حاده، تانژانت آن نیز بزرگ می‌شود»؛ جوابی که احتمالاً نویسندگان کتاب نیز انتظار داشته‌اند، زیرا این نتیجه‌گیری با توجه به شکلی که در تمرین بعد آمده، قانع‌کننده و کافی به‌نظر می‌رسید. اما یکی از دانش‌آموزان پرسید: «تانژانت چه‌قدر بزرگ می‌شود؟ یعنی تانژانت زاویه‌ی حاده حداکثر چه‌قدر است؟» بعضی از دانش‌آموزان گفتند: «خیلی»! بعضی‌ها گفتند: «بی‌نهایت!» پرسیدم: «بی‌نهایت یعنی چه عددی؟» گفتند: «عددی خیلی بزرگ». برای این‌که بحث کمی عملی‌تر و واقعی‌تر شود، گفتم: «پس باید بتوان زاویه‌ای پیدا کرد که تانژانت آن برابر با ۱۰۰۰ باشد.»

دانش‌آموزان برای بررسی این ادعا، یک مثلث قائم‌الزاویه کشیدند؛ بعضی روی کاغذ و بعضی در ذهن. به نظر آن‌ها نسبت اضلاع قائمه‌ی آن مثلث، ۱۰۰۰ نبود. درواقع آن‌ها به این نتیجه رسیدند که با رسم مثلث، بعید است به جواب این سؤال برسند. بعضی از دانش‌آموزان به یاد داشتند که جدول نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مختلف در کتاب فیزیک آمده است. بنابراین، برای جواب دادن به سؤال، سراغ کتاب فیزیک رفتند. دانش‌آموزان با مشاهده‌ی جدول انتهای کتاب کمی جا خوردند. چرا که در ستون تانژانت و در مقابل زاویه‌ی ۸۹ درجه که از نظر خیلی از آن‌ها بزرگ‌ترین زاویه‌ی حاده بود، عدد نسبتاً کوچک ۲۸۹/۵۷نوشته شده بود.

درواقع، این عددی نبود که آن‌ها انتظارش را می‌کشیدند؛ چرا که دنبال عددی می‌گشتند که در حدود ۲۰ برابر این عدد بود. یعنی باید زاویه‌ای پیدا می‌کردند که تانژانت آن در حدود ۲۰ برابر تانژانت زاویه‌ی ۸۹ درجه باشد.

در جریان بحث در مورد این موضوع، ابتدا این سؤال مطرح شد که آیا زاویه‌ی حاده‌ای بزرگ‌تر از ۸۹ درجه وجود دارد؟ تعدادی از دانش‌آموزان به زاویه‌ای بزرگ‌تر از ۹۰ درجه فکر کردند ولی خیلی زود فهمیدند که زاویه نباید از ۹۰ درجه بیش‌تر باشد و به فکر زاویه‌ی ۸۹ درجه و خرده‌ای افتادند.

برای آن‌ها، شرایط دشوارتر شده بود؛ چرا که با نقاله‌ای که داشتند،

نمی‌توانستند زاویه‌ی حاده‌ای بزرگ‌تر از ۸۹ درجه رسم کنند! در این جا بود که بعضی از دانش‌آموزان با تردید اسم ماشین‌حساب را آوردند و با شک و تردید از من پرسیدند: «می‌شه از ماشین‌حساب استفاده کنیم؟» من که منتظر شنیدن چنین پیشنهادی بودم، از آن استقبال کردم و متوجه شدم که تعداد قابل ملاحظه‌ای از دانش‌آموزان ماشین‌حساب‌های مهندسی دارند که به وسیله‌ی آن می‌توانند به‌راحتی نسبت‌های مثلثاتی و معکوس‌های آن‌ها را محاسبه کنند.

از آن‌جا که دانش‌آموزان تابع معکوس تانژانت را نمی‌شناختند، از دستور $\tan^{-1}$ که روی کلیدهای ماشین‌حساب دیده می‌شد استفاده نکردند و دنبال یافتن جواب، از راه سعی و خطا بودند. آن‌ها با هیجان زیادی تانژانت زاویه‌ی ۸۹/۵ درجه را محاسبه کردند و به عدد ...۵۸۸ /۱۱۴ رسیدند و متوجه شدند که باید زاویه‌ی بزرگ‌تری را انتخاب کنند. بزرگ‌ترین زاویه‌ای که به ذهنشان رسید یعنی زاویه‌ی ۸۹/۹ درجه را آزمودند، اما جواب ...۹۵۷ /۵۲۷ بود که هنوز کوچک‌تر از ۱۰۰۰ بود. زاویه‌ی بعدی زاویه‌ی ۸۹/۹۹ درجه بود که سربلند از پس آزمون برآمد! تانژانت این زاویه ...۵۷۲۹/۵۷۷ بود. بنابراین آن‌ها زاویه‌ای پیدا کردند که تانژانت آن بیش از ۱۰۰۰ بود. حالا دانش‌آموزان دریافته بودند که زاویه‌ی مورد نظر باید بین دو زاویه‌ی ۸۹/۹ و ۸۹/۹۹ درجه باشد....

برای لحظات طولانی، کاری با کلاس نداشتم و فقط مشاهده می‌کردم؛ بعضی‌ها سعی می‌کردند زاویه‌ی مورد نظر را با دقت بیش‌تری محاسبه کنند، بعضی‌ها درباره‌ی اتفاق جالبی که شاهدش بودند صحبت می‌کردند. بعضی‌ها تانژانت زاویه‌های بزرگ‌تر را محاسبه می‌کردند....

بعد از چند دقیقه گفتم، «راستی! بالاخره تانژانت یک زاویه‌ی حاده حداکثر چه‌قدر است؟» باز هم از دانش‌آموزان همان جواب بی‌نهایت را شنیدم؛ اما این‌بار با اطمینان بیش‌تری جواب می‌دادند. پرسیدم: «یعنی می‌توانید زاویه‌ی حاده‌ای پیدا کنید که تانژانت آن یک میلیارد باشد؟»

دانش‌آموزان دست‌به کار شدند و به‌ترتیب زاویه‌های ۸۹/۹۹۹؛ و ۸۹/۹۹۹۹ و... را آزمودند تا این‌که پس از چند ثانیه یکی گفت: «اگر هشت تا ۹ بعد از ممیز بگذاریم، تانژانت آن زاویه می‌شود پنج میلیارد و خرده‌ای.»

شاید اگر پیش از این از دانش‌آموزان می‌پرسیدیم که زاویه‌ی ۸۹/۹۹ درجه چه‌قدر با زاویه‌ی ۸۹/۹۹۹ درجه اختلاف دارد، آن‌ها تفاوت زیادی بین این دو زاویه نمی‌دیدند و این دو را تقریباً یکی می‌دانستند، اما پس از این اتفاقات، این زاویه‌ها از نظر آن‌ها تفاوت‌های معناداری پیدا کرده بودند.

هم‌چنین، برای دانش‌آموزان جواب این سؤال که «آیا مقدار تانژانت یک زاویه‌ی حاده هر چه‌قدر که بخواهیم بزرگ‌تر می‌شود؟» ملموس‌تر

شده بود. آن‌ها احساس می‌کردند که هر عدد بزرگی که به آن‌ها داده شود، می‌توانند زاویه‌ای حاده پیدا کنند که تانژانت آن زاویه با آن عدد بزرگ برابر شود. درواقع، دانش‌آموزان به مفهوم حد بی‌نهایت نزدیک شده بودند.... در این میان، آن‌ها هم‌چنین افزایش سرعت رشد تانژانت زاویه را وقتی که مقدار زاویه به ۹۰ درجه نزدیک‌تر می‌شد نیز، تجربه می‌کردند.

قدردانی دانش‌آموزان از ماشین‌حساب را هم می‌شد در چشم‌ها و هم در حرف‌هایشان خواند. فکر می‌کنم من هم یک تشکر به جناب ماشین‌حساب بدهکار شدم!