Geo Gebra

آشنایی با نرم‌افزار جئوجبرا

رضا حیدری قزلجه
دانشجوی دکتری ریاضی با گرایش آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

مقاله‌ی حاضر، به معرفی نرم‌افزار جئوجبرا و ارائه‌ی چند تکلیف در درس حسابان، به‌عنوان نمونه‌ای از تکالیفی که می‌توان با این نرم‌افزار انجام داد، می‌پردازد. علاوه بر این به امکانات موجود در این نرم‌افزار که به آموزش ریاضی کمک می‌کند نیز در این مقاله اشاره شده است.

کلیدواژه‌ها: نرم‌افزار جئوجبرا، تکنولوژی اطلاعات و ارتباطات، ریاضیات متوسطه، روش تدریس.

مقدمه

در قرن حاضر، زندگی بشر بیش از هر پدیده‌ی دیگری تحت‌تأثیر فن‌آوری ارتباطات و اطلاعات (ICT) قرار گرفته است. از نظر کی سان (۲۰۰۷)، در دنیای امروز استفاده از تکنولوژی منحصر به کشورهای صنعتی نیست و این ابزار در دسترس جوامع مختلف قرار دارد. به همین دلیل، استفاده از ICT در آموزش ریاضی نیز مورد توجه ویژه قرار گرفته و در متون پژوهشی، فواید زیادی برای استفاده از آن در تسهیل یاددهی- یادگیری ریاضی ذکر شده است. به عنوان مثال، سرشتی (۱۳۸۴) به موارد زیر اشاره می‌کند:

- تسهیل تدریس مفاهیم ریاضی به دانش‌آموزان؛
- تقویت تجسم؛
- صرفه‌جویی در وقت به‌خاطر عدم انجام محاسبات قلم کاغذی؛
- ارتقای درک و فهم دانش‌آموزان؛
- تغییر باور دانش‌آموزان و دانشجویان نسبت به ریاضی.

به این فهرست، می‌توان چند مورد زیر را نیز که بر اثر تجربه‌ی تدریسی نویسنده حاصل شده است، اضافه کرد:

- یادگیری در یک محیط تعاملی و آزمایشی- اکتشافی؛
- ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان به‌سبب جذابیت تکنولوژی برای آن‌ها؛
- تغییر فرهنگ انجام تکلیف و به تبع آن، ارزشیابی در کلاس‌های درس ریاضی.

قبلاً هم شورای ملی معلمان ریاضی NCTM[1] (۲۰۰۰) استفاده از تکنولوژی الکترونیکی به‌ویژه ماشین‌حساب و کامپیوتر را به همه‌ی دانش‌آموزان توصیه کرده و یادآور شده بود که تکنولوژی، یادگیری ریاضی را تسهیل می‌کند، به تدریس ریاضی واقعی و کارا کمک می‌نماید و بر ریاضیاتی که تدریس می‌شود، تأثیر می‌گذارد. اما هوهن وارتر و همکاران (۲۰۰۸) به نقل از کوبان و همکاران (۲۰۰۱) هشدار می‌دهند که «با وجود فواید بی‌شمار تکنولوژی در آموزش ریاضی، فرآیند حضور آن در کلاس‌های درس ریاضی کند و پیچیده است» (ص ۱).

CAS و DGS (سیستم‌های جبر کامپیوتری و سیستم‌های هندسی پویا)

سرشتی (۱۳۸۴) به نقل از تال (۱۹۹۶)، سیر پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر را جهت استفاده در آموزش ریاضی طی مراحل زیر خلاصه کرده است (ص ۲۵):

۱. الگوریتم‌های عددی (۱۹۷۶؛ زبان برنامه‌نویسی بیسیک)؛

۲. تجسم‌های گرافیکی (اوایل دهه‌ی هشتاد میلادی؛

معرفی لوگو)؛

۳. کنترل مجسم (۱۹۸۴؛ معرفی موس)؛

۴. سیستم‌های جبر کامپیوتری، CAS[۲] (۱۹۸۴؛ ورود ماکسیما)؛

۵. تکنولوژی‌های شخصی قابل حمل (ماشین‌حساب‌ها و کامپیوترهای شخصی)؛

۶. چندرسانه‌ای‌ها (پدید آمدن نرم‌افزارهای چندرسانه‌ای تعاملی برای استفاده در مطالعات فردی)؛

۷. شبکه‌ی سراسری اینترنت.

سرشتی (۱۳۸۴) در ادامه، یادآور می‌شود که از بین موارد فوق، یکی از تأثیرگذارترین آن‌ها در آموزش ریاضی که حضورش در عرصه‌ی آموزش ریاضی تداوم نسبتاً خوبی پیدا کرده است، CAS می‌باشد که حدود سه دهه از حضور آن در صحنه‌ی آموزشی می‌گذرد. سرشتی (۱۳۸۴) نقل می‌کند که «سیستم‌های جبر کامپیوتری (CAS) به نرم‌افزارهایی گفته می‌شود که محاسبات و دستورهای جبری انجام می‌دهند. به‌طور مثال، عبارت‌ها را ساده می‌کنند یا از توابع مشتق می‌گیرند. بسته‌های نرم‌افزاری میپل (Maple)، متکد (MathCAD)، درایور (Driver) و متمتیکا (Mathematica) از این نوع هستند» (ص ۲۹).

علاوه بر CAS، نسل دیگری از نرم‌افزارها که در عرصه‌ی آموزش ریاضی ظاهر شده‌اند، سیستم‌های هندسی پویا (DGS[۳]) هستند. به نوشته‌ی اسکری‌بانو و همکاران (۲۰۱۰)، یک سیستم هندسی پویا (DGS) عبارت است از یک برنامه‌ی کامپیوتری که ترسیم‌های دقیق ساختارهای هندسی را بر روی صفحه‌ی کامپیوتر میسر می‌سازد و امکان دست‌ورزی‌های پویای این ساختارها را از طریق کشیدن موس (Mouse) بر روی عناصر خاص فراهم می‌سازد. ویژگی اصلی این برنامه‌ها، تغییر خودبه‌خودی موقعیت همه‌ی عناصر در نمودار مطابق با تغییراتی است که کاربر اعمال می‌کند. این برنامه‌ها هم‌چنین، با عنوان هندسه‌ی تعاملی شناخته می‌شوند (ص ۱). نرم‌افزارهایی مانند Cabri Geometry یا Geometer's Sketchpad مثال‌هایی از DGS هستند.

لاویکزا (۲۰۰۶) و کریس (۲۰۰۴) معتقدند که «سیستم‌های جبر کامپیوتری(CAS)، و نرم‌افزارهای هندسی پویا (DGS)، ابزارهای تکنولوژیک قدرتمندی برای تدریس ریاضی هستند. به توصیه‌ی تحقیقات متعدد، این بسته‌های نرم‌افزاری می‌توانند به ایجاد فضای کشف و آزمایش در کلاس درس کمک کنند و از ویژگی‌های تجسم‌سازی آزاد می‌توان به شکلی مؤثر در خدمت نوعی از تدریس استفاده نمود تا مولد حدس‌های سازنده باشند» (نقل شده در هوهن وارتر و همکاران، ۲۰۰۸، ص ۱).

DMS (نرم‌افزارهای ریاضی پویا)

بعد از CAS و DGS، نسل جدیدی از نرم‌افزارهای آموزش ریاضی به نام نرم‌افزارهای ریاضیات پویا (DMS[۴]) پدید آمدند که جئوجبرا[۵] نیز در این گروه قرار می‌گیرد. جئوجبرا یک نرم‌افزار open-source[۶] برای تدریس و یادگیری ریاضی است که در زمینه‌ی هندسه، جبر و حسابان، دارای عناصر تعاملی قدرتمندی می‌باشد که به سهولت قابل استفاده‌اند.

به هرحال، دو گروه نرم‌افزار CAS و DGS هرکدام، حامی تدریس ریاضی در دوره‌های مختلف‌اند و هریک، مدت زمان متفاوتی از وقت کلاس را می‌طلبند تا دانش‌آموزان در استفاده از آن‌ها به مهارت برسند. در حالی که یادگیری CAS مستلزم صرف زمان طولانی می‌باشد و پیچیدگی‌های آن، امکان استفاده‌اش را در سطوح بالای آموزشی بیش‌تر ممکن می‌سازد، اما DGS را می‌توان حتی در دوره‌های ابتدایی نیز به‌کار گرفت زیرا تنها با دانستن چگونگی استفاده از موس، کاربر می‌تواند از آن استفاده کند. اسکری‌بانو و همکاران (۲۰۱۰) علت را چنین یافتند که کار با DGS براساس دست‌ورزی‌های تعاملی بین کاربر و برنامه است و این باعث سهولت دسترسی می‌شود درحالی‌که کار با CAS بر مبنای تایپ دستوری می‌باشد و این خود به مهارت‌های پیشرفته‌تری نیاز دارد. هوهن وارتر و پری‌نر (۲۰۰۷) سهولت کار با جئوجبرا را در این می‌دانند که این نرم‌افزار، سعی در تلفیق راحتی کاربر DGS با امکانات چندمنظوره‌ی CAS را دارد.

به گفته‌ی هوهن وارتر مبتکر جئوجبرا و همکارانش (۲۰۰۸)، درحالی‌که نرم‌افزارهای دیگر سه حوزه‌ی هندسه، جبر و حسابان را به‌طور جدا از هم در نظر می‌گیرند، ایده‌ی اصلی جئوجبرا پیوند دادن این سه حوزه به یکدیگر و تبدیل آن به نرم‌افزاری واحد است که برای تدریس و یادگیری ریاضیات از دوره‌ی ابتدایی تا دانشگاه به سهولت قابل استفاده باشد. جئوجبرا به‌طور رایگان از طریق اینترنت قابل دسترس است و به گفته‌ی هوهن وارتر و همکاران (۲۰۰۸)، این برنامه توسط داوطلبان علاقه‌مند، به ۳۶ زبان مختلف ترجمه شده است.[۷] هم‌چنین، جامعه‌ی رو به گسترشی از کاربران این نرم‌افزار در سطح جهان تشکیل شده است.

Geo Gebra

در قرن حاضر، زندگی بشر بیش از هر پدیده‌ی دیگری تحت تأثیر فن‌آوری ارتباطات و اطلاعات (ICT) قرار گرفته است

کار در محیط جئوجبرا

فرآیند نصب جئوجبرا آسان است و در زمان کوتاهی انجام می‌شود، اما لازم است قبل از نصب جئوجبرا، برنامه‌ی جاوا اسکریپت[8] را نیز نصب کنیم که آن هم به طور رایگان از طریق اینترنت قابل دستیابی است. هنگام نصب جئوجبرا، زبان نصب برنامه را انگلیسی انتخاب می‌کنیم ولی پس از نصب آن، می‌توانیم از طریق منوی انتخاب (option)، زبان برنامه را به فارسی تغییر دهیم. قابل ذکر است که نویسندگان این متن، در حال انجام پژوهشی در مورد امکان‌سنجی حضور تکنولوژی در کلاس‌های درس ریاضی هستند و برای این کار، برخی مفاهیم حسابان را به کمک این نرم‌افزار به دانش‌آموزان آموزش می‌دهند. انتظار می‌رود که نتایج این تحقیقات، آموزشگران ریاضی را قادر سازد تا بتوانند راجع به ویژگی‌ها و محدودیت‌های جئوجبرا در کلاس درس ریاضی اظهارنظرهای دقیق‌تری کنند.

در هر صورت، محیط جئوجبرا ساده و بدون دستورات و قواعد زیادی است به‌طوری که در نگاه نخست به‌سختی می‌توان باور کرد که یک چنین صفحه‌ی ساده و خلوتی دارای چنان مؤلفه‌های قدرتمندی باشد که بتوان این نرم‌افزار را در آموزش ریاضی، از دوره‌ی ابتدایی تا دانشگاه، مورد استفاده قرار داد. این صفحه شامل نمایش (پنجره‌ی) هندسی[9]، نمایش جبری و نمایش صفحه‌ی گسترده است که البته کاربر می‌تواند هریک از دو مورد آخر را ببندد و از آن‌ها استفاده نکند. اما وجود این سه قسمت است که به جئوجبرا قابلیت ارائه‌ی هر سه بازنمایی هندسی، جبری و عددی را می‌دهد و تلفیق این سه با یک‌دیگر درون یک نرم‌افزار، محیط یادگیری مناسبی را فراهم می‌نماید. به‌عنوان مثال، درحالی‌که کاربر به کمک ابزار دایره با تعیین مرکز و شعاع و تنها با کلیک کردن بر دو نقطه از صفحه، یک دایره را رسم می‌کند، می‌تواند هم‌زمان معادله‌ی آن را در قسمت جبری صفحه مشاهده نماید.

از این گذشته، در محیط جئوجبرا به‌راحتی می‌توان بین پنجره‌های مختلف حرکت کرد. به‌عنوان مثال، از یک طرف اشکال هندسی به کمک موس در پنجره‌ی هندسی قابل تغییرند و به‌طور هم‌زمان، تغییرات در پنجره‌ی جبری قابل دیدن هستند. از طرف دیگر، اشیای جبری را می‌توان به کمک صفحه کلید تغییر داد که در این حال، این تغییرات به‌طور خودکار در اشیای مرتبط در هر دو پنجره نیز اعمال می‌شود. (شکل ۱)

این نرم‌افزار دارای نوار منو، نوار ابزار، نوار ورودی و نوار

شکل ۱. صفحه‌ی جئوجبرا

راهنما است (شکل ۱). بعضی نمادها (مانند حروف الفبای یونانی، توان، ...)، توابع و دستورهای آماده در قسمت پایین سمت راست قابل دست‌یابی هستند. جهت آشنایی با قسمت‌های مختلف این نرم‌افزار، و نحوه‌ی کار با آن مراحل انجام ۶ تکلیف متنوع آموزشی توسط این نرم‌افزار با جزئیات ضروری ارائه می‌شود که دو تکلیف اول، مربوط به بهینه‌سازی در درس حسابان سال سوم متوسطه رشته ی ریاضی- فیزیک است.

تکلیف ۱. کوتاه‌ترین طول سیم نگه‌دارنده

دو تیر برق به طول‌های ۱۲ و ۲۸ متر و به فاصله‌ی ۳۰ متر از یک‌دیگر قرار دارند که به‌وسیله‌ی دو سیم نگه داشته شده‌اند به‌طوری که هر دوی این سیم‌ها به نقطه‌ای در سطح زمین با میخ متصل شده‌اند. میخ را کجا بکوبیم تا کم‌ترین مقدار سیم مصرف شود؟

حل. به روش‌های مختلفی می‌توان این مسئله را در محیط جئوجبرا مدل‌سازی کرد که در این جا، یک روش تحلیلی برای آن ارائه می‌کنیم:

۱. با کلیک کردن بر روی ابزار **پاره‌خط** معین، پاره‌خط OC را

ایده‌ی اصلی جئوجبرا، پیوند دادن سه حوزه‌ی هندسه، جبر و حسابان به یکدیگر و تبدیل آن به نرم‌افزاری واحد است که برای تدریس و یادگیری ریاضیات از دوره‌ی ابتدایی تا دانشگاه به سهولت قابل استفاده باشد

به‌طول ۱۲ متر از مبدأ مختصات، منطبق بر محور yها رسم می‌کنیم.

۲. به روش مشابه، پاره‌خط DE را به موازات OC از نقطه‌ی D (۳۰، ۰) به طول ۲۸ متر رسم می‌کنیم.

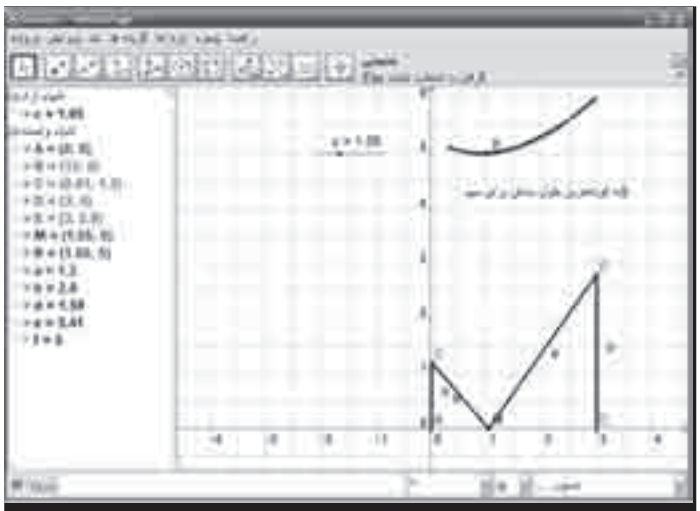
۳. با کلیک کردن بر روی ابزار **لغزنده**، لغزنده‌ای به نام c با دامنه‌ی تغییرات ۰ تا ۳۰ تعریف می‌نماییم.

۴. با تایپ عبارت M = (c,۰) در نوار ورودی، نقطه‌ی شناور M را برحسب c تعریف می‌کنیم.

۵. با کلیک روی ابزار **پاره‌خط**، پاره‌خط‌های CM و ME را تعریف می‌کنیم که نرم‌افزار به‌طور خودکار به‌ترتیب نام‌های d و e را به‌آن‌ها اختصاص می‌دهد.

۶. با تایپ عبارت f=e+d از نوار ورودی، طول سیم مورد نیاز را به‌عنوان متغیر f تعریف می‌کنیم.

۷. حال با تغییر مقدار c، نقطه‌ی M بین دو نقطه‌ی O و D جابه‌جا می‌شود و مشاهده می‌کنیم که کم‌ترین مقدار سیم مورد نیاز ۵۰ است (در شکل ابعاد را تقسیم بر ۱۰ کرده‌ایم) و این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که نقطه‌ی M را در ۱۰ متری تیر برق کوچک‌تر در نظر بگیریم. حتی می‌توانیم با راست کلیک کردن روی لغزنده‌ی c و انتخاب گزینه‌ی **متحرک کردن** کاری کنیم که نقطه‌ی M به‌طور خودکار بین O و D جابه‌جا شود. هم‌چنین، با یک دستور ساده می‌توانیم طول سیم مورد نظر (f) را به‌عنوان نمودار یک تابع درجه‌ی ۲ مشاهده کرده و راحت‌تر مینیمم آن را مشاهده کنیم (شکل ۲).



شکل ۲. کوتاه‌ترین طول برای سیم

تکلیف ۲. مستطیل با محیط ثابت

مستطیلی با محیط ثابت ۴۰ سانتی‌متر مفروض است. ابعاد مستطیل را طوری مشخص کنید که مساحت آن ماکزیمم باشد.

حل.

۱. با کلیک بر روی ابزار **لغزنده**، لغزنده‌ای به نام a با دامنه‌ی تغییر ۰ تا ۴۰ تعریف می‌کنیم.

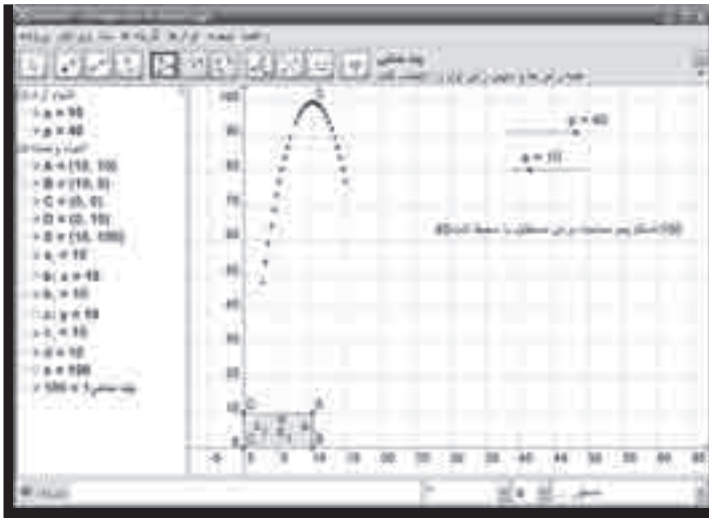
۲. در نوار ورودی، تایپ می‌کنیم A = (a,۲۰ − a). مختصات A درواقع طول و عرض مستطیل هستند که باید مجموع آن‌ها ۲۰ سانتی‌متر باشد.

۳. با کلیک بر روی ابزار **خط عمود**، از A بر دو محور، عمودهایی رسم می‌کنیم.

۴. ابزار **چندضلعی** را انتخاب می‌کنیم و طبق دستور ظاهر شده بر روی نوار راهنما، روی تمام رئوس چهارضلعی مورد نظر و سپس مجدداً بر روی رأس اول کلیک می‌کنیم تا چهارضلعی ABCD رسم شود که در آن، C بر مبدأ مختصات واقع است و B و D به‌ترتیب محل برخورد خط‌های عمود رسم‌شده از A بر محور xها و yها هستند.

۵. حال اگر مقدار لغزنده‌ی a را به‌طور دستی یا **خودکار** تغییر دهیم به تبع آن، مساحت مستطیل ABCD تغییر می‌کند، درحالی که محیط آن به‌طور ثابت ۴۰ سانتی‌متر باقی می‌ماند و عدد مربوط به مساحت با هر تغییر، در پنجره‌ی جبری قابل مشاهده است و ملاحظه می‌کنیم که ماکزیمم مقدار مساحت ۱۰۰ سانتی‌متر مربع است.

۶. در صورت تمایل، می‌توانیم در نوار ورودی دستورهای e = a*(۲۰ − a) و S = (a,e) را تایپ کنیم و سپس روی نقطه‌ی S، راست‌کلیک کرده و گزینه‌ی **ردگیری فعال** را انتخاب کنیم. در این صورت، با تغییر ابعاد مستطیل ABCD، عدد مربوط به مقدار مساحت، بر روی یک‌سهمی حرکت می‌کند که نقطه‌ی ماکزیمم آن به‌راحتی قابل مشاهده است (شکل ۳).



شکل ۳ . مستطیل با محیط ثابت

تکلیف ۳. مشتق به‌عنوان شیب خط مماس

استفاده از جئوجبرا منحصر به بحث بهینه سازی نیست و می‌توانیم برای انجام تکلیف در بخش‌های مختلف ریاضی از آن، کمک بگیریم.

معادله‌ی یک تابع را رسم کنید و در هر نقطه‌ی دلخواه، شیب خط مماس بر آن را به‌عنوان مشتق تابع در آن نقطه در نظر بگیرید و نمودار تابع مشتق را از این طریق رسم نمایید.

حل.

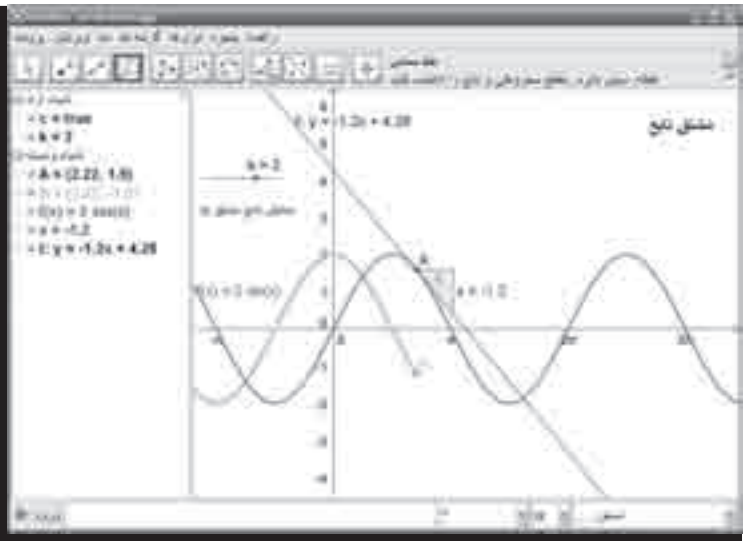
۱. در نوار ورودی، یک تابع دلخواه مثلاً $f(x) = \sin(x)$ را تایپ می‌کنیم.

۲. در نوار ورودی تایپ می‌کنیم $A = Po\,int[f(x)]$. به این ترتیب، جئوجبرا تشخیص می‌دهد که این نقطه یعنی A، یک شئ وابسته به تابع سینوس است، پس نقطه‌ی A را می‌توان روی نمودار حرکت داد.

۳. ابزار **خط مماس** را انتخاب کرده و سپس بر نقطه‌ی A کلیک می‌کنیم. خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌ی A رسم می‌شود و معادله‌ی آن را نیز در سمت چپ مشاهده می‌کنیم. با حرکت دادن A روی نمودار تابع، خط مماس هم حرکت می‌کند و معادله‌ی آن به‌طور پیوسته تغییر می‌کند.

۴. اگر ابزار **شیب** را انتخاب کرده و بر نقطه‌ی A کلیک کنیم، شیب خط مماس را هم می‌توانیم مشاهده کنیم که همان مشتق تابع f در نقطه‌ی A است و نرم‌افزار به‌طور خودکار این شیب را با s نمایش می‌دهد.

۵. بالاخره اگر در نوار ورودی عبارت $P = (x(A), s)$ را وارد کنیم و روی نقطه‌ی B راست‌کلیک کرده گزینه‌ی **ردگیری فعال** را انتخاب کنیم، درواقع B را به‌صورت یک نقطه‌ی شناور تعریف کرده‌ایم که با حرکت دادن A روی نمودار f، مسیر حرکت B نمودار f' را رسم خواهد کرد (شکل ۴). به‌علاوه می‌توانیم یک جعبه‌ی انتخاب[۱۰] در صفحه قرار دهیم که در هر مرحله، کاربر تعیین کند که نمودار f' نمایش داده شود یا خیر.



شکل ۴ . نمودار تابع به‌همراه خط مماس بر آن و تابع مشتق

تکلیف ۴. مجموع بالا و پایین ریمان

مجموع بالا و پایین ریمان یک تابع را در بازه‌ی مورد نظر، به‌ازای افراز آن بازه به n زیر بازه‌ی مساوی به دست آورید.

حل.

۱. ابزار **لغزنده** را انتخاب کرده و با کلیک بر یک نقطه از صفحه، لغزنده‌ای به نام n را با دامنه‌ی تغییر مثلاً (صفر) تا ۲۰۰ تعریف کنید.

۲. در نوار ورودی، یک تابع دلخواه مثلاً ضابطه‌ی تابع $f(x) = ۰/۳x^۲$ را تایپ کنید.

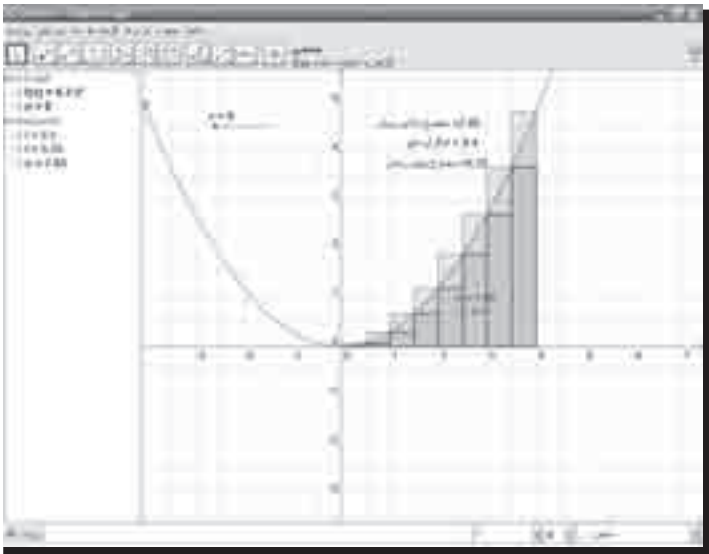
۳. در نوار ورودی، دستور $u = Uppersum[f, ۰, ۴, n]$ را تایپ کنید که این دستور، مجموع بالای ریمان تابع دلخواه خود را در بازه‌ی ۰ تا ۴ برمی‌گرداند.

۴. اگر در نوار ورودی، دستور $l = Lowersum[f, ۰, ۴, n]$ را تایپ کنیم، مجموع پایین ریمان تابع f در این بازه را نیز مشاهده

خواهیم کرد. البته این دستورها به صورت آماده در جعبه‌ی پایین سمت راست صفحه هم وجود دارند که می‌توانیم به جای تایپ کردن دستور مورد نظر، آن را از جعبه‌ی گفته شده انتخاب کنیم.

۵. به‌علاوه، می‌توانیم دستور $i = int\,egral[f, ۰, ۴]$ را نیز وارد کنیم تا مقدار انتگرال معین f در بازه‌ی ۰ تا ۴ را به‌دست آوریم.

پس از ایجاد فایلی با این مشخصات، می‌توانیم مقدار لغزنده‌ی n را به‌طور دستی یا خودکار تغییر دهیم که در این صورت، مستطیل‌های محاطی و محیطی مربوط به نمودار، مرتباً تغییر می‌کنند و این باعث می‌شود که در هر لحظه، مجموع بالا و پایین ریمان تغییر کند. این کار کمک می‌کند تا دانش‌آموزان، تغییرات این مجموع را به‌طور پویا مشاهده کنند و ببینند که با افزایش n، این دو مقدار به یک‌دیگر و درواقع به مقدار انتگرال f در این بازه، نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.



شکل ۵. مجموع بالا و پایین ریمان و انتگرال معین تابع

تکلیف ۵. انتقال و انبساط و انقباض توابع

با استفاده از ابزار لغزنده که یکی از ویژگی‌های مهم نرم‌افزار جئوجبرا است، به‌راحتی می‌توانیم با انتقال یک تابع دلخواه در راستای محور xها یا yها و نیز انبساط یا انقباض تابع مورد نظر در راستای هریک از محورها، توابع دیگری را ایجاد کنیم و این مفاهیم را به کمک این نرم‌افزار، آموزش دهیم.

خانواده‌ای از توابع به شکل $y = a|bx + c| + k$ را تعریف کنید که در آن، a، b، c و k لغزنده‌هایی هستند که به‌دلخواه می‌توان دامنه‌ی تغییرات هریک از آن‌ها را تعریف کرد و مقدارشان را به‌طور دستی یا خودکار تغییر داد. آن‌گاه، نتیجه را در پنجره‌ی هندسی مشاهده کنید (شکل ۶).

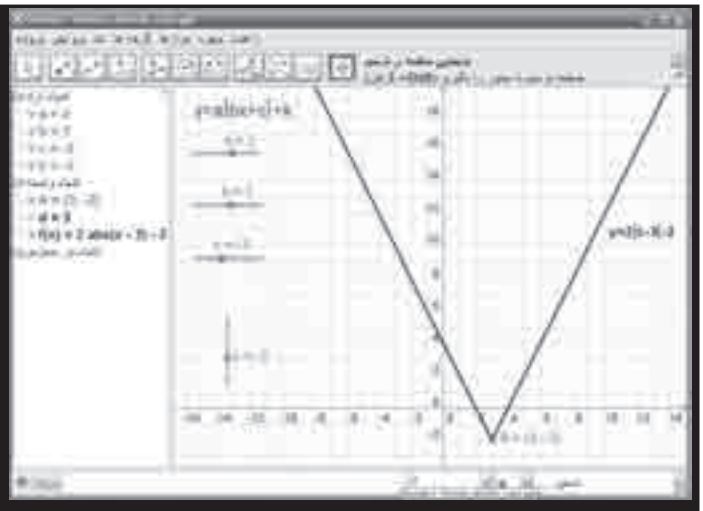
حل.

۱. ابزار **لغزنده** را انتخاب کرده و با کلیک بر روی چهار نقطه از صفحه، چهار لغزنده به نام‌های a، b، c و k در یک محدوده‌ی دلخواه مثلاً ۱۰- تا ۱۰ تعریف کنید.

۲. دستور $d = -c / b$ را در نوار ورودی تایپ کنید تا طول رأس نمودار قدر مطلقی به‌دست آید.

۳. با دستور $A = (d, k)$، مختصات رأس تابع قدر مطلقی را برگردانید (نکته‌ی مورد توجه آن است که این دستورات بسیار شبیه آن چیزی است که در نمادگذاری ریاضی از آن‌ها استفاده می‌شود).

۴. تابع f را به‌صورت $f(x) = a*abs(bx + c) + k$ تعریف کنید که در آن، عبارت abs نشان‌دهنده‌ی تابع قدر مطلق است. حتی اگر * را هم که نشان‌دهنده‌ی ضرب است قرار ندهید، مشکلی پیش نمی‌آید و نرم‌افزار آن را تشخیص می‌دهد.



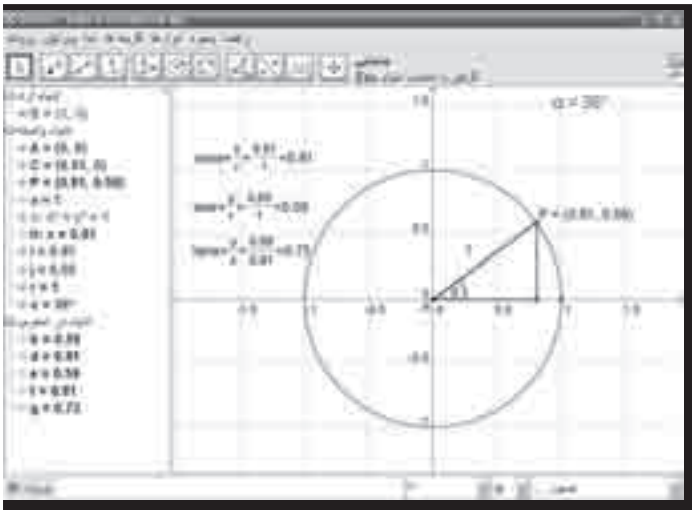
شکل ۶. انتقال و انبساط و انقباض توابع

تکلیف ۶. دایره‌ی مثلثاتی

با استفاده از ابزار **دایره با تعیین مرکز و شعاع**، می‌توان دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع یک تعریف کرد و یک نقطه مانند P را روی آن در نظر گرفت. سپس به کمک مختصات نقطه‌ی P، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α یعنی زاویه‌ی بین قسمت مثبت محور xها و پاره‌خط OP را تعریف نمود که جزئیات

تکنولوژی، یادگیری ریاضی را تسهیل می کند، به تدریس ریاضی واقعی و کارا کمک می نماید و بر ریاضیاتی که تدریس می شود، تأثیر می گذارد

انجام این تکلیف، به‌عهده‌ی خوانندگان محترم گذاشته می‌شود. ولی نمایش مربوط به این فایل را در زیر مشاهده می‌کنید (شکل ۷). با حرکت نقطه‌ی P روی دایره، اندازه‌ی زاویه‌ی α هم تغییر می‌کند و در هر تغییر، نسبت‌های مثلثاتی آن قابل مشاهده است.



شکل ۷. مشاهده‌ی نسبت‌های مثلثاتی به کمک دایره‌ی مثلثاتی

جمع بندی

نرم‌افزار جئوجبرا، به‌سبب سهولت استفاده و اتکای حداقلی به پیش‌نیازها، برای تمام دوره‌های تحصیلی قابل استفاده است و به این دلیل، کاربران آن به‌طور چشمگیری در حال افزایش‌اند. سخن پایانی این نوشته، اشاره به چرایی افزایش کاربران این نرم‌افزار و مزایای استفاده از آن در فرایند یاددهی-یادگیری ریاضی است.

افزایش کاربران جئوجبرا: در حال حاضر، سایت www.geogebra.org هر ماه، حدود ۳۰۰۰۰۰ بازدیدکننده از ۱۹۲ کشور دارد و برآورد می‌شود که بیش از ۱۰۰۰۰۰ آموزشگر یا معلم ریاضی در سراسر جهان، در تدریس خود از این نرم‌افزار بهره می‌گیرند. امروزه کاربران جئوجبرا جامعه‌ای خودکفا را تشکیل داده‌اند که از طریق بحث و گفت‌وگوهای آنلاین، از کاربران عضو این جامعه پشتیبانی می‌کنند (www.GeoGebra.org/forum). به‌علاوه، معلمان و پژوهشگران ریاضی از سراسر جهان، در حال ایجاد یک مؤسسه‌ی بین‌المللی جئوجبرا می‌باشند تا از این طریق، به رشد حرفه‌ای معلمان ریاضی کمک کنند، بر روی جئوجبرا تحقیق نمایند و به بهبود نرم‌افزاری با کیفیت بالا که به‌طور رایگان برای همه قابل دسترس باشد، ادامه دهند.

به گفته‌ی هوهن وارتر و پری‌نر (۲۰۰۷a و ۲۰۰۷b)، جئوجبرا با سرعت روزافزونی در حال جذب طرفدارانی از تمام نقاط جهان به‌ویژه اروپا و آمریکای شمالی است. به‌عنوان مثال، هوهن وارتر و همکاران (۲۰۰۸) به گزارش یک طرح ملی استفاده از جئوجبرا در کشور اتریش جهت آموزش حسابان پرداخته‌اند. به گفته‌ی آن‌ها، در سال ۲۰۰۶ پروژه‌ای برای دبیرستان‌های اتریش اجرا شد که در آن، ساختارهای پویای جئوجبرا و اشکال تعاملی آن در ترکیب با یکدیگر، منجر به ایجاد محیط‌های یادگیری تعاملی شدند. دانش‌آموزان از طریق حمایت‌های معلمانشان و بهره‌گیری از انواع مواد آموزشی مانند کار-برگه‌های کاغذی، تکالیف تعاملی و آزمون‌های کلاسی، به سمت کشف مفاهیم مشتق و انتگرال هدایت شدند. هوهن وارتر و همکاران (۲۰۰۸) به نقل از امباچر (۲۰۰۶) به توضیح این مهم می‌پردازند که چگونه این محیط‌های یادگیری در دبیرستان‌های اتریش، با حضور چند صد دانش‌آموز مورد آزمایش و بررسی قرار گرفتند. دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این پروژه، مواد درسی تعاملی و پویا را در تلاش خود برای فهمیدن و تجسم‌کردن مفاهیم زیربنایی ریاضی، سودمند تلقی کردند.

ماهیت open source بودن جئوجبرا، استلزامات مهمی برای آموزشگران دارد. جئوجبرا می‌تواند فرصت خوبی برای ایجاد محیط‌های خلاق یادگیری آنلاین ارائه دهد و بدین‌سبب، باعث شده است تا بسیاری از معلمان ریاضی، مواد درسی رایگان خود را در اینترنت به اشتراک بگذارند و هر کدام، به مجموعه‌ی وسیعی از مواد آموزشی دسترسی پیدا کنند. آن‌ها می‌توانند فایل ساخته‌شده‌ی خود را در GeoGebra Wiki قرار دهند یا یک کار-برگه‌ی آماده را انتخاب کنند و براساس نیاز شخصی خود، آن را تغییر دهند.

تحقیقات نشان می‌دهد که از نظر بسیاری از معلمان، تنها فراهم بودن تکنولوژی برای تلفیق آن با تدریس روزانه‌ی آن‌ها کافی نیست (کوبان و همکاران (۲۰۰۱) و روتوین و همکاران (۲۰۰۲) نقل شده در هوهن وارتر و همکاران، ۲۰۰۸، ص ۲).

اما در عین حال، پژوهش‌ها نشان می‌دهند که آموزش کافی و حمایت‌های آکادمیک، می‌تواند باعث افزایش رغبت معلمان ریاضی برای تلفیق تکنولوژی با تدریس ریاضی خود و ایجاد فعالیت‌های تدریسی موفق با کمک تکنولوژی می‌شود (بکر و همکاران (۱۹۹۹)، نقل شده در هوهن وارتر و همکاران (۲۰۰۸)، ص ۲).

مزایای جئوجبرا برای دانش‌آموزان و آموزشگران ریاضی:
هوهن وارتر و همکاران (۲۰۰۸) ادعا می‌کنند که جئوجبرا را می‌توان به شکل‌های مختلف در تدریس به‌کار برد. به‌طور مثال، در محیط جئوجبرا معلمان می‌توانند فایل‌های از پیش ساخته‌ی خود را در تدریسشان مورد استفاده قرار دهند؛ فایل‌هایی که می‌توان آن‌ها را در چند دقیقه آماده کرد یا حتی در حین تدریس طراحی نمود (تدریس معلم‌ـ محور). از طرف دیگر، دانش‌آموزان نیز می‌توانند به دو شیوه جئوجبرا را به خدمت بگیرند. ممکن است آن‌ها به کمک تمرین‌هایی که روی کاغذ توسط معلمشان طراحی شده، خود فایل‌های مورد نظر را بسازند، یا این‌که از فایل‌های ساخته شده‌ی معلم خود استفاده نمایند (تدریس دانش‌آموزـ محور).

از طرف دیگر، کری سانتو[11] (۲۰۰۸) معتقد است در استفاده‌ی کلاسی از جئوجبرا، سه جنبه‌ی **مهارت‌ها**، **پداگوژی** و **برنامه‌ی درسی** مورد توجه است. معلمان باید بدانند جئوجبرا چگونه کار می‌کند و چگونه می‌توانند آن را به‌طور مؤثری با برنامه‌ی درسی و کلاسی خود تلفیق نمایند. او در ادامه توضیح می‌دهد که جئوجبرا را می‌توان به روش‌های زیر، در تدریس و یادگیری ریاضی به‌کار برد:

ـ ابزار رسم؛

ـ بررسی و کشف مفاهیم ریاضی از طریق خلق یک فضای یادگیری مناسب؛

ـ آماده کردن مواد تدریسی از طریق استفاده از جئوجبرا به‌عنوان ابزار کمکی، گفتمانی و بازنمایی (هوهن وارتر و فوچی (۲۰۰۴)، نقل شده در کری سانتو (۲۰۰۸)).

جئوجبرا برای اهداف آموزشی طراحی شده است و محیط آن از نظر ریاضی بسیار غنی است، به‌طوری که دانش‌آموزان در این محیط، بازخوردهای دیداری و مفهومی را فوری دریافت می‌کنند و این درواقع، پاداش آن‌ها برای حل مسئله است و آن‌ها می‌توانند حل خود را به‌صورت گرافیکی و جبری بررسی کنند.

هم‌چنین، جئوجبرا این امکان را دارد که کاربران بتوانند گام‌به‌گام، چگونگی ساخته شدن یک ابزار را مشاهده کنند. علاوه بر این، جئوجبرا برای آموزشگران و معلمان ریاضی نیز فرصت با ارزشی ایجاد می‌کند تا تمام گام‌های دانش‌آموزان را در یک فایل دنبال کرده و تمام انتخاب‌ها و اعمال آن‌ها را پیگیری کنند. معلمان از طریق پیگیری اَشکالی که دانش‌آموزان رسم کرده‌اند، می‌توانند استراتژی‌های انتخابی حل مسئله و بدفهمی آن‌ها را شناسایی کرده و با مداخله‌های به‌جای آموزشی، به ارتقای یادگیری ریاضی ایشان کمک کنند.

سخن پایانی

نسخه‌ی اولیه‌ی جئوجبرا در سال ۲۰۰۲، پروژه‌ی پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی مارکوس هوهن وارتر در دانشگاه سالزبرگ اتریش بود و در حال حاضر، توسط صدها هزار معلم و دانش‌آموز در سراسر دنیا در کلاس درس و منزل مورد استفاده قرار گرفته است. این برنامه در سال ۲۰۰۲ جایزه‌ی نرم‌افزار آکادمیک اروپا را از آن خود کرد. توسعه‌ی بیش‌تر جئوجبرا توسط هوهن وارتر باعث شد که آکادمی علوم اتریش، بورس دوره‌ی دکتری را به او اعطا کند. از سال ۲۰۰۶ توسعه‌ی جئوجبرا در دانشگاه فلوریدای آمریکا ادامه یافت، جایی که هوهن وارتر در پروژه‌ی تربیت معلم بنیاد ملی علوم[12] کار می‌کرد (پری‌نر، ۲۰۰۸).

به‌طور خلاصه، می‌توان گفت جئوجبرا سه حوزه‌ی هندسه، جبر و حسابان را با هم تلفیق کرده و حامی بازنمایی‌های هندسی، جبری و عددی است. جئوجبرا به سه دلیل **رایگان بودن**، **آسانی کاربرد** و **امکان ایجاد محیط فارسی**، قابل آموزش به معلمان ریاضی در مدت کوتاهی است تا عملاً در کلاس‌های درس خود از آن استفاده کنند. دانش‌آموزان هم می‌توانند در طول یک یا دو جلسه، استفاده از جئوجبرا را آموخته و مسائل ریاضی خود را با آن حل کنند.

به دلیل پویایی و تعاملی بودن زیاد محیط جئوجبرا، معرفی کامل آن در قالب یک مقاله، کار آسانی نیست و بهتر است این کار از طریق برگزاری کارگاه‌های آموزشی متعدد صورت پذیرد. در هرحال، امید است که این مقاله، انگیزه‌ای باشد برای آن‌که معلمان ریاضی علاقه‌مند، جئوجبرا را روی کامپیوترهای خویش نصب کرده و در کارهای آموزشی و پژوهشی خود، از این نرم‌افزار استفاده نمایند. این برنامه، راهنمای نسبتاً کاملی هم دارد که به

زبان فارسی نیز قابل دستیابی و استفاده است و این ویژگی، باعث می‌شود کاربران بتوانند به‌طور خودآموز، از این نرم‌افزار استفاده کنند. اما از محدودیت‌های این برنامه، می‌توان به ناتوانی آن در رسم اشکال سه‌بعدی اشاره کرد. البته برای جئوجبرا این کار، کاملاً هم غیرممکن نیست اما به سختی می‌توان اشکال سه‌بعدی را در آن رسم کرد. البته، از جمله برنامه‌های توسعه‌ی بعدی جئوجبرا، ایجاد قابلیت رسم اشکال سه‌بعدی با سهولت بیش‌تر است.

Geo Gebra

پی‌نوشت

1. National Council of Teachers of Mathematics
2. Camputer Aglebra System
3. Dynamic Geometric System
4. Dynamic Mathematics Software
5. Geo Gebra

۶. نرم‌افزاری که کدهای برنامه‌نویسی آن در دسترس کاربران باشد به‌طوری که بتوانند آن را بخوانند، در آن تغییراتی ایجاد کنند و نسخه‌ی جدیدی از نرم‌افزار را براساس آن تغییرات تولید نمایند. (BECTA، ۲۰۰۵، P2؛ نقل شده در کری‌سانتو، ۲۰۰۸، صفحه ۲۶).

۷. در ایران نیز موسّسه‌ی تبیان این نرم‌افزار را به فارسی ترجمه کرده است.

8. Java Script
9. Geometric View
10. Check box
11. Chrysanthou
12. National Science Foundation (NSF)

منابع

۱. سرشتی، حمیده (۱۳۸۴). **نقش تکنولوژی در ارتقای مفاهیم ریاضی عمومی**. پایان‌نامه‌ی منتشر نشده‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشکده‌ی علوم ریاضی. دانشگاه شهید بهشتی. تهران.

2. Escribano, J; Botana, F. & Ab´anades, M. A. (2010). Adding Remote Computational Capabilities to Dynamic Geometry Systems. *Mathematics and Computers in Simulation* 80 1177-1184.

3. Hohenwarter, M. Hohenwarter, J. Kreis, Y. Lavicza, Zsolt. (2008). Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*, ICME 11, Mexico.

4. Hohenwater. M. & Preiner J. (2007a): Dynamic Mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and Its Applications*. Vol. 7, Article ID 1448.

5. Hohenwater. M. & Preiner, J. (2007b). Journal of Online Mathematics and Its Applications. Vol. 7, Article ID 1574.

6. Kissane, Barry. Lim (2007). Teaching and Learning Elementary Caluculus Concepts With a Graphic Calculator. In Chap Sam, Fatimah Saleh, Munirah Ghazali, Hajar Sulaiman, Yunus Hashimah Mohd. Gan We Ling & Hwa Tee Young (Eds.) *Procedings of the Fourth East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (pp 243-250). Universiti Sains Malaysia, Penang. [ISBN 978-983-2700-45-6].

7. National Counicl of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Author.

8. Chrysanthou, I. (2008). *The Use of ICT In Primary Mathematics in Cyprus: The Case of GeoGebra*, UnPublished Master Thesis. University of Cambridge, UK.

در شماره‌ی ۹۸ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، چند اشتباه وجود دارد که بدین وسیله، آن‌ها را اصلاح می‌کنیم و از نویسنده‌ی مقاله، آقای علی غلامیان، پوزش می‌طلبیم:

صفحه‌ی ۳۱، ستون اول، سطر آخر، (۴) باید $f'(4)$ باشد؛

صفحه‌ی ۳۱، ستون دوم، سطر پانزده، انتهای سطر، (۴) باید $f'(4)$ باشد؛

صفحه‌ی ۳۲، ستون دوم، سطر چهارم، $\lim(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) \leq 64$ صحیح است؛

صفحه‌ی ۳۳، سؤال ۱، قسمت (پ)، $\sqrt[3]{3^p}$ صحیح است؛

صفحه‌ی ۳۳، سؤال ۳، $x^x \geq (\frac{x+1}{2})^{x+1}$ صحیح است.