داستان جبر

منافع و دام‌های شیءانگاری

قسمت دوم

آنا اِسفارد و لیُرا لینچوسکی
ترجمه: زهرا کامیاب، دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی
امیرحسین اصغری، دانشگاه شهید بهشتی

کلیدواژه‌ها: جبر مدرسه‌ای، شیءانگاری مفاهیم، تفکر جبری.

اشاره

در بخش نخست این مقاله، که در شماره‌ی ۹۹ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی به چاپ رسید، نخست به معرفی جبر از دیدگاه **نظریه‌ی شیءانگاری مفاهیم**، پرداخته شد، سپس برای تجزیه و تحلیل‌های منطقی، هستی‌شناختی و تاریخی، جبر و توسعه‌ی آن مورد بررسی قرار گرفت. اینک در بخش دوم، به بررسی رشد تفکر جبری از دیدگاه روان‌شناسی و به عنوان دنباله‌ای از انتقال‌های همواره رو به پیشرفت، از نگاه عملیاتی به ساختاری می‌پردازیم. در این خصوص بر دو انتقال، تمرکز شده است: انتقال از جبر عملیاتی محض به جبر ساختاری از یک مجهول و سپس به جبر تابعی (از یک متغیر). در این شماره، انتقال از جبر عملیاتی محض به جبر ساختاری مورد بررسی قرار می‌گیرد و در شماره‌ی بعدی، انتقال به جبر تابعی و پس از آن، دشواری‌هایی که یادگیرندگان در این نقاط اتصال تجربه می‌کنند، با استفاده از داده‌های تجربی بیش‌تری که از دامنه‌ی وسیعی از منابع به دست آمده، شرح داده خواهد شد.

۳. رشد تفکر جبری ـ دیدگاه روان‌شناسانه

۱.۳. ملاحظات مقدماتی: توانمندی در جبر، از تغییرپذیری و انطباق‌پذیری در تفسیر نمادها

در گزارش تاریخی که در قسمت قبلی مقاله ارائه شد، نشان داده شد که رشد دنباله‌ای از رویکردهای ممکن نسبت به جبر و ساخت‌های نمادین آن، هزاران سال طول کشید. امروزه برای حل یک مسئله‌ی کوچک از یک کتاب استاندارد، غالباً یادگیرنده باید به همه‌ی دیدگاه‌های متفاوت متوسل شود؛ مثال جدول (۳) راه پر پیچ و خمی را نشان می‌دهد که فرد باید برای حل معادله‌ی پارامتری که در مقدمه‌ی این مقاله بحث شد، طی کند. مسئله حل کن، بین رویکرد عملیاتی و ساختاری و بین یک تفسیر ساختاری و تفسیری دیگر نوسان می‌کند.

برخی مثال‌ها از نوسان فرایند ـ شیء در حل مسئله‌های جبری در «زندگی واقعی» در مسکویچ[1] و همکاران (۱۹۹۲) آمده است. گری[2] و تال[3] (۱۹۹۱) به پدیده‌ی مشابهی در حساب اشاره می‌کنند. میسُن[4] (۱۹۸۹) وقوع مکرر و اهمیت یک جابه‌جایی ظریف را مورد ملاحظه قرار می‌دهد: «**جابه‌جایی در دیدن یک عبارت [جبری] به عنوان عبارتی برای تعمیم و دیدن همان عبارت به عنوان یک شیء یا خاصیت**». همه‌ی محققین توافق دارند «انعطاف‌پذیری [دیدگاه] نشانه‌ای از توانمندی است» (مسکویچ و همکاران، ۱۹۹۲). در ادامه با استفاده از نظریه‌ی شیءانگاری مفاهیم علت این مسئله به طور خلاصه بیان می‌شود (برای درک بهتر این موضوع، اسفارد، ۱۹۸۷، ۱۹۹۱، ۱۹۹۲ را ببینید). شیوه‌ی عملیاتی تفکر، اعمالی را که برای حل مسئله‌ی دم دست باید انجام شود، دیکته می‌کند؛ در حالی که رویکرد ساختاری، اطلاعات را متراکم می‌کند و دید فرد را وسیع‌تر می‌سازد. اشیاء مجرد هم‌چون نشانه‌هایی خواهند بود که با کمک آن‌ها فرایند حل مسئله هدایت می‌شود. از آن‌جایی که جهش از شیوه‌ی عملیاتی به شیوه‌ی ساختاری تفکر به معنای انتقال از پُر ـ جزئیات و پراکنده به عمومی و مختصر است ـ از پای یک کوه به بالای کوه ـ طبیعی است که با افزایش توانایی دانش‌آموز در انجام تکالیف دم‌دست همراه باشد.

جدول ۳

نوسان بین رویکردها هنگام حل مسئله‌ی جبری

مسئله: برای چه مقادیری از پارامترهای p و q، معادله‌ی $(p+2q)x^2 + x = 5x^2 + (3p-q)x$ به‌ازای هر مقدار x برقرار است؟	
یک راه‌حل ممکن:	
یک گام در راه‌حل (تصمیم، عملیات)	**رویکرد به کار رفته**
۱. هر یک از فرمول‌ها، خانواده‌ای از توابع درجه دوم را نمایش می‌دهد. تکلیف، پیدا کردن اعضایی از این دو خانواده است که با یکدیگر مساوی هستند. دو تابع چند جمله‌ای مساوی هستند اگر ضرایب توان‌های یکسان x مساوی باشند. بنابراین، برای پاسخ دادن به سؤال باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم: $\begin{cases} p+2q=5 \\ 3p-q=1 \end{cases}$	۱. در اینجا فرمول به عنوان **خانواده‌ای از توابع** تفسیر شده است (فرد ممکن است دو سهمی را در نظر بگیرید و بپرسید برای چه p و qای این دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند).
۲. با حل معادله‌ی اول نسبت به p شروع می‌کنیم: $\begin{cases} p=5-2q \\ 3p-q=1 \end{cases}$	۲. تفسیر اول: $p+2q=5$ به عنوان **رشته‌ای از نمادها** در نظر گرفته می‌شود که باید براساس قواعد، مورد دست‌ورزی قرار گیرند. تفسیر دوم: $p+2q$ **یک عدد** است؛ تفریق $2q$ (که آن هم یک عدد است) از $p+2q$ و ۵، تساوی را حفظ می‌کند.
۳. در دومین معادله $5-2q$ را جایگزین p می‌کنیم: $\begin{cases} p=5-2q \\ 3(5-2q)-q=1 \end{cases}$	۳. $5-2q$ به عنوان **یک عدد** در نظر گرفته می‌شود (نتیجه‌ی فرایندی که نمایش می‌دهد).
۴. دومین معادله را نسبت به q حل می‌کنیم: $3(5-2q)-q=1$ $15-6q-q=1$ $15-7q=1$ $-7q=-14$ $q=2$	۴. فرمول‌ها به عنوان **رشته‌ای از نمادها** در نظر گرفته می‌شوند و براساس قواعد، دست‌خوش عملیات‌های صوری می‌گردند.
۵. در اولین معادله، ۲ را جایگزین q می‌کنیم و مقدار p را محاسبه می‌کنیم: $p=5-2\times2=5-4=1$	۵. عبارت $5-2q$، تبدیل به $5-2\times2$ می‌شود و به عنوان **فرایند محاسباتی** تفسیر می‌شود.
۶. پاسخ را فرمول‌بندی می‌کنیم (توابع) $(p+2q)x^2+x$ و $5x^2+(3p-q)x$ مساوی هستند اگر و فقط اگر $p=1$ و $q=2$.	۶. به دیدگاه **تابعی** برمی‌گردیم.

در این‌جا به مفهوم انعطاف‌پذیری که به معنای منبعی برای توانمندی است، نگاه دقیق‌تری داریم. این ویژگی خاص تفکر جبری، تابعی از دو متغیر است: تغییرپذیری تفاسیر در دسترس و انطباق‌پذیری دیدگاه. به نظر می‌رسد این دو پارامتر کاملاً مستقل باشند. فرد در شرایط معین ممکن است یک عبارت را به عنوان یک فرایند درک کند، در زمینه‌ای دیگر آن‌را به عنوان نتیجه‌ی این فرایند

فرد در شرایط معین ممکن است یک عبارت را به عنوان یک فرایند درک کند، در زمینه‌ای دیگر آن را به عنوان نتیجه‌ی این فرایند و حتی در موقعیت دیگر به عنوان یک تابع در نظر بگیرد

و حتی در موقعیت دیگر به عنوان یک تابع در نظر بگیرد. بنابراین، می‌توان گفت، تغییرپذیری نگاه او کاملاً مؤثر است، اما لـزوماً به این معنا نیست که فرد می‌تواند دیدگاهش را با تکلیف دم‌دست منطبق کند. اگرچه چنین انطباقی گاهی به آرامی و نامحسوسی انطباق چشم با تغییر یک منظره است. در شرایط معین ممکن است بـه هـمـان دشواری تناوب بین درک‌های متفاوت از مکعبی باشد کـه در یک تصویر دوبعدی نمایش داده شده است. به عنوان مثال، فرد ممکن است به خوبی آگاه باشد که اصولاً عباراتی مانند $(p+۲q)x^۲+x$ و $۵x^۲+(۳p-q)x$ می‌توانند توابع را نمایش دهند، اما این تفسیر خاص، هم‌زمان با حل مسئله‌ی ارائه شده در جدول (۳) به ذهنش خطور نکند. بنابراین، بررسی تغییرپذیری بالقوه در تصور دانش‌آموزان، برای رسیدن به ارزیابی خوبی از توانایی جبری آن‌ها کافی نیست. انطباق‌پذیری دیدگاه آن‌ها نیز به همان اندازه مهم است و باید مورد آزمون قرار گیرد.

این یکی از فرضیات نظری اساسی ماست کـه مـجـموعـه‌ی دیدگاه‌های در دسترس دانش‌آموزان به تدریج رشد می‌کند و تقریباً مسیر منطقی ـ تاریخی ارائه شده در جدول (۲) را طی می‌کند (بـه بخش اول مقاله در شماره‌ی ۹۹ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی مراجعه کنید). ساختار سلسله مراتبی جبر و تفاسیر متفاوت آن این فرضیه را نسبتاً قابل قبول می‌سازد. یک پرش مستقیم، مثلاً از روی یک شکاف عمیق که جبر تابعی را از جبر عملیاتی جدا می‌کند، ممکن است منجر به شکسته شدن استخوان‌ها شود. در بحثی که در ادامه می‌آید، تمرکزمان را بر دو نقطه‌ی اتصال اساسی در جبر مدرسه‌ای خواهیم گذاشت: اولاً، انتقال از مفاهیم صرفاً عملیاتی یک فرمول نمادین به تفسیر دوگانه‌ی فرایند ـ نتیجه (از خانه‌ی ۱ . ۱ . ۱ . به ۱ . ۲ . ۱ . در جدول (۲)؛ ثانیاً، گذر از این‌جا به رویکرد تابعی را بررسی خواهیم کرد (به خانه‌ی جدول ۱ . ۲ . ۲ .). تلاش خواهیم کرد دریابیم این دو مرحله چه‌قدر برای دانش‌آموز دشوار است و چه پدیده‌هایی نشانه‌های این دشواری‌هاست. در بخش آخر، نگاهی به حاصل نهایی تحصیلات خواهیم داشت و پرسش تغییرپذیری و انطباق‌پذیری مفاهیمی که معمولاً دانش‌آموزان با آن مدرسه را ترک می‌کنند، مورد توجه قرار خواهد گرفت.

۲.۳. به سمت دیدگاه ساختاری

اگرچه بررسی‌های قبلی از چـارچوب مفهـومی یکسانی نشـأت نگرفته‌اند، زمانی که یافته‌های آن‌ها با یکدیگر ترکیب می‌شوند و از طریق لنز نظریه‌ی شیءانگاری مفاهیم بازآزمایی می‌شوند، غالباً به بینش جدید و تصویر جامع‌تری از یادگیری رهنمون می‌شوند. برای این‌که این بینش را قوی‌تر سازیم، آن‌ها را با نمونه‌ای از مصاحبه‌ها و مشاهدات تقویت می‌کنیم. ما این مشاهدات و مصاحبه‌هـا را با دانش‌آموزانی از سنین مختلف و بـا تـوانمندی‌های متفـاوت انجام دادیم. مصاحبه‌ها بر فرمول‌های گزاره‌ای (معادله، نامعادله) تمرکز دارند. مصاحبه‌کنندگان شامل سه گروه بودند:

گروه ۱: شش دانش‌آموز سال‌های ششم و هفـتـم (۱۲ـ۱۳ ساله) با توانایی متوسط و کمی بالاتر از متوسط. زمانی که ما اولین بار آن‌ها را مشاهده کردیم، با مفهوم یک عبارت جبری آشنا بودند، اما با مفهوم معادله آشنا نبودند؛

گروه ۲: چهار دانش‌آموز سال نهم (۱۴ـ۱۵ ساله) با توانایی بالاتر از متوسط که تصور می‌شد در جبر پایه شامل معادلات خطی و درجه‌ی دوم و نامعادلات خطی متبحر باشند و با مفهوم تابع به‌طور کلی و توابع خطی به‌طور خاص آشنا باشند؛

گروه ۳: چهار دانش‌آموز سال دهم (۱۵ـ۱۶ ساله) با توانایی بالاتر از متوسط که تجارب طولانی مدتی در زمینه‌های مختلف جبر شامل هندسه‌ی تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال داشتند (بنابراین می‌توانستیم انتظار داشته باشیم به خوبی با رویکرد تابعی آشنا باشند).

تحقیق دیگری نیز انجام شد. بعد از این‌که بـه هـر کـدام از دانش‌آموزان گروه ۱ آموزش داده شد که معادلات خطی از نوع $ax+b=cx+d$ را حل کنند، از آن‌ها خواسته شد در توضیح مطلب برای هم کلاسی‌شان که کل موضوع معادلات برایش کاملاً جدید بود، کمک کنند. به این طریق، ما انتظار داشتیم دریچه‌ی دیگری به تفکر دانش‌آموزان باز کنیم. ما باور داشتیم، از آن‌جایی که لزوم متقاعد کردن یک فرد کم سواد نیروی انگیزشی قوی‌ای ایجاد می‌کند، لـذا گوش دادن به توضیحات دانش‌آموزان بـرای سایر دانش‌آموزان نسبت به پرسیدن سؤالات مستقیم یک شیوه‌ی قوی‌تر تحقیق است. همه‌ی مصاحبه‌ها و جلسات تدریس ضبط ویدئویی و صوتی شد.

باید تأکید کرد که مقاله‌ی حاضر بـه هیـچ‌وجه نه یـک گـزارش نظام‌مند از تحقیق بالاست و نه تـلاشی بـرای ارائه‌ی قابل درکی از همه‌ی نتایج آن. مصاحبه‌های ما بخش کوچکی از یک مطالعه‌ی با مقیاس بـزرگ است که خـود در جای دیگری ارائه خـواهد شد. در این‌جا فقط نمونه‌های منتخبی را به کار می‌بریم که پیغام ما را به وضوح بیان می‌کنند.

۳ . ۲ . ۱ . گام اول: به سمت جبر مقدار ثابت (باز شناخت

دوگانگی فرایند ـ نتیجه). چون انتقال از دیدگاه عملیاتی محض به تفسیر دوگانه‌ی فرایند ـ نتیجه از فرمول‌های جبری، در نزدیکی نقطه‌ای که در آن حساب با جبر تلاقی می‌کند، رخ می‌دهد، بیش‌تر داده‌هایی را که با این موضوع مرتبط هستند را می‌توان در تحقیقاتی که به این نقطه‌ی اتصال مهم اختصاص داده شده‌اند یافت. در خلاصه‌ی مختصری که در ادامه می‌آید و با مشاهدات ما غنی شده است، تلاش خواهیم کرد بفهمیم انتقال از جبر عملیاتی به جبر ساختاری یک مقدار ثابت چگونه خودش را در رفتار دانش‌آموز نشان می‌دهد. با داشتن این هدف در ذهنمان، درک اولیه‌ی دانش‌آموز از فرمول‌ها، علامت تساوی و معادلات را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

این یکی از فرضیات اولیه‌ی ما است که یک مفهوم عملیاتی به‌طور طبیعی بر مفهوم ساختاری مقدم است. یافته‌هایی که ما و سایر محققین به دست آوردیم، حمایت‌های قوی‌ای برای این فرضیه تدارک می‌بینند: به نظر می‌رسد، حتی بدون دخالت مستقیم معلم، یادگیرندگان در ابتدا عبارات جبری را به عنوان فرایندهای محاسباتی تفسیر می‌کنند. مثال‌های بسیاری وجود دارد که این نکته را روشن می‌سازد. آن‌چه در ادامه می‌آید یکی از این مثال‌هاست.

اگر به دقت به زبانی که دانش‌آموزان به کار می‌برند، گوش دهیم، معمولاً ملاحظه می‌شود، روشی که بسیاری از دانش‌آموزان در ابتدا به عبارات جبری ارجاع می‌دهند، بر نگاه عملیاتی آن‌ها دلالت می‌کند. این را می‌توان در مصاحبه‌هایی که بوت[۵] (۱۹۸۸، ص ۲۱) نقل قول کرده است، دید. به عنوان مثال، مصاحبه‌گر از کودکی می‌خواهد، طول مسیر فضاپیمایی را که از y قطعه با طول ۱۱ سال نوری تشکیل شده، بنویسد. کودک چنین می‌گوید: «چه باید بنویسم، چه باید انجام دهم؟» بعد از این‌که او در نهایت فرمول $۱۱ \times y$ را طرح‌ریزی می‌کند، به مصاحبه‌گر اعلام می‌کند که: «چی، همه‌اش همین بود؟ پس چرا نگفتید؟ من فکر می‌کردم شما یک پاسخ می‌خواستید.» برای این کودک، عبارت، فقط دستورالعملی برای مقدار مورد جست‌وجو است نه خود مقدار. در تجارب تدریسمان با گروه ۱، بارها ارجاعاتی به عبارات جبری مانند «این تمرینی است که باید انجام شود» را مشاهده کردیم، حتی یک دانش‌آموز توضیح داد، این «شیء» (مثلاً $۸x$) چیست که باید آن را از دو طرف یک معادله کم می‌کرد. بخشی از مکالمه‌ی بین مصاحبه‌گر (I) و دانش‌آموز گروه ۱، آیالا (A) که در ادامه می‌آید به‌طور ویژه‌ای آگاهی‌دهنده است زیرا نشان می‌دهد، فرمول‌های جبری از حساب به ارث برده می‌شوند. آیالا تلاش می‌کرد توضیح دهد، چگونه دوستش ایرت یک معادله را حل کرد.

I: چگونه ایرت از این [$۱۵x = ۸x + ۳۵$] به این [$۷x = ۳۵$] رسید؟

A: او یک تمرین[۶] را کم کرد، ۸ برابر x، او این را از طرف دیگر معادله هم کم کرد.

I: وقتی می‌گی «تمرین» منظورت چیه؟

A: ۸ برابر x یک تمرین است، این کاری است که شما باید انجام دهید. او این تمرین را برمی‌دارد. این مانند این است که شما ۴+۳=۴+۲+۱ را داشته باشید. شما می‌توانید ۳ را بردارید و در نتیجه در طرف دیگر شما «یک به اضافه‌ی دو» را برمی‌دارید.

I: ۲+۱ یک تمرین است و ۳ یک تمرین نیست؟

A: ۳ یک عدد است و نتیجه‌ی یک تمرین است. این [به ۲+۱ اشاره می‌کند] تمرین است و $۸x$ یک تمرین است و $۱۵x$ یک تمرین است. ما یک تمرین یکسان را از دو طرف کم می‌کنیم تا آن‌چه باقی می‌ماند، یکسان باشد.

(توضیحات آیالا نشان می‌دهد او تا حدودی نیمه‌ی راه بین نگاه عملیاتی و ساختاری است: او قبلاً عبارات جبری را مثل این‌که شیء باشند، مورد دست‌ورزی قرار داده است، اما زبانی که به کار می‌برد، هنوز عملیاتی است.)

اعتقاد راسخ به این که یک فرمول چیزی غیر از فرایندی که منتظر انجام شدن است، نیست، مسئول چیزی است که کالیس[۷] (۱۹۷۴) ناتوانی برای پذیرفتن عدم وجود بستار می‌نامد که همان مشکل دانش‌آموز با عبارات پیچیده‌ای است که با علامت تساوی و با «نتیجه‌ی» محاسبه که در طرف دیگر این علامت آمده است، دنبال نمی‌شوند (کال[۸] و هرسکویچ[۹]، ۱۹۸۸ را ببینید). این ناتوانی ممکن است علت نتیجه‌ی مهمی باشد که در مطالعه‌ی ملی انگلیسی در مورد ۱۵ ساله‌ها به دست آمد (همان‌طور که بل[۱۰]، ۱۹۹۲ نقل قول کرده است): یک شکاف وسیع در عملکرد دانش‌آموزان در مسائلی که به نظر می‌رسد خیلی متفاوت نیستند، مشاهده شد. مسائل: «اگر $۲x + ۷ = ۴۵$ باشد، x چند است؟» و «اگر $A = L \times B$ به ما بگوید A چگونه محاسبه می‌شود، چه فرمولی به ما می‌گوید L چگونه محاسبه می‌شود؟» میزان موفقیت در این دو سؤال به ترتیب ۷۳٪ و ۳۹٪ بود. تفاوت چشمگیر ممکن است احتمالاً به این حقیقت نسبت داده شود که در مسئله‌ی دوم که در آن بعضی از حروف نقش پارامترها («معلوم‌ها») را ایفا می‌کنند، نتیجه‌ی نهایی (مقدار L) باید به وسیله‌ی یک فرمول و نه یک عدد نمایش داده شود. این برای آن‌هایی که یک عبارت جبری فقط یک فرایند است، غیرقابل پذیرش است (همان‌طوری که حتی برای دیوفانتوس[۱۱] بود. او از به کار بردن فرمول‌ها برای نمایش محاسبات واسطه‌ای خودداری نکرد، اما آن‌ها را برای نتیجه‌ی نهایی به کار نبرد). دشواری‌های مشابهی توسط «گی» یک دانش‌آموز ۱۵ ساله

(گروه ۲) تجربه شد. این دشواری‌ها زمانی رخ داد که او تلاش می‌کرد عبارت $kx - x = -2$ را ساده کند. اگرچه گی قبلاً دو سال جبر را پشت سر گذرانده بود و توسط همه‌ی معلمان گذشته و فعلی‌اش به عنوان دانش‌آموز مستعد در ریاضی مورد توجه قرار گرفته بود، اما او نمی‌توانست از عهده‌ی مسئله برآید. هیچ ایده‌ای به ذهنش نمی‌رسید.

I: نمی‌توانی $kx - x$ را به روش دیگری نمایش دهی؟

G: نه. در این‌جا یک ضرب داریم، kx، پس چه کاری می‌توانم انجام دهم؟

I: اگه بنویسم $3x - x$، می‌توانی کاری انجام دهی؟

G: $3x - x$؟ $2x$ است.

I: بنابراین، مشابه $kx - x$ نیست؟

G: اما این ... اما این کار نمی‌کند ... من مقدار k را نمی‌دانم.

I: پس چه؟

G: پس چه می‌توانم بنویسم؟ $k - x$؟

I: در این‌جا چه کاری روی $3x - x$ انجام دادی تا به $2x$ برسی؟ چه کاری روی ۳ انجام دادی؟

G: ۱ را کم کردم.

I: بنابراین؟

G: بنابراین چه؟ من می توانم یک را بردارم؟ نمی‌دانم ... اگر من ۱ را از k کم کنم، به همان اندازه سردرگم می‌شوم. مثل این که این بود ... ببینید، من نمی‌دانم چه‌طوری آن را بنویسم.

I: در $3x - x$ یک را از ۳ کم کردی و نتیجه را در x ضرب کردی، درسته؟ در $kx - x$ یک را از k کم کن و ...

G: ضرب در x ... اما چه‌طوری یک را از k کم کنم؟ چه‌طوری آن را بنویسیم؟ $k - 1$؟

جای تعجب نیست زیرا زمانی که عبارات جبری به عنوان فرایندها درک می‌شوند نه اشیاء، علامت تساوی به عنوان «علامت انجام دادن چیزی» تفسیر می‌شود (بر[12] و همکاران، ۱۹۸۶؛ کیبرن[13]، ۱۹۸۱) نه به عنوان نمادی برای یک رابطه‌ی **ایستا**[14]. عبارت سمت چپ یک فرایند است، در حالی که عبارت سمت راست باید یک نتیجه باشد. بار دیگر، به نظر می‌رسد این ایده از حساب آمده باشد، جایی که علامت «=» به عنوان نشانی است برای اجرای یک «برنامه» که در سمت چپ این نماد ظاهر می‌شود. این دقیقاً همان شیوه‌ای است که کلید «=» را در ماشین‌های حساب دستی به کار می‌بریم. این واقعیت، این نگاه را تقویت می‌کند. در این‌جا، علامت تساوی به عنوان یک فرمان «اجرا» به کار می‌رود. زمانی که نماد تساوی به این شکل تلقی شود، ویژگی‌های اصلی یک گزاره‌ی هم‌ارزی را از دست می‌دهد: دیگر متقارن یا متعدی نمی‌شود. در

این یکی از فرضیات اولیه‌ی ما است که یک مفهوم عملیاتی به‌طور طبیعی بر مفهوم ساختاری مقدم است

به نظر می‌رسد، حتی بدون دخالت مستقیم معلم، یادگیرندگان در ابتدا عبارات جبری را به عنوان فرایندهای محاسباتی تفسیر می‌کنند

واقع، به نظر می‌رسد، کودکان هیچ تردیدی در مورد حل مسائل کلامی به کمک زنجیره‌ای از تساوی‌های غیرمتعدی نداشته باشند. به عنوان مثال، زمانی که پرسیده می‌شود «بعد از این که شما ۳ مرتبه ۴ تیله بردید و ۵ مرتبه ۲ تیله بردید، شما چند تیله دارید؟» کودک غالباً می‌نویسد:

$$3 \times 4 = 12 + 5 \times 2 = 12 + 10 = 22$$

(ورگناد[15] و همکاران، ۱۹۷۹ را ببینید). رویکرد «یک طرفه» و نامتقارن به علامت تساوی، نشانه‌ای از دیدگاه عملیاتی در مورد جبر است. این رویکرد در داستان کوتاهی که در ادامه می‌آید، قویاً آشکار می‌شود. این ماجرا بین دانش‌آموزی به نام دنا از گروه ۱ و دوست او دانش‌آموزی به نام زُر اتفاق می‌افتد. اگرچه زُر موفق شد معادله‌ی $7x + 157 = 248$ را حل کند، زمانی که مثال بعدی، $47 + 12x = 112$ ارائه شد، او گیج و سردرگم بود.

در حالی که مشاهده‌گر گیج شده بود، دنا فوراً برای کمک به زر دلیلی ارائه کرد. او گفت: «او نمی‌داند چه کاری انجام دهد، زیرا ترتیب معادله او را گیج می‌کند، این شبیه آن چیزی نیست که باید باشد».

خودانگیختگی نگاه عملیاتی زمانی آشکار می‌شود که می‌بینیم بسیاری از کودکان به آسانی با معادلات ساده‌ی خطی به شکل $ax + b = c$ کار می‌کنند. همان‌طوری که بارها در مطالعات مختلف ملاحظه شده است (به عنوان مثال کیبرن، ۱۹۸۸، ۱۹۹۲، فیلُی[16]، رُجانو[17]، ۱۹۸۹ را ببینید)، برای کودکان به‌طور شهودی روشن است که برای حل کردن این نوع مسئله، فرد فقط باید آن‌چه را که برای مجهول انجام شده است، «برعکس[18] انجام دهد». ما مثال‌های بسیاری از چنین معکوس‌سازی‌های خود به خودی محاسبات، در اولین مصاحبه‌ها با دانش‌آموزان گروه ۱ مشاهده کردیم. داستان کوتاه بعدی یکی از آن‌هاست. زمانی که با اسنیر مصاحبه شد، او چیزی در مورد معادلات نمی‌دانست. مصاحبه‌کنندگان به او یادآور شدند که در معادله‌ای مانند $7x + 157 = 248$، $7x$ به معنای ۷ برابر x است و بدون هیچ توضیحات بیش‌تری از او خواستند مسئله را حل کند. اسنیر فوراً نتیجه گرفت: «در این‌جا من باید عددی را پیدا کنم که ۷ برابر این

محققین کشف کردند در حالی که راه‌حل معادله‌ای به شکل $ax + b = c$ به‌طور شهودی برای بسیاری از دانش‌آموزان در دسترس است، معادله‌ای با مجهولی که در دو طرف معادله ظاهر می‌شود مانند $ax + b = cx$ یا $ax + b = cx + d$ ، آشکارا مشکل ایجاد می‌کند

عدد به اضافه‌ی ۱۵۷ ، ۲۴۸ است. در ابتدا، ۲۴۸ منهای ۱۵۷ می‌شود ۹۱. حال ۷ برابر عدد ... ۹۱ تقسیم بر ۷ می‌شود ۱۳. عدد ۱۳ است». ارایه‌ی لفظی اسنیر، بر ویژگی عملیاتی جبر او تأکید می‌کند.

همه‌ی مشاهدات بالا به خط سیر یکسانی اشاره می‌کنند: نگاه عملیاتی در جبر اساسی است و رویکرد ساختاری فوراً رشد نمی‌یابد. علاوه بر این، همان‌طوری که در طرح تاریخی‌مان نشان دادیم و آن را با بحث‌های نظری تقویت کردیم، یک دشواری ذاتی در ایده‌ی دوگانگی فرایند ـ شیء وجود دارد ـ دستورالعملی که باید به عنوان نمایش‌دهنده‌ی نتیجه‌ی خودش هم در نظر گرفته شود. نمی‌توان انتظار داشت این دشواری بدون تلاش از بین برود.

دیویس[19] (۱۹۷۵) احتمالاً یکی از اولین نویسندگانی بود که اهمیت آن‌چه را در ادبیات موضوع به عنوان «مسئله‌ی غامض نام ـ فرایند[20]» شناخته می‌شود، درک کرد (در حقیقت، اصطلاح «مسئله‌ی غامض فرایند ـ نتیجه[21]» مناسب‌تر به نظر می‌رسد، زیرا نشانه‌ای وجود ندارد که دانش‌آموز بین نام یک شیء و خود آن شیء تمایز قائل می‌شود؛ ضمناً، ناتوانی برای جدا کردن یک علامت از آن چیزی که بر آن دلالت می‌کند (دلالت شده[21]) ممکن است یکی از دلایلی باشد که نشان می‌دهد چرا رسیدن به دوگانگی عبارات جبری تا این حد دشوار است). دیویس به آن‌چه که تا به حال توسط اکثریت معلمان مورد بی‌توجهی قرار گرفته، اشاره می‌کند: ایده‌ی دوگانگی، بدیهی نیست و ممکن است برای یک دانش‌آموز گیج کننده باشد.

یک دلیل متقاعدکننده‌ی این دشواری احتمالاً پدیده‌ی «انقطاع آموزشی»[22] در یادگیری حل معادلات است که توسط فیلی و رجانو (۱۹۸۵ ، ۱۹۸۹) مورد توجه قرار گرفت و توسط دیگران (به عنوان مثال، هرسکوویچ و لینچوسکی، ۱۹۹۱ , ۱۹۹۳) تأیید شد. این محققین کشف کردند در حالی که راه‌حل معادله‌ای به شکل $ax + b = c$ به‌طور شهودی برای بسیاری از دانش‌آموزان در دسترس است، معادله‌ای با مجهولی که در دو طرف معادله ظاهر می‌شود مانند $ax + b = cx$ یا $ax + b = cx + d$ ، آشکارا مشکل ایجاد می‌کند. از آن‌جا که در معادله‌ی قبلی، علامت تساوی مانند حساب عمل می‌کند ـ عملیات در یک طرف و نتیجه در طرف دیگر ـ آن‌ها آن‌را «حسابی»[23] نامیدند.

براساس ادعاها و فرضیات عمومی ما، دشواری آشکار در این نقطه‌ی خاصِ یادگیری تعجب‌آور نیست. انقطاع در سرتاسر خط مرزی بین جبر عملیاتی و ساختاری ادامه دارد. تا زمانی که فقط معادلات حسابی مورد توجه قرار می‌گرفت، نیازی نبود نگاه دوگانه‌ی فرایند ـ نتیجه را داشته باشیم. عملیات‌های محاسباتی و نتایج آن‌ها به وسیله‌ی یک علامت تساوی مجزا باقی می‌ماند و هر طرف معادله هویت هستی‌شناسانه‌ی خودش را حفظ می‌کرد ـ به ترتیب یک فرایند و یک شیء. این تقسیم نقش‌ها در معادلات غیرحسابی اعتبار ندارد. انتظار می‌رود، عبارت سمت راست، نتیجه‌ی عبارت سمت چپ باشد که در حقیقت یک فرایند است. بدون نگاه دوگانه که عبارت آخر را به یک شیء تبدیل می‌کند، معادله معنایی نمی‌دهد. این موضوع به وضوح در مکالمه‌ی نوعی که در ادامه می‌آید، دیده می‌شود. این مکالمه از مصاحبه با اسنیر گرفته شده است. اسنیر یک دانش‌آموز ۱۳ ساله با توانایی بالای متوسط (گروه ۱) است. او برای اولین بار با معادله‌ی غیرحسابی $15x + 12 = 8x + 47$ روبه‌رو شد.

S: باید چیزی یافت ... زمانی که من ۱۵ را در عددی ضرب می‌کنم و ۱۲ را به آن اضافه می‌کنم، مثل این است که ۸ برابر آن عدد را به ۴۷ اضافه کنم. بیایید با معادله‌ی ساده‌تری شروع کنیم. در این‌جا ۳ برابر و ۱ برابر [در سمت راست می‌نویسد ۳ در x و در سمت چپ می‌نویسد ۱ در x]. نه این نیست ... من نمی‌دانم.

I: وقتی یک معادله را حل می‌کنی، به دنبال چه می‌گردی؟

S: ما باید دو چیز را پیدا کنیم. چیزی که وقتی آن‌را ضرب می‌کنیم یا تقسیم می‌کنیم ... فرق نمی‌کند ... مساوی با چیز دیگر باشد. باید شیوه‌ی مساوی کردن آن‌ها را پیدا کرد، در این‌جا دو معادله وجود دارد.

نکات زیادی را می‌توان از این مکالمه‌ی کوتاه آموخت. برای اسنیر دشوار بود معنای معادله‌ای را بفهمد که برای او مانند «دو معادله» به نظر می‌رسید، دو فرایندی که منتظر انجام شدن هستند، در حالی که رابطه‌ی بین آن‌ها به هیچ عنوان آشکار نیست (در این مورد، آیا لا گفت در این‌جا «دو تمرین» وجود دارد). در این‌جا معنای علامت تساوی کاملاً برای فرد با تجربه روشن است، در حالی که برای مبتدی اصلاً روشن نیست: چه جنبه‌هایی از دو فرایند باید یکسان باشند؟ شیئی که روی آن عمل می‌شود؟ شیئی که به دست می‌آید؟ یا هر دوی آن‌ها؟ خیلی جالب بود که برای اسنیر یکسان بودن نتایج مورد نیاز آشکار بود در حالی که برای او اعدادی

که بـرای آن‌ها این تـساوی باید بـرقـرار باشد، متـفـاوت بودنـد. در حقیقت، او به دنبال دو مقدار در دو طرف معادله بود. ما در ابتدا از این تفسیر متحیـر بـودیم و حتی ایـن زمانی بیش‌تر شد کـه رویکـرد غیرقابل انتظار یکسانی در تقریباً همه‌ی مصاحبه‌های دانش‌آموزان گروه ۱ و دانش‌آموزان همتای آن‌ها مشاهـده کـردیم. این پدیـده، شگفت‌آور بـه نـظر مـی‌رسـد زیرا در این مـرحلـه از یـادگـیری، دانش‌آموزان این قرارداد را می‌دانستند که یک حرف در مکان‌هـای متفاوت در یک عبارت مفروض بر عدد یکسانی دلالت می‌کند. به نظر می‌رسد این اصل در مواجهه با یک معادله که نمی‌توان آن‌را براساس دانش قبلی تفسیر کرد، فرو می‌ریزد (همان‌طوری که هرسکوویچ و لینچوسکی، ۱۹۹۱ می‌گویند، مسئله‌ی تفسیر دوتایی ممکن است به سادگی با بیان روشن قرارداد مرتبط با واقع شدن‌های متفاوت یک حرف یکسان در یک معادله‌ی مفروض حل شود؛ با این وجود، ما دریافتیم که با وجود آموزش قبلی، چنین قراردادی به‌طور خودبه‌خود به ذهن دانش‌آموز خطور نمی‌کند.)

دشواری معادلات غیرحسابی زمانی که چنین معادله‌ای باید حل شود، از این هم آشکارتر است. در این‌جا تکنیک «برعکس انجام دادن» دیگر کار نمی‌کند. مفهوم ساختاری یک فرمول جبری یک پیش‌نیاز برای درک استراتژی‌ای است که باید به کار رود. این استراتژی، اضافه کردن، کم کردن، ضرب کردن و تقسیم کردن دو طرف با یک عبارت یکسان است. در واقع، این ایده را فقط کسانی می‌پذیرند که برای آن‌ها دو طرف معادله و عبارت‌هایی که روی دو طرف عمل می‌کنند، اشیاء هستند و علامت تساوی یک نماد هم ارزی است. برای آن‌که نشان دهیم این وضعیتی نیست که همیشه مشاهده شود، مکالمه‌ی کوتاه بین دنا و زُر، دو دانش‌آموز گروه ۱ در ادامه می‌آید:

D: [برای حل کردن ۱۵x = ۸x + ۳۵] ۸x را از دو طرف کم کن.

Z: اما نمی‌دانم ۸x چند است، پس چگونه می‌توانم آن را کم کنم؟ ... من حتی نمی‌دانم آیا xها در دو طرف یکی هستند یا نه؟

اظهارات زُر و جملات مشابه سایر دانش‌آموزان، تردید اندکی برای وجود منبعی از دشواری که آن‌ها در این نقطه تجربه می‌کنند، باقی می‌گذارد. دانش‌آموزان قادر نبودند یک فرمول را هم‌چون نمایشی از یک شیء آماده درک کنند. برای آن‌ها فرمول هنوز یک فرایند بود. یک فرایند چگونه می‌تواند از فرایند دیگر کم شود؟ (در حقیقت، بیانات آیالا که در بالا نقل قول شد به این مطلب اشاره دارد که بعضی از دانش‌آموزان ممکن است با ایده‌ی «عملیات حساب»[24] روی فرایندها، کنار بیایند؛ پرسشی که هنوز باقی است این است که آیا این نوع ادراک حقیقتاً سازگار و مؤثر است؟)

آخرین نکته‌ای که باید در این بخش مطرح کنیم، حل مسائل کلامی با به‌کار بردن معادلات است. معادله نیاز به توقف محاسبات واقعی برای توصیف ایستای روابط بین کمیت‌ها دارد. این رویکرد مطابق با دیدگاه صرفاً عملیاتی نسبت به جبر نیست.

علاوه بر این، شیوه‌ی بیانی ـ ساختاری[25] نمایش جبری ـ ترتیبی را که در آن عملیات‌ها باید برای پیدا کردن «پاسخ» انجام شوند، معکوس می‌کند. این‌ها ممکن است نشان دهد که چرا در بسیاری از مطالعات حتی دانش‌آموزان خیلی خوب شیوه‌ی لفظی ـ عملیاتی حل مسایل کلامی را نسبت به شیوه‌ی انجام دادن نمادین ـ ساختاری، ترجیح می‌دادند (کلمنت[26] و همکاران، ۱۹۷۹؛ سُلُوی[27] و همکاران، ۱۹۸۲؛ اسفارد، ۱۹۸۷؛ هارپر[28]، ۱۹۸۷).

این بخش را با نقل قولی از دیویس (۱۹۷۵) به پایان می‌بریم:

برای آن‌که فرد بتواند پرسش ذهنی لازم را انجام دهد و برای مثال علامت تساوی را به شیوه‌ای جدید ببیند یا حتی ۳/x را به جای یک مسئله، به عنوان یک «پاسخ» ببیند، بسیاری از سازگای‌های شناختی بنیادی ـ «انطباق»[29] به جای «جذب»[30] ـ مورد نیاز است. کاملاً روشن نیست که آیا می‌توان کل این دیدگاه جدید را با به دست آوردن تدریجی پیشرفت‌های کوچک کسب کرد. در مقام مقایسه باید گفت این بیشتر شبیه زمین لرزه است تا فرسایش یا ته‌نشین شدن خاک. [ص. ۲۹]

فرضیه‌ای که نویسنده در این‌جا مطرح می‌کند، کاملاً سازگار با نظریه‌ی شیءانگاری مفاهیم است: انتقال از نگاه صرفاً عملیاتی به یک نگاه دوگانه‌ی فرایند ـ شیء احتمالاً یک حرکت تدریجی آرام به یک سطح بالاتر نیست. این مانند هر شیءانگاری، یک پرش کمّی به یک نقطه‌ی بالاتر است.

خوانندگان محترم، ادامه‌ی مقاله را در شماره‌ی بعدی مجله می‌خوانید.

پی‌نوشت

1. Moschkovich **2.** Gray **3.** Tall **4.** Mason **5.** Booth **6.** Exercise **7.** Collis **8.** Chalouh **9.** Herscovics **10.** Bell **11.** Diophantus **12.** Behr **13.** Kieran **14.** Static **15.** Vergnaud **16.** Filloy **17.** Rojano **18.** Undo **19.** Davis **20.** Name- Process Dilemma **21.** Process- Product Dilemma **21.** Signified **22.** Didactic Cut **23.** Arithmetical **24.** Arithmetic Operation **25.** Declarative- Structural **26.** Clement **27.** Soloway **28.** Harper **29.** Accommodation **30.** Assimilation