سهمی

برای دانش آموزان سال دوم و سوم متوسطه

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

کلیدواژه‌ها:
سهمی، نقطه‌یابی، جدول متغیرها، دستگاه مختصات، خط، محور تقارن، نمودار منحنی، رأس سهمی، نقطهٔ ماکزیمم، نقطهٔ می‌نیمم، ریشهٔ معادله، نقطهٔ تماس، مختصات نقطه، سهمی قائم، سهمی افقی.

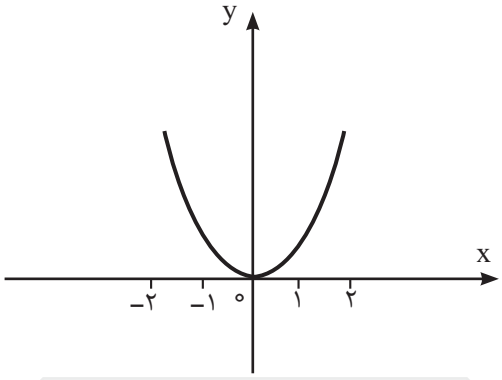
با رسم نمودار $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ به روش نقطه‌یابی آشنا هستید. در این‌جا برای یادآوری این مطلب چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱: نمودار $y=x^2$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
$y=x^2$	...	4	1	0	1	4	9	...

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید به x مقادیر مختلفی داده شده و برای y (یا x^2) به ترتیب مقادیری به دست آمده است که هر نقطه مانند (x_1, y_1)، مشخص کنندهٔ یک نقطه از منحنی $y=x^2$ است. در صورتی‌که نقاط بیش‌تری را مشخص کنیم، از وصل این نقاط، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم می‌شود (دستگاه مختصات):



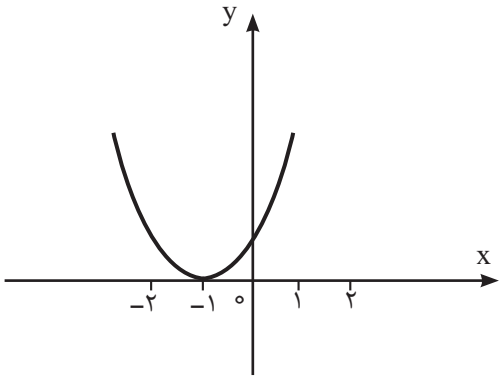
توجه: نمودار $y=x^2$، یک سهمی را مشخص می‌کند که نسبت به محور yها متقارن است، یعنی خط $x=0$، محور تقارن نمودار است.

مثال ۲: نمودار $y=(x+1)^2$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

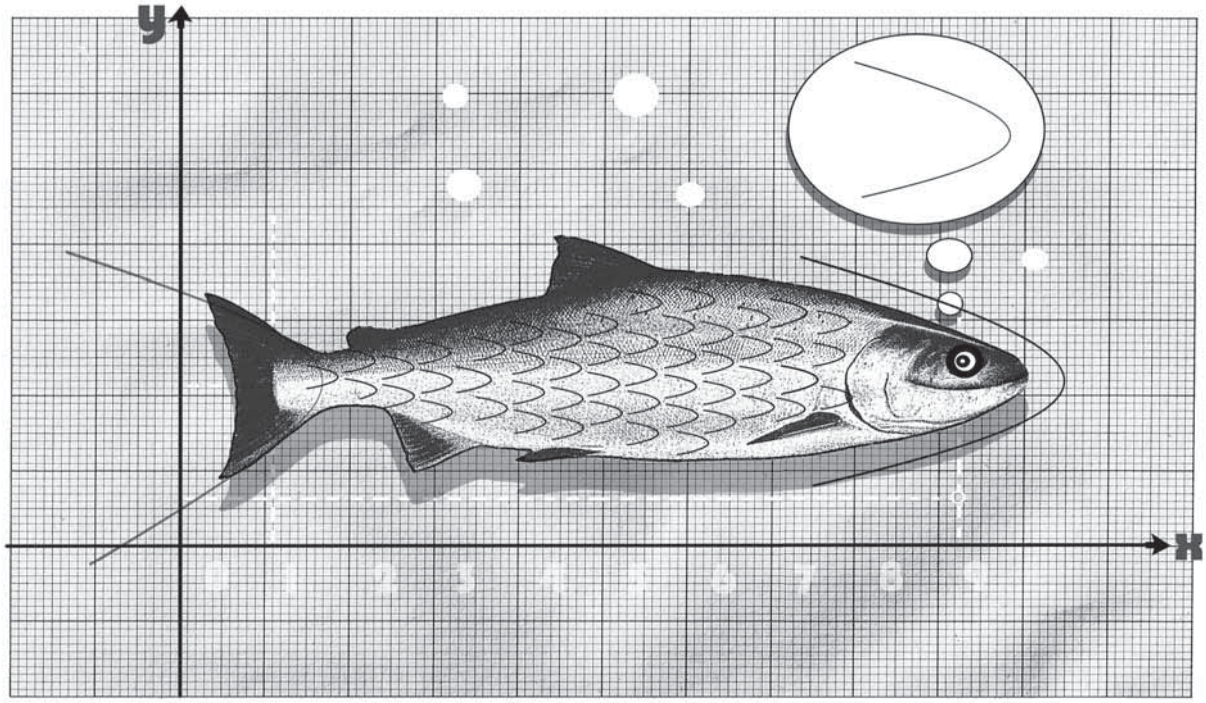
x	...	-2	-1	0	1	2	...
$y=(x+1)^2$	...	1	0	1	4	9	...

با توجه به جدول و مقادیر مختلف دیگری که به x می‌دهیم، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم خواهد شد.



همان‌طور که مشاهده می‌شود، این نمودار، نظیر نمودار $y=x^2$ است. این نوع نمودارها را **سهمی** می‌نامند.

در نمودار (۱) نقطهٔ $(0, 0)$ و در نمودار (۲) نقطهٔ $(0, -1)$ را **رأس سهمی** می‌نامند. با توجه به نمودارها، ملاحظه می‌شود که این نمودارها به ترتیب در $(0, 0)$ و $(0, -1)$ بر محور



xها مماس‌اند. واضح است که خط $x=-1$، محور تقارن نمودار $y=(x+1)^2$ است. بدیهی است که با تعیین محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$ و دو نقطهٔ متقارن دیگر (نسبت به محور تقارن) می‌توان نمودار را مشخص کرد.

مثال ۳: نمودار سهمی $y=x^2-4x+5$ را رسم کنید.

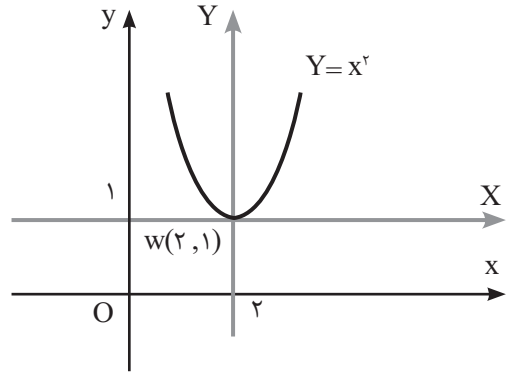
حل: برای رسم نمودار سهمی، ابتدا محور تقارن منحنی را تعیین می‌کنیم:

$$y=x^2-4x+5=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1;$$
$$y-1=(x-2)^2 \qquad (1)$$

در این‌جا، با فرض $X=x-2$ و $Y=y-1$:

$$Y=X^2 \qquad (2)$$

بنابراین اگر مبدأ دستگاه xoy را به نقطهٔ w(۲,۱) منتقل کنیم. در دستگاه جدید، کافی است منحنی $Y=X^2$ را که بسیار ساده و مشخص است، رسم کنیم:



با توجه به نمودار (۳)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شوند:

$x=2$ (محور تقارن) و $S(2,1)$ (رأس سهمی)

در این‌جا، با توجه به مثال (۳)، رسم نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y=(x-\alpha)^2+\beta \qquad (1)$$

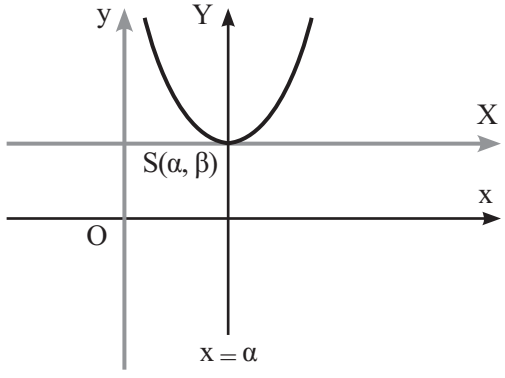
برای رسم نمودار منحنی به معادلهٔ (۱) یا $y-\beta=(x-\alpha)^2$، فرض می‌کنیم:

$$X=x-\alpha, Y=y-\beta \qquad (2)$$

بنابراین، معادلهٔ (۱) را می‌توان به صورت ساده‌تر نوشت:

$$Y=X^2 \qquad (3)$$

در نتیجه اگر مبدأ دستگاه xoy را به نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ منتقل کنیم، در دستگاه جدید، کافی است منحنی به معادلهٔ (۳) را که نمودار آن مشخص است، رسم کنیم:

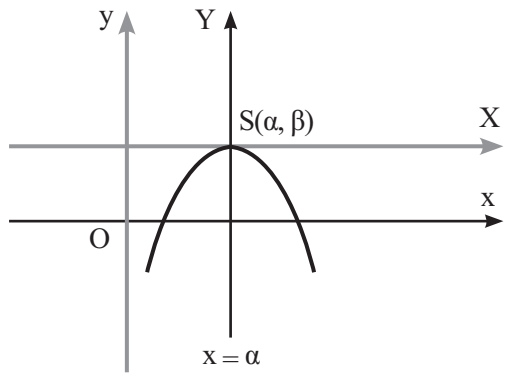


با توجه به نمودار (۴)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شود:

$x=\alpha$ (محورتقارن) و $S(\alpha,\beta)$ (رأس سهمی)

گفتنی است که رأس سهمی (S) در نمودار (۴) از نظر عرض کم‌ترین مقدار را دارد. نقطهٔ S می‌نیمم سهمی است.

به همین ترتیب، رسم نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی $y=-(x-\alpha)^2+\beta$ به‌صورت زیر است:



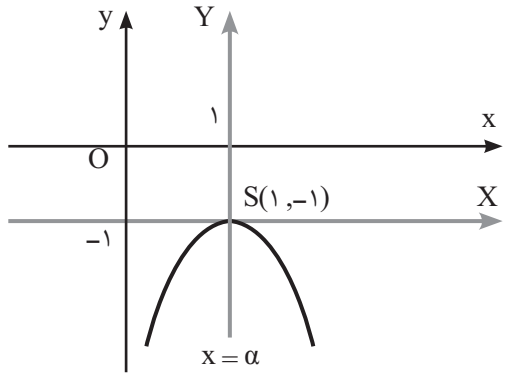
$x=\alpha$ (محورتقارن) و $S(\alpha,\beta)$ (رأس سهمی)

در نمودار (۵)، واضح است که رأس سهمی (S) از نظر عرض بیش‌ترین مقدار را دارد. نقطهٔ S ماکزیمم سهمی است.

مثال ۴: نمودار سهمی $y=-x^2+2x-2$ را رسم کنید.

حل: ابتدا معادلهٔ استاندارد سهمی را می‌نویسیم:

$$y=-x^2+2x-2=-(x^2-2x+1)-1=-(x-1)^2-1;$$
$$y+1=-(x-1)^2,\quad S(1,-1)$$



حال نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta \qquad (1)$$

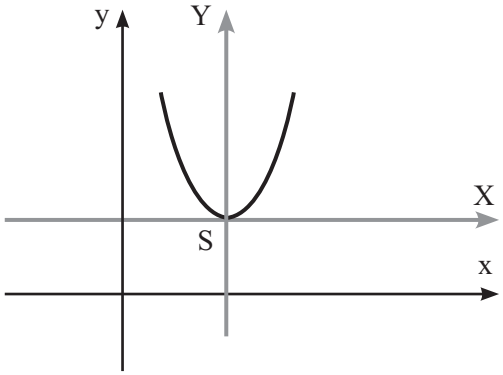
برای بررسی نمودار (۱)، دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱) $a>0$:

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta,\ y-\beta=a(x-\alpha)^2 \qquad (2)$$

چون $a>0$ فرض شده است، بنابراین نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ می‌نیمم سهمی است.

با فرض $X=x-\alpha$ و $Y=y-\beta$:

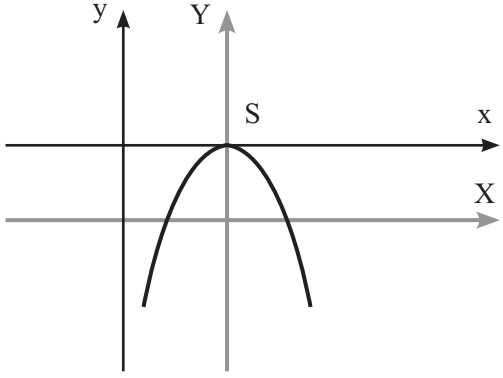


در این‌جا ضریب a فقط دو شاخهٔ سهمی را به هم نزدیک یا از هم دور می‌کند.

حالت ۲) $a<0$:

چون $a<0$ فرض شده است، بنابراین نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$، ماکزیمم سهمی است.

نکته: برای رسم نمودار (۱) ابتدا رأس سهمی (نقطهٔ S) را تعیین می‌کنیم. سپس محور تقارن ($x=\alpha$) آن را تعیین و حداقل دو نقطهٔ متقارن نسبت به این خط را معین می‌کنیم.



در این‌جا با توجه به مطالب اخیر، نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y=ax^2+bx+c \qquad (1)$$

برای بررسی سهمی به معادلهٔ (۱)، ابتدا معادلهٔ آن را به صورت استاندارد:

$$y-\beta=k(x-\alpha)^2 \qquad (2)$$

تبدیل می‌کنیم:

$$y=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

$$= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$
$$= a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

بنابراین:

$$y + \frac{b^2-4ac}{4a} = a(x+\frac{b}{2a})^2 \qquad (3)$$

در این‌جا به کمک معادلهٔ (۳)، رأس و محور تقارن سهمی به معادلهٔ (۱) را می‌نویسیم:

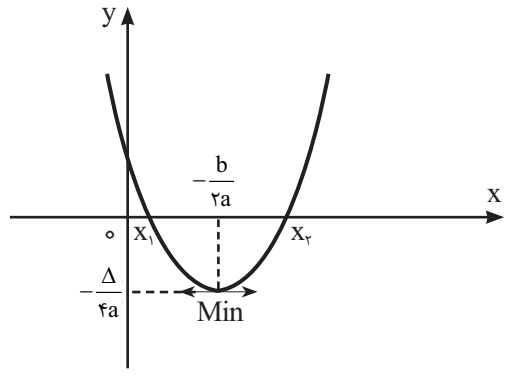
$$x = -\frac{b}{2a}$$ (محور تقارن) و $$S(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$$ (رأس سهمی)

برای سادگی، عبارت b^2-4ac را به Δ نشان می‌دهیم:

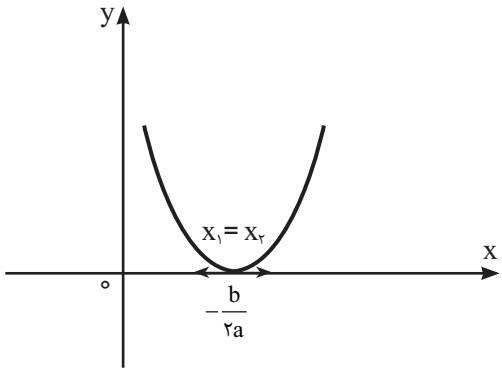
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

حال برای رسم نمودار (۱) یا (۳)، باید شش حالت کلی ممکن را در نظر گرفت:

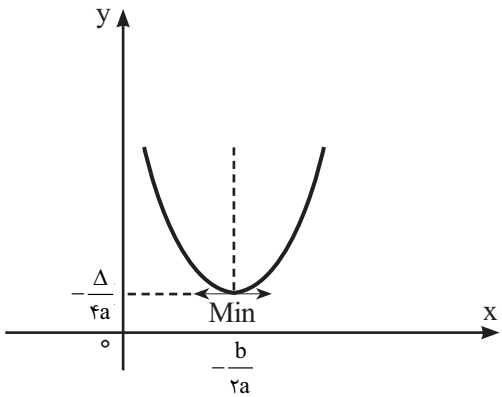
۱) $a>0$ و $\Delta>0$: در این حالت سهمی دارای می‌نیمم S است. و محور xها را در دو نقطهٔ x_1 و x_2 که ریشه‌های معادلهٔ ax^2+bx+c ($y=0$) است، قطع می‌کند و نمودار آن مانند شکل زیر است:



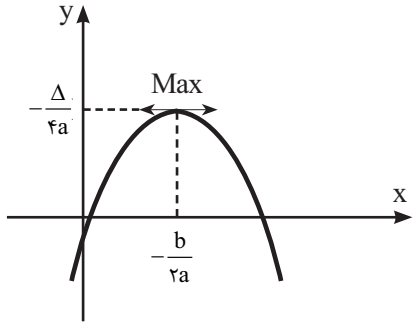
۲) $a>0$ و $\Delta=0$: در این حالت می‌نیمم سهمی (S) بر محور x ها مماس است و طول نقطهٔ تماس از معادلهٔ $y=0$ به‌دست می‌آید و نمودار آن مانند شکل زیراست:



۳) $a>0$ و $\Delta<0$: در این حالت می‌نیمم سهمی (S) بالای محور xها قرار دارد، معادلهٔ $y=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد و نمودار آن مانند شکل زیر است:

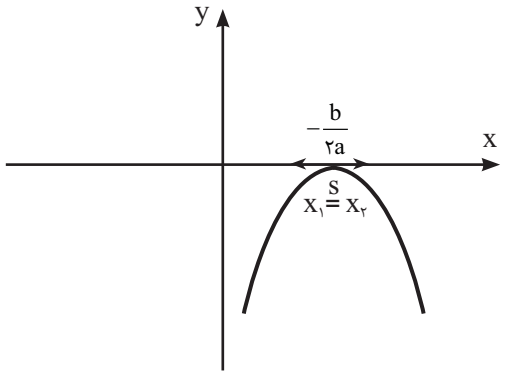


۴) $a<0$ و $\Delta>0$: در این حالت سهمی دارای ماکزیمم S است. و محور xها را در نقطه‌های x_1 و x_2 که ریشه‌های معادلهٔ $y=0$ است، قطع می‌کند و نمودار آن مانند شکل زیر است:

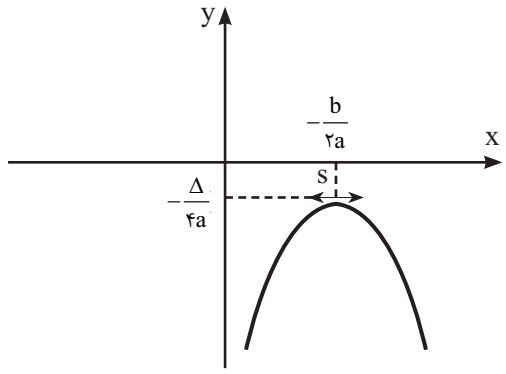


۵) $a<0$ و $\Delta=0$: در این حالت ماکزیمم سهمی (S) بر محور x ها مماس است. و طول نقطهٔ تماس از معادلهٔ $y=0$ به دست می‌آید و

نمودار آن مانند شکل زیر است:



۶) $a<0$ و $\Delta<0$: در ایـن حالت ماکزیمم سـهمی (S) پایین محور xها قرار دارد و معادلهٔ $y=0$ ریشـهٔ حقیقی ندارد و نمودار آن مانند شکل زیر است:



مثال ۵: نمودار سهمی $y = x^2 - 3x + 2$ را رسم کنید.

حل: چـون $a = 1 > 0$ و $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$،
بنابراین سهمی دارای می‌نیمم S است:
$x = \frac{3}{2}$ (محورتقارن) و $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ ؛ $S(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ (رأس‌سهمی)

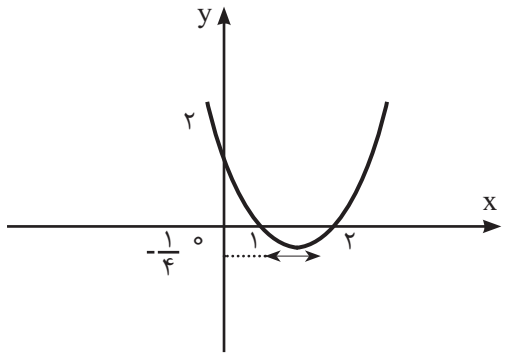
با در دسـت داشتن رأس سهمی و محور تقارن آن، به سادگی می‌توان نمودار سـهمی مورد نظر را رسم کرد. برای دقت بیش‌تر در رسم نمودار، نقاط برخورد سهمی با **محورهای مختصات** را تعیین می‌کنیم:

$x = 0 : y = (0)^2 - 3(0) + 2 = 2; A(0,2)$
(نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها)

$y = 0 : x^2 - 3x + 2 = 0 \; ; \; (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1 \; ; \; x = 2$

نقاط برخورد سهمی با محور xها: $B(1,0), \; C(2,0)$

در این‌جا با معلومات به دسـت آمده، به سادگی می‌توان نمودار سهمی را رسم کرد:



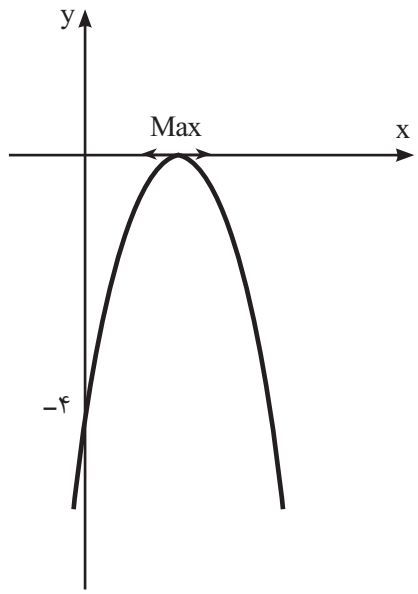
مثال ۶: نمودار سهمی به معادلهٔ $y = -4x^2 + 8x - 4$ را رسم کنید.

حـل: چون $a = -4 < 0$ و $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0$،
بنابراین سهمی دارای ماکزیمم S است و نقطهٔ S بر محور xها مماس است، یعنی معادلهٔ $y=0$ دارای ریشهٔ مضاعف است:
$x=1$ (محور تقارن) و $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}), S(1,0)$ (رأس سهمی)

$x = 0 : y = -4(0)^2 + 8(0) - 4 = -4 \; ; \; A(0,-4)$
(نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها)

$y = 0 : -4x^2 + 8x - 4 = 0 \; ; \; -4(x-1)^2 = 0, x_1 = x_2 = 1$

حال با معلومات به دست آمده، نمودار سهمی را رسم می‌کنیم:



مثال ۷: رأس یک سهمی نقطهٔ $S(-1,1)$ و مختصات یک نقطهٔ آن $A(1,2)$ است. سهمی را مشخص کنید.

حـل: معادلـهٔ سـهمی در حالـت عمومـی بـه صـورت $y = ax^2 + bx + c$ است.

بنابراین:

$$S(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}),\quad S(-1,1):\begin{cases}-\frac{b}{2a}=-1\\ -\frac{b^2-4ac}{4a}=1\end{cases};$$

$$\begin{cases}b=2a\\ c-\frac{b^2}{4a}=1\end{cases};\begin{cases}b^2=4a^2\\ c=\frac{b^2}{4a}+1\end{cases}\Rightarrow b=2a\,(1),c=a+1\quad(2)$$

مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$A(1,2):2=a(1)^2+b(1)+c;a+b+c=2$$

با توجه به رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳):

$$b=2a\ ,\quad c=a+1:\quad a+b+c=a+2a+a+1=2\ ;$$

$$4a+1=2\ ;\quad 4a=1\ ;\quad a=$$

پس:

$$a=\frac{1}{4}\ ,\ b=\frac{1}{2}\ ,\ c=\frac{5}{4}:\ y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{4}$$

(معادلهٔ مطلوب)

مثال ۸: در سهمی $y=2x^2-k^3x+k$، عدد k را چنان تعیین کنید که خط $x=2$ محور تقارن آن باشد.

حل: محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$، به صورت زیر است:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

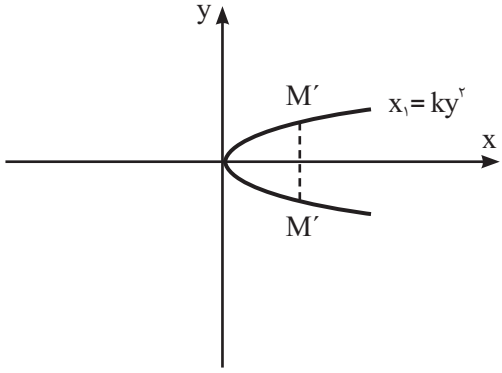
بنابراین، محور تقارن سهمی مورد نظر چنین است:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-k^3}{2(2)}=2\ ;\quad k^3=8;\quad \boxed{k=2}$$

$$k=2:y=2x^2-8x+2$$ (معادلهٔ مطلوب)

تبصره ۱: به هر سهمی که **محور تقارن** آن موازی محور yها باشد، **سهمی قائم** و هر سهمی که **محور تقارن** آن موازی x ها باشد، **سهمی افقی** گویند.

تبصره۲: منحنی‌های به معادله‌های $x=y^2$، $x=ky^2$، $x-\alpha=(y-\beta)^2$، $x-\alpha=-(y-\beta)^2$، $x=ay^2+by+c$ و درحالت‌عمومی $x-\alpha=k(y-\beta)^2$؛ همگی یک سهمی افقی را مشخص می‌کنند که به طور مثال منحنی به معادلهٔ $x=ky^2$ چنین است:



بحث و بررسی روی سهمی افقی نیز به طور کامل مانند سهمی قائم است که آن را به عنوان **تمرین** می‌گذاریم.

اسم وبگاه: Math Guide

نشانی وبگاه: http://www.mathguide.com

این وبگاه می‌تواند منبع خوبی برای ارائهٔ راهنمایی‌های لازم در زمینهٔ ریاضیات به ریاضی‌آموزان، معلمان و مدرسان ریاضی و نیز علاقه‌مندان به این شاخه از علم باشد. صفحهٔ اصلی این وبگاه دارای سه قسمت عمده به همراه زیر عنوان‌هایی به شرح زیر است:

- **مدرسان**
  - برگه‌های تمرین
  - پژوهش
  - منبع
  - آزمون‌های استاندارد شده
- **دانش‌آموزان**
  - چرا ریاضی یاد می‌گیرید؟
  - ماشین حساب‌ها
  - پروژه‌ها
  - معماها
- **خدمات ویژه**
  - مرکز کمک‌رسانی
  - رایانامهٔ سریع‌السیر
  - پیوندها