آموزش

۱

معادله‌های مثلثاتی

برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها:
معادله،
معادلهٔ جبری،
معادله‌های مثلثاتی،
ریشه مضاعف،
فاکتورگیری،
معادلهٔ درجه دوم.

معادلهٔ $2x^2 - 18 = 0$ یک معادلهٔ جبری است. منظور از حل معادلهٔ جبری، یافتن تمام xهایی است که در آن معادله صدق کند.

معادله‌هایی نظیر $\tan x = \sqrt{3}$ ، $2\text{Cos}x - 1 = 0$ و $\text{Sin}^2 x - \text{Sin}x = 0$ را معادله‌های مثلثاتی گوییم. منظور از حل معادلهٔ مثلثاتی، یافتن تمام xهایی است که در آن معادله صدق می‌کند.

فرمول‌های کلّی حل معادله‌های مثلثاتی

$$1)\ \text{Sin}x = \text{Sin}\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha & , k \in Z \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) & , k \in Z \end{cases}$$

مثال:

$$\text{Sin}x = \text{Sin}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & , k \in Z \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) & , k \in Z \end{cases}$$

$$2)\ \text{Cos}x = \text{Cos}\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \quad , k \in Z$$

مثال:

$$\text{Cos}x = \text{Cos}\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad , k \in Z$$

$$3)\ \tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad , k \in Z$$

مثال:

$$\tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad , k \in Z$$

$$4)\ \text{Cot}x = \text{Cot}\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad , k \in Z$$

مثال:

$$\text{Cot}x = \text{Cot}\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad , k \in Z$$

حالت خاص در معادله‌های مثلثاتی

$$1)\begin{cases} \text{Sin}x = 0 \\ \quad\text{یا} \\ \tan x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \quad , k \in Z$$

$$2)\begin{cases} \text{Cos}x = 0 \\ \quad\text{یا} \\ \text{Cot}x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad , k \in Z$$

$$3)\ \text{Sin}x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad , k \in Z$$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$$4)\ \text{Sin}x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad , k \in Z$$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$$۵)\ \mathrm{Cos}x=۱\Rightarrow x=۲k\pi \quad ,k\in Z$$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$$۶)\ \mathrm{Cos}x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi+\pi \quad ,k\in Z$$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$$۷)\begin{cases}\tan x=۱\\ \text{یا}\\ \mathrm{Cot}x=۱\end{cases}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\quad ,k\in Z$$

$$۸)\begin{cases}\tan x=-۱\\ \text{یا}\\ \mathrm{Cot}x=-۱\end{cases}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\quad ,k\in Z$$

مثال ۱: معادلهٔ $۲\mathrm{Sin}^۲x-\sqrt{۲}\mathrm{Sin}x=۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$۲\mathrm{Sin}^۲x-\sqrt{۲}\mathrm{Sin}x=۰$$

$$۲\mathrm{Sin}x(\mathrm{Sin}x-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۰$$

الف) $\mathrm{Sin}x=۰\Rightarrow x=k\pi \quad ,k\in Z$

ب) $\mathrm{Sin}x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰$

$$\mathrm{Sin}x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \mathrm{Sin}x=\mathrm{Sin}\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} & ,k\in Z\\ x=۲k\pi+(\pi-\frac{\pi}{۴}) & ,k\in Z\end{cases}$$

مثال ۲: معادلهٔ $۲\mathrm{Cos}^۲x+\mathrm{Cos}x=۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$۲\mathrm{Cos}^۲x+\mathrm{Cos}x=۰$$

$$۲\mathrm{Cos}x(\mathrm{Cos}x+\frac{۱}{۲})=۰$$

الف) $\mathrm{Cos}x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \quad ,k\in Z$

ب) $\mathrm{Cos}x+\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow \mathrm{Cos}x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \mathrm{Cos}x=-\mathrm{Cos}\frac{\pi}{۳}$

$$\Rightarrow \mathrm{Cos}x=\mathrm{Cos}(\pi-\frac{\pi}{۳})$$

$$\mathrm{Cos}x=\mathrm{Cos}\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} \quad ,k\in Z$$

مثال ۳: معادلهٔ $\tan^۲x+\sqrt{۳}\tan x=۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$\tan^۲x+\sqrt{۳}\tan x=۰\Rightarrow \tan x(\tan x+\sqrt{۳})=۰$$

الف) $\tan x=۰\Rightarrow x=k\pi \quad ,k\in Z$

ب) $\tan x+\sqrt{۳}=۰\Rightarrow \tan x=-\sqrt{۳}\Rightarrow \tan x=-\tan\frac{\pi}{۳}$

$$\Rightarrow \tan x=\tan(-\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x=k\pi+(-\frac{\pi}{۳}) \quad ,k\in Z$$

مثال ۴: معادلهٔ $۳\mathrm{Cot}^۲x-\sqrt{۳}\mathrm{Cot}x=۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$۳\mathrm{Cot}^۲x-\sqrt{۳}\mathrm{Cot}x=۰\Rightarrow ۳\mathrm{Cot}x(\mathrm{Cot}x-\frac{\sqrt{۳}}{۳})=۰$$

الف) $\mathrm{Cot}x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \quad ,k\in Z$

ب) $\mathrm{Cot}x-\frac{\sqrt{۳}}{۳}=۰\Rightarrow \mathrm{Cot}x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$$\mathrm{Cot}x=\mathrm{Cot}\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳} \quad ,k\in Z$$

چند نکته دربارهٔ معادله‌های مثلثاتی

۱) برای حل هر معادلهٔ مثلثاتی به صورت $a\mathrm{Sin}t\,x+b\mathrm{Cos}tx=۰$، دو طرف معادله را بر Sintx یا Costx تقسیم می‌کنیم.

مثال: معادلهٔ $۳\mathrm{Sin}۵x-\sqrt{۳}\mathrm{Cos}۵x=۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$۳\mathrm{Sin}۵x-\sqrt{۳}\mathrm{Cos}۵x=۰$$

دو طرف معادله را بر $\mathrm{Cos}۵x\neq۰$ تقسیم می‌کنیم.

سؤال: چرا Cos۵x مخالف صفر است؟

جواب: اگر Cos۵x، مساوی صفر باشد. آنگاه، Sin۵x برابر ۱ است، اگر این مورد را در معادله بررسی کنیم خواهیم داشت $۳(۱)-\sqrt{۳}(۰)=۰$ یا ۳=۰ که غیرممکن است.

حال حل معادله را پی می‌گیریم.

$$\frac{۳\mathrm{Sin}۵x}{\mathrm{Cos}۵x}-\frac{\sqrt{۳}\mathrm{Cos}۵x}{\mathrm{Cos}۵x}=۰$$

$$\Rightarrow ۳\tan ۵x-\sqrt{۳}=۰\Rightarrow ۳\tan ۵x=\sqrt{۳}\Rightarrow \tan ۵x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \tan ۵x=\tan\frac{\pi}{۶}\Rightarrow ۵x=k\pi+\frac{\pi}{۶} \quad ,k\in Z$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۳۰} \quad ,k\in Z$$

۲) معادله‌هایی که دو طرف آن‌ها به دو نسبت مثلثاتی همنام تبدیل می‌شوند.

برای حل هر معادلهٔ مثلثاتی به صورت aSinx+bCostx = ۰، دو طرف معادله را بر Sintx یا Costx تقسیم می‌کنیم

مثـال: معادلـهٔ $\cos(4x+\frac{\pi}{4})+\sin 2x=0$ را حـل کنیـد و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل: $\cos(4x+\frac{\pi}{4})=-\sin 2x$

حال باید $(-\sin 2x)$ را به کسینوس کمانی تبدیل کنیم؛ داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}+2x)=-\sin 2x$$

در معادله قرار می‌دهیم.

$$\cos(\underbrace{4x+\frac{\pi}{4}}_{X})=\cos(\underbrace{\frac{\pi}{2}+2x}_{\alpha})$$

الف) $X=2k\pi+\alpha \Rightarrow 4x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+2x$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{8}\ ,k\in Z$$

ب) $X=2k\pi-\alpha\Rightarrow 4x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x$

$$\Rightarrow 6x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow 6x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{8}\ ,k\in Z$$

۳) معادله‌هایی که به کمک فاکتورگیری از راه دسته‌بندی قابل حل‌اند.

مثـال: معادلـهٔ $4\sin x.\cos x-2\sqrt{2}\cos x-2\sin x+\sqrt{2}=0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$4\sin x.\cos x-2\sqrt{2}\cos x-2\sin x+\sqrt{2}=0$$

$$2\cos x(2\sin x-\sqrt{2})-(2\sin x-\sqrt{2})=0$$

$$(2\sin x-\sqrt{2})(2\cos x-1)=0$$

الف) $2\sin x-\sqrt{2}=0\Rightarrow 2\sin x=\sqrt{2}\Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{4} & ,k\in Z\\ x=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{4}) & ,k\in Z\end{cases}$$

ب) $2\cos x-1=0\Rightarrow 2\cos x=1\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ ,k\in Z$$

۴) معادله‌هایی کـه به کمک تبدیل به معادلهٔ درجهٔ دوم قابل حل‌اند.

مثـال ۱: معادلـهٔ $\cos 2x+5\sin x-4=0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

داریم: $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$$\cos 2x+5\sin x-4=0$$

$$\Rightarrow 1-2\sin^2 x+5\sin x-4=0$$

$-2\sin^2 x+5\sin x-3=0$ یا

$$+2\sin^2 x-5\sin x+3=0$$

حال فرض می‌کنیم y=sinx، مسلّماً: $-1\le y\le 1$

$$\Rightarrow 2y^2-5y+3=0\quad \begin{cases} a=2\\ b=-5\quad a+b+c=0\\ c=3\end{cases}$$

در این معادلهٔ درجه دوم، مجموع ضرایب صفر اسـت، پس یک ریشهٔ این معادله عدد ۱ و ریشهٔ دیگر برابر $(\frac{c}{a})$ است.

$$\Rightarrow\begin{cases} y=1\\ y=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

با توجه به شرط $-1\le y\le 1$، پس $y=\frac{3}{2}$ غیرممکن است.

بنابراین جواب قابل قبول y=۱ است.

$$y=1\Rightarrow \sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,k\in Z$$

مثـال ۲: معادلهٔ $4\cos^2 x-2(\sqrt{2}+1)\cos x+\sqrt{2}=0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم y=Cosx، مسلماً $-1\le y\le 1$

$$\Rightarrow 4y^2-2(\sqrt{2}+1)y+\sqrt{2}=0$$

$$\begin{cases} a=6\\ b=-2(\sqrt{2}+1),\ b'=-(\sqrt{2}+1)\\ c=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Delta'=b'^2-ac=(\sqrt{2}+1)^2-4\sqrt{2}$$

$$\Delta'=2+1+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=2+1-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$$

$$y=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{(\sqrt{2}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+1\pm(\sqrt{2}-1)}{4}$$

(الف) $y_{۱} = \frac{\sqrt{۲}+۱+\sqrt{۲}-۱}{۴} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

(ب) $y_{۲} = \frac{\sqrt{۲}+۱-(\sqrt{۲}-۱)}{۴} = \frac{\sqrt{۲}+۱-\sqrt{۲}+۱}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \mathrm{Cos}x = y_{۱۱} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \mathrm{Cos}x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \mathrm{Cos}x = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}, k \in Z \end{cases}$$

و $\mathrm{Cos}x = y_{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \mathrm{Cos}x = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{۳}$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}, k \in Z$$

۵) معادله‌هایی که کمان‌های متمم دارند، قابل حل‌اند:

یعنی: معادله‌های مثلثاتی که شـامل سـینوس و کسینوس یا شـامل تانژانت و کتانژانت باشند و مجموع کمان‌های آن‌ها برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد، قابل حل‌اند.

مثال: معادلهٔ $\mathrm{Sin}^{۲}(x-\frac{\pi}{۱۲}) + ۲\mathrm{Cos}(\frac{۷\pi}{۱۲}-x) - ۳ = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$(x-\frac{\pi}{۱۲}) + (\frac{۷\pi}{۱۲}-x) = \frac{۷\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۶\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۲}$$

پـس دو کمـان $(x-\frac{\pi}{۱۲})$ و $(\frac{۷\pi}{۱۲}-x)$ متمـم یکدیگرند و سینوس یکی برابر کسینوس دیگری است. پس:

$$\mathrm{Sin}^{۲}(x-\frac{\pi}{۱۲}) + ۲\mathrm{Cos}(\frac{۷\pi}{۱۲}-x) - ۳ = ۰$$

$$\mathrm{Sin}^{۲}(x-\frac{\pi}{۱۲}) + ۲\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{۲} - (\frac{۷\pi}{۱۲}-x)\right] - ۳ = ۰$$

$$\mathrm{Sin}^{۲}(x-\frac{\pi}{۱۲}) + ۲\mathrm{Sin}(x-\frac{\pi}{۱۲}) - ۳ = ۰$$

فرض می‌کنیم $y = \mathrm{Sin}(x-\frac{\pi}{۱۲})$، مسلماً $-۱ \le y \le ۱$

$$y^{۲} + ۲y - ۳ = ۰ \quad \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۲ \\ c = -۳ \end{cases}$$

در این معادلهٔ درجه دوم، مجموع ضرایب صفر است، پس:

$$\begin{cases} y_{۱} = ۱ \Rightarrow \mathrm{Sin}(x-\frac{\pi}{۱۲}) = ۱ \\ y_{۲} = -۳ \quad \text{که غیرممکن است} \end{cases}$$

$$\mathrm{Sin}(x-\frac{\pi}{۱۲}) = ۱ \Rightarrow x - \frac{\pi}{۱۲} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in Z$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲}, k \in Z$$

۶) معادله‌هایـی کـه به کمک فرمول‌هـای تبدیل مجموع به حاصل‌ضرب قابل حل‌اند.

مثـال: معادلهٔ $\mathrm{Sin}۵x - \mathrm{Sin}۳x + \mathrm{Sin}x = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل: داریم:

$$\mathrm{Sin}p + \mathrm{Sin}q = ۲\mathrm{Sin}\frac{p+q}{۲}\mathrm{Cos}\frac{p-q}{۲}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}۵x + \mathrm{Sin}x = ۲\mathrm{Sin}\frac{۵x+x}{۲}.\mathrm{Cos}\frac{۵x-x}{۲}$$

$$= ۲\mathrm{Sin}۳x.\mathrm{Cos}۲x$$

$$\underbrace{\mathrm{Sin}۵x + \mathrm{Sin}x} - \mathrm{Sin}۳x = ۰$$

$$۲\mathrm{Sin}۳x.\mathrm{Cos}۲x - \mathrm{Sin}۳x = ۰$$

$$\mathrm{Sin}۳x(۲\mathrm{Cos}۲x - ۱) = ۰$$

(الف) $\mathrm{Sin}۳x = ۰ \Rightarrow ۳x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳}, k \in Z$

(ب) $۲\mathrm{Cos}۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow \mathrm{Cos}۲x = \frac{۱}{۲}$

$$\mathrm{Cos}۲x = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{۳} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶}, k \in Z$$

۷) معادله‌هایی که به کمک تبدیل حاصل‌ضرب به حاصل‌جمع قابل حلّ‌اند.

مثـال: معادلـهٔ $۲\mathrm{Sin}\frac{۵x}{۲}.\mathrm{Cos}\frac{x}{۲} = \mathrm{Sin}۲x$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل: داریم:

$$۲\mathrm{Sin}\alpha.\mathrm{Cos}\beta = \mathrm{Sin}(\alpha+\beta) + \mathrm{Sin}(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow ۲\mathrm{Sin}\frac{۵x}{۲}.\mathrm{Cos}\frac{x}{۲} = \mathrm{Sin}(\frac{۵x}{۲}+\frac{x}{۲}) + \mathrm{Sin}(\frac{۵x}{۲}-\frac{x}{۲})$$

$$۲\mathrm{Sin}\frac{۵x}{۲}.\mathrm{Cos}\frac{x}{۲} = \mathrm{Sin}۳x + \mathrm{Sin}۲x$$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$۲\mathrm{Sin}\frac{۵x}{۲}.\mathrm{Cos}\frac{x}{۲} = \mathrm{Sin}۲x$$

$$\mathrm{Sin}۳x + \mathrm{Sin}۲x = \mathrm{Sin}۲x$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}۳x = ۰ \Rightarrow ۳x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳}, k \in Z$$

معادله‌هایی که کمان‌های متمم دارند، قابل حل‌اند: یعنی: معادله‌های مثلثاتی که شامل سینوس و کسینوس یا شامل تانژانت و کتانژانت باشند و مجموع کمان‌های آن‌ها برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد، قابل حل‌اند