

روش فاکتورگیری در محاسبه‌ی «ب.م.م.» دو عدد

کلیدواژه‌ها: بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م.)، بخش‌پذیری، تقسیم، باقی‌مانده، فاکتورگیری.

حمیدرضا امیری

بر عدد کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم و عدد کوچک‌تر را بر باقی‌مانده‌ی تقسیم، تقسیم می‌کنیم و این عمل را آن قدر تکرار می‌کنیم تا به باقی‌مانده‌ی صفر برسیم. در این مرحله آخرین مقسوم علیه، همان ب.م.م. است. به مثال زیر توجه کنید:

می‌خواهیم ب.م.م. دو عدد ۱۲۰ و ۹۶ را به روش نردبانی محاسبه کنیم:

خارج قسمت‌ها	۱	۴	
۱۲۰	۹۶	۲۴	$\Rightarrow (۱۲۰, ۹۶) = ۲۴$
باقی‌مانده‌ها	۲۴	۰	

حالا روشی را که می‌خواهیم برای محاسبه‌ی ب.م.م. دو عدد a و b پیشنهاد و از آن استفاده کنیم، روش فاکتورگیری می‌نامیم که قبل از بیان این روش ابتدا به بررسی این مطلب می‌پردازیم که اگر دو عدد a و b در عدد طبیعی ضرب شوند آیا ب.م.م. آن‌ها نیز در k ضرب می‌شود یا اگر دو عدد a و b را بر k تقسیم کنیم (به شرط آن که هر دو به k بخش‌پذیر باشند) ب.م.م. آن‌ها نیز بر k تقسیم می‌شود؟

به مثال‌ها دقت کنید:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & (۴, ۶) = ۲ \quad \text{و} \quad (۴ \times ۲, ۶ \times ۲) = (۸, ۱۲) = ۴ = ۲ \times ۲ \\ \text{II)} \quad & (۹, ۱۲) = ۳ \quad \text{و} \quad (۹ \times ۴, ۱۲ \times ۴) = (۳۶, ۴۸) = ۱۲ = ۳ \times ۴ \\ \text{III)} \quad & (۴۲, ۵۶) = ۱۴, \quad \left(\frac{۴۲}{۷}, \frac{۵۶}{۷}\right) = (۶, ۸) = ۲ = \frac{۱۴}{۷} \end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در I و II با ضرب دو عدد در یک عدد، ب.م.م. آن‌ها نیز در آن عدد ضرب می‌شود و در III با تقسیم دو عدد بر یک عدد، ب.م.م. آن‌ها نیز بر آن عدد تقسیم

ب.م.م. یا بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b که آن را با نماد $a \text{ و } b$ یا $a \text{ و } b$ نشان می‌دهیم، عددی است طبیعی که اولاً هر دو عدد a و b بر آن بخش‌پذیر باشند و ثانیاً در بین تمام مقسوم علیه‌های مشترک a و b از همه بزرگ‌تر باشد. برای مثال اگر $a=۱۲$ و $b=۱۶$ را در نظر بگیریم و مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های مشترک a و b را تشکیل دهیم، خواهیم داشت: $A = \{۱, ۲, ۴\}$ که بزرگ‌ترین آن‌ها عدد ۴ است، پس:

$$(۱۲, ۱۶) = ۴$$

در صورتی که دو عدد a و b هیچ مقسوم علیه مشترکی به جز عدد ۱ نداشته باشند، اصطلاحاً می‌گوییم دو عدد a و b نسبت به هم اول‌اند یا می‌گوییم a و b نسبت به هم متباین‌اند. برای مثال، دو عدد ۱۵ و ۲۸ نسبت به هم اول‌اند (مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های هر یک را تشکیل دهید و بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن‌ها را پیدا کنید).

شما غیر از تشکیل مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های دو عدد a و b و مشخص کردن بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن‌ها چه راه دیگری برای محاسبه‌ی ب.م.م. دو عدد سراغ دارید؟ معمولاً برای اعداد بزرگ از طریق تجزیه‌ی دو عدد به حاصل ضرب اعداد اول نیز می‌توانید ب.م.م. آن‌ها را محاسبه کنید به این ترتیب که دو عدد را به حاصل ضرب اعداد اول تجزیه می‌کنیم و پایه‌های مشترک را با کوچک‌ترین توان در یکدیگر ضرب می‌کنیم. مثلاً برای محاسبه‌ی ب.م.م. دو عدد ۴۸ و ۶۰ از طریق تجزیه داریم:

$$\left. \begin{aligned} ۴۸ &= ۲^۴ \times ۳ \\ ۶۰ &= ۲^۲ \times ۳ \times ۵ \end{aligned} \right\} \Rightarrow (۴۸, ۶۰) = ۲^۲ \times ۳ = ۱۲$$

یکی دیگر از روش‌هایی که برای محاسبه‌ی ب.م.م. به کار می‌رود، روشی است معروف به روش نردبانی که در این روش عدد بزرگ را

می‌شود. با استفاده از همین نکته اگر ب.م.م دو عدد a و b را d

فرض کنیم، یعنی $(a, b) = d$ ، در این صورت می‌توان نوشت:

$$(a, b) = d \Leftrightarrow (ka, kb) = kd = k \underbrace{(a, b)}_d$$

علامت $\Leftrightarrow$ بین دو عبارت به این معناست که از $(a, b) = d$

نتیجه می‌گیریم $(ka, kb) = kd$ و برعکس از $(ka, kb) = kd$

نتیجه می‌گیریم $(a, b) = d$.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$(42, 56) = 2 \times (21, 28) = 2 \times 7 \times \underbrace{(3, 4)}_1 = 2 \times 7 \times 1 = 14$$

$$(180, 96) = 2 \times (90, 48) = 2 \times 3 \times \underbrace{(30, 16)}_1 = 2 \times 3 \times 2 \times \underbrace{(15, 8)}_1 = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$$

حتماً به این نکته پی برده‌اید که وقتی تمام عامل‌های مشترک

دو عدد را به صورت فاکتور بیرون می‌آوریم و به صورت ضرب

می‌نویسیم، در پایان به دو عددی می‌رسیم که هیچ عامل مشترکی

جز ۱ ندارند و نسبت به هم اول‌اند.

$$(480, 248) = 2 \times (240, 124) = 2 \times 4 \times \underbrace{(60, 31)}_1 = 2 \times 4 \times 1 = 8$$

تمرین: به روش فاکتورگیری، ب.م.م اعداد داده شده را به دست آورید.

$$\text{I) } a = 480, b = 360$$

$$\text{II) } a = 88, b = 120$$

$$\text{III) } a = 700, b = 840$$

مسئله: اگر m جواب معادله‌ی $6m - 72 = -12$ باشد، در این

صورت حاصل $(45m, 60m)$ را بیابید.

$$6m - 72 = -12 \Rightarrow 6m = 60 \Rightarrow m = 10 \quad \text{حل:}$$

$$(45m, 60m) = m \times (45, 60) = m \times 15 \underbrace{(3, 4)}_1 = 15m$$

$$m = 10 \Rightarrow (45m, 60m) = 15 \times 10 = 150$$

