

نحوهٔ ایجاد در مبنای مقاومت

قسمت اول

(روشی برای یافتن پاسخ برخی پرسش‌ها، با استفاده از استدلال و تفکر منطقی)

سپیده چمن‌آرا

کلیدواژه‌ها: عدد نویسی، مبنایها، ارزش مکانی، اعداد صحیح.

بنابراین اگر رقم بزرگ‌تر در ارزش مکانی بزرگ‌تر قرار گیرد، عدد بزرگ‌تر می‌شود و برعکس، اگر ارقام کوچک‌تر در ارزش مکانی بزرگ‌تر قرار گیرند، عدد کوچک‌تر می‌شود. این یکی از روابط خلیلی مهم است که در مقایسه‌ی اعداد زیر به ما کمک می‌کند.

پاسخ: بزرگ‌ترین عدد پنج رقمی ۹۹۹۹۹ (نود و نه هزار و نه صد و نود و نه) و کوچک‌ترین عدد پنج رقمی، ۱۰۰۰۰ (ده هزار) است.

حال اگر بخواهیم ارقام اعداد مورد نظر، تکراری نباشند چی؟ یعنی: **پرسش ۲.** بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد پنج رقمی که رقم تکراری نداشته باشد، چیست؟

پاسخ: بزرگ‌ترین عدد پنج رقمی بدون تکرار، ۹۸۷۶۵ (نود و هشت هزار و هفت‌صد و شصت و پنج) و کوچک‌ترین عدد پنج رقمی بدون تکرار، ۱۰۲۳۴ (ده هزار و دویست و سی و چهار) است. سعی کنید الگوی نوشتن این دو عدد را شرح دهید تا بتوانید به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

پرسش ۳. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد پنج رقمی در مبنای ۷ چیست؟ (هم با رقم تکراری و هم بدون تکرار)

پاسخ: اصول عدد نویسی در مبنای ۷ نیز مانند مبنای ۱۰ است، فقط رقم‌های کمتری برای استفاده داریم.

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶

و از طرف دیگر، نام و ارزش مکان‌های جدول ارزش مکانی متفاوت است:

جدول ارزش مکانی اعداد صحیح در مبنای ۷

یکی	۱	۷ = ۱ تایی	۳۴۳ = ۷ تایی	۳ = ۷ تایی	...
-----	---	------------	--------------	------------	-----

بحث مبنای‌های شمارش، یکی از بحث‌های کتاب ریاضی دوم راهنمایی است. در این کتاب با مبنای‌هایی به جز مبنای ۱۰ مبنای متعارف در شمارش و عدد نویسی است) آشنا می‌شویم و تا حدودی، اصول حاکم بر عدد نویسی در هر مبنای را یاد می‌گیریم. روش تبدیل نمایش اعداد از یک مبنای به مبنای دیگر را می‌آموزیم.

اما شاید بسیاری از سوال‌ها که در مورد نمایش اعداد در مبنای مختلف به ذهن افراد کنجدکاو می‌رسد، با در نظر گرفتن مفاهیم اساسی و اصول «عدد نویسی»، به راحتی قابل بررسی و پاسخ دادن باشند. بگذارید با پرسش زیر شروع کنیم:

پرسش ۱. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد پنج رقمی چیست؟

شاید فکر کنید این پرسش مربوط به دانش‌آموزان دبستان است و پرسش بسیار ساده‌ای است. درست است، ولی قدم از مطرح کردن آن، یادآوری «روابط» و «اصول» مهم در عدد نویسی است.

به یاد بیاوریم ارقامی که در عدد نویسی معمولی استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از:

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

و ارزش مکانی در عدد نویسی از راست به چپ بزرگ‌تر می‌شود:

جدول ارزش مکانی اعداد صحیح

یکی‌ها	هزارها	میلیون‌ها
۹	۹	۹
۸	۸	۸
۷	۷	۷
۶	۶	۶
۵	۵	۵
۴	۴	۴
۳	۳	۳
۲	۲	۲
۱	۱	۱
۰	۰	۰

پاسخ: همیشه و در هر مبنای ۱ واحد است، زیرا در عدد نویسی، همیشه بزرگترین عدد چهار رقمی، عدد قبل از کوچکترین عدد پنج رقمی است! اگر شک دارید در چند تا از مبناهای مختلف امتحان کنید (اگر تفیق کردن در خود مبناهای مربوط را بلد هستید، در خود مبنا تفیق کنید). اگر تفیق در مبناهای دیگر را بلد نیستید، به مقاله‌ی مجله‌ی برهان شماره‌ی قبل مراجعه کنید یا اعداد را به مبنای ۱۰ تبدیل کنید و تفیق کنید:

$$(10000) - 7 = ? \quad (6666) - 7 = ?$$

$$(10000) - 4 = ? \quad (3333) - 4 = ?$$

$$(10000) - 3 = ? \quad (2222) - 3 = ?$$

پرسش ۵: در مبنای ۴، عدد بعد از $(_{\text{۳}}\text{۳}\text{۳})$ چیست؟

پاسخ: چون $(_{\text{۳}}\text{۳}\text{۳})$ بزرگترین عدد سه رقمی است، پس عدد بعدی، کوچکترین عدد چهار رقمی است، یعنی $(_{\text{۱}}\text{۰}\text{۰}\text{۰})$

اما مثل عدد نویسی معمولی، ارزش مکانی از راست به چپ زیاد می‌شود. پس بزرگترین عدد پنج رقمی دارای رقم تکراری $(_{\text{۶}}\text{۶}\text{۶}\text{۶}\text{۶})$ (نخوانید شصت و شش هزار و ...)، بخوانید شش، شش، شش، شش، شش (شش) و بزرگترین عدد پنج رقمی بدون تکرار $(_{\text{۶}}\text{۵}\text{۴}\text{۳}\text{۲})$ است. به همین ترتیب کوچکترین عدد پنج رقمی با تکرار $(_{\text{۱}}\text{۰}\text{۰}\text{۰}\text{۰})$ (باز هم حواستان باشد نخوانید «ده هزار»!) و بدون تکرار $(_{\text{۱}}\text{۰}\text{۲}\text{۳}\text{۴})$ است.

این دو عدد، از نظر ظاهر، مثل پاسخ‌های پرسش‌های (۱) و (۲) هستند، ولی از نظر مقدار، با آن‌ها یکی نیستند، زیرا ارزش مکانی ارقام در مبناهای ۱۰ با مبنای ۷ متفاوت است. با کمی دقت در الگوی نوشتن بزرگترین و کوچکترین عدد که بر اساس ترتیب ارقام و ترتیب ارزش مکانی است، می‌توان گفت:

در هر مبنای X ، کوچکترین عدد n رقمی، به شکل $(_{\text{n}}\text{...}\text{n})$ است که مقدار آن دقیقاً برابر با $\frac{X}{X^{n-1}}$ است. (طبق جدول ارزش مکانی در مبنای X).

از طرف دیگر، اگر نخواهیم رقم تکراری داشته باشیم:

در هر مبنای X ، کوچکترین عدد n رقمی بدون رقم تکراری، به شکل $(_{\text{۱}}\text{۰}\text{۲}\text{۳}\text{۴}\text{۵}\text{۶}\text{۷}\text{۸}\text{۹})$ است.

(البته تا هرجایی که از سمت چپ n رقم بشود).

پس اولاً n نمی‌تواند از ۱۰ بیش‌تر باشد، زیرا در آن صورت رقم تکراری خواهیم داشت، ثانیاً اگر n از مبنای X بزرگ‌تر باشد رقم‌های استفاده شده «غیر مجاز» می‌شوند. برای مثال، فرض کنید به شما بگویند کوچکترین عدد سه رقمی بدون تکرار در مبنای ۲ را بنویسید. خوب اول در سمت چپ، ۱ می‌گذاریم سپس ۰ و بعد چون ۰ و ۱ را گذاشته‌ایم، باید رقم دیگری استفاده کنیم. (?) ۱۰ اما در مبنای ۲، تنها ارقام شناخته شده یا به قول معروف، مجاز، ۰ و ۱ هستند و در واقع اصلاً رقم دیگری نداریم. برای همین نوشتن کوچکترین عدد سه رقمی بدون تکراری در مبنای ۲ غیر ممکن است و باید حداقل مبنای ما ۳ باشد.

حال شما بحث مشابهی را درباره‌ی بزرگترین عدد n رقمی در هر مبنای بکنید و شرایطی را که باید در نظر بگیریم تا بتوانیم بزرگترین عدد n رقمی بدون تکرار را در مبنای X بنویسیم، به دست آوریم. نتایج خود را با دوستان و هم‌کلاسی‌هایتان نیز در میان بگذارید. حال اگر توانستید به سرعت به پرسش‌های زیر پاسخ دهید؟

پرسش ۶: در مبنای ۷، اختلاف بین بزرگترین عدد چهار رقمی و کوچکترین عدد پنج رقمی چند واحد است؟ چرا؟

