

در کتابهای ریاضی متوسطه

تعاریف

قاسم حسین قنبری
مرکز تربیت معلم شهید رجایی سمنان

اشاره

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست‌اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می‌داند. به همین دلیل، بیش‌ترین تلاش اعضای هیئت تحریریه‌ی مجله، جست‌وجو برای پیدا کردن راه‌های مختلف ایجاد چنین تعامل و تبادل نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک آموزشی، تولید و توزیع مجله، نظم بیش‌تری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیش‌تری با مجله‌ی خودشان برقرار کرده‌اند و بیش‌تر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال کرده‌اند. به همین دلیل، آرزوی دیرینه‌ی دفتر انتشارات کمک آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی می‌رود تا تحقق یابد. در نتیجه، با نظر هیئت تحریریه‌ی مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً و بدون ویرایش چاپ شوند. در ضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخ‌گو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل نظر را از طریق بازتاب بر آن‌ها، معنادارتر و کارآمدتر کنند.

رشد آموزش ریاضی

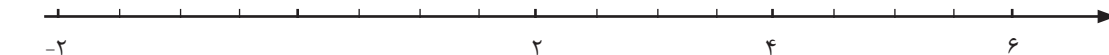
چکیده

با توجه به اهمیت تعریف در ریاضی، بررسی و نقد برخی تعاریف کتب دوره متوسطه و پیش‌دانشگاهی موضوع این مقاله است. این مسئله در این دوره اهمیت زیادی دارد. زیرا کتاب‌های ریاضی به سرعت در حال تغییر و تحول‌اند و به نظر می‌رسد که این سال با توجه به بهار آن، سال نکویی نخواهد بود.

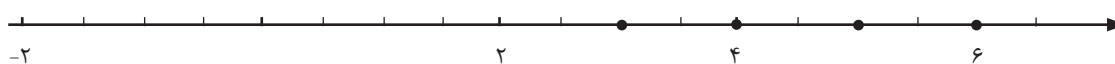
کلیدواژه‌ها: تعریف، عبارت جبری، نقطه بحرانی.

عدالت آموزشی یکی از مقدمات داشتن جامعه‌ای مطلوب است؛ جامعه‌ای که در آن امکانات آموزشی برای همه افراد جامعه به‌طور یکسان وجود داشته باشد. در این راستا، کتاب درسی مناسب، استاندارد و خودآموز، از اولین این امکانات می‌باشد

شکل ۱



شکل ۲



مقدمه

جواب متفاوت به دست خواهد آمد. در موارد بسیاری هم تعریف وجود دارد ولی تعریفی جامع و کامل نیست. در ادامه، به بررسی تعریف‌هایی از کتاب‌های ریاضی ۱، ریاضی ۲ و حسابان تازه تألیف و کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال فعلی می‌پردازیم.

ریاضیات ۱ تازه تألیف (چاپ ۱۳۸۹)

متغیر

در این کتاب متغیر به این صورت تعریف شده است: «نمادهایی که اعداد دلخواهی را نشان می‌دهند، متغیر می‌نامند. زیرا به جای آنها هر عدد می‌توان قرار داد.» (صفحه ۷۸ از ریاضیات ۱) آیا به جای هر متغیری می‌توان هر عددی را قرار دارد و هیچ محدودیتی در آن وجود ندارد؟ واضح است که چنین نیست. چرا که در فعالیت قبل (صفحه ۷۸ همین کتاب) از این تعریف دانش‌آموز مساحت مستطیل را xy و محیط آن را $2(x+y)$ محاسبه کرده است که در آن، x و y نمی‌توانند اعداد منفی باشد. واضح است که تعریف دامنه تغییر، قبل از این ضروری است که در کتاب وجود ندارد.

عبارت‌های جبری

«هر کدام از عبارت‌هایی که در فعالیت بالا به‌دست آورده‌اید به صورت محاسباتی روی متغیرهای x و y از طریق اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و توان‌رسانی و ریشه‌گیری بوده است. این اعمال را اعمال جبری و عبارت‌های به‌دست آمده را عبارت‌های جبری می‌نامند. در حالت خاص، یک عدد را هم به عنوان یک عبارت جبری می‌پذیریم.» (صفحه ۷۸ ریاضیات ۱)

عدالت آموزشی یکی از مقدمات داشتن جامعه‌ای مطلوب است؛ جامعه‌ای که در آن امکانات آموزشی برای همه افراد جامعه به‌طور یکسان وجود داشته باشد. در این راستا، کتاب درسی مناسب، استاندارد و خودآموز، از اولین این امکانات می‌باشد. اما آیا در حال حاضر، کتاب‌های ما این‌گونه هستند و در این مختصر، آیا کتاب‌های ریاضی این ویژگی‌ها را دارند؟ با توجه به وجود این همه کتاب‌های کمک‌درسی، آموزشگاه‌های آزاد، کلاس‌های خصوصی و باز هم افت تحصیلی، طبیعی است که جواب منفی باشد. هر چند که عوامل بسیار زیاد دیگری هم در این افت دخیل هستند. از آنجایی که تعاریف در ریاضی نقش مهمی دارند، برخی تعاریف را مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ از این نظر که آیا تعریف مورد نیاز در هر مورد وجود دارد و در صورت وجود، این تعریف جامع و کامل است یا خیر؟ در واقع، هدف این نوشته این است که نشان دهد عدم دقت در ارائه تعریف‌های ریاضی در کتاب‌های درسی، در میزان افت تحصیلی تأثیرگذار است و در نتیجه، مانعی برای تحقق عدالت آموزشی است.

موضوع را با مسئله ساده‌ای آغاز می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهید دو مجموعه را روی شکل ۱ مشخص کنیم. تجربه تدریس نگارنده نشان داده است که معمولاً بیشتر دانش‌آموزان هر دو مجموعه را به صورت شکل ۲ نشان می‌دهند. با بررسی کتاب‌های دوره راهنمایی و متوسطه، می‌بینیم که برای نمایش چنین مجموعه‌ای، هیچ تعریفی نداریم. البته این سؤال به شکل عکس هم می‌تواند مطرح شود که باز هم دو

هدف این نوشته این است که نشان دهد عدم دقت در ارایه تعریف‌های ریاضی در کتاب‌های درسی، در میزان افت تحصیلی تأثیرگذار است و در نتیجه، مانعی برای تحقق عدالت آموزشی است

۱. مفهوم «نزدیک شدن» چیست؟
به عنوان مثال، آیا دنباله $1, 1, 1, \dots$ به عددی نزدیک می‌شود؟ هرچند مؤلف در تبصره‌ای این مشکل را حل کرده است، ولی آیا این کار از نظر آموزشی پسندیده است که مطلب اصلی در تبصره بیاید؟ شاید مناسب بود که این مفهوم در این مرحله بیان نمی‌شد.

۲. چه دنباله‌هایی به صفر نزدیک می‌شوند؟
در واقع در این تعریف، فقط صورت مسئله عوض شده است. چرا که قبل از این موضوع، نزدیکی به صفر مطرح نشده است. در این وضعیت حداقل دو سؤال مطرح می‌شود که اولاً وجود این تعریف چه ضرورتی دارد؟ و آیا با حذف آن مشکلی در ادامه بحث پیش می‌آید؟

ریاضی عمومی دوره پیش‌دانشگاهی رشته تجربی (چاپ ۱۳۸۹)

در این کتاب آمده است:
«نقطه بحرانی: تابع f با قلمرو $[a, b]$ مفروض است. نقاطی از بازه (a, b) که مشتق در آن نقاط صفر است یا نقاطی از این بازه که مشتق تابع در آن نقاط وجود ندارد را نقاط بحرانی تابع می‌نامند.»

بنابراین نقاط بحرانی به توابعی محدود شده است که دامنه آنها به شکل $[a, b]$ است. در نتیجه تمرین‌های ۱ تا ۵ صفحه ۱۲۳ این کتاب که قصد محاسبه نقاط بحرانی توابعی مثل $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 60$ را دارد بی‌مورد است چرا که دامنه این پنج تابع R است که در شرایط مختلف صدق نمی‌کند.

حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی (چاپ ۱۳۸۹)

در تعریف نقطه بحرانی آمده است:
«نقطه $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f می‌نامند، هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ تعریف نشده باشد و یا $f'(c) = 0$ باشد و $x=c$ مشتق تعریف شود، در

هر چند مؤلفان قصد داشته‌اند با یک مثال ساده مفهوم را بیان کنند، اما آیا یک عدد عبارت جبری هست یا یک نمایش از عدد؟ به عبارتی دیگر، یک عدد عبارتی جبری است یا یک رقم؟ آیا صفر یک عبارت جبری است؟ چرا که صفر هم یک عدد است؟
آیا عبارت جبری فقط روی متغیرهای x و y تعریف می‌شود؟
آیا عبارت $1+x+x^2+x^3+\dots$ جبری است؟
این‌ها همه سؤالاتی هستند که تعریف ارایه شده در کتاب، پاسخگوی آنها نیست.

رابطه خطی

«در حالت‌هایی که نمودار رابطه بین دو مقدار به صورت خط باشد، گوییم آن دو مقدار به‌طور خطی به هم مرتبط‌اند و با هم رابطه خطی دارند.» (صفحه ۱۱۱ از ریاضیات ۱)
این تعریف فقط متغیرهای پیوسته را شامل می‌شود، چرا که نمودار متغیرهای گسسته هیچ‌گاه یک خط نمی‌شود، بلکه فقط نقاطی روی خط را شامل می‌شود. با توجه به این موضوع مسئله ۱ صفحه ۱۱۵ رابطه خطی نیست چرا که متغیر پیوسته نیست. همچنین، تمرین در کلاس صفحه ۱۲۱ نیز یک رابطه خطی نیست چرا که نمودار یک نیم‌خط است نه یک خط.
هم‌چنین، عبارت رابطه بین دو مقدار و به صورت خط معنی مشخصی ندارد. به عنوان مثال، آیا رابطه $(x-1)^2 + y^2 = 0$ که فقط یک زوج مرتب $\{(1, 0)\}$ را مشخص می‌کند، رابطه خطی است یا خیر؟ آیا در اینجا می‌توان گفت x و y تغییری دارند؟

ریاضیات ۲ تازه تألیف (چاپ ۱۳۸۹)

در این کتاب نیز، یک تعریف را بررسی می‌کنیم:
نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد
«اگر جملات دنباله‌ای را از عددی معین کم کنیم و جملات حاصل به صفر نزدیک شود گوییم جملات آن دنباله به آن عدد نزدیک می‌شود» (صفحه ۱۳ از ریاضیات ۲)
در این تعریف چند نکته مبهم وجود دارد:

«تعریف نشده» و «وجود ندارد» دو اصطلاحی هستند که در موارد بسیاری از جمله همین مورد نقطه بحرانی، به کار می‌روند ولی خود آنها در کتاب‌های درسی تعریف نشده‌اند

صورتی بحرانی است که $f'(c)=0$ به عنوان مثال، در تابع $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Q} \\ -2 & x \in \mathbb{Q}' \end{cases}$ ، تابع در $x=1$ نقطه بحرانی ندارد زیرا مشتق در این نقطه تعریف می‌شود.

مورد دیگری هم که نیاز به دقت دارد، حد بینهایت است. با توجه به تعریف کتاب ریاضیات ۳ رشته تجربی، حدی مثل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$ وجود دارد و ∞ است اما با توجه به تعریف کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، چنین حدی وجود ندارد. به این منظور به نکته صفحه ۷۴ این کتاب دقت می‌کنیم:

نکته: نمایش $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ فقط یک علامت‌گذاری است و همان‌طور که در مثال ۳۶ دیدیم، در هر یک از این حالت‌ها، تابع f حد ندارد.

نتیجه‌گیری

۱. با توجه به این که ریاضی علمی است که در آن، تعریف‌ها نقش اساسی دارند، پسندیده است که دقت بیشتری در این موارد به عمل بیاید.

۲. بهتر است مفاهیم مشخص در کتاب‌های مختلف با هم هماهنگ باشند، زیرا هم یک معلم ممکن است که کتاب‌های مختلف را تدریس کند و هم این که دانش‌آموزان رشته‌های مختلف با هم تبادل اطلاعات کنند. صلاح نیست که کتاب‌های درسی به صورت جزیره‌های دور از هم باشند.

منابع

۱. ایرانمنش، علی و همکاران. (۱۳۸۹). ریاضیات ۲. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.
۲. بخشعلی‌زاده، شهرناز و همکاران. (۱۳۸۹). ریاضیات ۱. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.
۳. بیژن‌زاده، محمدحسن و همکاران. (۱۳۸۹). ریاضی عمومی دوره پیش‌دانشگاهی رشته تجربی. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.
۴. خردپژوه، فرزاد و رجالی، علی. (۱۳۸۹). حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.
۵. رستمی، محمدحاشم و همکاران. (۱۳۸۹). ریاضیات ۳. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.

صورتی بحرانی است که $f'(c)=0$ به عنوان مثال، در تابع $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Q} \\ -2 & x \in \mathbb{Q}' \end{cases}$ ، تابع در $x=1$ نقطه بحرانی ندارد زیرا مشتق در این نقطه تعریف می‌شود، ولی وجود ندارد.

حال تابع $g(x) = \begin{cases} x & -1 \leq x < 0 \\ 2x^2 - x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ را که مثال صفحه ۱۲۹ این کتاب است در نظر می‌گیریم که مشتق آن به شکل

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 0 \\ \text{وجود ندارد} & x = 0 \\ 4x - 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

مؤلفان کتاب نقاط $x_1 = -1$ و $x_2 = 0$ و $x_3 = \frac{1}{4}$ و $x_4 = 1$ را جزء نقاط بحرانی در نظر گرفته‌اند در صورتی که در $x = 0$ مشتق تعریف می‌شود، اما وجود ندارد. پس نمی‌تواند بحرانی باشد. جالب این است که این نقطه با تعریف ریاضی تجربی بحرانی است.

تعریف نشده‌ها وجود دارند یا خیر؟

«تعریف نشده» و «وجود ندارد» دو اصطلاحی هستند که در موارد بسیاری از جمله همین مورد نقطه بحرانی، به کار می‌روند ولی خود آنها در کتاب‌های درسی تعریف نشده‌اند. سؤال این است که این دو یکی هستند یا فرق دارند. به عنوان مثال، در تابع $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ، آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ تعریف می‌شود؟ آیا این حد وجود دارد؟

واضح است که این حد تعریف می‌شود اما وجود ندارد، زیرا در تعریف حد می‌گنجد.

هم‌چنین در تابع $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Q} \\ -2 & x \in \mathbb{Q}' \end{cases}$ ، $\int_0^1 f(x)dx$ تعریف می‌شود اما وجود ندارد، چرا که در شرایط تعریف صدق نمی‌کند. پس قبل از همه باید جواب این سؤالات معلوم باشد که:

- آیا تعریف شده‌ها وجود دارند؟
- آیا آن که وجود ندارد تعریف نمی‌شود؟
- آیا تعریف نشده‌ها، وجود ندارند؟

به عنوان مثالی دیگر، در تابع $f(x) = |x|$ ، $-1 < x < 2$ با