مسئله این است!
منفی یا مثبت؟

محمدجواد نظری
دبیر ریاضی شهرستان اسلام‌شهر

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

چکیده

اعداد منفی و عملیات با آن، هم‌چنان یکی از مباحث پرچالش در کلاس‌های درس ریاضی است. در این روایت، به چند چالش پیش‌آمده برای یکی از معلمان ریاضی که یک سال است تدریس را شروع کرده‌اند، می‌پردازیم.

کلیدواژه‌ها: اعداد مثبت و منفی، علامت یک عدد، بدفهمی.

برخی اشتباهاتی را که دانش‌آموزان مرتکب می‌شوند، نتیجهٔ الگوهای پایداری می‌باشد که آن‌ها را به صورت ناقص یاد گرفته‌اند. نویسنده، این قبیل خطاهای روشمند و پایدار را «خطاهای مخفی» نامیده است

بحث و جدال بر سر علامت یک عدد:

مفهوم اعداد منفی توسط هندی‌ها در سده اول پیش از میلاد پدید آمد. آن‌ها برای این مفهوم از یک مدل ساده که **قرض و دارایی** نام داشت استفاده می‌کردند. به این‌صورت که عددهای منفی را (قرض یا وام) و اعداد مثبت را (دارایی) می‌نامیدند.

هم‌چنین، ابولوفا بوزجانی در کتاب هفت منزل خود، کاربرد اعداد منفی را برای اولین بار در تاریخ اسلام ذکر کرده است و از اصطلاح (دِین یا وام) برای این مفهوم استفاده کرده است، اما ریاضی‌دانان اروپایی به جواب‌های منفی یک معادله توجهی نداشته و آن‌ها را جواب‌های کاذب و بی‌معنا می‌دانستند.

به هر صورت، در گذشته برای اعداد مثبت و منفی علامت‌های مختلفی استفاده می‌شد ولی امروزه همان علامت‌های (+) و (−) عمومیت یافته است. اما تدریس و یادگیری این مفهوم برای دانش‌آموزان دوره‌های راهنمایی یا حتی دبیرستان عموماً از چالش‌های دبیران محترم بوده و هست. مفاهیمی که اگر به مدل قرض و وام متناظر شوند، می‌توان حدس زد که برای دانش‌آموزان دوره ابتدایی هم مفهومی قابل درک شود. اما سؤال اینجاست که چرا وقتی این مفاهیم در قالب اعداد و علامت‌ها ظاهر می‌شوند، به یکی از چالش‌های تدریس تبدیل می‌شوند؟ برای روشن‌شدن این بحث، مثالی می‌زنم:

یکی از مسائل صفحهٔ ۷ کتاب ریاضی اول دبیرستان، مربوط به جمع و تفریق سادهٔ اعداد است. وقتی از دانش‌آموزان خواسته شد که این محاسبات را انجام دهند، پاسخ‌های متفاوتی دریافت گردید که به دو نمونه از آن‌ها اشاره می‌شود:

دانش‌آموز (A): $۲\times(-۷+۵)=۲\times(-۲)=۴$

دانش‌آموز (B): $۲\times(-۷+۵)=۲\times(-۱۲)=۲۴$

می‌توان فرض کرد که این مسائل در قالب یک مسئله قرض و وام بیان شوند، دانش‌آموز به جواب صحیح برسید. برای نمونه، اگر مسئله را به این شکل برای دانش‌آموز (B) مطرح می‌کردیم، شاید به جواب صحیح می‌رسید:

«اگر شخصی ۷ تومان بدهی داشته باشد ولی ۵ تومان آن‌را باز گرداند، وضعیت دارایی او چگونه است؟»

ممکن است زمانی که معلمان محترم به‌خصوص دبیران دوره متوسطه با این موارد مواجه شوند، علت را در سال‌های قبل جستجو کنند. به عبارتی، مشکل را در نحوهٔ تدریس معلمان سال‌های قبل بدانند. البته ممکن است در برخی موارد این حرف درست باشد، ولی نکتهٔ مهم این است که من در حین تدریس خود متوجه شده‌ام که اغلب دانش‌آموزانی که با مفهوم عدد منفی آشنا هستند، نسبت به این اعداد باز هم نامأنوس‌اند. بنا به گفتهٔ یکی از سال سومی‌ها: «خیلی علامت عدد برای من مهم نیست. حالا چه منفی، چه مثبت. کلاً با اعداد منفی رابطه خوبی ندارم.»

در هر یک از پاسخ‌های دانش‌آموزان (A) و (B)، دو نوع اشتباه با کمی تفاوت وجود دارد. در جواب دانش‌آموز (A)، حاصل جمع به درستی محاسبه شده است ولی حاصل‌ضرب اشتباه است. البته خود دانش‌آموز A، بی‌دقتی را عامل این اشتباه می‌دانست. ولی این اشتباه، با سایر اشتباهاتی که در موضوعات دیگر از قبیل اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها، کاربرد اتحادها، ضرب اعداد چند رقمی اتفاق می‌افتد، کمی متفاوت است. مشاهدات تدریس نویسنده نشان می‌دهند که در موضوعات مذکور، تصور دانش‌آموز نسبت به اجزا و عملگرها عمدتاً یکسان است و به عنوان مثال، در بحث مجموعه‌ها اجتماع دو مجموعه همان‌قدر مهم است که اشتراک آن‌ها اهمیت دارد و دانش‌آموز برای آن‌ها یکسان ارزش قائل است. اما در مورد اعداد منفی وضع این‌گونه نیست.

برای روشن‌تر شدن موضوع دو مثال زیر را در نظر بگیرید:

۱) دو مجموعه مقابل را به شکل بازه‌ای مشخص کنید. سپس مجموعه‌ای بیابید که مشمول در آن‌ها باشد؟

الف) $\left\{x\in R \mid \frac{۱}{x}\le x\right\}$

ب) $\left\{x\in R \mid \frac{۱}{x}\ge x\right\}$

۲) شیب خط واصل بین دو نقطهٔ $A=(۰,۲۰)$ و $B=(۱۲,۱۴)$ را بیابید؟

در سؤال اول، دانش‌آموز هر دو مجموعه را به‌درستی به شکل

شاید بتوان گفت که اگر دانش‌آموز در ارایه پاسخ درست باز بماند، به این معناست که هنوز آن مفهوم را به درستی درک نکرده است. هم‌چنین لازم است که منبع خطای دانش‌آموز، به درستی تشخص داده شود تا قبل از این که روش‌های نادرست در ذهن وی به صورت «طرحواره‌هایی» صحیح ایجاد شوند، بتوان از آن جلوگیری نمود

بازه‌ای مشخص کرد. اما در قسمت دوم سؤال، به جای اشتراک دو مجموعه ({۱،۱-})، اجتماع دو مجموعه را ({R}) اعلام کرد و پس از پی‌بردن به اشتباهش، آن را پذیرفت و اعتراضی هم نداشت زیرا برایش چالشی ایجاد نکرده بود. اما او در سؤال دوم، به این شکل عمل کرد:

$$\frac{(y-y_{.})}{(x-x_{.})}=\frac{(۱۴-۲۰)}{(۱۲-۰)}=\frac{۶}{۱۲}=۰/۵$$

این دانش‌آموز در مرحله آخر، به جای (۶-)، (۶+) قرار داد و جوابی قرینه به‌دست آورد. اما او این اشتباه را ناچیز دانست و انتظار نداشت که برای آن، نمره‌ای در نظر گرفته شود.

تجربه تدریس هشدار می‌دهد که صرفاً بی‌دقتی یا حواس‌پرتی را نمی‌توان علت این اشتباهات دانست. بلکه عوامل دیگری هم در بروز این اشتباهات مؤثراند.

سه عبارت زیر را که از نوشته‌های چند دانش‌آموز در دوره‌های راهنمایی و اول متوسطه انتخاب شده است در نظر بگیرید:

عبارت (۱) ۲-۴=۲

عبارت (۲) ۹-=۴+۵-

عبارت (۳) ۵=۲-۳-

پاسخ عبارت (۱): شکل ظاهری عبارت (۱)، تقریباً مشابه تفریق‌هایی است که این دانش‌آموز، در سال‌های ابتدایی مشاهده کرده است. یعنی، عددی از عدد دیگر کم شده است. در نتیجه او در ذهن خود، همان محاسبهٔ (۲=۲-۴) را انجام داده بود و عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم کرده بود. هر چند که ممکن است کمی دچار شک و تردید شده باشد.

پاسخ عبارت (۲): پاسخ (۲)، مربوط به دانش‌آموز دیگری است که راه‌حل خود را این‌گونه تفسیر نمود:

«مجموع دو عدد چهار و پنج، برابر نه است و علامت آن‌ها، علامت عدد بزرگ‌تر است.»

در یک سری تحقیقاتی که توسط براون[1] و گروه تحقیقاتی بورتون[2] (۱۹۷۸) انجام شد، به پیچیدگی ماهیت روش‌های به ظاهر ساده، مانند جمع و تفریق اعداد پرداخته شده بود. به گفتهٔ آن‌ها، برخی اشتباهاتی را که دانش‌آموزان مرتکب می‌شوند، نتیجهٔ الگوهای پایداری می‌باشد که آن‌ها را به صورت ناقص یاد گرفته‌اند (شونفیلد، ۱۹۸۵). این قبیل خطاهای روشمند و پایدار را «خطاهای مخفی» نامیده است.

در مورد عبارت (۲)، الگویی که دانش‌آموز برای حل این نوع مسائل یاد گرفته بود که در این حالت‌ها، «دو عدد را از هم کم کرده و علامت عدد بزرگ‌تر را می‌گذرایم» برای وی الگویی آنقدر پایدار بوده که آن را به موارد دیگری مانند عبارت (۲) نیز تعمیم داده است. نقص یادگیری این دانش‌آموز از این الگو، کاملاً مشخص است.

پاسخ عبارت (۳): اشتباه مسئلهٔ (۳) هم، به نوعی یک خطای مخفی محسوب می‌شود. زیرا این دانش‌آموز با وجودی که می‌دانست ضرب دو عدد، مطلوب سؤال نیست؛ اما در مورد علامت آن‌ها، قوانین ضرب را به‌کار بسته بود و به نظر می‌رسد که چنین استدلال «سه و دو، می‌شود پنج. منفی در منفی هم مثبت می‌شود، پس جواب ۵ است.»

شاید بتوان گفت که اگر دانش‌آموز در ارایه پاسخ درست باز بماند، به این معناست که هنوز آن مفهوم را به درستی درک نکرده است. هم‌چنین لازم است که منبع خطای دانش‌آموز، به درستی تشخص داده شود تا قبل از این که روش‌های نادرست در ذهن وی به صورت «طرحواره‌هایی» صحیح ایجاد شوند، بتوان از آن جلوگیری نمود.

پی‌نوشت

1. John Seely Brown
2. Richard Burtons

منبع

A Shoenfeld, H. (1985), Mathematical problem solving. Acadamic Press INC.