چکیده‌ی رساله‌ی دکتری ریاضی

با گرایش آموزش ریاضی

ماهیت تفکر ترکیبیاتی

پژوهشگر: مانی رضائی

استاد راهنما: دکتر زهرا گویا (دانشگاه شهید بهشتی)

استاد مشاور: دکتر امیرحسین اصغری (دانشگاه شهید بهشتی)

داوران: دکتر سیدحسن علم‌الهدایی (دانشگاه فردوسی مشهد)
دکتر سید عباداله محمودیان (دانشگاه صنعتی شریف)
دکتر حسین حاجی‌ابوالحسن (دانشگاه شهید بهشتی)
دکتر سهرابعلی یوسفی (دانشگاه شهید بهشتی)

تاریخ دفاع: تیر ۱۳۹۰

دانشگاه شهید بهشتی

کلیدواژه‌ها: تفکر ریاضی، تفکر ترکیبیاتی، ترکیبیات، ریاضیات گسسته، حل مسئله

مقدمه

تفکر ترکیبیاتی، اصطلاحی آشنا در متون آموزشی است که پیاژه آن را به‌کار برد. وی از این واژه در بررسی فعالیت کودکان در جریان محاسبهٔ تعداد ترکیب‌ها، ترتیب‌ها و شمارش جایگشت‌ها استفاده کرد. پیاژه، تفکر دوره نوجوانی را نیز به‌صورت عمومی در چارچوب چند ویژگی کلی مورد مطالعه قرار داد: نخست، برای نوجوان (در مقابل کودک) محتمل بودن بر واقعیت اولویت دارد، یعنی، در رویارویی با یک مسئله علمی، نوجوان کار خود

تفکر ترکیبیاتی دانش‌آموزان/ دانشجویان به‌طور روشمند، نظام‌وار، فراگیر و گسترده‌ای متأثر از دانشگاه است، زیرا ورود ترکیبیات به برنامه درسی مدرسه‌ای نسبتاً جدید است و بیشتر کسانی که به‌عنوان معلم به کلاس درس مدرسه برمی‌گردند و تفکر ترکیبیاتی را از طریق برنامه درسی رسمی در دانش‌آموزان توسعه می‌دهند، اولین زمان آشنایی‌شان با ترکیبیات در دانشگاه بوده است

را با مشاهده نتایج تجربی شروع نمی‌کند، بلکه به امکانات ذاتی موقعیت می‌اندیشد. وی در نظر خویش مجسم می‌کند که خیلی چیزها ممکن است رخ دهد و تعبیرهای بسیاری از داده‌ها حاصل ممکن است به عمل آید و آن‌چه رخ داده، ممکن است یکی از چندین حالت متفاوتی باشد که در شرایط دیگر رخ می‌دهند. نوجوان به گزاره‌ها توجه دارد، نه اشیا. تنها پس از تجزیه و تحلیل فرضیه مورد نظر است که نوجوان در جهت تأیید یا رد فرضیه خود به کسب داده‌های تجربی می‌پردازد.

دومین ویژگی متمایز تفکر نوجوان، در دوره عملیات صوری، ترکیبی بودن آن است. در رویارویی با عامل‌های گوناگونی که ممکن است در نتیجه یک آزمایش مؤثر باشند، کودک معمولاً هر یک از عامل‌ها را تک‌تک می‌آزماید، اما از تأثیر احتمالی ترکیب عامل‌ها با یکدیگر غافل می‌ماند در مقابل در رویارویی با مسئله‌ای مانند کشف ترکیبی از پنج ماده شیمیایی بی‌رنگ که مایع زرد رنگی تولید کنند، نوجوان به‌طور جامع عمل می‌کند و یک ماده با دو ماده، یک ماده با سه ماده، و سپس یک ماده با چهار ماده، و... ترکیب می‌کند تا سرانجام به همهٔ ترکیب‌های ممکن دست یابد. اگر نوجوان هم‌چون کودک همهٔ حالت‌های ممکن را در نظر نمی‌گرفت، در این صورت عملیات وی به مجموعه‌ای از آزمایش‌های مجزا از یکدیگر محدود بود. در این دوره، تفکر نوجوان به یک وضعیت پیشرفته از تعادل رسیده است. پیاژه عقیده دارد در پایان نوجوانی، شیوه‌های تفکر یا ساختارهای شناختی، تقریباً به‌طور کامل شکل گرفته است.

بسط و تعمیم تعریفی که پیاژه برای تفکر ترکیبیاتی به کاربرد، به مباحث پیشرفتهٔ ریاضیات ترکیبیاتی، بخصوص «شمارش» به مفهوم عام آن، یکی از هدف‌های این رساله بود. رساله با هدف تبیین ماهیت تفکر ترکیبیاتی و بررسی چگونگی رویارویی افراد با مسئله‌های شمارشی، به انجام رسید و با شناخت ویژگی‌های تفکر ترکیبیاتی همراه شد.

روش پژوهش

در ابتدا، پژوهشگر با مشاهده، تنوع توانایی‌های محاسباتی و استدلالی یادگیرندگان، بر آن بود تا بررسی ماهیت این توانایی‌ها را در تمام مراحل تحصیلی در یک مطالعه طولی[1] از دبستان تا دانشگاه مورد توجه قرار دهد و هدف اولیه، «شناخت ماهیت تفکر ترکیبیاتی» در تمام مباحث ترکیبیاتی و برای تمام دوره‌های تحصیلی (سنی) بود. این در حالی بود که دریافت‌های تجربی پژوهشگر حاکی از آن بود که در این بررسی عوامل گوناگونی تأثیرگذارند. از جمله مهم‌ترین عوامل «میزان آشنایی یادگیرنده با مباحث متنوع ترکیبیاتی»؛ «تجربه حل انواع مسئله‌های نمونه»؛ «یافتن ارتباط‌های مفهومی بین مباحث مختلف ترکیبیاتی»؛ و مانند آن است، که بر چگونگی درگیر شدن یادگیرنده با مسئله‌های ترکیبیاتی، نقش بسزایی دارند و وجود آن‌ها غیرقابل انکار است. ولی انجام چنین پژوهشی، نیازمند «شرایط عادی» بود که از نظر زمانی، چنین پژوهشی بسیار زمان‌بر بود و با محدودیت‌های زمانی و امکانی انجام یک رساله دکتری، سازگار نبود. بنابراین، پژوهشگر با جرح و تعدیل پژوهش، بر آن شد تا موضوع پژوهش را به «شمارش» محدود کند که یکی از مباحث ترکیبیاتی مهم و قابل مطالعه است.

از سوی دیگر، تجزیه و تحلیل تجربه‌های تدریسی، مطالعات

مجموعهٔ ویژگی‌هایی از قبیل درک مفاهیم مجرد ریاضی، تشخیص و رده‌بندی، کار با نمادها، دقت، تمرکز، توانایی‌های محاسبه‌ای، توانایی‌های استدلالی، استفاده از رهیافت‌ها در حل مسئله، رویکردهای حل مسئله‌ای، و مانند آن؛ تفکر ریاضی را شکل می‌دهند

نظری و تجارب یادگیری پژوهشگر، وی را به این جمع‌بندی رساند که راهبردهای دانشجویان برای حل مسئله‌های ترکیبیاتی، شباهت قابل توجهی به راهبردهای دانش‌آموزان دارد. تفکر ترکیبیاتی دانش‌آموزان/ دانشجویان به‌طور روشمند، نظام‌وار، فراگیر و گسترده‌ای متأثر از دانشگاه است، زیرا ورود ترکیبیات به برنامه درسی مدرسه‌ای نسبتاً جدید است و بیشتر کسانی که به‌عنوان معلم به کلاس درس مدرسه برمی‌گردند و تفکر ترکیبیاتی را از طریق برنامه درسی رسمی در دانش‌آموزان توسعه می‌دهند، اولین زمان آشنایی‌شان با ترکیبیات در دانشگاه بوده است و بر خلاف درس‌هایی مانند هندسه، راهبردهای آنان شکل ساده‌شدهٔ راهبردهای دانشگاهی است. به همین دلیل شرکت‌کنندگان در این پژوهش به دانشجویان دانشگاه محدود شد و با این در محدودیت («مسئله‌های شمارشی» و «دانشجویان») برنامه‌ریزان برای اجرای این پژوهش انجام شد و از آن‌جا که این پژوهش نظریه‌مدار[۲] نبود، بلکه نظریه‌ساز[۳] بود، روش تحقیق کیفی برای آن انتخاب شد.

یافته‌های پژوهش

به دلیل نقش مهم شمارش در مباحث ترکیبیاتی، موضوع شمارش محور این پژوهش قرار گرفت و با این انتخاب، پرسش اصلی زیر مطرح شد:

یادگیری برای حل مسئله‌های شمارشی با چه چالش‌هایی روبه‌روست؟

یافته‌های پژوهش در پاسخ به این پرسش به اختصار چنین است:

۱. درک مسئله و یافتن برخی از حالت‌های مطلوب مسئله؛

۲. تشخیص حالت‌های نامطلوب و رده‌بندی حالت‌های مطلوب؛

۳. پیدا کردن «تمام» حالت‌های ممکن برای شمارش؛

۴. به‌دست آوردن روشی که تمام حالت‌های ممکن را تولید کند؛

۵. استفاده از راهبردهای متنوع برای شمارش حالت‌ها؛

۶. ایجاد ارتباط بین مسئله پیش‌رو با مسئله‌های ترکیبیاتی دیگر؛

۷. استفاده از استدلال‌های ترکیبیاتی به ویژه برای شمارش حالت‌ها.

هر یک از موارد بالا، به‌عنوان چالش‌های پیش روی یادگیرندگان که در جریان حل مسئله‌های شمارشی با آن‌ها روبه‌رو می‌شوند، شناسایی و رده‌بندی شد و با استفاده از این رده‌بندی، پنج سطح زیر به‌عنوان سطح‌های شناختی تفکر ترکیبیاتی شناسایی شدند:

سطح ۱. پیدا کردن و بررسی حالت‌های ممکن؛

سطح ۲. اطمینان از این‌که «تمام حالت‌ها» به‌دست آمده است؛

سطح ۳. پیدا کردن روشی برای تولید تمام حالت‌ها؛

سطح ۴. تبدیل مسئله به مسئله‌های دیگر ترکیبیاتی؛

سطح ۵. درک استدلال‌های ترکیبیاتی.

پرسش‌های دیگری که در جریان این پژوهش مطرح شدند و پاسخ هر یک از آن‌ها چنین است:

تفاوت بین مسئله حل کن تازه کار و خبره در رابطه با مسئله‌های شمارشی چیست؟

وجوه تمایز و تشابه تفکر ترکیبیاتی و انواع شناخته شده تفکر ریاضی چیست؟

پرسش نخست، در مباحث دیگر ریاضی نیز بارها مطرح شده است و پاسخ به این پرسش را می‌توان زیرمجموعه‌ای از عوامل متعددی دانست که در پاسخ به این پرسش، و در حالت کلی‌تر، بیان شده است. در جریان این پژوهش، دو تفاوت عمده در این دو گروه مشاهده شد: نخست، درک مسئله و بررسی‌های مقدماتی برای شناخت حالت‌های مختلف راهبرد «مناسب» و

پژوهشگر بر این باور بود (وهست) که با شناخت «ماهیت تفکر ترکیبیاتی» معلمان می‌توانند به شناخت واقع‌بینانه‌تر و عمیق‌تری از فرایند یاددهی ـ یادگیری دست یابند و در نهایت، به ارتقای کیفیت تدریس آنان در ترکیبیات بیانجامند

سپس اجرای آن بود. در بیشتر موارد، انتخاب راهبرد متناسب با مسئلهٔ پیش رو، با توجه به تجربهٔ رویارویی با مسئله‌های مشابه انجام شد. هر دو گروه (مسئله حل کن‌های تازه کار و خبره)، سطح‌های تفکر ترکیبیاتی را طی می‌کنند، اما سرعت عبور از هر یک از این سطح‌ها متفاوت است. در برخی موارد، طی شدن سه سطح نخست به گونه‌ای بود که به نظر می‌رسید ترکیبی از این سطح‌ها طی شده است. به همین دلیل، این سه سطح متمایز، مرتبط به هم هستند. حتی در مواردی ترتیب این سطح‌ها (مانند سطح‌های ۲ و۳) عوض شد، بنابراین نتیجه‌گیری شد که سطح‌های تفکر ترکیبیاتی، سلسله مراتبی نیستند.

در پاسخ به دومین پرسش و بررسی وجوه تمایز و تشابه تفکر ترکیبیاتی با انواع شناخته شدهٔ تفکر ریاضی، مطالعهٔ عمیق‌تر تفکر ریاضی، تفکر هندسی، و تفکر جبری انجام شد و در جست‌وجوی ویژگی‌های انواع تفکر، این نکته مورد توجه قرار گرفت که استقلال برخی مباحث مقدماتی ترکیبیات از موضوعات دیگر ریاضیات باعث شده تا امکان ورود این مباحث به پایه‌های تحصیلی پایین‌تر فراهم شود و برخلاف مباحث دیگر ریاضی که پیشنیازهای متعددی دارند، در مباحث ترکیبیات (مقدماتی)، حتی کودکان بدون نیاز به توانایی درک مفاهیم مجرد، می‌توانند درگیر مسئله‌های آن شوند. همین موضوع باعث شده که در برنامهٔ درسی ترکیبیات و روش های تدریس آن، تنوع بیشتری مشاهده شود و یک روند سلسله مراتبی «سنتی» برای ارایه مباحث ترکیبیاتی وجود ندارد. بدین ترتیب، «شروع‌های متنوعی» برای این مباحث وجود دارد و در عمل، سطح‌های شناختی تفکر ترکیبیاتی می‌تواند مستقل از هم شکل بگیرند.

از سوی دیگر، شباهت‌هایی بین تفکر ترکیبیاتی با تفکر جبری مشاهده می‌شود که عمدتاً در انتخاب نمادها و نمادسازی، درک ساختارهای مشابه، و مانند آن است. هم‌چنین، تفکر ترکیبیاتی و تفکر هندسی نیز شباهت‌هایی از جمله «توانایی تشخیص دیداری و کشف روابط بین آن‌ها» که در سطح ۲ تفکر هندسی فن‌هیلی ـ فن‌هیلی مطرح شده است، یا در «ارایه استنتاج غیررسمی با استفاده از استدلال استقرایی» (سطح ۳ تفکر هندسی) وجود دارد. هم‌چنین با توجه به مفاهیم ترکیبیاتی، می‌توان «دقت» (سطح ۵ تفکر هندسی) را نیز به تفکر ترکیبیاتی تعمیم داد.

بازتابی بر پژوهش انجام شده

بحث درمورد تفکر ریاضی، ممکن است با این پرسش همراه باشد که آیا تفکیک «تفکر ریاضی» به انواع تفکر مناسب است؟ مجموعهٔ ویژگی‌هایی از قبیل درک مفاهیم مجرد ریاضی، تشخیص و رده‌بندی، کار با نمادها، دقت، تمرکز، توانایی‌های محاسبه‌ای، توانایی‌های استدلالی، استفاده از رهیافت‌ها در حل مسئله، رویکردهای حل مسئله‌ای، و مانند آن؛ تفکر ریاضی را شکل می‌دهند، و انواع «تفکر ریاضی» مانند تفکر هندسی، تفکر جبری، یا تفکر ترکیبیاتی به کمک این ویژگی‌ها شناخته می‌شوند که ممکن است در حالی که آن‌ها در یکی یا چند ویژگی با هم اشتراک دارند. در همان حال، ویژگی اختصاصی خود را داشته باشند. برای مثال، توانایی رده‌بندی حالت‌ها (در شمارش) را می‌توان از جمله ویژگی‌های «تفکر ترکیبیاتی» به حساب آورد.

با توجه به ورود مباحث ترکیبیاتی به آموزش عمومی، پژوهش‌های آموزشی پیرامون تدریس ترکیبیات اهمیت بیشتری به دست آورد، اما چگونگی تدریس این مباحث، موضوع این رساله قرار نگرفت، زیرا پژوهشگر بر این باور بود (وهست) که با شناخت «ماهیت تفکر ترکیبیاتی» معلمان می‌توانند به شناخت واقع‌بینانه‌تر و عمیق‌تری از فرایند یاددهی ـ یادگیری دست یابند و در نهایت، به ارتقای کیفیت تدریس آنان در ترکیبیات بیانجامند.

پی‌نوشت

1.Longitudenal
2.Theory - driven
3. Theory - generating