نرم‌افزارهای ریاضی تا چه اندازه قابل اعتمادند؟

بهروز خاوری
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه ایرانشهر
khavari@hamoon.usb.ac.ir

چکیده

وسعت علم و سرعت خارق‌العاده نرم‌افزارهای ریاضی در ترسیم انواع نمودارها و انجام محاسبات پیچیده، استفاده از آن را در امر آموزش ریاضی، اجتناب‌ناپذیر ساخته است. اما به مانند هر ابزار علمی دیگری، برای استفاده صحیح از این ابزار، شناخت نقاط قوت و ضعف آن ضروری است. در این مقاله تلاش کرده‌ایم تا با ذکر مثال‌هایی، خوانندگان عزیز را با برخی از این موارد آشنا کنیم.

کلیدواژه‌ها: نرم‌افزار ریاضی، خطای نرم‌افزارها، مقایسه نرم‌افزارها

مقدمه

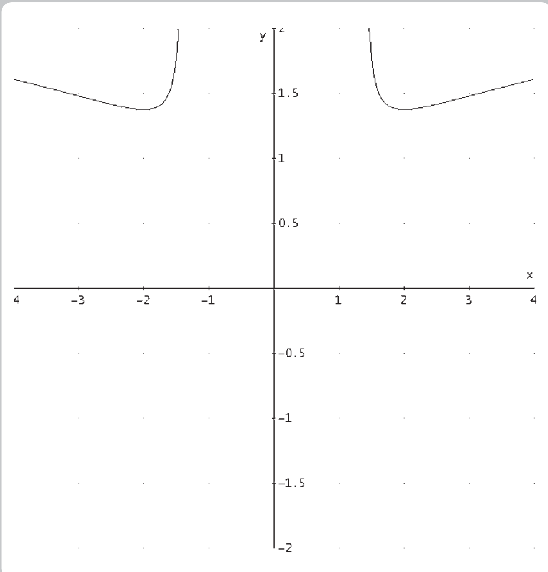
پیشرفت روزافزون و گستردگی کاربرد ریاضیات در سایر علوم، ما را متقاعد می‌سازد تا بکوشیم از هر ابزار مناسبی برای آموزش صحیح آن، به بهترین شکل ممکن استفاده کنیم. تجربه و تحقیقات نشان داده که در کنار کتاب‌های مناسب آموزشی، به‌کارگیری صحیح ابزار کمک آموزشی سبب می‌شود دانش‌آموزان و دانشجویان، سریع‌تر و عمیق‌تر با مفاهیم ریاضی آشنا شده و دید وسیع‌تری نسبت به ریاضیات و کاربردهایش پیدا کنند و در هر دوره و رشته‌ای که هستند، ارتباطی آسان‌تر و منطقی‌تر با آن برقرار نموده، در نهایت یادگیری ریاضیات برایشان شیرین‌تر و جذاب‌تر شود. نرم‌افزارهای ریاضی یکی از مفیدترین ابزارهای آموزشی در عصر حاضر به شمار می‌آیند.

و می‌توانند ما را در رسیدن به این هدف، به‌خوبی یاری کنند، ابزاری که وجه تمایز اصلی آن از سایر ابزارهای کمک آموزشی، دقت، سرعت و وسعت عمل آن است. این ویژگی‌ها، استفاده از آنها را در عصر حاضر اجتناب‌ناپذیر کرده است. هم‌اکنون سال‌هاست که در کشورهای پیشرفته، نرم‌افزارهای مناسبی جهت آموزش ریاضیات در دوره پیش‌دانشگاهی طراحی و مورد استفاده قرار می‌گیرد و خوشبختانه در سال‌های اخیر در کشور ما نیز، توجه به اهمیت به‌کارگیری این قبیل نرم‌افزارها رو به رشد بوده است. لیکن باید توجه داشت که تجربه نشان می‌دهد استفاده عجولانه و شتاب‌زده از تکنولوژی، همواره مشکل‌ساز بوده و نرم‌افزارهای ریاضی نیز از این قاعده مستثنی نیستند. بنابراین، دبیران دبیرستان‌ها و مدرسان دانشگاه‌ها باید آگاهانه وارد این عرصه شوند. در ادامه با ارائه چند مثال، نشان می‌دهیم که چگونه ممکن است عدم آگاهی، ما را دچار خطا و سردرگمی نماید. بنابراین، دبیران و استادان محترم باید هم خود به این نکات توجه کنند و هم دانش‌آموزان و دانشجویان را در به‌کارگیری نرم‌افزارها به شکلی صحیح هدایت کنند. ضمناً از آنجایی که خطاهای نرم‌افزاری در حوزه ترسیمات رایانه‌های به لحاظ کمی بیشتر و به لحاظ کیفی مشهودتر است، مثال‌های خود را به این حوزه اختصاص داده‌ایم.

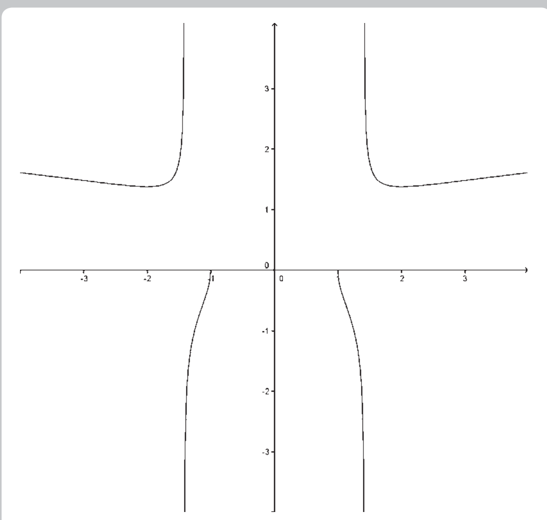
نمونه‌هایی از اشتباهات نرم‌افزاری[۱]

مثال ۱: می‌خواهیم نمودار تابع نه چندان پیچیده $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$ را به کمک یک نرم‌افزار ریاضی رسم کنیم. برای این منظور، از نرم‌افزار درایو[۲] کمک می‌گیریم. پس از انجام مراحل لازم، نتیجه به صورت شکل ۱ است.

در نگاه اول، مشکل خاصی وجود ندارد. یک تابع داریم و یک نرم‌افزار که در نوع خود جزو نرم‌افزارهای مطرح است و به کمک آن، نمودار تابع مورد نظرمان را رسم کرده‌ایم. اما آیا این نمودار، حقیقتاً نمودار تابع مورد بحث است؟ پاسخ منفی است! با انجام چند محاسبه ساده در می‌یابیم که دامنه تابع عبارت است از:



شکل ۱: نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$ رسم شده توسط نرم‌افزار درایو



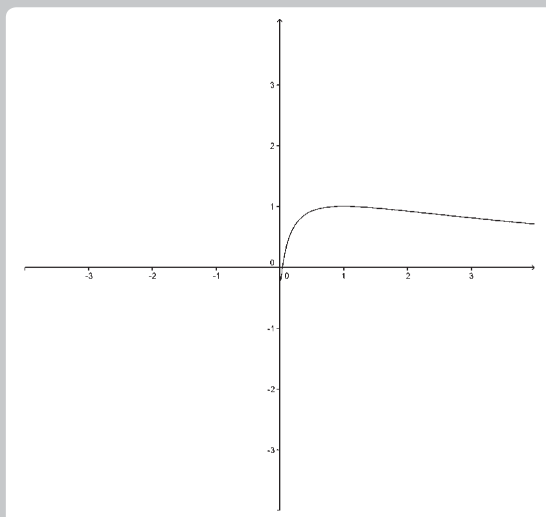
شکل ۲: نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$ رسم شده توسط نرم‌افزار جئوجبرا.

$$D_f = (-\infty - \sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

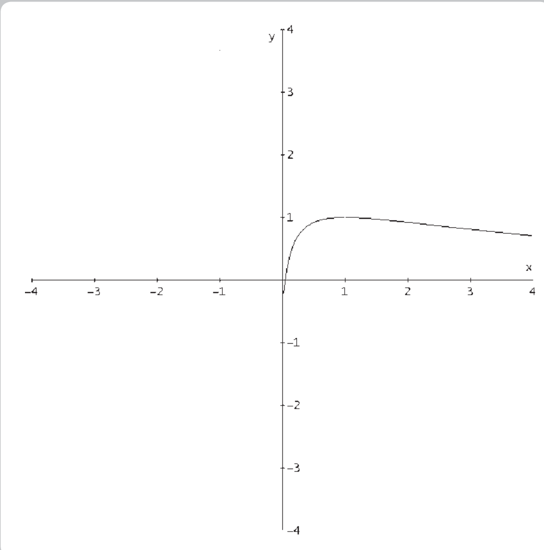
اما دامنه نمودار رسم شده فقط شامل بازه‌های $(-\infty, -\sqrt{2})$ و $(\sqrt{2}, +\infty)$ است. بنابراین، درایو نمودار را کامل رسم نکرده است. شاید دلسرد کننده به‌نظر برسد، اما به هر حال واقعیت این است که اگر از ابتدا هیچ ذهنیتی از رفتار تابع یا دست‌کم دامنه آن برای خود ایجاد نکرده باشیم، به راحتی دچار اشتباه می‌شویم.

این بار، نمودار همین تابع را به کمک نرم‌افزار جئوجبرا[۳] رسم می‌کنیم. نتیجه در شکل ۲ نمایش داده شده است. با محاسبه مشتق تابع f و انجام بررسی‌های لازم درمی‌یابیم که نمودار اخیر، دقیقاً نمودار تابع مورد بحث است.

مثال۲: این بار می‌خواهیم نمودار تابع $h(x) = \dfrac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}$ را رسم کنیم. اما پیش از آن با کمی دقت مشخص می‌شود که دست‌کم عدد ۱ جزو دامنه این تابع نیست. اگر این بار نیز از نرم‌افزارهای جئوجبرا و درایو کمک بگیریم، نتیجه در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل۳: ب) نتیجه ترسیم نمودار $h(x)$ توسط جئوجبرا



شکل۳: الف) نتیجه ترسیم نمودار $h(x)$ توسط درایو

نمودار رسم شده توسط جئوجبرا کاملاً پیوسته است در حالی که با کمی دقت در نمودار رسم شده توسط درایو، متوجه گسستگی در نقطه $x = 1$ خواهیم شد. بنابراین این بار، اگر از ابتدا به دامنه تابع توجه نمی‌کردیم، نرم‌افزار جئوجبرا ما را دچار خطا می‌کرد!

البته اگر در مورد این مثال، از نرم‌افزارهای قدرتمندتری نظیر میپل[۴] و متمتیکا[۵] استفاده کنیم، خواهیم دید که این دو نیز نمودار را پیوسته رسم می‌کنند!

تا اینجا مشاهده کردیم که پاسخِ یک نرم‌افزار به تقاضای ترسیم نموداری که از آن می‌خواهیم، ممکن است ما را گمراه کند. اما شاید بهتر باشد در اینجا یک مثال امیدوارکننده هم بزنیم. زیرا گاهی هم، پاسخ غیرمنتظره ما را وادار می‌کند برای کشف حقیقت، حوزه مطالعات خود را گسترش دهیم.

برای مثال، مجدداً تابع $h(x)$ را در نظر بگیرید. تصور کنید که از ابتدا می‌خواستیم بدون آگاهی از نمودار تابع $h(x)$، دامنه آن را یافته و سپس جهت اطمینان از صحت پاسخ، نمودار $h(x)$ را با استفاده از یک نرم‌افزار، رسم کنیم. اگر شما یک دبیر ریاضی

دبیرستان باشید، احتمالاً روشتان برای یافتن دامنه h(x) چیزی شبیه این خواهد بود:

با فرض $g(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ و $f(x)=\ln(x)$ داریم $h(x)=g(f(x))$. پس با استفاده از تعریف دامنه ترکیب دو تابع داریم:

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_g\right\}=\left\{x>۰ \,\middle|\, \ln(x)\neq ۰\right\}=R^{+}-\{۱\}$$

در نگاه اول، این پاسخ با آنچه درایو رسم کرده مطابقت می‌کند. اما شاید به طور تصادفی، متوجه نقطه‌ای به مختصات تقریبی (۶و۳و۱−) بر صفحه نمایش کامپیوتر شوید (عرض نقطه، تقریبی بیان شده است). این نقطه خارج از دامنه تعریف تابع است. آیا این نقطه لکه‌ای بر صفحه نمایش کامپیوتر است؟ یا یکی از پیکسل‌های صفحه (LCD) سوخته است؟ با یک بررسی دقیق‌تر در خواهیم یافت که هیچ یک از این دو مورد نیست، بلکه درایو این نقطه را نیز جزو نمودار تابع f رسم کرده است! یعنی به راستی نقطه x=-۱ نیز متعلق به دامنه تابع است؟!

بله! پاسخ مثبت است. در حقیقت با توسعه بحث به آنالیز مختلط و مراجعه به کتاب‌های مربوط در می‌یابیم که تابع h(x) به ازای x>۰ حقیقی مقدار و به ازای x<۰ مختلط مقدار است مگر در نقطه x=-۱ که داریم:

$$h(-۱)=\frac{\sin(\ln(-۱))}{\ln(-۱)}=\frac{\sin(i.\pi)}{i.\pi}=\frac{i.\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{۲}}{i.\pi}$$

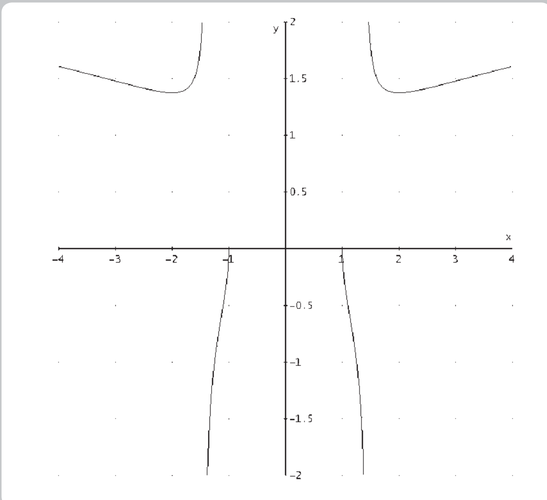
$$=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{۲\pi}\approx ۳/۶۷۶۰۷۷۹۱۰$$

(i یکه موهومی و e عدد نپر است.)

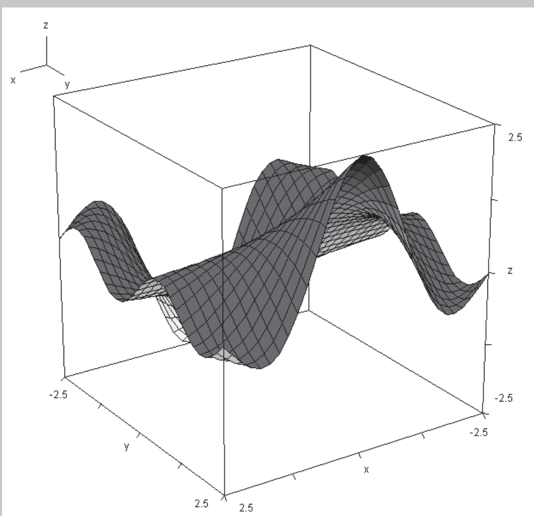
یعنی نتیجه یک عدد حقیقی است و بنابراین تعلق نقطه x=-۱ به دامنه تابع قابل توجیه است.

در مورد این قسمت از بحث نیز نرم‌افزار میپل و متمتیکا نقطه (۱٫۳/۶۷۶۰۷۷۹۱۰−) را به نمایش در نمی‌آورد (شکل ۴ را ببینید).

مثال۳: می‌خواهیم نمودار تابع $f(x,y)=\dfrac{\sin(x.y)}{x}$ را رسم کنیم. اگر نمودار این تابع را به کمک درایو در مختصات دکارتی و با تنظیم (۳۰ و ۳۰): Number of panels و بدون تغییر در سایر تنظیمات رسم کنیم، نتیجه را در شکل ۵ مشاهده کنید.

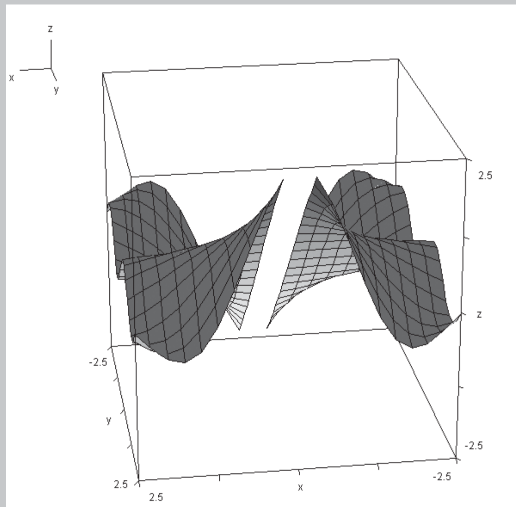


شکل ۴: نمودار تابع $h(x)=\dfrac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}$ حاصل به‌کارگیری نرم‌افزار متمتیکا



شکل ۵: نمودار تابع $f(x,y)=\dfrac{\sin(x.y)}{x}$ رسم شده توسط نرم‌افزار درایو

ظاهراً تابع مورد بحث در محدوده ترسیم، یک تابع پیوسته است. اما ضابطه تابع به خوبی بیانگر ناپیوسته بودن آن در



شکل ۶: نمودار تابع $f(x,y)=\dfrac{\sin(x.y)}{x}$ رسم شده توسط نرم‌افزار درایو پس از اعمال اندکی تغییر در تنظیمات.

سراسر محور yهاست. اکنون اگر تنظیم Number of panels را به (۲۰ و ۲۰) تغییر داده، مجدداً نمودار را رسم کنیم و سپس آن را اندکی به چپ بچرخانیم، ناپیوستگی تابع در سراسر محور yها آشکار خواهد شد.

چند توصیه آموزشی و نتیجه‌گیری

همه ما آنقدر از توانایی نرم‌افزارها سخن شنیده‌ایم که با چند مثال نقض، از به‌کارگیری آن دلسرد نمی‌شویم. اما خوب است به این موضوع فکر کنیم که چه باید بکنیم تا کمتر دچار این گونه خطاها شویم. برای این منظور، بهتر است موارد زیر را در نظر داشته باشیم:

۱) اساساً به سراغ کامپیوتر نرویم! ... تعجب نکنید. برخی اوقات استفاده از کامپیوتر توجیهی ندارد. مثلاً وقتی از خود می‌پرسیم، آیا تابع $h(x)=\dfrac{\sin(\ln x)}{\ln x}$ در x=۱ پیوسته است یا خیر، لزومی ندارد از کامپیوتر کمک بگیریم. زیرا قاعدتاً وقتی آشنایی ما با توابع در حد آشنایی با توابع نظیر sin و ln است، باید بدانیم که ln(۱)=۰، پس تابع h(x) در آن نقطه ناپیوسته است و لزومی ندارد که برای مواردی از این دست، بلافاصله دست به دامان نرم‌افزارها شویم.

۲) در مورد سؤالات اندکی پیچیده‌تر، سعی کنیم قبل از به‌کارگیری نرم‌افزار، کلیاتی از راه حل و احتمالاً جواب آن را در ذهن بپرورانیم. به عبارت دیگر، نگذاریم در تمام مراحل، کامپیوتر به جای ما بیاندیشد، بلکه در حد امکان به گونه‌ای عمل کنیم که پاسخ کامپیوتر تأییدی بر صحت افکار ما باشد یا دست کم ما را به سمت پاسخ صحیح هدایت کند.

۳) بهتر است حداقل با دو نرم‌افزار در حد متوسط آشنایی داشته باشیم تا در صورت لزوم، توسط هر دو نرم‌افزار به بررسی مسئله مورد نظر خود بپردازیم.

۴) گاهی اوقات تغییر در بزرگنمایی یا تغییر در ظرافت ترسیم می‌تواند راهگشا باشد (نظیر آنچه در مثال ۳ دیدیم).

و نتیجه نهایی این‌که؛

نرم‌افزارها، مشاوران خوبی هستند که گاهی اشتباه می‌کنند. از آن‌ها کمک بگیریم ولی به آن‌ها تکیه نکنیم.

پی‌نوشت

۱. البته طراحان نرم‌افزارها برخی از این موارد را اشتباه نمی‌نامند، بلکه آن را تنها سوء تفاهم می‌دانند که ناشی از عدم آگاهی کاربر از عملکرد نرم‌افزار در آن مورد خاص است!

2 .Drive
3 .Geogebra
4 .Maple
5 .Mathematica

منابع

۱. خاوری، بهروز و جهانتیغ، سمیه (۱۳۸۸). خودآموز نرم‌افزار Derive. انتشارات دیباگران، تهران.

۲. نرم‌افزارهای جئوجبرا (Geogebra) نسخه ۳،۲، درایو (Derive) نسخه ۶،۱، متمتیکا (Mathematica) نسخه ۷ و میپل (Maple) نسخه ۱۳.