

احمد سعیدی
عضو هیئت علمی دانشگاه مفید
asaaeedi@yahoo.com

صفر برای موجودی

از دنیای باستان تا امروز

اعداد است. به این دلیل ۰ در یک عدد مانند ۳۵۰۷ به کار برده شده است تا موقعیت ۳ و ۵ درست باشد. در واقع، در این عدد ۷ تا یکی و ۵ تا صدتایی و ۳ تا هزارتایی داریم. تفاوت این عدد با ۳۵۷ چه خواهد بود؟ ۳۵۷ یعنی ۷ تا یکی و ۵ تا ده‌تایی و ۳ تا صدتایی.

امروزه نیز از قراین برای تفسیر معنای برخی اعداد استفاده می‌کنیم اگر سوار یک اتوبوس بین‌شهری شوید و مبلغ کرایه را شش و پانصد بگویند، شما آن‌را به معنای ۶/۵۰۰ تومان تفسیر می‌کنید و اگر بخواهید یک اتومبیل بخرید و قیمت آن‌را شش و پانصد بگویند شما آن‌را ۶/۵۰۰/۰۰۰ تومان تفسیر خواهید کرد. از بحث اخیر می‌توانیم دریابیم که کاربرد اولیه صفر برای مشخص کردن مکان خالی، هرگز به معنی استفاده از آن به عنوان یک عدد نبوده است. صرفاً به عنوان نوعی از علامت‌گذاری بوده است به این منظور که تفسیر درستی از اعداد ارائه شود.

دومین کاربرد صفر این است که خودش به عنوان یک عدد

مقدمه

یکی از سؤالاتی که مطرح می‌شود این است که صفر به چه معنی است؟ چه کسی یا چه کسانی صفر را کشف کرده‌اند؟ صفر چه خواصی دارد؟ صفر علامت‌دار چیست؟ در این مقاله به این سؤالات خواهیم پرداخت.

کلیدواژه‌ها: تاریخچه صفر، معنای صفر، علامت صفر، صفر در ریاضیات

کاربردهای صفر

اولین چیزی که در مورد صفر گفته می‌شود این است که دو کاربرد بسیار مهم اما تا حدی متفاوت دارد: کاربرد اول به عنوان نماینده جای خالی در نظام ارزش مکانی



اولین چیزی که در مورد صفر گفته می‌شود این است که دو کاربرد بسیار مهم اما تا حدی متفاوت دارد:
 کاربرد اول به عنوان نماینده جای خالی در نظام ارزش مکانی اعداد است
 دومین کاربرد صفر این است که خودش به عنوان یک عدد به کار می‌رود که ما به شکل صفر از آن استفاده می‌کنیم

از صفر کنیم کنیم یک عدد مثبت به دست می‌آوریم. اگر یک عدد مثبت را از صفر کم کنیم، حاصل یک عدد منفی است. اگر صفر را از یک عدد منفی کم کنیم حاصل عددی منفی است و اگر صفر را از یک عدد مثبت کم کنیم جواب عدد مثبت است. اگر صفر را از صفر کم کنیم حاصل صفر است.»
 براهماگوپتا سپس بیان می‌کند که حاصل ضرب هر عدد در صفر، صفر می‌شود اما هنگامی که به تقسیم می‌رسد، به مشکل برمی‌خورد: «یک عدد مثبت یا منفی هنگامی که بر صفر تقسیم می‌شود کسری با مخرج صفر است. صفر تقسیم بر یک عدد مثبت یا منفی همان صفر است یا به طور خاص، یک کسر است با صورت صفر و مقدار متناهی در مخرج. صفر تقسیم بر صفر، صفر می‌شود.»

در حقیقت، براهماگوپتا وقتی پیشنهاد می‌دهد n تقسیم بر صفر برابر $\frac{n}{0}$ است، توجیه چندانی نمی‌آورد. زمانی که می‌گویید صفر تقسیم بر صفر برابر صفر است قطعاً اشتباه می‌کند. به هر حال او به عنوان اولین فردی که تلاش کرد قوانین حساب را به اعداد صفر و منفی تعمیم دهد قابل تقدیر است.
 باسکارا کتاب خود را ۵۰۰ سال بعد از براهماگوپتا نوشت. با وجود گذر زمان، او هنوز برای توضیح تقسیم بر صفر مشکلات زیادی داشت.

بنابراین، باسکارا سعی کرد مسئله را به وسیله نوشتن $\frac{n}{0} = \infty$ حل کند. در نگاه اول، ممکن است وسوسه شویم که گفته باسکارا را درست بیانگریم. (البته امروزه هم برخی دانشجویان و دانش‌آموزان این تصور غلط را دارند) در این صورت $\dots = 2 = 1 = n = \infty \times 0 = \dots$ یعنی $0 \times \infty$ برابر با هر عددی است، پس همه اعداد با هم مساوی خواهند بود!! باسکارا و سایر ریاضی‌دانان هندی نتوانستند بپذیرند یک بر صفر تقسیم‌پذیر نیست اما باسکارا سایر ویژگی‌های صفر را از جمله $0^2 = 0$ و

به کار می‌رود که ما به شکل صفر از آن استفاده می‌کنیم. در گذشته مسئله‌های ریاضی بیشتر به عنوان مسئله‌های واقعی و کاربردی مطرح بوده‌اند تا مسئله‌های مجرد و انتزاعی. اعداد در زمان‌های تاریخی دور (برعکس امروز) بیشتر اشیای واقعی پنداشته می‌شدند تا مفاهیمی مجرد. تفاوت معنایی عظیمی بین ۵ اسب و ۵ «چیز» و مفهوم مجرد ۵ وجود دارد که امروزه از آن به عنوان عدد اصلی یاد می‌شود. اگر مردم در گذشته، مسئله‌هایی را در مورد این که یک کشاورز به چند اسب نیاز دارد حل می‌کردند، به هیچ عنوان مسئله به داشتن ۰ یا ۱۳- اسب ختم نمی‌شد.

تلاش برای گسترش قوانین عدد صفر

ایده اعداد به مرور مجردتر شده سپس این تجرد، توجه به صفر و اعداد منفی را - که به عنوان ویژگی گردایه‌ای از اشیای مطرح نیست - ممکن ساخت. البته مشکل هنگامی بروز می‌کند که سعی شود صفر و منفی به عنوان عدد مطرح شوند و تلاش شود توضیح داده شود که آن‌ها نسبت به اعداد حسابی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چگونه عمل می‌کنند. ریاضی‌دانان هندی براهماگوپتا، ماهاویرا و باسکارا در سه کتاب مهم خود تلاش کردند به این سؤالات پاسخ دهند.

براهماگوپتا در قرن هفتم سعی می‌کند قوانینی برای حساب ارایه دهد که صفر و اعداد منفی را نیز دربرگیرند. او توضیح داد که اگر یک عدد را از خودش کم کنید صفر به دست می‌آید. وی قانون زیر را برای جمع ارایه کرد که شامل صفر هم می‌شود: «حاصل جمع صفر و یک عدد منفی، عدد منفی است، حاصل جمع یک عدد مثبت و صفر عددی مثبت است، صفر به علاوه صفر، صفر می‌شود.»

در مورد تفریق کمی سخت‌تر است: «اگر یک عدد منفی را

$$\sqrt{0} = 0 \text{ درست بیان کرد.}$$

قوانین صفر در جبر امروز

(۱) صفر کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی است. عدد طبیعی تالی صفر عدد ۱ است و عدد طبیعی قبل از صفر وجود ندارد. صفر هم عددی گویا و هم حقیقی و همین‌طور عددی جبری است. صفر نه مثبت است نه منفی. نه اول است نه مرکب. فرد نیست ولی زوج است.^۲

(۲) جمع $x + 0 = 0 + x = x$ صفر نسبت به جمع خنثی است.

$$(۳) \text{ تفریق } x - 0 = x \text{ و } 0 - x = -x$$

$$(۴) \text{ ضرب } x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

(۵) تقسیم $\frac{x}{x} = 1$ ناصفر. برای $\frac{x}{0}$ و $\frac{0}{x}$ تعریف نشده است.

برهان: عبارت $\frac{x}{x}$ تعریف نشده است زیرا وارون ضربی^۳ ندارد.

از آنجا که طبق قانون ضرب $x \cdot 0 = 0$ ، بنابراین هیچ عنصری نیست که حاصل ضرب آن در ۰ برابر ۱ شود در واقع $\frac{x}{0}$ هیچ عنصری نیست و تعریف نشده است. اما اگر در مخرج کسری عبارتی به صفر همگرا شود داریم:

$$x > 0: \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{x}{y} = +\infty \quad \& \quad x < 0: \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{x}{y} = -\infty$$

(۶) توان $x^1 = \frac{x}{x} = 1$ به استثنای حالتی که $x = 0$ باشد.

- $0^x = 0$ برای هر x (طبق قانون ضرب عدد ۰ هر چند بار

در خودش ضرب شود برابر صفر می‌شود)

- 0^0 تعریف نشده است. اما اگر به صورت حدی باشد جزو

حالات مبهم است و باید رفع ابهام شود.

(۷) مجموع ۰ عدد برابر صفر است.

(۸) حاصل ضرب ۰ عدد برابر ۰ است. به عبارت دیگر اگر x

عدد حقیقی باشد $0 \cdot x = 0$.

اثبات: $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x = 0 \cdot x$ پس طبق قانون حذف

می‌توان نوشت $0 \cdot x = 0$.

(۹) هرگاه $x \neq 0$ و $y \neq 0$ آنگاه $xy \neq 0$.

اثبات: فرض کنیم $x \neq 0$ و $y \neq 0$ ولی $xy = 0$ در این

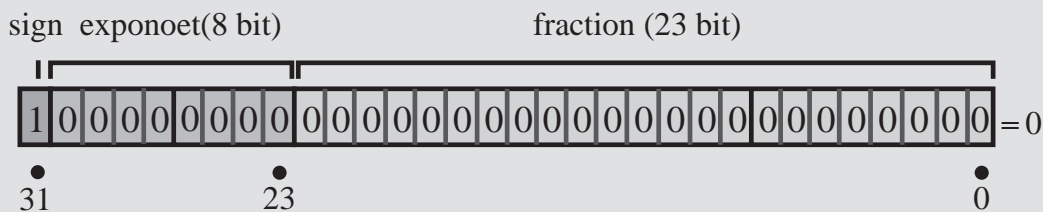
صورت (۸) نتیجه می‌دهد $0 = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0 = 1$ که

این مرحله‌ای برای خوارزمی بود که کتاب «خوارزمی در هنر محاسبه هندوها» را بنویسد و نظام ارزش مکانی هندیان را که بر مبنای اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۰ بود، توضیح دهد. این اولین کار در ایران برای استفاده صفر به عنوان جانگهدار در نمادگذاری مکانی بود. ابن‌ازرا در قرن ۱۲ میلادی سه مقاله برای اعداد نوشت که در توجه اروپاییان به نمادهای هندی و ایده‌های کسر اعشاری (دهگانی) مؤثر بود. «کتاب اعداد» دستگاه اعشاری را برای اعداد صحیح با ارزش مکانی چپ به راست توضیح می‌دهد. ابن‌ازرا در این کار، صفر را به کار می‌برد و آن را گالگال (به معنی چرخ یا دایره) می‌نامد.

فیبوناچی یکی از اصلی‌ترین افرادی بود که این ایده‌های جدید نظام‌های عددی را به اروپا وارد کرد.

وی در «لیبرآبسی» ۹ نماد هندی را به همراه علامت ۰ برای اروپاییان (حدود قرن ۱۲ م) تشریح کرد اما تا مدت‌ها بعد از او، استفاده چندانی از آن نشد. فیبوناچی آنقدر جسور نبود که با صفر همان‌طور رفتار کند که با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ رفتار می‌کرد زیرا وی از صفر به عنوان علامت و از سایر اعداد به عنوان نماد یاد می‌کرد. گرچه آوردن اعداد هندی به اروپا کار مهمی بود، ولی در رفتار وی با صفر نه به مهارت هندیانی چون براهماگوپتا، ماهویرا و باسکارا رسید نه به مسلمانانی چون السماوال.

ممکن است گمان شود پیشرفت دستگاه‌های اعداد عموماً و صفر خصوصاً مستمراً از این زمان به بعد بوده است. در حالی که **کاردان** معادلات درجه ۳ و درجه ۴ را بدون استفاده از صفر حل کرد. او این کار را در ۱۵۰۰ م خیلی آسان‌تر از حالتی که صفر را در اختیار داشته باشد، انجام داد. در ۱۶۰۰ م، و بعد از مقاومت‌های زیاد، صفر کاربرد گسترده خود را آغاز کرد.



شکل (۱). استاندارد نمایش عدد IEEE ۷۵

می‌دهند (استوار، ۱۹۹۱). در آنالیز عددی، نه فقط عنصر صفر بلکه مجموعه‌ای از اعداد، صفر محسوب می‌شود. به عبارت دیگر، صفر منحصر به فرد نیست و همه اعداد بین ϵ و $-\epsilon$ صفر محسوب می‌شوند. این تعریف جدید از صفر، قوانین خاص خود را دارد که به شکل زیر است: $\frac{1}{+0} = +\infty$ و $\frac{1}{-0} = -\infty$ و در این شرایط فقط، $\frac{\pm 0}{\pm 0}$ تعریف نشده است و با NAN (Not A Number) (عدد نیست) نشان داده می‌شود.

پی‌نوشت

۱. عدد جبری عددی است که ریشه یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد.
۲. عدد زوج عددی است که مضربی صحیح از یک عدد صحیح باشد از آنجا که $2 \times 0 = 0$ بنابراین 0 عددی زوج است.
۳. گوییم عنصر a وارون ضربی دارد اگر $a \times \frac{1}{a} = 1$ در این صورت $\frac{1}{a} = a^{-1}$ وارون ضربی a نام دارد.

4. Floating point

منابع

1. Bourbaki, Nicolas (1998). Elements of the History of Mathematics. Berlin, Heidelberg, and New York: Springer-Verlag. ISBN 3540647678.
2. R Kapan, The nothing that is: a natural history of zero (London, 1999).
3. J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Second Ed. Springer 1991.
۴. اصول آنالیز ریاضی، والتر رودین، ترجمه علی اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی ۱۳۷۷

یک تناقض است پس (۹) برقرار است.

(۱۰) تعریف صفر تابع f : نقطه‌ای مانند x را صفر تابع f گویند اگر $f(x) = 0$. مثلاً $x = 2$ صفر تابع $f(x) = x^2 - 3x + 2$ است زیرا $f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$

صفر علامت‌دار چیست؟

در استانداردهای مختلف نمایش شناور^۴ اعداد می‌دانیم که بسته به نوع استاندارد، بعضی از اعداد با وجود این که برابر صفر نیستند ولی در هنگام نمایش با کامپیوتر صفر محسوب می‌شوند به عبارت دیگر، اگر کوچک‌ترین عدد مثبت قابل نمایش در آن نظام خاص ϵ باشد و عددی مانند x طوری باشد که $0 < x < \epsilon$ ، کامپیوتر و نظام نمایش اعداد آن را 0 محسوب می‌کند و چون مثبت است، آن را $+0$ نمایش می‌دهد.

در شکل (۱)، نمونه‌ای از یک استاندارد نمایش عدد به نام IEEE ۷۵۴ را می‌بینید که جایگاه آبی (مکان ۳۱) علامت عدد و جایگاه سبز (مکان‌های ۲۳ تا ۳۰) توان عدد و جایگاه قرمز (مکان‌های ۰ تا ۲۲) نمایش اعشاری عدد را نمایش می‌دهد و به عبارت دیگر چون قسمت‌های سبز و آبی تماماً صفر هستند از نظر این استاندارد عدد مورد نظر صفر است. بنابراین اعدادی مانند $0/000000000000000000000000$ از نظر این استاندارد برابر صفر هستند که آن را با $+0$ نمایش